ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 24, № 126 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149
УДК 517

Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения

Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ[1,2] **,**
Чан Тхи НГОК[1]
[1] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3365-2174, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value

Sergey E. ZHUKOVSKIY[1,2] **, Tran T. NGOK**[1]
[1] RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3365-2174, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

Аннотация. Классические теоремы об обратной функции гарантируют существование обратной функции в окрестности значения заданной точки, если в этой точке выполняется условие регулярности, т. е. первая производная в ней невырождена. Более общим условием существования неявной функции является условие 2-регулярности. Оно выполняется, например, для многих квадратичных отображений в нуле. Известно, что при естественных предположениях гладкости из 2-регулярности отображения в точке по некоторому направлению вытекает существование непрерывной обратной функции. В этой работе показано, что в известных утверждениях о существовании обратной функции при выполнении условия 2-регулярности предположения гладкости можно ослабить. При этом обратная функция может не быть непрерывной.

Ключевые слова: обратная функция; 2 -регулярность

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_а). Результаты §3 получены первым автором при поддержке гранта РНФ (проект № 17-11-01168).

Для цитирования: *Жуковский С.Е., Нгок Ч.Т.* Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 141–149. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149.

Abstract. The classical inverse function theorems guarantee the existence of an inverse function in a neighborhood of the value of a given point if the regularity condition is satisfied at this point, that is, the first derivative at a given point is nondegenerate. A more general condition for the existence of an implicit function is the 2-regularity condition. It holds, for example, for many quadratic mappings at zero. It is known that under natural smoothness assumptions, the existence of a continuous inverse function follows from a 2-regularity of a map at a point in a certain direction. In this paper, it is shown that, in the known statements guaranteeing the existence of an inverse function when the 2-regularity condition is satisfied, we can weaken the smoothness assumptions. However, the inverse function may not be continuous.

Keywords: inverse function; 2-regularity

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a). The results of Section 3 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01168).

For citation: Zhukovskiy S.E., Ngok T.T. Sushchestvovanie obratnoj funkcii v okrestnosti neregulyarnogo znacheniya [Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 141–149. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение и постановка задачи

Пусть задано отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, точки $x_0\in\mathbb{R}^n$, $y_0:=f(x_0)$. Рассмотрим уравнение

$$f(x)=y, \tag{1}$$

в котором $x\in\mathbb{R}^n$ — неизвестная, а $y\in\mathbb{R}^k$ — параметр. Нас будут интересовать условия существовании решения $x(y)$ уравнения (1), определенного при каждом y из некоторой окрестности точки y_0. Классическими утверждениями, гарантирующими существование искомого решения $x(y)$ уравнения (1), являются теоремы об обратной функции. Напомним некоторые известные формулировки этих теорем.

Начнем с используемых обозначений и определений. Всюду далее норму в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^k$ будем обозначать через $|\cdot|$; через $O_{\mathbb{R}^k}(v,r)$ будем обозначать открытый шар в $\mathbb{R}^k$ с центром в точке $v\in\mathbb{R}^k$ радиуса $r>0$, т. е.

$$O_{\mathbb{R}^k}(v,r)=\{y\in\mathbb{R}^k:\ |y-v|\le r\},\quad v\in\mathbb{R}^k,\quad r>0.$$

Для произвольного линейного оператора $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ обозначим через $\ker A$ его ядро, а через $\operatorname{im} A$ — его образ.

Отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ называется строго дифференцируемым в точке x_0, если существует линейный оператор $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ такой, что

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0:\quad |f(x_1)-f(x_2)-A(x_1-x_2)|\le\varepsilon|x_1-x_2|\quad\forall\,x_1,x_2\in O_{\mathbb{R}^n}(x_0,\delta).$$

Очевидно, что если f строго дифференцируемо в x_0, то оно дифференцируемо в этой точке и $f'(x_0) = A$.

Теорема 1. *Пусть отображение f строго дифференцируемо в точке x_0. Если выполняется условие регулярности*

$$\mathrm{im} f'(x_0) = \mathbb{R}^k, \tag{2}$$

то существуют числа $r > 0$, $c > 0$ и непрерывное отображение $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \to \mathbb{R}^n$ такие, что

(i) $f(g(y)) = y \quad \forall\, y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r)$;

(ii) $g(x_0) = y_0$;

(iii) $|g(y) - x_0| \le c|y - y_0| \quad \forall\, y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r)$.

Эта теорема об обратной функции является следствием теоремы о неявной функции из [1]. Отметим, что в утверждениях, аналогичных теореме 1, как правило, вместо предположения строгой дифференцируемости в нуле используется более сильное предположение непрерывной дифференцируемости в окрестности нуля (см., например, [2, теорема 1A.1] и [3, теорема 2.13]), которое дополнительно гарантирует гладкость отображения g.

Предположения гладкости отображения f в теореме 1 можно ослабить следующим образом.

Теорема 2. *Пусть отображение f дифференцируемо в точке x_0 и непрерывно в некоторой её окрестности. Если выполняется условие регулярности* (2)*, то существуют числа $r > 0$, $c > 0$ и отображение $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \to \mathbb{R}^n$ такие, что выполняются соотношения* (i) – (iii).

Этот результат был получен в [4, Theorem E]. Аналогичный результат, гарантирующий существование неявной функции, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, был получен в [5, приложение II]. Теорема 2 гарантирует существование обратной функции g при ослабленных предположениях гладкости отображения f, но не гарантирует ее непрерывности. В [5, приложение II] приведен пример отображения f, для которого выполняются предположения теоремы 2 и не существует непрерывного отображения g, удовлетворяющего (i) – (iii).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и непрерывности обратной функции в случае, когда условие регулярности (2) может нарушаться.

Предположим, что отображение f дважды дифференцируемо в точке x_0. Пусть существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$h \in \ker f'(x_0), \quad f''(x_0)[h, h] \in \mathrm{im} f'(x_0).$$

Отображение f называется 2-регулярным в нуле по направлению h, если

$$\mathrm{im} f'(x_0) + f''(x_0)[h, \ker f'(x_0)] = \mathbb{R}^k. \tag{3}$$

Отметим, что если для отображения f выполняется условие регулярности (2), то f является 2-регулярным в точке x_0 по направлению $h = 0$. В то же время, существуют отображения, являющиеся 2-регулярными по некоторым направлениям и не удовлетворяющие условию регулярности (2). Соответствующий элементарный пример дает отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Оно является 2-регулярным по направлению $h = (1, 1)$ в нуле и не удовлетворяет условию регулярности (2), поскольку $\mathrm{im} f'(0) = \{0\}$.

Теорема 3. *Пусть отображение* f *дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* x_0*, и отображение* $f''(\cdot)$ *липшицево в некоторой окрестности точки* x_0*. Пусть* $P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *— проектор на подпространство, дополняющее* $\mathrm{im} f'(x_0)$ *до* $\mathbb{R}^k$.

Если отображение f *является* 2*-регулярным в точке* x_0 *по некоторому направлению* $h \in \mathbb{R}^n$, *то существуют числа* $r > 0$, $c > 0$ *и непрерывное отображение* $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \to \mathbb{R}^n$ *такие, что выполняются соотношения* (i), (ii) *и*

$$\text{(iv)}\quad |g(y) - x_0| \le c(|y - y_0| + \sqrt{|P(y - y_0)|}) \quad \forall\, y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r).$$

Вопрос о существовании обратной функции к отображениям, 2-регулярным по некоторым направлениям, впервые изучался в работе [6]. В ней была получена теорема о существовании обратной функции для отображений банаховых пространств. При этом [6, теорема 1] не содержит утверждения о непрерывности обратной функции. Приведенная здесь теорема 3, гарантирующая непрерывность обратной функции, является следствием из [7, теорема 4]. Подробный обзор результатов о существовании обратных и неявных функций в случае, когда нарушаются классические предположения регулярности, приведен в [8].

В связи с теоремами 1 и 2 возникает следующий естественный вопрос. Как ослабить предположения гладкости в теореме 3 так, чтобы утверждение о существовании и свойствах обратного отображения g осталось верным за исключением, быть может, утверждения о непрерывности отображения g? Ответ на этот вопрос дает утверждение, приведенное в следующем параграфе.

2. Основной результат

Пусть задано отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

Теорема 4. *Пусть отображение* f *дважды дифференцируемо в точке* x_0 *и непрерывно в некоторой её окрестности. Пусть* $P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *— проектор на подпространство, дополняющее* $\mathrm{im} f'(x_0)$ *до* $\mathbb{R}^k$.

Если отображение f *является* 2*-регулярным в точке* x_0 *по некоторому направлению* $h \in \mathbb{R}^n$, *то существуют числа* $r > 0$, $c > 0$ *и отображение* $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \to \mathbb{R}^n$ *такие, что выполняются соотношения* (i), (ii) *и* (iv).

Доказательству теоремы предпошлем следующее вспомогательное утверждение. Пусть заданы линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и симметричное билинейное отображение $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Рассмотрим уравнение

$$Ax + Q[x, x] = y \tag{4}$$

с неизвестным x и параметром y. Непосредственно из [7, теорема 4] вытекает следующее утверждение о разрешимости уравнения (4).

Пусть $P : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ — проектор на подпространство, дополняющее $\mathrm{im}A$ до $\mathbb{R}^k$.

Лемма 1. *Если существует вектор* $h \in \mathbb{R}^n$ *такой, что*

$$Ah = 0, \quad Q[h, h] \in \mathrm{im}A, \quad \mathrm{im}A + Q[h, \mathrm{ker}A] = \mathbb{R}^k,$$

то существуют числа $d > 0$, $c > 0$ *и непрерывное отображение* $p : O_{\mathbb{R}^k}(0, d) \to \mathbb{R}^n$ *такие, что*

$$Ap(y) + Q[p(y), p(y)] = y, \quad |p(y)| \le c(|y| + \sqrt{|Py|}\,) \quad \forall\, y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, d). \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Не ограничивая общности будем предполагать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$.

Положим

$$A := f'(0), \quad Q := f''(0)/2, \quad \omega(x) = f(x) - Ax - Q[x, x] \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку отображение f дважды дифференцируемо в нуле и непрерывно в окрестности нуля, то существует $\delta > 0$ такое, что отображение $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ непрерывно на $O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$ и

$$\frac{\omega(x)}{|x|^2} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{6}$$

Поскольку отображение f является 2-регулярным в нуле по направлению h, то для операторов A и Q выполнены предположения леммы 1. Следовательно, существуют числа $d > 0$, $c > 0$ и непрерывное отображение $p : O_{\mathbb{R}^k}(0, d) \to \mathbb{R}^n$ такие, что выполняются соотношения (5). В силу (6) существует $\widehat{\varepsilon} > 0$ такое, что

$$\forall\, \varepsilon \in (0, \widehat{\varepsilon}) \quad c|\omega(x)| + c\sqrt{|P\omega(x)|} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon). \tag{7}$$

Возьмем произвольное $r > 0$ такое, что

$$2r + \sqrt{\|P\||r|} < d, \quad 2c(r + \sqrt{\|P\||r|}\,) < \min\{\delta, \widehat{\varepsilon}\}.$$

Возьмем произвольный $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$. Положим

$$\varepsilon(y) := 2c(|y| + \sqrt{|Py|}\,).$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x = p(y - \omega(x)) \tag{8}$$

с неизвестным $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$. Покажем, что к этому уравнению применима теорема Брауэра о неподвижной точке.

Сначала покажем, что при любом $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ точка $y - \omega(x)$ лежит в области определения $O_{\mathbb{R}^k}(0, d)$ отображения p. Действительно, при любом $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ имеем

$$|y - \omega(x)| \leq |y| + |\omega(x)| \leq r + \frac{c|\omega(x)| + c\sqrt{|P\omega(x)|}}{c} \leq r + \frac{\varepsilon(y)}{2c} \leq 2r + \sqrt{\|P\||r|} < d.$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства треугольника для $|\cdot|$, второе неравенство — из включения $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ и неравенства $\sqrt{|P\omega(x)|} \geq 0$, третье — из (7) и неравенства $\varepsilon(y) < \widehat{\varepsilon}$, четвертое — из определения числа $\varepsilon(y)$ и неравенства $|y| < r$, а пятое — из определения числа r.

Покажем теперь, что отображение $x \mapsto p(y - \omega(x))$, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$, непрерывно. В силу непрерывности отображения p на $O_{\mathbb{R}^k}(0, d)$ и отображения ω на $O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$ достаточно показать, что $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y)) \subset O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$. Действительно, для любого $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ имеем

$$|x| \leq \varepsilon(y) \leq 2c(|y| + \sqrt{|Py|}) < 2c(r + \sqrt{\|P\|r}\,) < \delta.$$

Здесь второе неравенство следует из определения числа $\varepsilon(y)$, третье — из неравенства $|y| < r$, а четвертое — из определения числа r.

Далее покажем, что $p(y - \omega(x)) \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ для любого $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$. Действительно, для любого $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ имеем

$$|p(y - \omega(x))| \leq c|y - \omega(x)| + c\sqrt{|P(y - \omega(x))|} \leq$$

$$\leq c|y| + c\sqrt{|Py|} + c|\omega(x)| + c\sqrt{\|P\||\omega(x)|} \leq c|y| + c\sqrt{|Py|} + \frac{\varepsilon(y)}{2} = \varepsilon(y).$$

Здесь первое неравенство следует из (5), второе — из неравенства треугольника, третье — из (7) и неравенства $\varepsilon(y) < \widehat{\varepsilon}$, а равенства — из определения числа $\varepsilon(y)$.

Итак, доказано, что отображение $x \mapsto p(y - \omega(x))$, $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$, определено корректно, является непрерывным и принимает значения в $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$. Следовательно, по теореме Брауэра о неподвижной точке существует решение $g(y) \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ уравнения (8), т. е.

$$g(y) = p(y - \omega(g(y))).$$

Покажем, что построенное отображение $g : O_{\mathbb{R}^k}(0, r) \to \mathbb{R}^n$ является искомым. Для каждого $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ имеем

$$f(g(y)) = Ag(y) + Q[g(y), g(y)] + \omega(g(y)) =$$
$$= Ap(y-\omega(g(y))) + Q[p(y-\omega(g(y))), p(y-\omega(g(y)))] + \omega(g(y)) = y - \omega(g(y)) + \omega(g(y)) = y.$$

Здесь первое равенство следует из определения отображений A, Q и ω, второе из равенства $g(y) = p(y - \omega(g(y)))$, а третье — из тождества в (5). Кроме того,

$$|g(y)| \leq \varepsilon(y) \leq 2c(|y| + \sqrt{|Py|}\,).$$

□

3. Обсуждение основного результата

Прокомментируем теорему 4 и связанные с ней понятия.

З а м е ч а н и е 1. Если отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является 2-регулярным в точке x_0 по направлению h, то $h = 0$, и, значит, выполняется условие регулярности (2). Действительно, если $h \neq 0$, то

$$\dim(\mathrm{im} f'(x_0)) + \dim(f''(x_0)[h, \mathrm{ker} f'(x_0)]) = k = n$$

в силу (3), но $\dim(\mathrm{im} f'(x_0) \cap f''(x_0)[h, \mathrm{ker} f'(x_0)]) \geq 1$, что приводит к противоречию. Значит, $h = 0$. Поэтому из (3) вытекает (2).

При $k < n$ для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ может существовать точка x_0 такая, что $\mathrm{im} f'(x_0) \neq \mathbb{R}^k$, и существует направление h, по которому f является 2-регулярным в точке x_0. Соответствующий пример дает квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv x_1 x_2$, являющаяся 2-регулярным в нуле отображением по направлению $h = (1, 0, ..., 0)$.

З а м е ч а н и е 2. Лемма 1 гарантирует, что линейно-квадратичное отображение $x \mapsto Ax + Q[x, x]$, $x \in \mathbb{R}^n$, имеет обратную функцию $p(\cdot)$, определенную в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^k$. Таким образом, теорема 4 гарантирует, что если линейно-квадратичное отображение 2-регулярно в нуле по некоторому направлению h, то свойство существования обратной функции устойчиво при любом непрерывном возмущении ω, удовлетворяющем условию (6).

З а м е ч а н и е 3. Если для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ выполнены предположения теоремы 2 и f является дважды дифференцируемым в точке x_0, то для f выполнены предположения теоремы 4. В частности, f является 2-регулярным в точке x_0 по направлению $h = 0$. При этом оценка (iv) совпадает с оценкой (iii), поскольку из предположения (2) следует, что $P = 0$.

В заключение приведем одно следствие теоремы 4. Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — билинейное симметричное отображение. Получим условия, при которых из разрешимости уравнения

$$Q[x, x] = y$$

при любом $y \in \mathbb{R}^k$ следует разрешимость возмущенного уравнения

$$Q[x,x] + \omega(x) = y \tag{9}$$

для любого непрерывного возмущения $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющего условию (6), для любого y из некоторой окрестности нуля, зависящей от ω.

Следствие 1. *Если существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$Q[h,h] = 0, \quad Q[h,\mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^k,$$

то для любого непрерывного отображения $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющего соотношению (6), существует $r > 0$ такое, что уравнение (9) имеет решение при любом $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0,r)$.

Доказательство. Положим $f(x) := Q[x,x] + \omega(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, что для отображения f выполнены предположения теоремы 4. Следовательно, существуют числа $r > 0$, $c > 0$ и непрерывное отображение $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \to \mathbb{R}^n$ такие, что выполняются соотношения (i), (ii) и (iv) с $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Значит, уравнение (9) разрешимо при любом $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0,r)$. $\square$

Список литературы

[1] В. М. Тихомиров, "Теорема Люстерника о касательном пространстве и некоторые ее модификации", *Оптимальное управление: Математические вопросы управления производством*, **7** (1977), 22–30.

[2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer, New York, 2009.

[3] М. Спивак, *Математический анализ на многообразиях*, Мир, М., 1968.

[4] H. Halkin, "Implicit functions and optimization problems without continuous differentiability of the data", *SIAM J. Control*, **12**:2 (1974), 229–236.

[5] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006.

[6] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, "Теорема об обратной функции и условия экстремума для анормальных задач с незамкнутым образом", *Матем. сб.*, **196**:9 (2005), 3–22.

[7] А. В. Арутюнов, "Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215.

[8] А. В. Арутюнов, "Гладкие анормальные задачи теории экстремума и анализа", *УМН*, **67**:3(405) (2012), 3–62.

References

[1] V. M. Tikhomirov, "Lyusternik's Theorem on tangent space and its modifications", *Optimal Control: Mathematical Issues of Production Control, MSU Publ., Moscow*, **7** (1977), 22–30 (In Russian).

[2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer, New York, 2009.

[3] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, New York, 1965.

[4] H. Halkin, "Implicit functions and optimization problems without continuous differentiability of the data", *SIAM J. Control*, **12**:2 (1974), 229–236.

[5] A. V. Arutyunov, G. G. Magaril-Ilyaev, V. M. Tikhomirov, *Pontryagin's Maximum Principle. Proof and Applications*, Factorial Press, Moscow, 2006. (In Russian).

[6] E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, "Inverse function theorem and conditions of extremum for abnormal problems with non-closed range", *Sbornik: Mathematics*, **196**:9 (2005), 1251–1269.

[7] A. V. Arutyunov, "Implicit function theorem without a priori assumptions about normality", *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.

[8] A. V. Arutyunov, "Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis", *Russian Mathematical Surveys*, **67**:3 (2012), 403–457.

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Нгок Чан Тхи, студент, факультет физико-математических и естественных наук. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: ngoc2tt@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3365-2174

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.
Поступила после рецензирования 15.04.2019 г.
Принята к публикации 20.05.2019 г.

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Tran T. Ngok, Student, Faculty of Physics, Mathematics and Natural Science. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: ngoc2tt@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3365-2174

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 20 February 2019
Reviewed 15 April 2019
Accepted for press 20 May 2019