ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Николаев В.Г., 2025

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159
УДК 517.952

О структуре ядра задачи Шварца в эллипсе в общем случае

Владимир Геннадьевич НИКОЛАЕВ

ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого»

173003, Российская Федерация, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41

Аннотация. В статье вычислена структура ядра и коядра задачи Шварца для J-аналитических функций, заданных в эллипсе D с границей Γ. Задача Шварца состоит в нахождении J-аналитической в эллипсе D функции по известному значению ее реальной части на Γ. В параграфах 1 и 2 приведена постановка задачи, а также изучено ее решение для специальной правой части. В параграфе 3 изложены необходимые сведения из одной работы А. П. Солдатова. В параграфе 4 построено решение союзной задачи Шварца для специальной правой части. На основании этих результатов в параграфе 5 вычислены ядро и коядро задачи Шварца. Схема их вычисления кратко описана в начале пятого параграфа. Затем в теоремах 5.1–5.6 данная схема реализована. При этом использованы введенные автором понятия теоретической и алгоритмической разрешимости специальной задачи Шварца. Также использован метод математической индукции. Показано, что ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе состоят только из вектор-полиномов. Описана структура ядра и коядра в терминах рангов некоторых вещественных матриц, зависящих от матрицы J и эллипса Γ. В конце статьи приведен пример вычисления ядра задачи Шварца в эллипсе для двумерной матрицы J с кратным собственным числом.

Ключевые слова: вектор-полином, задача Шварца, матрица, эллипс, ядро, коядро, алгоритмическая разрешимость, теоретическая разрешимость

Благодарности: Исследование выполнено в ходе реализации НИР «Математическое моделирование природных процессов», выполняемой в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 124111600020-2).

Для цитирования: *Николаев В.Г.* О структуре ядра задачи Шварца в эллипсе в общем случае // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 144–159. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. G. Nikolaev, 2025

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

On the structure of the kernel of the Schwarz problem in an ellipse in the general case

Vladimir G. NIKOLAEV
Novgorod State University
41 Bolshaya Sankt-Peterburgskaya St., Velikiy Novgorod 173003, Russian Federation

Abstract. The paper calculates the structure of the kernel and co-kernel of the Schwartz problem for J-analytic functions defined in the ellipse D with a boundary Γ. The Schwartz problem consists in finding a J-analytic function in the ellipse D by the known value of its real part on Γ. In paragraphs 1 and 2 the problem is formulated and its solution for a special right part is studied. Paragraph 3 contains the necessary information from one paper by A. P. Soldatov. Paragraph 4 constructs the solution of the Schwarz union problem for the special right-hand side. On the basis of these results, paragraph 5 calculates the kernel and the co-kernel of the Schwartz problem. The model of their calculation is briefly described at the beginning of the fifth paragraph. Then in the theorems 5.1–5.6 this scheme is implemented. Here the notions of theoretical and algorithmic solvability of the special Schwarz problem introduced by the author are used. The method of mathematical induction is used as well. It is shown that the kernel and co-kernel of the Schwarz problem in an ellipse consist only of vector polynomials. The paper describes the structure of the kernel and co-kernel in terms of the ranks of some real matrices depending on the matrix J and the ellipse Γ. The paper concludes with an example of calculating the kernel of the Schwarz problem in an ellipse for a two-dimensional matrix J with multiple eigenvalue.

Keywords: vector polynomial, Schwartz problem, matrix, ellipse, kernel, co-kernel, algorithmic solvability, theoretical solvability

Acknowledgements: The study was carried out in the course of implementation of the research work “Mathematical modeling of natural processes”, carried out within the framework of the state assignment in the field of scientific activity (project no. 124111600020-2).

Mathematics Subject Classification: 35F15.

For citation: Nikolaev V.G. On the structure of the kernel of the Schwarz problem in an ellipse in the general case. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 144–159. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

Введение

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю [1, 2] и в последние годы развивалось в нескольких направлениях как теоретического характера [3, 4], так и с точки зрения их приложений к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений [5, 6].

Задача Римана–Гильберта [1, с. 264], [2, с. 140] о нахождении аналитической в области D функции по заданному на границе Γ этой области значению ее вещественной части относится к основным краевым задачам. Одним из возможных ее обобщений является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассматривается в настоящей работе.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [3]). Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису (Avron Douglis), или J-аналитической с матрицей J называется комплексная ℓ-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, удовлетворяющая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ уравнению

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad z = (x, y) \in D. \tag{1.1}$$

Как нетрудно видеть, равенство (1.1) есть комплексная однородная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В [3] показано, что система (1.1) является эллиптической. Очевидным примером функции, J-аналитической с данной матрицей J, будет следующий вектор-полином степени n :

$$\phi_n(z) = (x+Jy)^n c_n + (x+Jy)^{n-1}c_{n-1} + \ldots + (x+Jy)c_1 + c_0, \quad c_k \in \mathbb{C}^\ell, \quad k = n, \ldots, 1, 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим для системы (1.1) следующую граничную задачу Шварца [4, 7, 8].

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, для которой выполнено краевое условие

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где граничная ℓ-вектор-функция $\psi(\omega) = \big(\psi_1(\omega), \ldots, \psi_\ell(\omega)\big) \in C(\Gamma)$ задана.

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [4]). Задачу Шварца (1.3) будем называть задачей S.

Если $\psi(\omega) \equiv 0$, то будем говорить об однородной задаче Шварца:

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = 0. \tag{1.4}$$

Очевидными решениями задачи (1.4) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, которые назовем тривиальными решениями.

О п р е д е л е н и е 1.3. Ядром $\operatorname{Ker} S$ задачи Шварца S называется линейное пространство решений однородной задачи (1.4).

Но существуют так же и непостоянные решения однородной задачи (1.4). Приведем один пример такого решения, построенный автором.

П р и м е р 1.1. Пусть

$$J=\begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}, \quad \phi_2(z)=\begin{pmatrix} (x^2+9y^2)\,i \\ 7x^2+9y^2-1+18xyi \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Матрица J в (1.5) имеет кратное собственное число $\lambda=3i$. Вектор-полином второй степени $\phi_2(z)$ есть функция, J-аналитическая с данной матрицей J — согласно (1.1). При этом $\operatorname{Re}\phi_2(z)\big|_\Gamma=0$ на эллипсе $\Gamma:\ 7x^2+9y^2=1$.

2. Задача Шварца в специальном виде

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем называть эллипсом как кривую Γ на плоскости, так и область D, ограниченную Γ, — в зависимости от контекста.

Задачу (1.3) будем изучать в эллипсе $\Gamma=\partial D$ с центром в начале координат. Он определяется тремя параметрами $r_1>0$, $r_2>0$, $\alpha\in[0,2\pi)$ и может быть задан следующей параметризацией:

$$\begin{aligned} x(t)&=r_1\cos\alpha\cdot\cos t-r_2\sin\alpha\cdot\sin t= \\ &=\frac{(r_1\cos\alpha+ir_2\sin\alpha)}{2}e^{it}+\frac{(r_1\cos\alpha-ir_2\sin\alpha)}{2}e^{-it}, \\ y(t)&=r_1\sin\alpha\cdot\cos t+r_2\cos\alpha\cdot\sin t= \\ &=\frac{(r_1\sin\alpha-ir_2\cos\alpha)}{2}e^{it}+\frac{(r_1\sin\alpha+ir_2\cos\alpha)}{2}e^{-it}, \quad t\in[-\pi,\pi). \end{aligned} \tag{2.1}$$

В (2.1) использована формула Эйлера $e^{it}=\cos t+i\sin t$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Всюду ниже через $\phi_n=\phi_n(z)$ будем обозначать J-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Также с учетом (2.1) обозначим $\omega(t)=\big(x(t),y(t)\big)$.

Рассмотрим задачу Шварца (1.3) в следующем специальном виде:

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_\Gamma=\sum_{k=1}^{n}\psi_k\big(\omega(t)\big)=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)=\psi(t), \tag{2.2}$$

$$\psi_k(t)=\psi\big(\omega(t)\big)=\big(d_{k1}\cos kt+d'_{k1}\sin kt,\ldots,d_{k\ell}\cos kt+d'_{k\ell}\sin kt\big)^{\mathrm{T}}, \tag{2.3}$$

где $d_{kl},d'_{kl}\in\mathbb{R}$. Решение задачи (2.2) будем искать в виде вектор-полинома (1.2), исходя из следующего соотношения:

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_\Gamma=\operatorname{Re}\Big[(x+Jy)^nc_n+\ldots+(x+Jy)c_1+c_0\big|_{x=x(t),\,y=y(t)}\Big]=\sum_{k=1}^{n}\psi_k(t). \tag{2.4}$$

Функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ в (2.4) есть функции переменных e^{it}, e^{-it} в (2.1).

В равенстве (2.4) неизвестными являются комплексные вектор-константы $c_k\in\mathbb{C}^\ell$, $k=n,\ldots,1,0$. Для их определения с учетом (2.3) имеем следующие *вещественные* алгебраические $2\ell\times2\ell$-системы:

$$\begin{aligned} &\widehat{Q}_n\widehat{c}_n=\alpha_n,\quad \widehat{Q}_{n-1}\widehat{c}_{n-1}=\alpha_{n-1},\quad\ldots,\quad \widehat{Q}_1\widehat{c}_1=\alpha_1,\quad \operatorname{Re}[c_0+c^*]=0,\ c_0,c^*\in\mathbb{C}^\ell, \\ &\alpha_k=(d_{k1},d'_{k1},\ldots,d_{k\ell},d'_{k\ell})\in\mathbb{R}^{2\ell},\quad k=n,n-1,\ldots1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В (2.5) через $\widehat{Q}_k$ обозначены вещественные $2\ell\times2\ell$-матрицы, $k=n,n-1,\ldots1$. Кроме того, $\widehat{c}_k=(\operatorname{Re}c_k,\operatorname{Im}c_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2\ell}$, $\alpha_k\in\mathbb{R}^{2\ell}$. При этом правая часть α_k каждой последующей системы в (2.5) зависит от решений предыдущих систем.

З а м е ч а н и е 2.1. Матрицы $\widehat{Q}_k$ в (2.5) зависят от коэффициентов матрицы J, а также от параметров α, r_1, r_2 эллипса Γ. Для диагонализируемых матриц J соответствующие им матрицы $\widehat{Q}_k$ выписаны в явном виде в [7]. Однако в общем случае структура матриц $\widehat{Q}_k$ очень сложна и не будет использована.

Таким образом, с учетом равносильности задач (2.4) и (2.2) и с учетом свойств решений систем алгебраических уравнений справедливы следующие два утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть в* (2.5) $\det \widehat{Q}_k \neq 0$, $k = n, n-1, \ldots 1$. *Тогда задача* (2.2) *имеет решение в виде вектор-полинома* $\phi_n(z)$ (1.2) *для любой правой части* $\psi(t)$.

Теорема 2.2. *Пусть в* (2.5) $\det \widehat{Q}_m = 0$, *но при этом* $\det \widehat{Q}_k \neq 0$, $k < m$. *Тогда однородная задача* (2.2) $\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = 0$ *имеет* $2\ell - \operatorname{rang} \widehat{Q}_m$ *линейно независимых решений в виде вектор-полиномов* $\phi_m(z)$ (1.2) *степени* m.

З а м е ч а н и е 2.2. Тот случай, когда все определители $\det \widehat{Q}_k$ в (2.5) отличны от нуля, не требует дополнительного изучения. Однако если $\det \widehat{Q}_m = 0$ при некотором $m < n$, то совместность всех систем в (2.5) неочевидна. Именно такие нетривиальные ситуации рассмотрены в параграфе 5 при вычислении ядра задачи Шварца.

3. Некоторые сведения из работы [4]

В данном параграфе приведены выдержки из статьи А. П. Солдатова [4], необходимые для дальнейших построений.

Пусть параметризация $\omega = \omega(t)$ эллипса $\Gamma = \partial D$ такова, что область D остается слева при $t \in [-\pi, \pi)$. Заметим, что параметризация (2.1) обладает этим свойством. Такой эллипс Γ назовем положительно ориентированным и обозначим Γ^+. Пусть

$$e(\omega) = e_1(\omega) + ie_2(\omega), \quad \omega \in \Gamma \tag{3.1}$$

— единичный касательный вектор к эллипсу Γ в точке ω, направленный согласно данной ориентации. В (3.1) через $e_1(\omega)$, $e_2(\omega)$ обозначены вещественные скалярные функции.

Пусть E — единичная $\ell \times \ell$-матрица, J^{T} — транспонированная матрица J. В той же области D вместе с J-аналитическими функциями (1.1) рассмотрим J^{T}-аналитические ℓ-вектор-функции $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial y} - J^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} = 0, \quad z = (x, y) \in D. \tag{3.2}$$

С помощью скалярной функции (3.1) образуем $\ell \times \ell$-матрицу-функцию

$$e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega) = e_1(\omega) \cdot E + e_2(\omega) \cdot J^{\mathrm{T}}, \quad \omega \in \Gamma, \tag{3.3}$$

которая зависит от параметра ω.

С задачей S свяжем *союзную задачу* $\widetilde{S}$. Она состоит в нахождении такой J^{T}-аналитической функции $\widetilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ (3.2), для которой выполнено граничное условие

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(\omega)\big|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma). \tag{3.4}$$

Соответственно, при $\psi(\omega) \equiv 0$ будем говорить об *однородной союзной задаче* $\widetilde{S}$:

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(\omega)\big|_\Gamma = 0. \tag{3.5}$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Коядром $\operatorname{Ker}\widetilde{S}$ задачи Шварца S (или ядром задачи $\widetilde{S}$) называется линейное пространство решений однородной союзной задачи $\widetilde{S}$ (3.5).

Для непрерывных ℓ-вектор-функций $f(\omega)=(f_1,\dots,f_\ell)$, $g(\omega)=(g_1,\dots,g_\ell)$, заданных на контуре Γ, определим билинейную форму $\langle f,g\rangle$ по правилу

$$\langle f,g\rangle=\oint_{\Gamma+} f(\omega)\cdot g(\omega)\cdot|d\omega|=\oint_{\Gamma+}(f_1\cdot g_1+\ldots+f_\ell\cdot g_\ell)\cdot|d\omega|, \tag{3.6}$$

где $|d\omega|$ означает элемент длины дуги кривой Γ. С учетом обозначений (3.6) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [4]). *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Пусть $\Gamma=\partial D$ — эллипс. Справедливы следующие утверждения.*

1) *Задачи $S,\widetilde{S}$ фредгольмово разрешимы в классах функций $\phi(z)\in H^\sigma(\overline{D})$ (т. е. ядро и коядро конечномерны).*

2) *Неоднородная задача S (1.3) для данной функции $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\phi(z)\in H^\sigma(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\bigl\langle\psi(\omega),\operatorname{Im}e_{J^{\mathrm T}}\widetilde{\phi}(\omega)\bigr\rangle=0,\quad\omega\in\Gamma,$$

где $\widetilde{\phi}(z)$ — произвольное решение однородной союзной задачи $\widetilde{S}$ (3.5).

3) *Утверждение пункта 2) справедливо и для союзной задачи $\widetilde{S}$. Более точно, неоднородная союзная задача $\widetilde{S}$ (3.4) для данной функции $\psi(\omega)\in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\widetilde{\phi}(z)\in H^\sigma(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\bigl\langle\psi(\omega),\operatorname{Im}\phi(\omega)\bigr\rangle=0,\quad\omega\in\Gamma, \tag{3.7}$$

где $\phi(z)$ — произвольное решение однородной задачи S (1.4).

4) *Индекс $\operatorname{Ind}S$ задачи Шварца S равен $\operatorname{Ind}S=\dim\operatorname{Ker}S-\dim\operatorname{Ker}\widetilde{S}=\ell$.*

4. Союзная задача Шварца в специальном виде

Выпишем с учетом (2.1), (3.1) и (3.3) следующие функции:

$$\begin{aligned}&e_{J^{\mathrm T}}(t)=e_{J^{\mathrm T}}(\omega(t))=e_1(t)\cdot E+e_2(t)\cdot J^{\mathrm T}=\frac{1}{p(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\cdot E+\frac{dy(t)}{dt}\cdot J^{\mathrm T}\right],\\&p(t)=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{r_1^2\sin^2t+r_2^2\cos^2t}\neq0,\quad|d\omega|=|d\omega(t)|=p(t)dt.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Функцию $p(t)$ в (4.1) будем называть весом (или весовой функцией). Определим с учетом обозначений (4.1) следующую матрицу-функцию, которая более удобна для изучения:

$$e^*_{J^{\mathrm T}}(t)=p(t)\cdot e_{J^{\mathrm T}}(t)=\frac{dx(t)}{dt}\cdot E+\frac{dy(t)}{dt}\cdot J^{\mathrm T}. \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Несложно показать, что $\det e^*_{J^{\mathrm T}}(t)\neq0$ при всех $t\in[-\pi,\pi)$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Обозначим через $\widetilde{\phi}_n(z)$ $J^{\mathrm T}$-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Обозначим также $\widetilde{\phi}_0\equiv c$, $c\in\mathbb{C}^\ell$.

Определим *специальную союзную* задачу Шварца $\widetilde{S}^*$. Именно, в отличие от задачи $\widetilde{S}$ (3.4), вместо матрицы-функции $e_{J^{\mathrm{T}}}(t)$ (4.1) возьмем матрицу-функцию $e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t)$ (4.2):

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_\Gamma = \sum_{k=1}^{n}\psi_k\big(\omega(t)\big) = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t) = \psi(t),\\ &\psi_k(t) = \big(d_{k1}\cos kt + d'_{k1}\sin kt,\ldots, d_{k\ell}\cos kt + d'_{k\ell}\sin kt\big)^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $d_{kl}, d'_{kl}\in\mathbb{R}$. Задачу (4.3) будем решать аналогично задаче (2.2). Именно, ℓ-вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n-1}(z)$ степени $(n-1)$

$$\widetilde{\phi}_{n-1}(z) = \big(x+J^{\mathrm{T}}y\big)^{n-1}c_{n-1}+\ldots+\big(x+J^{\mathrm{T}}y\big)c_1+c_0,\quad c_k\in\mathbb{C}^\ell,\quad k=n-1,\ldots,0, \tag{4.4}$$

будет согласно (3.2) J^{T}-аналитической функцией. Решение задачи (4.3) ищем в виде вектор-полинома (4.4), исходя из равенства

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_\Gamma\\ &\quad= \operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\Big[\big(x+J^{\mathrm{T}}y\big)^{n-1}c_{n-1}+\ldots+\big(x+J^{\mathrm{T}}y\big)c_1+c_0\big|_{x=x(t),\,y=y(t)}\Big] = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t).\end{aligned} \tag{4.5}$$

В (4.5) через $x=x(t)$, $y=y(t)$ обозначены функции переменных e^{it}, e^{-it} из (2.1).

Для определения неизвестных вектор-переменных $c_k\in\mathbb{C}^\ell$ в (4.5) имеем с учетом (4.3) следующие *вещественные* алгебраические $2\ell\times 2\ell$-системы:

$$\begin{aligned}&\widetilde{Q}_n\widehat{c}_{n-1}=\alpha_n,\quad \widetilde{Q}_{n-1}\widehat{c}_{n-2}=\alpha_{n-1},\quad\ldots,\quad \widetilde{Q}_1\widehat{c}_0=\alpha_1,\\ &\alpha_k=(d_{k1},d'_{k1},\ldots,d_{k\ell},d'_{k\ell})\in\mathbb{R}^{2\ell},\quad k=n,n-1,\ldots,1.\end{aligned} \tag{4.6}$$

В (4.6) через $\widetilde{Q}_k$ обозначены вещественные $2\ell\times 2\ell$-матрицы, $k=n,n-1,\ldots 1$. Как и выше, здесь $\widehat{c}_k=(\operatorname{Re}c_k,\operatorname{Im}c_k)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{2\ell}$, $\alpha_k\in\mathbb{R}^{2\ell}$. При этом правая часть α_k каждой последующей системы в (4.6) зависит от решений предыдущих систем. В итоге схема аналогична схеме параграфа 2. Но есть два отличия от задачи (2.4).

Во-первых, индексы у матрицы $\widetilde{Q}_k$, вектора α_k и вектора $\widehat{c}_{k-1}$ разные. Это связано с тем, матрица $\widetilde{Q}_k$ и вектор α_k соответствуют коэффициентам перед $\cos kt$, $\sin kt$ при составлении систем (4.6). При этом индекс вектор-коэффициента $\widehat{c}_{k-1}$ соответствует (4.4).

Второе отличие от задачи (2.4) состоит в *проблеме завершения алгоритма*. Действительно, найдем переменную $\widehat{c}_{n-1}$ из первого равенства в (4.6). После этого предста́вим $\widehat{c}_{n-1}\in\mathbb{R}^{2\ell}$ в виде $c_{n-1}\in\mathbb{C}^\ell$, и подставим c_{n-1} в (4.5). Тогда получим задачу (4.5) с правой частью $\psi_{n-1}(t)+\ldots$, откуда находим переменную $c_{n-2}\in\mathbb{C}^\ell$. Продолжая этот процесс, находим все переменные c_k в (4.5). Но в процессе такого решения в левой части (4.5) может возникать «лишняя» константа $c^*\in\mathbb{C}^\ell$, которую нельзя приравнять к какой-либо переменной c_k. При решении систем (2.5) такой проблемы не возникает.

Таким образом, для сходимости алгоритма нужно показать, что $\operatorname{Re}c^*=\alpha'=0$. «От противного»: пусть $\alpha'\neq 0$ и пусть все алгебраические системы в (4.6) совместны. Тогда согласно описанному выше алгоритму и (4.5) разрешима задача

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_\Gamma = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t)+\alpha' = \psi(t)+\alpha',\quad \alpha'\in\mathbb{R}^\ell. \tag{4.7}$$

Деля обе части (4.7) на вещественную функцию $p(t) \neq 0$, получаем с учетом (4.2) разрешимость задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_{\Gamma} = \frac{\psi(t)+\alpha'}{p(t)}, \quad \alpha' \in \mathbb{R}^{\ell}. \tag{4.8}$$

Пусть $\phi(\omega) = i\alpha''$, $\alpha'' \in \mathbb{R}^{\ell}$ — тривиальное решение однородной задачи Шварца (1.4), причем скалярное произведение $(\alpha', \alpha'') \neq 0$. Тогда в силу (3.7), (3.6) и (4.1) имеем:

$$\Big\langle \frac{\psi(t)+\alpha'}{p(t)}, \operatorname{Im} i\alpha'' \Big\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{p(t)} \big(\psi(t)+\alpha'\big) \cdot \alpha'' \cdot p(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha' \cdot \alpha'' dt = 2\pi(\alpha', \alpha'') \neq 0. \tag{4.9}$$

Но равенство (4.9) в силу пункта 3) теоремы 3.1 противоречит разрешимости задачи (4.8). Полученное противоречие означает, что вектор-константа $\alpha' = \operatorname{Re} c^* = 0$. Таким образом, описанный выше алгоритм решения задачи (4.5) реализуем.

В силу эквивалентности задач (4.5) и (4.3) справедлива

Теорема 4.1. *Пусть в* (4.6) $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k = n-1, \ldots, 1$. *Тогда задача* (4.3) *имеет решение в виде вектор-полинома* $\widetilde{\phi}_{n-1}(z)$ (4.4) *для любой правой части* $\psi(t)$.

О п р е д е л е н и е 4.2. Ядром $\operatorname{Ker} \widetilde{S}^*$ задачи $\widetilde{S}^*$ назовем линейное пространство решений однородной специальной союзной задачи $\widetilde{S}^*$ (4.3).

Лемма 4.1. *Справедливо тождество*

$$\operatorname{Ker} \widetilde{S} \equiv \operatorname{Ker} \widetilde{S}^*. \tag{4.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{\phi}(z)$ есть решение однородной союзной задачи $\widetilde{S}$, т. е. $\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. Функция $p = p(t) \neq 0$ в (4.1) — вещественная. Поэтому в силу (4.2) имеем:

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{p} e_{J^{\mathrm{T}}}\Big) \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = \frac{1}{p} \cdot \Big(\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\Big)\big|_{\Gamma} = 0.$$

Следовательно, та же самая функция $\widetilde{\phi}(z)$ есть решение однородной специальной союзной задачи $\widetilde{S}^*$. В обратную сторону доказательство аналогичное. □

Таким образом, с учетом (4.10) и свойств решений алгебраических систем справедлива

Теорема 4.2. *Пусть в* (4.6) $\det \widetilde{Q}_m = 0$, *но при этом* $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k < m$. *Тогда однородные союзные задачи* $\widetilde{S}^*$ (4.3) *и* $\widetilde{S}$ (3.5) *имеют* $2\ell - \operatorname{rang} \widetilde{Q}_m$ *линейно независимых решений в виде вектор-полиномов* $\widetilde{\phi}_{m-1}(z)$ (4.4) *степени* $(m-1)$.

5. Вычисление ядра задачи Шварца в эллипсе

Всюду в этом параграфе имеем в виду лемму 4.1 и формулу (4.10), т. е. отождествляем однородные задачи $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}^*$. Параграф построен по приведенной ниже схеме:

теоремы 2.1, 2.2, 4.1, 4.2, 3.1 $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\text{леммы 5.1, 5.2} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \text{теорема 5.1}}_{\text{база индукции}}$;

индукционное предположение (5.7), теорема 3.1 $\Longrightarrow$ теоремы 5.2, 5.3;

индукционное предположение (5.7), теоремы 5.2, 5.3 $\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ теорема 5.4 (инд. переход);

утверждение (5.7), теоремы 3.1, 5.2, 5.3 $\Longrightarrow$ теорема 5.5;

утверждение (5.7), теоремы 5.5, 4.2, лемма 5.1 $\Longrightarrow$ теорема 5.6.

Заметим, что в импликации (3) теоремы 5.2, 5.3 играют ту же роль, что и теоремы 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 в импликациях (1) и (2).

Пусть $f(t) = (f_1, \dots, f_\ell)$, $g(t) = (g_1, \dots, g_\ell)$ — непрерывные вещественные ℓ-вектор-функции, $t \in [-\pi, \pi)$. Определим их скалярное произведение (f, g) по правилу

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} (f_1 g_1 + \dots + f_\ell g_\ell) dt. \tag{5.1}$$

Также приведем определения, необходимые для дальнейших построений. Пусть $p = p(t)$ — весовая функция (4.1).

О п р е д е л е н и е 5.1. Пусть вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n-1}(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$. С учетом (3.6), (4.1), (4.2) и (5.1) обозначим $\psi_n \nvdash \widetilde{\phi}_{n-1}$ (т. е. ψ_n «неортогонален» $\widetilde{\phi}_{n-1}$), если билинейная форма

$$\langle \psi_n, \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1} \rangle = \big(\psi_n, \operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1}\big) \neq 0. \tag{5.2}$$

О п р е д е л е н и е 5.2. Пусть вектор-полином $\phi_n(z) \in \operatorname{Ker} S$. Обозначим $\psi_n \nvdash \phi_n$, если билинейная форма

$$\Big\langle \frac{\psi_n}{p}, \operatorname{Im} \phi_n \Big\rangle = \big(\psi_n, \operatorname{Im} \phi_n\big) \neq 0. \tag{5.3}$$

Для дальнейших построений приведем еще два определения.

О п р е д е л е н и е 5.3. Задачу Шварца S (2.2) или $\widetilde{S}^*$ (4.3) назовем разрешимой *алгоритмически*, если ее решение можно построить по алгоритму, описанному в параграфах 2 или 4 соответственно.

О п р е д е л е н и е 5.4. Задачу Шварца S (2.2) или $\widetilde{S}$ (3.4) назовем разрешимой *теоретически*, если правая часть $\psi(\omega(t))$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.

На формальном различии между теоретической и алгоритмической разрешимостью и основано приведенное ниже вычисление ядра задачи Шварца. Справедлива

Лемма 5.1. *Следующие два условия равносильны:*

$$1)\ \det \widehat{Q}_{n_1} = 0,\ \det \widehat{Q}_k \neq 0,\quad k < n_1; \qquad 2)\ \det \widetilde{Q}_{n_1} = 0,\ \det \widetilde{Q}_k \neq 0,\quad k < n_1. \tag{5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. «От противного»: пусть выполнено 1), и пусть $\det \widetilde{Q}_m = 0$, $m < n_1$. При этом m — минимальное такое число. Тогда в силу теоремы 4.2 существует полином $\widetilde{\phi}_{m-1}(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$. Так как $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$, то $\operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \dots$. Тогда для некоторой функции ψ'_m имеем: $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. т. е. с учетом (5.2) $\psi'_m \nvdash \widetilde{\phi}_{m-1}$. Поэтому в силу пункта 2) теоремы 3.1 и формулы (5.2) задача $\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi'_m$ неразрешима теоретически. Но в силу условия 1), (5.4) и теоремы 2.1 она разрешима алгоритмически. Противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k < n_1$.

Допустим теперь, что при выполнении 1), (5.4) имеем $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k \leq n_1$. Тогда согласно теореме 4.1 задача $\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_1}$ разрешима (алгоритмически) для любой функции $\psi'_{n_1}(t)$. т. е. с учетом (4.2) тот же самый вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)$ есть решение задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_1}/p(t).$$

Но в силу теоремы 2.2 и 1), (5.4) существует полином $\phi_{n_1}(z) \in \operatorname{Ker} S$. Следовательно,

$$\operatorname{Im} \phi_{n_1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1} + \dots .$$

Тогда для некоторой функции ψ'_{n_1} имеем: $(\psi'_{n_1}, \operatorname{Im} \phi_{n_1}) = (\psi'_{n_1}, \psi_{n_1}) \neq 0$, откуда с учетом (5.3) $\psi'_{n_1} \not\vdash \phi_{n_1}$, т. е. указанная выше задача для функции ψ'_{n_1}/p согласно пункту 3) теоремы 3.1 неразрешима (теоретически). Полученное противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_{n_1} = 0$. Аналогичным образом может быть доказана импликация 2) $\Longrightarrow$ 1). □

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* (5.4). *Тогда* $\operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1} = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_{n_1}$.

Доказательство. Обозначим $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1}$, $r'_1 = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_{n_1}$. Ядро задачи $\widetilde{S}$ согласно теореме 4.2 содержит по крайней мере $2\ell - r'_1$ линейно независимых вектор-полиномов $\widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)$. Это означает, что задача S вида $\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}$ разрешима не более чем для r'_1 линейно независимых функций $\psi_{n_1}(t)$. Иначе получаем противоречие пункту 2) теоремы 3.1. Отсюда следует, что $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1} \leq r'_1$. Аналогично с учетом теоремы 2.2 пункта 3) теоремы 3.1 доказывается, что $r'_1 \leq r_1$. Таким образом, $r_1 = r'_1$, что и требовалось доказать. □

Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* 1) *в* (5.4). *Обозначим* $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_1$. *Тогда*

$$1)\ \phi^{(1)}_{n_1}, \dots, \phi^{(2\ell-r_1)}_{n_1} \in \operatorname{Ker} S; \quad 2)\ \widetilde{\phi}^{(1)}_{n_1-1}, \dots, \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_1)}_{n_1-1} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}, \tag{5.5}$$

причем все вектор-полиномы ядра и коядра в (5.5) *линейно независимы.*

3) *Кроме того, пусть разрешима алгебраическая система* $\widehat{Q}_{n_1}\widehat{c}_{n_1} = \alpha_{n_1}$ *в* (2.5). *Тогда разрешима и неоднородная задача* $\operatorname{Re} \phi_{n_1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}(t)$.

4) *Соответственно, пусть разрешима алгебраическая система* $\widetilde{Q}_{n_1}\widehat{c}_{n_1-1} = \alpha_{n_1}$ *в* (4.6). *Тогда разрешима и неоднородная задача* $\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \phi_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}(t)$.

Доказательство. Условие 1), (5.5) — это теорема 2.2. Условие 2), (5.5) следует из лемм 5.1, 5.2 и теоремы 4.2. Утверждения 3) и 4) вытекают из алгоритмов решения таких задач, описанных в параграфах 2 и 4. □

Далее леммы 5.1, 5.2 и теорему 5.1 будем рассматривать как *базу индукции*. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \widehat{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}; \quad \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \dots, n_p\}, \quad k < n_p. \tag{5.6}$$

Обозначим $r_l = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_l}$, $l = 1, \dots, p$. Пусть доказано, что:

$$\begin{gathered} \det \widetilde{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}; \quad \det \widetilde{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \dots, n_p\}, \quad k < n_p; \\ \operatorname{rang} \widehat{Q}_k = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_k, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}, \\ \phi^{(1)}_{n_1}, \dots, \phi^{(2\ell-r_1)}_{n_1}, \ \dots, \ \phi^{(1)}_{n_p}, \dots, \phi^{(2\ell-r_p)}_{n_p} \in \operatorname{Ker} S; \\ \widetilde{\phi}^{(1)}_{n_1-1}, \dots, \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_1)}_{n_1-1}, \ \dots, \ \widetilde{\phi}^{(1)}_{n_p-1}, \dots, \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_p)}_{n_p-1} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

При этом в (5.7) вектор-полиномы ядра и коядра линейно независимы.

Пусть число $m > n_p$ таково, что $\det \widehat{Q}_k \neq 0$ при $n_p < k < m$. При этом может быть как $\det \widehat{Q}_m \neq 0$, так и $\det \widehat{Q}_m = 0$. Также возможна ситуация $\det \widehat{Q}_{n_p+1} = 0$, в этом случае положим $m = n_p + 1$. Рассмотрим следующий упрощенный вариант задачи (2.3):

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) = \big(d_{m1} \cos mt + d'_{m1} \sin mt, \ldots, d_{m\ell} \cos mt + d'_{m\ell} \sin mt\big)^{\mathrm{T}}, \quad m > n_p. \tag{5.8}$$

О п р е д е л е н и е 5.5. Обозначим через B_m 2ℓ-мерное линейное вещественное пространство функций $\psi_m(t)$ (5.8) (или, что то же, пространство коэффициентов

$$\alpha_m = (d_{m1}, d'_{m1}, \ldots, d_{m\ell}, d'_{m\ell}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$$

этих функций), таких, что алгебраическая система $\widehat{Q}_m \widehat{c}_m = \alpha_m$ в (2.5) разрешима. Аналогично определим пространство $\widetilde{B}_m$ как пространство функций $\psi_m(t)$ (или, что то же, пространство их коэффициентов α_m), для которых разрешима система $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ в (4.6). Таким образом, будем писать $\psi_m, \alpha_m \in B_m$, либо $\psi_m, \alpha_m \in \widetilde{B}_m$.

Теорема 5.2. *Пусть при выполнении* (5.6) *и* (5.7) *совместна алгебраическая система* $\widehat{Q}_m \widehat{c}_m = \alpha_m$ *в* (2.5). *Пусть доказано, что* 1) *задача* (5.8) *разрешима* (*алгоритмически*) *при* $m \leq n_p$, *если* $\psi_m \in B_m$. *Тогда разрешима* (*алгоритмически*) *и задача* (5.8) *при* $m > n_p$, *в том числе однородная* (*т. е. при* $\psi_m = 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (5.7) и пункт 1) настоящей теоремы будем рассматривать как *индукционное предположение*. При этом *базой индукции* для (5.7) служат леммы 5.1, 5.2 и теорема 5.1. В них доказано (5.7) для $k \in \{n_1\}$. Базой индукции для пункта 1) настоящей теоремы служат пункт 3) теоремы 5.1 и теорема 2.1.

Далее «от противного»: пусть задача (5.8) неразрешима алгоритмически. Согласно схеме параграфа 2 и (2.5) это означает, что несовместна некоторая система $\widehat{Q}_{l_1} \widehat{c}_{l_1} = \alpha_{l_1}$, где $l_1 \leq n_p$, $\det \widehat{Q}_{l_1} = 0$. В этом случае по определению $\alpha_{l_1}, \psi_{l_1} \notin B_{l_1}$. Рассмотрим задачу

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1}, \quad \psi'_{l_1}, \alpha'_{l_1} \notin B_{l_1}, \quad \psi_{l_1} + \psi'_{l_1} \in B_{l_1}, \quad \alpha_{l_1} + \alpha'_{l_1} \in B_{l_1}. \tag{5.9}$$

Этой задаче в процессе последовательного решения систем (5.2) будет соответствовать алгебраическая система $\widehat{Q}_{l_1} \widehat{c}_{l_1} = \alpha_{l_1} + \alpha'_{l_1}$, которая будет разрешима при соответствующем подборе функции $\psi'_{l_1} \notin B_{l_1}$. Но при дальнейшем решении задачи (5.9) может возникнуть аналогичная ситуация, когда будет неразрешима система $\widehat{Q}_{l_2} \widehat{c}_{l_2} = \alpha_{l_2}$, где $l_2 < l_1$, $\det \widehat{Q}_{l_2} = 0$. В этом случае $\alpha_{l_2}, \psi_{l_2} \notin B_{l_2}$. Тогда рассмотрим задачу

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1} + \psi'_{l_2}, \ \psi'_{l_1} \notin B_{l_1}, \ \psi'_{l_2} \notin B_{l_2}, \ \psi_{l_1} + \psi'_{l_1} \in B_{l_1}, \ \psi_{l_2} + \psi'_{l_2} \in B_{l_2}. \tag{5.10}$$

Задаче (5.10) в процессе решения систем (5.2) соответствует алгебраическая система $\widehat{Q}_{l_2} \widehat{c}_{l_2} = \alpha_{l_2} + \alpha'_{l_2}$, которая будет разрешима при соответствующем подборе функции $\psi'_{l_2} \notin B_{l_2}$. Продолжая этот процесс дальше, получим следующую задачу:

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1} + \psi'_{l_2} + \ldots + \psi'_{l_s} = \psi', \tag{5.11}$$

$$l_s < l_{s-1} < \ldots < l_2 < l_1; \quad \psi'_{l_k} \notin B_{l_k}, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{5.12}$$

Число $l_s \geq n_1$ в (5.12) — минимальное такое, что система $\widehat{Q}_{l_s} \widehat{c}_{l_s} = \alpha_{l_s}$, $\det \widehat{Q}_{l_s} = 0$ неразрешима (т. е. $\alpha_s \notin B_{l_s}$). Тогда задача (5.11) будет по построению *разрешима алгоритмически.*

Далее используем индукционное предположение (5.7). Так как $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$, то с учетом (5.7) и обозначений (5.8) имеем:

$$\operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(1)}_{l_s-1}(z)\big|_\Gamma = \psi^{(1)}_{l_s} + \ldots, \quad \ldots, \quad \operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_s)}_{l_s-1}(z)\big|_\Gamma = \psi^{(2\ell-r_s)}_{l_s} + \ldots, \tag{5.13}$$

где все функции $\psi^{(k)}_{l_s} = \psi^{(k)}_{l_s}(t)$ в (5.13) линейно независимы. При этом с учетом пункта 1) настоящей теоремы (индукционное предположение) задача Шварца $\operatorname{Re}\phi_{l_s}(z)\big|_\Gamma = \psi_{l_s}$ разрешима не менее чем для $r_s = \operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_s}$ линейно независимых функций $\psi_{l_s} \in B_{l_s}$. Для каждой из них согласно пункту 2) теоремы 3.1 и (5.13) должно выполняться следующее равенство:

$$\langle \psi_{l_s}, \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\rangle = \big(\psi_{l_s}, \operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\big) = \big(\psi_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}\big) = 0, \quad \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}.$$

т. е. функции $\psi_{l_s} \in B_{l_s}$ и функции $\psi^{(k)}_{l_s}$ в (5.13) образуют два ортогональных подпространства в $\mathbb{R}^{2\ell}$, сумма размерностей которых равна 2ℓ.

Отсюда следует, что если $\psi'_{l_s} \notin B_{l_s}$, то скалярное произведение $(\psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}) \neq 0$ для некоторой функции $\psi^{(k)}_{l_s}$ из (5.13). Поэтому с учетом (5.11) и минимальности числа l_s для элемента коядра $\widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}$ справедливо соотношение

$$\langle \psi', \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\rangle = \big(\psi', \operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\big) = \big(\psi_m + \ldots + \psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s} + \ldots\big) = (\psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}) \neq 0.$$

Следовательно, задача (5.11) согласно пункту 2) теоремы 3.1 *неразрешима теоретически*.

Итак, пусть задача (5.8) неразрешима алгоритмически. Тогда по ней можно построить задачу (5.11), которая будет разрешима алгоритмически, но неразрешима теоретически. Полученное противоречие означает алгоритмическую разрешимость задачи (5.8). □

Далее приведем аналог теоремы 5.2 «в обратную сторону», — для коядра.

Теорема 5.3. *Пусть при выполнении* (5.6) *и* (5.7) *совместна алгебраическая система* $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ *в* (4.6). *Пусть доказано, что задача*

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) \tag{5.14}$$

разрешима (*алгоритмически*) *при* $m \leq n_p$, *если* $\psi_m \in \widetilde{B}_m$. *Тогда разрешима* (*алгоритмически*) *и задача* (5.14) *при* $m > n_p$, *в том числе однородная* (*т. е. при* $\psi_m = 0$).

Доказательство. Здесь в точности повторяется схема доказательства теоремы 5.2. Приводить эту схему еще раз не имеет смысла. При этом используется определение 5.5. Также используются определения 5.3 и 5.4 алгоритмической и теоретической разрешимости задач S, $\widetilde{S}^*$ и $\widetilde{S}$. □

Замечание 5.1. В теоремах 5.2 и 5.3 доказан не индукционный переход при базе индукции (5.7), а некоторые утверждения. Индукционный переход доказан ниже.

Из теорем 5.2, 5.3 и 3.1 вытекает

Теорема 5.4 (индукционный переход)**.** *Пусть выполнены соотношения* (5.6) *и* (5.7), *а также пусть*

$$n_{p+1} > n_p, \quad \det\widehat{Q}_{n_{p+1}} = 0, \quad \det\widehat{Q}_k \neq 0, \quad n_p < k < n_{p+1}. \tag{5.15}$$

Обозначим $r_{p+1} = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_{p+1}}$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &1)\ \det \widetilde{Q}_{n_{p+1}} = 0;\ \ \det \widetilde{Q}_k \neq 0,\ \ n_p < k < n_{p+1};\quad 2)\ \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_{p+1}} = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_{n_{p+1}};\\ &3)\ \phi^{(1)}_{n_{p+1}}, \ldots, \phi^{(2\ell - r_{p+1})}_{n_{p+1}} \in \operatorname{Ker} S; \qquad 4)\ \widetilde{\phi}^{(1)}_{n_{p+1}-1}, \ldots, \widetilde{\phi}^{(2\ell - r_{p+1})}_{n_{p+1}-1} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

причем все вектор-полиномы ядра и коядра в (5.16) *линейно независимы.*

5) *Кроме того, пусть разрешима алгебраическая система* $\widehat{Q}_{n_{p+1}} \widehat{c}_{n_{p+1}} = \alpha_{n_{p+1}}$ *в* (2.5). *Тогда разрешима* (*алгоритмически*) *и неоднородная задача* $\operatorname{Re} \phi_{n_{p+1}}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t)$.

6) *Соответственно, пусть разрешима алгебраическая система* $\widetilde{Q}_{n_{p+1}} \widehat{c}_{n_{p+1}-1} = \alpha_{n_{p+1}}$ *в* (4.6). *Тогда разрешима* (*алгоритмически*) *и неоднородная задача* $\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \phi_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем пункт 1) «от противного»: пусть $\det \widetilde{Q}_m = 0$, где $n_p < m < n_{p+1}$. При этом m — минимальное такое число. Тогда в силу теоремы 5.3 существует полином $\widetilde{\phi}_{m-1}(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$. Так как $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$, то $\operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \ldots$. Поэтому для некоторой функции ψ'_m имеем: $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. т. е. с учетом (5.2) $\psi'_m \not\vdash \widetilde{\phi}_{m-1}$. Поэтому в силу пункта 2) теоремы 3.1 задача $\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi'_m$ неразрешима теоретически. Но в силу (5.15) и теоремы 5.2 она разрешима алгоритмически. Противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_k \neq 0,\ \ n_p < k < n_{p+1}$.

Пусть теперь $\det \widetilde{Q}_k \neq 0,\ \ n_p < k \leq n_{p+1}$. Согласно теореме 5.3 задача

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_{p+1}}(t)$$

разрешима (алгоритмически) для любой функции $\psi'_{n_{p+1}}(t)$. С учетом (4.2) тот же самый вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)$ есть решение задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \frac{\psi'_{n_{p+1}}(t)}{p(t)}.$$

Но в силу теоремы 5.2 и условия (5.15) существует полином $\phi_{n_{p+1}}(z) \in \operatorname{Ker} S$. Следовательно,

$$\operatorname{Im} \phi_{n_{p+1}}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t) + \ldots.$$

Тогда для некоторой функции $\psi'_{n_{p+1}}$ имеем: $(\psi'_{n_{p+1}}, \operatorname{Im} \phi_{n_{p+1}}) = (\psi'_{n_{p+1}}, \psi_{n_{p+1}}) \neq 0$, откуда с учетом (5.3) $\psi'_{n_{p+1}} \not\vdash \phi_{n_{p+1}}$, т. е. указанная выше задача для функции $\psi'_{n_{p+1}}/p$ согласно пункту 3) теоремы 3.1 неразрешима (теоретически). Противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_{n_{p+1}} = 0$.

Таким образом, схема доказательства пункта 1) с точностью до обозначений совпадает с доказательством импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) в лемме 5.1. С той разницей, что роль теорем 2.1, 2.2 здесь играет теорема 5.2, а вместо теоремы 4.1, 4.2 используется теорема 5.3. Доказательства остальных утверждений настоящей теоремы проводится аналогичным образом, по схеме леммы 5.2 и теоремы 5.1. □

З а м е ч а н и е 5.2. В результате доказательства теоремы 5.4 предположение (5.7) стало утверждением (5.7).

Приведем две заключительные теоремы о структуре ядра и коядра.

Теорема 5.5. *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Тогда ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ состоят только из вектор-полиномов.*

Доказательство. Из теорем 5.2, 5.3 и 3.1 следует, что существует только конечный набор чисел $\{n_1, \dots, n_p\}$ такой, что

$$\det \widehat{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}; \quad \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \dots, n_p\}. \tag{5.17}$$

Действительно, в противном случае ядро (или коядро) задачи Шварца были бы бесконечномерными, что противоречит пункту 1) теоремы 3.1.

Допустим, что для некоторой функции $\phi(z) \in \operatorname{Ker} S$ имеем: $\operatorname{Im} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) + \dots$, где $m \notin \{n_1, \dots, n_p\}$. Пусть $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. Тогда согласно пункту 3) теоремы 3.1 и (5.3) союзная задача

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \frac{\psi'_m(t)}{p(t)} \tag{5.18}$$

неразрешима (теоретически). Но поскольку $m \notin \{n_1, \dots, n_p\}$, то в силу (5.17), (5.7) и замечания 5.2 $\det \widetilde{Q}_m \neq 0$. Поэтому алгебраическая система $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ разрешима для любой правой части. Тогда согласно теореме 5.3 алгоритмически разрешима и задача (5.14) для любой граничной функции $\psi'_m(t)$. Деля обе части (5.14) на $p(t) \neq 0$, получаем разрешимость задачи (5.18). Полученное противоречие означает, что разложение в ряд Фурье на Γ любого нетривиального элемента ядра задачи Шварца может содержать только функции $\psi_k(t)$, где $k \in \{n_1, \dots, n_p\}$. Проводя аналогичные рассуждения для коядра, получаем то же самое утверждение и для любой функции $\phi(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$.

Таким образом, с учетом (5.17) для любого элемента ядра и коядра справедливо разложение

$$\phi(z)\big|_\Gamma = \sum_{k \in \{n_1, \dots, n_p\}} \psi_k(t), \quad \phi(z) \in \operatorname{Ker} S, \quad \phi(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}. \tag{5.19}$$

Из (5.19) вытекает в частности, что ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ состоят только из вектор-полиномов. □

Таким образом, в условиях теоремы 5.5 справедливы формулы (5.17) и (5.19).

Теорема 5.6. *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости и пусть выполнены условия (5.17). Обозначим $r_l = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_l}$. Тогда базисы ядра и коядра задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} S &= \big\{ i\alpha,\ \phi_{n_1}^{(1)},\ \dots,\ \phi_{n_1}^{(2\ell - r_1)},\ \dots,\ \phi_{n_p}^{(1)},\ \dots,\ \phi_{n_p}^{(2\ell - r_p)} \big\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^\ell; \\ \operatorname{Ker} \widetilde{S} &= \big\{ \widetilde{\phi}_{n_1 - 1}^{(1)},\ \dots,\ \widetilde{\phi}_{n_1 - 1}^{(2\ell - r_1)},\ \dots,\ \widetilde{\phi}_{n_p - 1}^{(1)},\ \dots,\ \widetilde{\phi}_{n_p - 1}^{(2\ell - r_p)} \big\}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Доказательство. В силу замечания 5.2 вектор-полиномы вида (5.20) входят в ядро и в коядро. При этом, согласно теореме 5.5 $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Ker} \widetilde{S}$ состоят только из вектор-полиномов. Кроме того, в ядро входят вектор-константы $\phi = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$.

Согласно [3] любой J-аналитический вектор-полином $\phi_{n_l}(z)$ представи́м в виде (1.2). Поэтому, если $\phi_{n_l}(z) \in \operatorname{Ker} S$, то он является решением однородной задачи (2.4). Отсюда следует, что $\phi_{n_l}(z)$ может иметь только степень $n_l \in \{n_1, \dots, n_p\}$. Соответственно, с учетом (5.17), (4.4) и (4.5) вектор-полиномы коядра могут иметь только степени $n_l \in$

$\{n_1-1,\ldots,n_p-1\}$. Вектор-полиномы в (5.20) определены неоднозначно. Покажем для ядра, что это действительно его базис.

Обозначим для функций из (5.20): $\phi_{n_l}^{(k)}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_l}^{(k)}(t)$, $k=1,\ldots,2\ell-r_l$, где $r_l = \operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_l}$. Тогда с учетом алгоритма решения однородной задачи (2.4) при $n=n_l$ имеем:

$$\phi_{n_l}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_l}(t) = \alpha_1\psi_{n_l}^{(1)}(t)+\ldots+\alpha_{2\ell-r_l}\psi_{n_l}^{(2\ell-r_l)}(t), \quad \alpha_k\in\mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Из (5.21) следует, что вектор-полином

$$\phi_{m_l}(z) = \phi_{n_l}(z) - \left[\alpha_1\phi_{n_l}^{(1)}(z)+\ldots+\alpha_{2\ell-r_l}\phi_{n_l}^{(2\ell-r_l)}(z)\right], \quad m_l<n_l \tag{5.22}$$

принадлежит $\operatorname{Ker} S$ и имеет степень $m_l<n_l$. Действительно, в его разложении на Γ не будет функций вида $\psi_{n_l}^{(k)}(t)$. Таким образом, из (5.22) имеем:

$$\phi_{n_l}(z) = \left[\alpha_1\phi_{n_l}^{(1)}(z)+\ldots+\alpha_{2\ell-r_l}\phi_{n_l}^{(2\ell-r_l)}(z)\right] + \phi_{m_l}(z), \quad m_l<n_l. \tag{5.23}$$

Далее применим ту же схему рассуждений для вектор-полинома $\phi_{m_l}(z)$ в (5.23). Повторяя это процесс необходимое количество раз, получим разложение $\phi_{n_l}(z)$ по базису (5.20), причем с вещественными коэффициентами. Аналогичная схема применяется для вектор-полиномов коядра.

Рассмотрим отдельно тот случай, когда $\det\widehat{Q}_1=0$, т. е. $n_1=1$. Согласно лемме 5.1 имеем $\det\widetilde{Q}_1=0$. Тогда в коядро входят вектор-константы $\phi_{n_1-1}=\phi_0=c$, $c\in\mathbb{C}^\ell$. Размерность подпространства $F_1=\{\phi_1^{(1)},\ldots,\phi_1^{(2\ell-r_1)}\}\in\operatorname{Ker} S$ равна $2\ell-r_1$. Несложно показать, что размерности F_1 над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ совпадают, поскольку элементы F_1 — вектор-полиномы (первой степени).

При этом подпространство $\widetilde{F}_0=\{c_1,\ldots,c_{2\ell-r_1}\}\in\operatorname{Ker}\widetilde{S}$, $c_k\in\mathbb{C}^\ell$ состоит из комплексных вектор-констант, *линейно независимых над полем* $\mathbb{R}$. Поскольку $\widetilde{F}_0\in\operatorname{Ker}\widetilde{S}$, то размерность $\widetilde{F}_0$ вычисляется над полем $\mathbb{R}$. Эта размерность согласно теореме 4.2 и леммам 5.1, 5.2 так же равна $2\ell-r_1$ (но над полем $\mathbb{C}$ она другая). Случай $n_1=1$ уже́ включен в формулы (5.20). Из (5.20) вытекают следующие равенства:

$$\dim\operatorname{Ker} S = (2p+1)\ell - \sum_{k=1}^{p}\operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_k}, \quad \dim\operatorname{Ker}\widetilde{S} = 2p\ell - \sum_{k=1}^{p}\operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_k}. \tag{5.24}$$

В свою очередь, из (5.24) следует равенство $\operatorname{Ind} S = \dim\operatorname{Ker} S - \dim\operatorname{Ker}\widetilde{S} = \dim\mathbb{R}^\ell = \ell$, которое согласуется с пунктом 4) теоремы 3.1. □

В заключение вернемся к примеру 1.1. В работе [8] были изучены матрицы $J\in\mathbb{C}^{2\times2}$ с кратным собственным числом λ, где $\operatorname{Im}\lambda>0$. Показано, что нетривиальное ядро задачи Шварца в эллипсе может содержать только один вектор-полином. Но при этом не было доказано, что в ядро могут входить только вектор-полиномы. Теперь же на основании теоремы 5.5 можно утверждать, что для функций, аналитических по Дуглису с матрицей J (1.5), квадратичный вектор-полином $\phi_2(z)$ (1.5) есть единственный нетривиальный элемент ядра задачи Шварца в эллипсе $\Gamma:\ 7x^2+9y^2=1$.

References

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977. [F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Краевые задачи*, Наука, М., 1968. [N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[3] A. P. Soldatov, *Douglis Analytic Functions*, Publishing House BelGU, Belgorog, 2016.

[4] А. П. Солдатов, "Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису", *Современная математика и ее приложения*, **67** (2010), 99–102; англ. пер.:A. P. Soldatov, "The Schwarz problem for douglis analytic functions", *Journal of Mathematical Sciences*, **173** (2011), 221–224.

[5] V. B. Vasilyev, "General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations", *Advances in Difference Equations*, **289** (2013), 1–7.

[6] V. B. Vasilyev, "Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries", *Differential and Difference Equations and Applications*, **47** (2013), 625–637.

[7] V. G. Nikolaev, "Solutions to the schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse", *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:4 (2020), 655–670.

[8] V. G. Nikolaev, "Schwarz problem in ellipse for nondiagonalizable matrices", *Journal of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 876–901.

Информация об авторе

Николаев Владимир Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии. Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация. E-mail: vg14@inbox.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

Поступила в редакцию 17.02.2025 г.
Поступила после рецензирования 28.05.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

Information about the author

Vladimir G. Nikolaev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Algebra and Geometry Department. Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation. E-mail: vg14@inbox.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

Received 17.02.2025
Reviewed 28.05.2025
Accepted for press 06.06.2025