ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 149 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14

УДК 519.716.322, 519.85, 517.518.244

О множестве непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции

Достонжон Нумонжонович БАРОТОВ[1] **, Рузибой Нумонжонович БАРОТОВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»
125167, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Ленинградский, 49/2

[2] Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова
735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию существования экстремальных элементов множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множество $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$, а также нахождению мощности множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$. В результате исследования доказано, что, во-первых, для любой булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ нет максимального элемента, во-вторых, если у булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ более одной существенной переменной, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ нет и минимального элемента, а если булева функция постоянна или имеет лишь одну существенную переменную, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ существует единственный минимальный элемент, явная форма которого приведена в работе. Также установлено, что мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ равна континууму.

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемое вогнутое продолжение булевой функции, экстремальные элементы множества, мощность множества

Для цитирования: *Баротов Д.Н., Баротов Р.Н.* О множестве непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 5–14.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14

On the set of continuously differentiable concave extensions of a Boolean function

Dostonjon N. BAROTOV[1], **Ruziboy N. BAROTOV**[2]

[1] Financial University under the Government of the Russian Federation
49/2 Leningradsky Prospekt, Moscow 125167, Russian Federation

[2] Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov
1 Mavlonbekova, Khujand 735700, Republic of Tajikistan

Abstract. This paper is devoted to the study of the existence of extremal elements of the set of continuously differentiable concave extensions to the set $[0,1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1,\dots,x_n)$, as well as finding the cardinality of the set of continuously differentiable concave extensions to $[0,1]^n$ of the Boolean function $f_B(x_1,\dots,x_n)$. As a result of the study, it is proved that, firstly, for any Boolean function $f_B(x_1,\dots,x_n)$ among its continuously differentiable concave extensions to $[0,1]^n$ there is no maximal element, secondly, if the Boolean function $f_B(x_1,\dots,x_n)$ has more than one essential variable, then among its continuously differentiable concave extensions to $[0,1]^n$ there is no minimal element, and if the Boolean function is constant or has only one essential variable, then among its continuously differentiable concave extensions to $[0,1]^n$ there is a unique minimal element, the explicit form of which is given in the paper. It was also established that the cardinality of the set of continuously differentiable concave extensions to $[0,1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1,\dots,x_n)$ is equal to the continuum.

Keywords: continuously differentiable concave extension of a Boolean function, extremal elements of a set, cardinality of a set

Mathematics Subject Classification: 06E30, 54C20, 03E17.

For citation: Barotov D.N., Barotov R.N. On the set of continuously differentiable concave extensions of a Boolean function. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 5–14.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14

Введение

Системы булевых уравнений широко используются в математике, компьютерных и прикладных науках [1]. По этой причине, с одной стороны, решению систем булевых уравнений посвящено значительное количество работ, разработано несколько направлений исследования и алгоритмов их решения [2–4]. С другой стороны, и в настоящее время, в связи с тем, что задача решения систем булевых уравнений в общем случае является NP-трудной, в научном сообществе продолжает расти интерес к поиску новых алгоритмов их решения в различных направлениях как в классических, так и в квантовых моделях вычислений [5,6]. Одним из таких направлений исследования для решения систем булевых уравнений является преобразование (трансформация) заданной системы булевых уравнений путем представления некоторого вещественного продолжения (аналога) для каждой булевой функции в систему уравнений над полем действительных чисел, поскольку, во-первых, в этой области известно много методов и алгоритмов решения систем, а во-вторых, его можно использовать и при решении смешанных систем, т. е. систем, заданных одновременно математическими и логическими операциями [7,8]. В свою очередь, преобразованная система вещественных уравнений может быть сведена в задачу непрерывной оптимизации, так как принципиальное отличие данного подхода от «переборных» алгоритмов локального поиска состоит в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по градиенту (антиградиенту) производится по всем переменным одновременно [9]. В данном направлении сравнительно недавно получены некоторые важные результаты, а именно, рассмотрено построение выпуклых [10–12], полилинейных [13,14] и вогнутых [15,16] продолжений булевых функций, представляющих интерес при преобразовании систем булевых уравнений к задаче непрерывной оптимизации. Также изучены свойства таких продолжений, в том числе в [12,15] доказано, что для произвольной булевой функции от n переменных существует единственная вещественная функция, являющаяся минимумом (максимумом) среди всех ее вогнутых (выпуклых) продолжений.

Данная статья является продолжением статьи [15] и посвящается исследованию существования экстремальных элементов множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множество $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и нахождению мощности множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множество $[0,1]^n$ булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Доказывается, что, во-первых, для любой булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ нет максимума, во-вторых, если число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ нет и минимума, а если число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ не больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ есть минимум. Также обосновывается, что мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0,1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ равна континууму.

1. Используемые понятия, обозначения, множества и определения

Пусть $\mathbb{B}=\{0,1\}$, $\mathbb{K}=[0,1]$ и задана булева функция $f_B:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}$. Основные обозначения и определения, приведенные в [15], считаем известными и приводим лишь недостающие определения и обозначения.

Определение 1.1. Будем называть переменную x_k, $k \in \{1, \dots, n\}$, булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ *существенной* (или говорить, что булева функция $f_B(x_1, \dots, x_n)$ *существенно зависит от* x_k), если имеет место соотношение

$$f_B(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \not\equiv f_B(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Определение 1.2. Отображение $f_R : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовем *непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

$a)$ f_R является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией,

$b)$ имеет место равенство

$$f_R(b_1, \dots, b_n) = f_B(b_1, \dots, b_n) \quad \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n.$$

Определение 1.3. Отображение $f_{NR} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовем *минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

$a)$ f_{NR} является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B,

$b)$ для любого непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения f_R булевой функции f_B на $\mathbb{K}^n$ и любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство

$$f_{NR}(x_1, \dots, x_n) \le f_R(x_1, \dots, x_n).$$

Определение 1.4. Отображение $f_{DM} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовем *максимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

$a)$ f_{DM} является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B,

$b)$ для любого непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения f_R булевой функции f_B на $\mathbb{K}^n$ и любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство

$$f_R(x_1, \dots, x_n) \le f_{DM}(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $E(f_B, \mathbb{K}^n)$ — множество непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

2. Основные результаты

Начнем изложение с обоснования следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2.1. *Для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множество ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ не является пустым.*

Доказательство. В случае $f_B(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим нетривиальный случай $f_B(x_1, \dots, x_n) \not\equiv 1$.

Достаточно показать, что вещественная функция вида

$$f_R(x_1, \dots, x_n) = 1 - \frac{1}{4} \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in f_B^{-1}(0)} \Big(\sum_{k=1}^{n} (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 - \Big| \sum_{k=1}^{n} (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 \Big| \Big)^2 \quad (2.1)$$

принадлежит множеству $E\left(f_B, \mathbb{K}^n\right)$. Для этого обоснуем справедливость следующих двух свойств:

$f_R(x_1,\ldots,x_n)$ является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией;

при любых $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{B}^n$ имеет место равенство $f_R(a_1,\ldots,a_n)=f_B(a_1,\ldots,a_n)$.

Вначале покажем непрерывную дифференцируемость функции $f_R(x_1,\ldots,x_n)$. Нетрудно заметить, что при любом $i\in\{1,\ldots,n\}$ имеет место

$$\sum_{(b_1,\ldots,b_n)\in f_B^{-1}(0)}(2b_i-1)\Big(\sum_{k=1}^{n}(x_k+b_k-2b_kx_k)-1-\Big|\sum_{k=1}^{n}(x_k+b_k-2b_kx_k)-1\Big|\Big)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_i}f_R(x_1,\ldots,x_n)\in C\left(\mathbb{K}^n\right).$$

Следовательно, имеем $f_R(x_1,\ldots,x_n)\in C^1\left(\mathbb{K}^n\right)$.

Теперь покажем, что функция $f_R(x_1,\ldots,x_n)$ является вогнутой. Ввиду вогнутости функции $\varphi(y)=-\frac{1}{4}(y-|y|)^2$ и линейности функции $\psi(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k+b_k-2b_kx_k)-1$ получаем, что функция

$$\varphi\left(\psi(x_1,\ldots,x_n)\right)=-\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^{n}(x_k+b_k-2b_kx_k)-1-\Big|\sum_{k=1}^{n}(x_k+b_k-2b_kx_k)-1\Big|\Big)^2 \tag{2.2}$$

является вогнутой. А в силу (2.1) и (2.2) получаем, что функция $f_R(x_1,\ldots,x_n)$ как сумма вогнутых функций сама является вогнутой.

Остается заметить, что для любой точки $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{B}^n$ выполнено

$$\begin{aligned}&f_R(a_1,\ldots,a_n)\\&\quad=1-\frac{1}{4}\sum_{(b_1,\ldots,b_n)\in f_B^{-1}(0)}\Big(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k-2b_ka_k)-1-\Big|\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k-2b_ka_k)-1\Big|\Big)^2\\&\quad=1-\frac{1}{4}\begin{cases}4, & \text{если } (a_1,\ldots,a_n)\in f_B^{-1}(0)\\ 0, & \text{если } (a_1,\ldots,a_n)\notin f_B^{-1}(0)\end{cases}=1+f_B(a_1,\ldots,a_n)-1=f_B(a_1,\ldots,a_n).\end{aligned}$$

Итак, функция f_R, определенная формулой (2.1), является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B. $\square$

Теперь, основываясь на доказанной лемме 2.1, докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Для любой булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ мощность множества ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ равна континууму.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $E\left(f_B,\mathbb{K}^n\right)$, очевидно, является подмножеством множества всех непрерывных функций, заданных на $\mathbb{K}^n$, т. е. имеет место вложение

$$E\left(f_B,\mathbb{K}^n\right)\subset C(\mathbb{K}^n). \tag{2.3}$$

Выберем произвольный элемент g_R из непустого, согласно лемме 2.1, множества $E(f_B,\mathbb{K}^n)$ и, используя его, для произвольного $\alpha\in(0,+\infty)$ определим функцию

$$g_\alpha(x_1,\ldots,x_n)=g_R(x_1,\ldots,x_n)+\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(x_k-x_k^2\right). \tag{2.4}$$

Покажем, что при любом $\alpha \in (0, +\infty)$ имеет место включение

$$g_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in E\left(f_B, \mathbb{K}^n\right). \tag{2.5}$$

Для этого проверим справедливость следующих двух свойств:

$g_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией;

при любых $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ имеет место равенство $g_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = f_B(a_1, \ldots, a_n)$.

Вначале покажем непрерывную дифференцируемость функции g_α. В силу включений $g_R(x_1, \ldots, x_n) \in C^1\left(\mathbb{K}^n\right)$ и $\alpha \sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^2\right) \in C^1\left(\mathbb{K}^n\right)$ имеем $g_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in C^1\left(\mathbb{K}^n\right)$.

Далее, ввиду вогнутости функции $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k - x_k^2\right)$ на $\mathbb{K}^n$ и $\alpha > 0$ имеем, что функция $g_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$ как сумма двух вогнутых функций является вогнутой.

Покажем, что g_α является продолжением булевой функции f_B. Пусть $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} g_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = g_R(a_1, \ldots, a_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_k^2\right) &= g_R(a_1, \ldots, a_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(a_k - a_k\right) \\ &= g_R(a_1, \ldots, a_n) + 0 = f_B(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Итак, включение (2.5) установлено.

В силу определения (2.4) функции g_α получаем, что при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$ и всех $(x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \operatorname{int}(\mathbb{K}^n)$ справедлива цепочка неравенств

$$g_R(x_1^*, \ldots, x_n^*) < g_{\alpha_1}(x_1^*, \ldots, x_n^*) < g_{\alpha_2}(x_1^*, \ldots, x_n^*). \tag{2.6}$$

Ввиду (2.5) получаем, что имеет место вложение

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1)} \{g_\alpha\} \subset E\left(f_B, \mathbb{K}^n\right). \tag{2.7}$$

Отсюда, в силу равенства $\operatorname{card}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in (0,1)} \{g_\alpha\}\Big) = c$, вытекающего из (2.6), и $\operatorname{card}\left(C(\mathbb{K}^n)\right) = c$, а также включений (2.3), (2.7), получаем $\operatorname{card}\left(E\left(f_B, \mathbb{K}^n\right)\right) = c$, т. е. мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ равна континууму. □

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что из приведенного выше доказательства теоремы 2.1 следует, что для любой булевой функции $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ нет максимума.

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим, что справедливость теоремы 1, приведенной в [15], очевидным образом следует из доказанной выше теоремы 2.1, поскольку для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мощность множества ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ равна континууму и, следовательно, мощность множества всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ не меньше континуума.

Теперь сформулируем и докажем теорему о существовании минимального непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 2.2. *Если число существенных переменных булевой функции* $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ *больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на* $\mathbb{K}^n$ *нет минимума, а если это число не больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на* $\mathbb{K}^n$ *есть минимум.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ не больше единицы. В этом случае достаточно рассмотреть булеву функцию $f_B(x)$, зависящую только от одной, не обязательно существенной, переменной x. Согласно [15, следствие 1] имеем, что для булевой функции $f_B(x)$ вещественная функция

$$f_{BD}(x) = (1-x)f_B(0) + xf_B(1) \tag{2.8}$$

является единственным минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{K}$. Так как функция $f_{BD}(x)$, определенная формулой (2.8), непрерывно дифференцируема, то она также является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции $f_B(x)$, т. е.

$$f_{NR}(x) = (1-x)f_B(0) + xf_B(1).$$

Случай 2. Пусть число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ больше единицы. В этом случае, без потери общности будем считать, что все переменные $x_1,\ldots,x_n$ булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ являются существенными. Докажем от противного. Предположим, что утверждение не верно: существует вещественная функция $f_{NR}(x_1,\ldots,x_n)$, которая является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда при любом заданном $(b_1,\ldots,b_{i-1},b_{i+1},\ldots,b_{j-1},b_{j+1},\ldots,b_n) \in \mathbb{B}^{n-2}$ «суженная» вещественная функция двух аргументов $f_{NR}\left(b_1,\ldots,b_{i-1},x_i,b_{i+1},\ldots,b_{j-1},x_j,b_{j+1},\ldots,b_n\right)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ «суженной» булевой функции $f_B\left(b_1,\ldots,b_{i-1},x_i,b_{i+1},\ldots,b_{j-1},x_j,b_{j+1},\ldots,b_n\right)$. Согласно доказанному в [17, 18], существует булева функция, существенно зависящая от двух своих переменных, равная самой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$ в случае $n=2$, которая является подфункцией булевой функции $f_B(x_1,\ldots,x_n)$. Таким образом, существуют $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, $i<j$ и точка $(b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*,b_{i+1}^*,\ldots,b_{j-1}^*,b_{j+1}^*,\ldots,b_n^*) \in \mathbb{B}^{n-2}$ такие, что переменные x_i и x_j суженной булевой функции $f_B\left(b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*,x_i,b_{i+1}^*,\ldots,b_{j-1}^*,x_j,b_{j+1}^*,\ldots,b_n^*\right)$ являются существенными. Отсюда получаем, что вещественная функция вида

$$g_{NR}(x_i,x_j) = f_{NR}\left(b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*,x_i,b_{i+1}^*,\ldots,b_{j-1}^*,x_j,b_{j+1}^*,\ldots,b_n^*\right)$$

является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции

$$g_B(x_i,x_j) = f_B\left(b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*,x_i,b_{i+1}^*,\ldots,b_{j-1}^*,x_j,b_{j+1}^*,\ldots,b_n^*\right),$$

существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i,x_j)$, существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j, нет минимума. Доказательство этого факта также проводим от противного. Пусть некоторая вещественная функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$. В силу [15, следствие 2] получим, что при любых $(x_i, x_j) \in \mathbb{K}^2$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} g_{NR}(x_i, x_j) \geq g_{BD}(x_i, x_j) = (1 - x_i - x_j)g_B(0,0) + x_i g_B(1,0) + x_j g_B(0,1) \\ + \frac{g_B(0,0) - g_B(0,1) - g_B(1,0) + g_B(1,1)}{4}(2x_i + 2x_j - 1 - |x_i - x_j| + |x_i + x_j - 1|) \\ - \frac{|g_B(0,0) - g_B(0,1) - g_B(1,0) + g_B(1,1)|}{4}\big(|x_i - x_j| + |x_i + x_j - 1| - 1\big), \end{aligned} \tag{2.9}$$

так как $g_{BD}(x_i, x_j)$ является минимумом среди всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$. Нетрудно показать, что для каждой булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j, выполнено неравенство

$$g_B(0,0) - g_B(0,1) - g_B(1,0) + g_B(1,1) \neq 0. \tag{2.10}$$

Ввиду (2.9) и (2.10) функция $g_{BD}(x_i, x_j)$ на $\mathbb{K}^2$ не является дифференцируемой и, следовательно, существует точка $(x_i^*, x_j^*) \in \mathbb{K}^2$ такая, что выполняется следующее строгое неравенство

$$g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_{BD}(x_i^*, x_j^*). \tag{2.11}$$

Действительно, в противном случае $g_{NR}(x_i, x_j) \equiv g_{BD}(x_i, x_j)$, а это противоречит к тому, что функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ на $\mathbb{K}^2$ непрерывно дифференцируема.

Теперь, ввиду неравенства (2.11), эквивалентного неравенству $g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_1(x_i^*, x_j^*)$, нетрудно показать (например, рассмотрев два случая относительно знака левой части (2.10) и заметив, что функция $g_\beta(x_i^*, x_j^*)$ по β непрерывна на $[1, +\infty)$ и не убывает на $[1, +\infty)$), что существует $\beta^* \in (1, +\infty)$ такое, что выполняется следующее строгое неравенство

$$g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_{\beta^*}(x_i^*, x_j^*), \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned} g_\beta(x_i, x_j) = (1 - x_i - x_j)g_B(0,0) + x_i g_B(1,0) + x_j g_B(0,1) \\ + \frac{g_B(0,0) - g_B(0,1) - g_B(1,0) + g_B(1,1)}{4}\left(2x_i + 2x_j - 1 - |x_i - x_j|^\beta + |x_i + x_j - 1|^\beta\right) \\ - \frac{|g_B(0,0) - g_B(0,1) - g_B(1,0) + g_B(1,1)|}{4}\left(|x_i - x_j|^\beta + |x_i + x_j - 1|^\beta - 1\right), \quad \beta \geq 1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

И наконец, несложно проверить непосредственно, что функция $g_\beta(x_i, x_j)$, определенная формулой (2.13), для каждого $\beta > 1$, в частности для $\beta = \beta^*$ является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$.

Итак, неравенство (2.12) противоречит сделанному выше предположению о том, что вещественная функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, которая существенно зависит от двух своих переменных x_i и x_j. $\square$

Заключение

В качестве заключения отметим, что свойства множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ с точки зрения упорядоченности заметно отличаются от свойств множества всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ этой булевой функции. А именно, согласно [15, теорема 2], множество всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \ldots, x_n)$ имеет минимальный элемент, а согласно доказанной выше теореме 2.2 множество непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ данной булевой функции имеет минимальный элемент лишь в том случае, когда она существенно зависит не более, чем от одной переменной.

Благодарности: Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение работы и за полезные замечания.

References

[1] Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов, “Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 20–28. [D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Construction of smooth convex extensions of Boolean functions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 20–28 (In Russian)].

[2] E. Ishchukova, E. Maro, P. Pristalov, “Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12-2015”, *Computation*, **8**:2 (2020), 51.

[3] В. К. Леонтьев, Э. Н. Гордеев, “О числе решений системы булевых уравнений”, *Автомат. и телемех.*, 2021, № 9, 150–168; англ. пер.:V. K. Leontiev, E. N. Gordeev, “On the number of solutions to a system of Boolean equations”, *Autom. Remote Control*, **82**:9 (2021), 1581–1596.

[4] М. А. Мальцева, А. С. Румянцев, “Проверка выполнимости булевых формул с помощью квантового отжига”, *Труды Карельского научного центра РАН*, 2023, № 4, 41–49. [M. A. Maltseva, A. S. Rumyantsev, “Boolean satisfiability verification by quantum annealing”, *Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2023, № 4, 41–49 (In Russian)].

[5] S. Ramos–Calderer, C. Bravo–Prieto, R. Lin, E. Bellini, M. Manzano, N. Aaraj, J. Latorre, “Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing”, *Phys. Rev. Res.*, **4**:1 (2022), 013096.

[6] A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, G. B. Lesovik, “Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO Penalties for cryptanalysis”, *Algorithms*, **15**:2 (2022), 33.

[7] J. Gu, Q. Gu, D. Du, “On optimizing the satisfiability (SAT) problem”, *Journal of Computer Science and Technology*, **14**:1 (1999), 1–17.

[8] Д. Н. Баротов, Д. З. Музафаров, Р. Н. Баротов, “Об одном методе решения систем булевых алгебраических уравнений”, *Современная математика и концепции инновационного математического образования*, **8**:1 (2021), 17–23. [D. N. Barotov, D. Z. Muzafarov, R. N. Barotov, “On one method for solving systems of Boolean algebraic equations”, *Mod. Math. Concept Innov. Math. Educ.*, **8**:1 (2021), 17–23 (In Russian)].

[9] Р. Т. Файзуллин, В. И. Дулькейт, Ю. Ю. Огородников, “Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 285–294. [R. T. Faizullin, V. I. Dul’keit, Yu. Yu. Ogorodnikov, “Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **19**, 2013, 285–294 (In Russian)].

[10] Д. Н. Баротов, “Выпуклое продолжение булевой функции и его приложения”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **31**:1 (2024), 5–18; англ. пер.:D. N. Barotov, “Convex continuation of a Boolean function and its applications”, *J. Appl. Ind. Math.*, **18**:1 (2024), 1–9.

[11] Д. Н. Баротов, “О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций”, *Матем. заметки*, **115**:4 (2024), 533–551; англ. пер.:D. N. Barotov, “On the existence and properties of convex extensions of Boolean functions”, *Math. Notes*, **115**:4 (2024), 489–505.

[12] Д. Н. Баротов, “Выпуклые продолжения некоторых дискретных функций”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **31**:3 (2024), 5–23; англ. пер.:D. N. Barotov, “Convex continuations of some discrete functions”, *J. Appl. Ind. Math.*, **18**:3 (2024), 412–423.

[13] D. N. Barotov, “Target function without local minimum for systems of logical equations with a unique solution”, *Mathematics*, **10**:12 (2022), 2097.

[14] Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов, “Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения”, *Вычислительные методы и программирование*, **24**:1 (2023), 10–23. [D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Polylinear continuations of some discrete functions and an algorithm for finding them”, *Numerical Methods and Programming*, **24**:1 (2023), 10–23 (In Russian)].

[15] Д. Н. Баротов, “Вогнутые продолжения булевых функций и некоторые их свойства и приложения”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **49** (2024), 105–123. [D. N. Barotov, “Concave continuations of Boolean functions and some of their properties and applications”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **49** (2024), 105–123 (In Russian)].

[16] Д. Н. Баротов, В. А. Судаков, “О неравенствах между выпуклыми, вогнутыми и полилинейными продолжениями булевых функций”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2024, № 30, 1–13. [D. N. Barotov, V. A. Sudakov, “On inequalities between convex, concave, and multilinear continuations of Boolean functions”, *Keldysh Institute preprints*, 2024, № 30, 1–13 (In Russian)].

[17] A. Salomaa, “On essential variables of functions, especially in the algebra of logic”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.*, 1963, № 339, 1–11.

[18] Ю. Я. Брейтбарт, “О существенных переменных функций алгебры логики”, *Докл. АН СССР*, **172**:1 (1967), 9–10. [Yu. Ya. Breitbart, “Essential variables of functions of the algebra of logic”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **172**:1 (1967), 9–10 (In Russian)].

Информация об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович, старший преподаватель кафедры математики и анализа данных, Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

Баротов Рузибой Нумонжонович, преподаватель кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова, Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова, г. Худжанд, Республика Таджикистан. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3729-6143

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Баротов Достонжон Нумонжонович
E-mail: DNBarotov@fa.ru

Поступила в редакцию 09.11.2024 г.
Поступила после рецензирования 17.02.2025 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the authors

Dostonjon N. Barotov, Senior Lecturer, Mathematics and Data Analysis Department, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5047-7710

Ruziboy N. Barotov, Lecturer, Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov Department, Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Republic of Tajikistan. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3729-6143

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Dostonjon N. Barotov
E-mail: DNBarotov@fa.ru

Received 09.11.2024
Reviewed 17.02.2025
Accepted for press 13.03.2025