

© Жуковская Т.В., Филиппова О.В., Шиндяпин А.И., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280

УДК 517.911, 517.929, 517.988.6

О распространении теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения нейтрального типа

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ¹, Ольга Викторовна ФИЛИППОВА²,
Андрей Игоревич ШИНДЯПИН³

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

³ Университет имени Эдуардо Мондлане

3453, Мозамбик, г. Мапуту, ул. Джулиуса Нейере

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8750-1534>, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

On the extension of Chaplygin's theorem to the differential equations of neutral type

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA¹, Olga V. FILIPPOVA², Andrey I. SHINDIAPIN³

¹ Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

³ Eduardo Mondlane University

Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8750-1534>, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Аннотация. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение $\dot{x}((g(t)) = f(t, x(h(t)))$, $t \in [0, 1]$, где функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, но возможно не обеспечивает действие соответствующего оператора суперпозиции из пространства существенно ограниченных функций в пространство суммируемых функций. Вследствие этого, к интегральному уравнению, которое равносильно задаче Коши, не удастся применить стандартные результаты анализа, в частности, теоремы о неподвижной точке. Используемый в работе подход к исследованию разрешимости такого уравнения основан не на теоремах о неподвижной точке, а на полученных в [A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications, 2015, v. 179, № 1, 13–33] результатах о точках совпадения отображений частично упорядоченных пространств. Использование этих результатов позволило в данной работе получить

утверждение о существовании и оценке решения задачи Коши для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения, аналогичное известной теореме Чаплыгина. Основными предположениями в доказанном утверждении являются неубывание функции $f(t, \cdot)$ и существование двух абсолютно непрерывных функций v, w , удовлетворяющих при п.в. $t \in [0, 1]$ неравенствам $\dot{v}(g(t)) \geq f(t, v(h(t)))$, $\dot{w}(g(t)) \leq f(t, w(h(t)))$. Приведен пример применения полученного утверждения.

Ключевые слова: точка совпадения отображений; частично упорядоченное пространство; функционально-дифференциальное уравнение; задача Коши; существование решения; теорема о дифференциальном неравенстве

Благодарности: Работа выполнена при поддержке SIDA-UEM (проект «Развитие математики, статистики и их приложений»), РФФИ (проекты № 19-01-00080а, 17-41-680975р_а, 18-31-00227мол_а).

Для цитирования: Жуковская Т.В., Филиппова О.В., Шиндяпин А.И. О распространении теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения нейтрального типа // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 272–280. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280.

Abstract. We consider functional-differential equation $\dot{x}(g(t)) = f(t, x(h(t)))$, $t \in [0, 1]$, where function f satisfies the Caratheodory conditions, but not necessarily guarantee the boundedness of the respective superposition operator from the space of the essentially bounded functions into the space of integrable functions. As a result, we cannot apply the standard analysis methods (in particular the fixed point theorems) to the integral equivalent of the respective Cauchy problem. Instead, to study the solvability of such integral equation we use the approach based not on the fixed point theorems but on the results received in [A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications, 2015, v. 179, № 1, 13–33] on the coincidence points of mappings in partially ordered spaces. As a result, we receive the conditions on the existence and estimates of the solutions of the Cauchy problem for the corresponding functional-differential equation similar to the well-known Chaplygin theorem. The main assumptions in the proof of this result are the non-decreasing function $f(t, \cdot)$ and the existence of two absolutely continuous functions v, w , that for almost each $t \in [0, 1]$ satisfy the inequalities $\dot{v}(g(t)) \geq f(t, v(h(t)))$, $\dot{w}(g(t)) \leq f(t, w(h(t)))$. The main result is illustrated by an example.

Keywords: coincidence point of mappings; partially ordered space; functional-differential equation; Cauchy problem; existence of solution; differential inequality theorem

Acknowledgements: The work is partially supported by SIDA-UEM under the subprogramme Capacity building in Mathematics, Statistics and Its Applications, the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-01-00080а, 17-41-680975р_а, 18-31-00227мол_а).

For citation: Zhukovskaia T.V., Filippova O.V., Shindyapin A.I. O rasprostraneni teoremy Chaplygina na differentsial'nye uravneniya nejtral'nogo tipa [On the extension of Chaplygin's theorem to the differential equations of neutral type]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 272–280. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Для исследования функционально-дифференциальных уравнений в случае, если соответствующие отображения не действуют в пространствах суммируемых функций, стандартные методы анализа часто бывают неэффективными, либо для их применения требуются дополнительные построения, в частности, определение специальных подпространств пространства абсолютно непрерывных функций, в которых соответствующие операторы становятся регулярными. Такие уравнения называют сингулярными. Сингулярности могут быть вызваны, например, несуммируемыми коэффициентами. Сингулярными часто являются уравнения нейтрального типа, то есть уравнения, содержащие композицию $\dot{x}(g(\cdot))$ производной искомой функции x и заданной функции g . Эта композиция не обязательно будет суммируемой для произвольной суммируемой функции $\dot{x}$ без достаточно обременительных требований на функцию g (см. [1, с. 707], [2, §1.3]). Для линейных функционально-дифференциальных уравнений с несуммируемыми коэффициентами такое пространство было предложено в [3]. Нелинейные неявные (не разрешенные относительно производной) сингулярные дифференциальные уравнения с несуммируемыми особенностями рассматривались в [4, 5], исследование основывалось на утверждениях о липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств (см., например, [6]). Отметим, что начало применению таких утверждений в теории дифференциальных уравнений положила работа [7].

В данной работе рассматривается уравнение нейтрального типа, в котором композиция $\dot{x}(g(\cdot))$ может быть несуммируемой, а уравнение может иметь и другие сингулярности. Предлагается подход, отличный от использованного в цитируемых работах, основанный на результатах [8, 9] о точках совпадения накрывающего и изотонного отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. Идея исследования дифференциальных и интегральных уравнений на основании результатов об упорядоченно накрывающих отображениях была предложена Е. С. Жуковским в [10, 11].

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе приведены необходимые для исследования сведения об упорядоченно накрывающих отображениях и теоремы о точке совпадения, полученные в [8]. Во втором разделе доказывается теорема о существовании и оценке решения задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, аналогичная известной теореме Чаплыгина.

1. Точки совпадения отображений в упорядоченных пространствах

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $X = (X, \preceq_X)$, $Y = (Y, \preceq_Y)$ и определены отображения $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$. Сформулируем полученные в [8] условия существования точки совпадения отображений ψ, φ — решения уравнения $\psi(x) = \varphi(x)$. Обозначим $O_X(u) := \{x \in X : x \preceq_X u\}$, $[v, u]_X := \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}$, где u, v — заданные элементы пространства X такие, что $v \preceq u$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ называется *изотонным на множестве* $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ таких, что $x \preceq_X u$, выполнено $\varphi(x) \preceq_Y \varphi(u)$.

О п р е д е л е н и е 2. [8] Отображение $\psi : X \rightarrow Y$ называется (*упорядоченно*) *накрывающим* множество $W \subset Y$, если

$$\forall u \in X \quad \forall y \in W \quad y \preceq_Y \psi(u) \Rightarrow \exists x \in X \quad \psi(x) = y \text{ и } x \preceq_X u.$$

Определим совокупность $\mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} S \subset U, \quad \psi(S) \subset W, \quad \forall x \in S \quad \varphi(x) \preceq_Y \psi(x), \\ \forall x, u \in S \quad x \prec_X u \Rightarrow \psi(x) \preceq_Y \varphi(u). \end{aligned}$$

Теорема 1. [8] Пусть существует такой элемент $x_0 \in X$, что $\varphi(x_0) \preceq_Y \psi(x_0)$ и выполнены условия:

- (1.a) отображение φ является изотонным на множестве $U := O_X(x_0)$;
- (1.b) отображение ψ упорядоченно накрывает множество $W := \varphi(O_X(x_0))$;
- (1.c) произвольная цепь $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ имеет нижнюю границу $u \in X$, для которой справедливо неравенство $\varphi(u) \preceq_Y \psi(u)$.

Тогда в множестве U существует точка совпадения отображений ψ и φ , и в множестве $\{x \in U : \psi(x) = \varphi(x)\}$ существует минимальный элемент.

Теорема 2. [8] Пусть существуют такие элементы $x_0, z_0 \in X$, что $z_0 \preceq_X x_0$, $\psi(z_0) \preceq_Y \varphi(z_0)$, $\varphi(x_0) \preceq_Y \psi(x_0)$ и выполнены условия:

- (2.a) отображение φ является изотонным на отрезке $U := [z_0, x_0]$;
- (2.b) сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок $W := [\varphi(z_0), \varphi(x_0)]$;
- (2.c) любая цепь $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ имеет нижнюю границу $u \in U$, для которой справедливо неравенство $\varphi(u) \preceq_Y \psi(u)$.

Тогда на отрезке U существует точка совпадения отображений ψ и φ , и в множестве точек совпадения $\{x \in U : \psi(x) = \varphi(x)\}$ существует минимальный элемент.

2. Функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

Обозначим через μ меру Лебега на $[0, 1]$, символами M и L обозначим пространства измеримых и, соответственно, суммируемых по Лебегу функций $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Считаем, что на пространствах M, L определен естественный порядок: $y \leq z$, если $y(t) \leq z(t)$, при п.в. $t \in [0, 1]$. Пусть определены измеримые функции $g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и функция $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори, то есть измеримая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}((g(t))) = f(t, x(h(t))), \quad t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Решением уравнения (1) называем абсолютно непрерывную функцию функцию, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0, 1]$. Задачей Коши для уравнения (1) называют задачу нахождения решения, которое удовлетворяет начальному условию

$$x(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Отметим, что для функции f не предполагаются выполненными условия, обеспечивающие действие соответствующего оператора суперпозиции (называемого «оператором Немыцкого») из пространства существенно ограниченных функций в пространство суммируемых функций. В силу условий Каратеодори можно лишь гарантировать, что для любой непрерывной функции x функция $t \mapsto f(t, x(h(t)))$ измерима.

Пусть функция g удовлетворяет следующему условию (называемому в литературе «условием независания графика»)

$$\forall e \subset [0, 1] \quad \mu(e) = 0 \Rightarrow \mu(g^{-1}(e)) = 0 \quad (3)$$

Условие (3) необходимо и достаточно для выполнения включения $y(g(\cdot)) \in M$ при всех $y \in M$ (см. [2, §1.3]).

Теорема 3. Пусть абсолютно непрерывные функции $v, w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют соотношению $v(0) = w(0) = \alpha$ и при п.в. $t \in [0, 1]$ неравенствам

$$\dot{w}(t) \leq \dot{v}(t), \quad \dot{v}(g(t)) \geq f(t, v(h(t))), \quad \dot{w}(g(t)) \leq f(t, w(h(t))).$$

Пусть при п.в. $t \in [0, 1]$ сужение функции $f(t, \cdot)$ на отрезок $D(t) := [w(h(t)), v(h(t))]$ является неубывающей функцией, функция g инъективна п.в на $[0, 1]$ и наряду с условием (3) для нее справедливо еще условие

$$\forall e \subset [0, 1] \quad \mu(e) = 0 \Rightarrow \mu(g(e)) = 0. \quad (4)$$

Тогда существует решение x задачи Коши (1), (2), удовлетворяющее п.в. на $[0, 1]$ неравенству $\dot{w}(t) \leq \dot{x}(t) \leq \dot{v}(t)$.

Доказательство. Запишем задачу (1), (2) относительно $y = \dot{x}$ в виде уравнения

$$y(g(t)) = f\left(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) y(s) ds\right), \quad t \in [0, 1], \quad (5)$$

где символом $\chi_e(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ обозначена характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$. Уравнение (5) — это уравнение вида $\psi y = \varphi y$, в котором отображения $\psi, \varphi : L \rightarrow M$ определены формулами

$$(\psi y)(t) := y(g(t)), \quad (\varphi y)(t) := f\left(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) y(s) ds\right), \quad y \in L$$

Покажем, что эти отображения удовлетворяют условиям теоремы 2.

Вследствие предположений на функции v, w справедливы неравенства

$$\dot{w} \leq \dot{v}, \quad \psi \dot{w} \leq \varphi \dot{w}, \quad \psi \dot{v} \geq \varphi \dot{v}.$$

Обозначим через $U := [\dot{w}, \dot{v}] \subset L$ множество измеримых сечений измеримого многозначного отображения $t \in [0, 1] \mapsto U(t) := [\dot{w}(t), \dot{v}(t)]$. Так как функция $f(t, \cdot) : D(t) \rightarrow \mathbb{R}$ не убывает, отображение φ является изотонным на U , то есть справедливо условие (2.a).

Покажем, что сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок $W := [\varphi\dot{w}, \varphi\dot{v}] \subset M$. Вначале докажем, что область определения $g([0, 1])$ функции g^{-1} есть измеримое множество, а сама функция является измеримой. Обозначим $I_0 := [0, 1]$. Согласно теореме Лузина (см. [12, теорема VI.6.4]) существует замкнутое множество $I_1 \subset I_0$ такое, что $\mu(I_0 \setminus I_1) < 2^{-1}$ и сужение функции g на I_1 непрерывно. Из компактности множества I_1 следует, что множество $g(I_1)$ компактно и поэтому измеримо. Далее, вновь в силу теоремы Лузина существует замкнутое множество $I_2 \subset I_0 \setminus I_1$ такое, что $\mu(I_0 \setminus (I_1 \cup I_2)) < 2^{-2}$ и сужение функции g на I_2 непрерывно, следовательно множество $g(I_2)$ измеримо. Повторяя эту процедуру, при каждом $n = 1, 2, \dots$ определим замкнутое множество $I_n \subset I_0 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} I_j\right)$ такое, что $\mu(I_0 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n I_j\right)) < 2^{-n}$ и сужение функции g на I_n непрерывно, а множество $g(I_n)$ измеримо. Определим множество $\hat{I} := I_0 \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right)$, для которого, очевидно, выполнено $\mu(\hat{I}) = 0$. Из предположения (4) следует, что множество $g([0, 1])$ измеримо и его мера равна

$$\mu(g(I_0)) = \mu(g(\hat{I})) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu(g(I_j)) = \mu(g(I_0)).$$

Для доказательства измеримости функции $g^{-1} : g(I_0) \rightarrow I_0$ выберем произвольное число $A \in I_0$ и заметим, что множество Лебега $\{t : g^{-1}(t) \geq A\} = g([A, 1])$ измеримо. Доказательство этого факта повторяет доказательство измеримости множества $g(I_0)$.

Обозначим через $W := [\varphi\dot{w}, \varphi\dot{v}] \subset M$. Для доказательства условия **(2.b)** определим произвольные функции $u \in U$, $y \in W$ такие, что $y \leq \psi u$, то есть

$$\dot{w}(g(t)) = (\psi\dot{w})(t) \leq (\varphi\dot{w})(t) \leq y(t) \leq u(g(t)) \leq (\varphi\dot{v})(t) \leq (\psi\dot{v})(t) = \dot{v}(g(t)), \quad t \in [0, 1].$$

Определим функцию

$$z(t) = \begin{cases} y(g^{-1}(t)), & \text{при } t \in g([0, 1]), \\ u(t), & \text{при } t \notin g([0, 1]). \end{cases}$$

Поскольку функция g^{-1} измерима и справедливо условие (4), функция z измерима. Имеем $\dot{v} \leq z \leq u$ и $(\psi z)(t) = z(g(t)) = y(t)$. Итак, сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок W .

Проверим условие **(2.c)**. Пусть задана произвольная цепь $S \subset U$ такая, что для каждого элемента $u \in S$ справедливо $u(g(t)) = (\psi u)(t) \leq (\varphi u)(t)$. Эта цепь, очевидно, имеет точную нижнюю границу, положим $\zeta := \inf S$. При в.в. $t \in [0, 1]$ выполнено $\zeta(t) = \inf\{u(t) : u \in S\}$ и существует невозрастающая последовательность элементов $u_j \in S$, для которой $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(t) = \zeta(t)$. Очевидно, справедливо соотношение

$$\zeta(g(t)) \leq u_j(g(t)) = (\psi u_j)(t) \leq (\varphi u_j)(t), \quad j = 1, 2, \dots$$

Согласно теореме Леви (см. [12, теорема VIII.4.2]) при в.в. $t \in [0, 1]$ имеет место сходимость

$$\int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) u_j(s) ds \rightarrow \int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) \zeta(s) ds.$$

Следовательно, так как функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, получаем

$$(\varphi u_j)(t) = f\left(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) u_j(s) ds\right) \rightarrow f\left(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0, h(t)]}(s) \zeta(s) ds\right) = (\varphi \zeta)(t).$$

А поскольку при предельном переходе для числовых последовательностей неравенство сохраняется, получаем $(\psi \zeta)(t) \leq (\varphi \zeta)(t)$.

Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Таким образом, существует решение ξ уравнения (5), принадлежащее множеству U . Тогда задача Коши также разрешима и производная ее решения — это функция $\xi \in U$. $\square$

Проиллюстрируем применение теоремы 3.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t^2) = \frac{x^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \quad t \in [0, 1], \quad (6)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (7)$$

Заметим, что в рассматриваемом уравнении правая часть для некоторых абсолютно непрерывных x может быть несуммируемой функцией, композиция $\dot{x}(t^2)$ тоже возможно является несуммируемой функцией.

Используя теорему 3, покажем, что при достаточно малых $\lambda > 0$ задача (6), (7) разрешима. Положим $w(t) \equiv 0$, $v(t) = k\sqrt{t}$, где коэффициент $k > 0$ будет определен ниже так, чтобы выполнялись условия теоремы 3. Для данных функций w, v имеем

$$0 = \dot{w}(t^2) \leq \frac{w^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \frac{\lambda}{\sqrt{t}};$$

$$\dot{v}(t^2) = \frac{k}{2t}, \quad \frac{v^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \frac{k^2}{t} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}.$$

Легко видеть, что при $\lambda < 1/8$ будет выполнено неравенство

$$\dot{v}(t^2) \geq \frac{v^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \Leftrightarrow \frac{k}{2t} \geq \frac{k^2}{t} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}},$$

если значение k выбрать любым из интервала $(4^{-1}(1 - \sqrt{1 - 8\lambda}), 4^{-1}(1 + \sqrt{1 - 8\lambda}))$. Остается заметить, что функция

$$f(t, x) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$$

является возрастающей по x при $x \in [0, k\sqrt{t}]$.

Список литературы

- [1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.*, ИЛ, М., 1962.
- [2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1957, 1991.
- [3] A. Shindiapin, “On linear singular functional-differential equations in one functional space”, *Abstract and Applied Analysis*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [4] Е. А. Плужникова, А. И. Шиндяпин, “Об одном методе исследования неявных сингулярных дифференциальных включений”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6-1 (2017), 1314–1320 DOI: [10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320).
- [5] A. I. Shindiapin, E. S. Zhukovskiy, “Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **21**:6 (2016), 2107–2112 DOI: [10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112).
- [6] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, “Об антитонных возмущениях накрывающих отображений упорядоченных пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **21**:2 (2016), 371–374 DOI: [10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374).
- [7] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634.
- [8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **7** (2004), 567–575.
- [9] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах”, *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478.
- [10] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127.
- [11] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627.
- [12] Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной*, Наука, М., 1973.

References

- [1] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I: General Theory, Interscience publishers, New York, London, 1958.
- [2] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations*, Nauka, Moscow, 1957, 1991 (In Russian).
- [3] A. Shindiapin, “On linear singular functional-differential equations in one functional space”, *Abstract and Applied Analysis*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [4] E. A. Pluzhnikova, A. I. Shindyapin, “On one method of studying implicit singular differential inclusions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6-1 (2017), 1314–1320 (In Russian DOI: [10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320)).
- [5] A. I. Shindiapin, E. S. Zhukovskiy, “Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:6 (2016), 2107–2112 DOI: [10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112).
- [6] T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, “About antitone perturbations of covering mappings of ordered spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:2 (2016), 371–374 (In Russian DOI: [10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374)).

- [7] E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.
- [8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **7** (2004), 567–575.
- [9] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On coincidence points of mappings in partially ordered spaces”, *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.
- [10] E. S. Zhukovskii, “About orderly covering mappings and Chaplygin’s type integral inequalities”, *Algebra i Analiz*, **30**:1 (2018), 96–127 (In Russian).
- [11] E. S. Zhukovskiy, “On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.
- [12] B. Z. Vulikh, *A Short Course in the Theory of Functions of a Real Variable*, Nauka, Moscow, 1973.

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

Шиндяпин Андрей Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик. E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8750-1534>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковская Татьяна Владимировна
 E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 23 мая 2019 г.
 Поступила после рецензирования 27 июня 2019 г.
 Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1612-9880>

Andrey I. Shindiapin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Computer Science Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8750-1534>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Tatiana V. Zhukovskaia
 E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 23 May 2019
 Reviewed 27 June 2019
 Accepted for press 23 August 2019