ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 149 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40

УДК 517.938

О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В статье рассматриваются движения динамической системы g^t, заданной на топологическом компактном многообразии V.

Показано, что множество M_1 неблуждающих относительно V точек является множеством центральных движений $\mathfrak{M}$, а в множестве $\mathfrak{M}$ всюду плотно объединение всех компактных минимальных множеств. Установлено, что для любого движения $f(t,p)$ найдется компактное минимальное множество $\Omega \subset V$, обладающее следующим свойством: для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждой окрестности E_Ω множества Ω вероятность принадлежности дуги $\{f(t,p)\colon t \in [t_0, t_1]\}$ траектории движения $f(t,p)$ множеству E_Ω стремится к единице при $t_1 \to +\infty$; аналогичное утверждение справедливо также и для дуги $\{f(t,p)\colon t \in [-t_1, t_0]\}$.

Все утверждения настоящей статьи без каких-либо изменений переносятся на систему g^t, заданную в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве.

Ключевые слова: топологическое многообразие, динамические системы, множество центральных движений, вероятностные свойства движений

Для цитирования: *Дзюба С.М.* О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 28–40. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40

On some properties of motions of dynamical systems on compact manifolds

Sergei M. DZYUBA

Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. The article considers the motions of dynamical system g^t defined on a topological compact manifold V.

It is shown that the set M_1 of non-wandering points with respect to V is the set of central motions $\mathfrak{M}$, and the union of all compact minimal sets is everywhere dense in the set $\mathfrak{M}$. It is established that for any motion $f(t,p)$, there exists a compact minimal set $\Omega \subset V$ with the following property: for all values $t_0 \in \mathbb{R}$ and every neighborhood E_Ω of the set Ω, the probability that the arc $\{f(t,p)\colon t \in [t_0, t_1]\}$ of the motion trajectory $f(t,p)$ belongs to the set E_Ω, tends to 1 as $t_1 \to +\infty$; a similar statement is true for the arc $\{f(t,p)\colon t \in [-t_1, t_0]\}$.

All statements of this article can be transferred without any changes to the system g^t defined in a Hausdorff sequentially compact topological space.

Keywords: topological manifold, dynamical systems, set of central motions, probabilistic properties of motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. On some properties of motions of dynamical systems on compact manifolds. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 28–40. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40

Введение

Пусть V — топологическое компактное многообразие размерности n и $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times V \to V$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times V$;

(b) для всех $p \in V$

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

По определению g^t представляет собой *динамическую систему*, для которой установлены все базовые понятия и свойства общей теории динамических систем (см. [1, гл. VII]). Поэтому будем говорить, что для любого $p \in V$ функция $t \to f(t,p)$ — *движение* (см. [2, с. 347]).

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [1, с. 194]). Первые результаты построения основ такой теории сведены Биркгофом вместе в [1, гл. VII]. Дальнейшее развитие результатов Биркгофа изложено в [2, гл. V]. Как это ни покажется странным, с тех пор, до еще совсем недавнего прошлого, ничего принципиально нового в данной области получено не было (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в статьях [4] и [5] было существенным образом упрощено устоявшееся представление о взаимоотношении движений в метрическом пространстве Σ и установлено полное взаимоотношение движений на компактном многообразии V. Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов статьи [5], направленное на изучение структуры множества неблуждающих точек и общих вероятностных свойств движений системы g^t, заданной на V.

1. Произвольные и рекуррентные движения

Первым типом движений, который выделил Биркгоф, было рекуррентное движение (см. [1, с. 194]). Поэтому, прежде всего, остановимся на этом фундаментальном понятии, которое будет определять все дальнейшие построения.

Зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$ многообразия V, где Φ_s — некоторая открытая часть пространства $\mathbb{R}^n$ и φ_s — гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. При этом, поскольку V компактно, можем считать, что число S конечно.

Напомним, что множество M называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см. [1, с. 203]).

Следуя Биркгофу, будем называть любое движение $f(t,p)$ системы g^t, расположенное в компактном минимальном множестве M, рекуррентным. Кроме того, заметим, что Биркгоф фактически доказал следующее (см. [1, с. 203]): *для рекуррентности движения $f(t,p)$ на V необходимо и достаточно, чтобы для каждого сколь угодно малого положительного числа ε нашлось такое $T_\varepsilon > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ существует* *такое* $t \in [\sigma, \sigma + T_\varepsilon]$, *что*

$$\|\varphi_s^{-1}(f(\tau,p)) - \varphi_s^{-1}(f(t,p))\| < \varepsilon$$

на одном из множеств Φ_s. Более того, Биркгоф установил, что *на* V ω *- и* α *-предельные множества любого движения всегда содержат рекуррентные движения* (см. [1, с. 204]).

В дальнейшем при исследовании рекуррентных движений системы g^t мы будем интерпретировать многообразие V как полуметрическое пространство с отделимой структурой.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [6, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma\colon \Gamma\times\Gamma \to [0,+\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p,q) \in \Gamma\times\Gamma$

$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p,p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p,q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma, q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p,q) \leq d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p,q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [6, с. 456]).

Заметим теперь, что многообразие V полуметризуемо как топологическое компактное пространство (см. [6, с. 458]). Полуметрики на V мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторую точку $x \in V$, некоторую ее окрестность E_x и зададим непрерывную функцию $\gamma\colon V \to [0,+\infty)$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in E_x$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p,q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V (см. [6, с. 457]).

Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_{E_x}}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p,q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех окрестностях E_x всех точек $x \in V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология $\mathcal{T}'$ вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где

$$I = \bigcup_{E_x} I_{E_x}.$$

З а м е ч а н и е 1.1. Множество $E \subset V$ открыто в топологии $\mathcal{T}'$ тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой x оно содержит некоторый шар

$$B_\gamma(x,\varepsilon) = \{p \in V: \ d_\gamma(x,p) < \varepsilon\}$$

(см. [6, с. 456]). Очевидно, что эта топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{T}$, введенной на V атласом $(\Phi_s, \varphi_s)_{s\in S}$.

Полное взаимоотношение произвольных и рекуррентных движений системы g^t на многообразии V устанавливает следующая

Теорема 1.1. *Пусть $f(t,p)$ — некоторое движение системы g^t. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существуют рекуррентные движения $f(t,q)$ и $f(t,r)$, обладающие следующими свойствами*:

(i) *равномерно на каждом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t+N_{k_l},p), f(t,q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t-N_{k_l},p), f(t,r)) = 0, \quad i \in I;$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$*

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t+N_{k_{l+1}}-N_{k_l},q), f(t,q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l\to+\infty} d_i(f(t-N_{k_{l+1}}+N_{k_l},r), f(t,r)) = 0, \quad i \in I.$$

При этом ω- и α-предельные множества движения $f(t,p)$ — компактные минимальные множества.

Теорема 1.1 непосредственно следует из теорем 3.1 и 4.1 работы [5]. Поэтому ее доказательство здесь мы не приводим.

Для полноты картины заметим теперь, что согласно [5] (теорема 2.1 и следствие 3.1 указанной работы) структура рекуррентного движения может быть уточнена, так как имеет место следующая

Теорема 1.2. *На компактном многообразии V необходимое и достаточное условие рекуррентности движения $f(t,p)$ состоит в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d_i(f(t,p), f(t+N_\varepsilon,p)) < \varepsilon, \quad i \in I.$$

2. Множество центральных движений

В развитие понятия рекуррентного движения Биркгоф ввел в рассмотрение понятие региональной рекуррентности (см. [1, с. 194]). Здесь мы остановимся на этом понятии в его классической форме множества центральных движений (см. [1, с. 195–200]).

Напомним, что точка $p \in V$ называется *блуждающей*, если найдется такая ее окрестность E_p и такое $T > 0$, что

$$E_p \cap f(t, E_p) = \varnothing$$

для всех $t \geq T$. При этом неизбежно оказывается, что

$$E_p \cap f(-t, E_p) = \varnothing$$

для всех $t \geq T$.

Множество E блуждающих точек открыто и инвариантно. Поэтому множество

$$M_1 = V \setminus E$$

неблуждающих относительно V точек замкнуто (и, потому, компактно) и инвариантно.

Вообще говоря, Биркгоф допускал, что множество M_1 может содержать компактное инвариантное множество точек M_2, неблуждающих относительно M_1. Значит, согласно допущению Биркгофа может существовать такая вполне упорядоченная система компактных инвариантных множеств

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_\beta \supset M_{\beta+1} \supset \ldots, \tag{2.1}$$

занумерованных порядковыми числами первого и, возможно, второго классов, что точки каждого последующего множества являются неблуждающими относительно предыдущего. Однако, всегда найдется такое число α не выше второго класса, что последовательность (2.1) обрывается, т. е. что

$$M_\alpha = M_{\alpha+1} = \ldots$$

(см. [1, с. 199]). Такое множество M_α Биркгоф назвал *множеством центральных движений*. В дальнейшем мы будет обозначать это множество через $\mathfrak{M}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ — компактное инвариантное множество, не содержащее ни одного собственного подмножества, содержащего неблуждающие относительно $\mathfrak{M}$ точки. Кроме того, заметим, что любое компактное минимальное множество M является частью $\mathfrak{M}$. Более точную структуру множества $\mathfrak{M}$ устанавливает следующая

Теорема 2.1. *В множестве $\mathfrak{M}$ всюду плотно объединение всех компактных минимальных множеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ — множество нерекуррентных движений, расположенных в $\mathfrak{M}$, и предположим, что это множество непусто.

Пусть $f(t,p)$ — произвольное движение из $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ и пусть $E_p \subset \mathfrak{M}$ — некоторая окрестность точки p. Если E_p не содержит точек минимальных множеств, то в силу теоремы 1.1 точка p — блуждающая, что невозможно. □

Приведенная выше конструкция построения множества $\mathfrak{M}$ может быть принципиально упрощена, поскольку справедлива следующая

Теорема 2.2. *Множество M_1 последовательности* (2.1) *является множеством центральных движений $\mathfrak{M}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если V — минимальное множество, то теорема 2.2 верна, поскольку в этом случае $V = M_1$. Поэтому рассмотрим случай, в котором множество $\mathcal{F}_V$ всех нерекуррентных движений, расположенных в V, непусто.

Пусть $f(t,p)$ — произвольное движение из $\mathcal{F}_V$ и пусть Ω и A — соответственно ω- и α-предельные множества этого движения. Согласно теореме 1.1 оба множества Ω и A компактны и минимальны. Значит, если множество $\mathfrak{M}$ не совпадает множеством V, то $M_1 = \mathfrak{M}$, что следует из теоремы 2.1. □

3. Простейшие иллюстративные примеры

Почти все известные примеры построения последовательности (2.1) носят формальный характер, иллюстрирующий соответствующие рассуждения. Поэтому такие примеры нередко бывают ошибочными. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, прежде всего, следующие два простейших примера.

Пример 3.1. На топологическом компактном многообразии

$$V = \{(x_1, x_2):\ x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$$

зададим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \tag{3.1}$$

и положим $x_{1_0} \in (0,1)$ и $x_{2_0} \in (0,1)$. В полярных координатах (r,θ) эта система может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Значит, ω-предельным множеством движения $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ системы (3.1) является орбитально устойчивый предельный цикл

$$C = \{(x_1, x_2):\ x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

а α-предельным множеством — неустойчивый фокус $O(0,0)$.

Следуя [2, с. 375], наряду с (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = [-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2)], \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_2 = [x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2)]. \tag{3.3}$$

В координатах (r,θ) система (3.2), (3.3) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)(1 + r^2 - 2r\cos\theta), \quad \dot{\theta} = (1 + r^2 - 2r\cos\theta). \tag{3.4}$$

В [2, с. 375] считается, что движение $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ системы (3.2), (3.3) осуществляется по соответствующей кривой L уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2)$$

или, что эквивалентно, по соответствующей траектории системы (3.1). Если это так, то цикл C распадается на положение равновесия $A(1,0)$ и дугу $C \setminus A$, причем траектория K движения $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ наматывается на C как спираль. Поэтому согласно [2, с. 376] для системы (3.2), (3.3) приходится принять

$$M_1 = A \cup (C \setminus A) \cup O.$$

Тогда мы приходим к выводу, что

$$M_2 = \mathfrak{M} = A \cup O.$$

Последнее, однако, неверно.

В самом деле, для всех $r_0 \in (0,1)$ непродолжаемое решение $(r(t), \theta(t))$ системы (3.4) с начальным условием

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \pi$$

ограничено при $t \to +\infty$, поскольку ω-предельным множеством данного решения является положение равновесия $\{r = 1\}, \{\theta = 2\pi\}$. Однако, из ограниченности $\theta(t)$ при $t \to +\infty$ следует, что траектория K не может наматываться на C.

Таким образом, движение $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ не осуществляется по кривой L. Кроме того, ограниченность $\theta(t)$ при $t \to +\infty$ означает, что ω-предельным множеством движения $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ является положение равновесия A. Следовательно,

$$M_1 = \mathfrak{M} = A \cup O.$$

Это и утверждает теорема 2.2.

П р и м е р 3.2. Пусть $\mathbb{T}^2$ — тор с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. На действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = \lambda, \tag{3.5}$$

где λ — некоторое положительное иррациональное число. Траектории системы (3.5) порождают на $\mathbb{T}^2$ эргодический поток (см., например, [7, с. 450]), т. е. каждое движение данной системы является рекуррентным, а траектория этого движения всюду плотна на $\mathbb{T}^2$.

Теперь, следуя [2, с. 365], на $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2). \tag{3.6}$$

В [2, с. 365] считается, что движения системы (3.6) осуществляются по кривым уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda$$

или, что эквивалентно, по траекториям системы (3.5). Отсюда в [2, с. 365] делается вывод, что на $\mathbb{T}^2$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.6) порождает три типа движений:

(d) положение равновесия $O(0,0)$;

(e) положительно асимптотические по отношению к O и отрицательно устойчивые по Пуассону;

(f) отрицательно асимптотические по отношению к O и положительно устойчивые по Пуассону.

Если это так, то траектории всех движений типа (e) и (f) системы (3.6) (по определению нерекуррентных) всюду плотны на $\mathbb{T}^2$. Поэтому для этой системы

$$M_1 = \mathfrak{M} = \mathbb{T}^2 \tag{3.7}$$

(см. [2, с. 373]). Последнее, однако, неверно.

В самом деле, очевидно, что на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.6) эквивалентна системе

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \lambda \pi x_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} x_2 + \sin^2 \pi x_2). \tag{3.8}$$

Поскольку λ — иррациональное число, то правые части системы (3.8) не являются периодическими. Значит, движения данной системы, отличные от O, не могут быть представлены на $\mathbb{T}^2$.

Таким образом, движения системы (3.6) не осуществляются по траекториям системы 3.5. Более того, согласно теореме 1.1 траектории движений типа (e) и (f) нигде не плотны на $\mathbb{T}^2$. Поэтому разговор о справедливости цепочки (3.7) лишен какого-либо смысла. Без дополнительного изучения можно лишь утверждать, что множество $\mathfrak{M}$ является собственной частью тора $\mathbb{T}^2$ и что $O \subset \mathfrak{M}$.

З а м е ч а н и е 3.1. Важнейшее значение примеров 3.1 и 3.2 состоит в том, что они тривиальным образом иллюстрируют следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.1: *на топологическом компактном многообразии V не существует ни устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, ни притягивающих множеств типа гомоклинического или гетероклинического аттрактора.*

4. Пример Майера

Обратимся теперь к гораздо более сложному примеру, который имеет ярко выраженный концептуальный характер.

П р и м е р 4.1. Одним из самых сложных примеров построения множества $\mathfrak{M}$ является пример Майера (см. [2, с. 380–389]).

Суть примера Майера состоит в следующем: на некоторой компактной части $\mathfrak{T}$ пространства $\mathbb{R}^3$ строится система дифференциальных уравнений, имеющая такое множество центральных движений $\mathfrak{M} = M_\alpha$, что порядковое число α оказывается числом, большим любого другого наперед заданного числа второго класса β.

Детальное обсуждение примера Майера едва ли возможно ввиду его чрезвычайной громоздкости. Кроме того, подробное обсуждение усложняется еще и тем, что этапы построения этого примера содержат ряд важнейших недоказанных утверждений. Так, в нем формально дважды осуществляется переход, полностью аналогичный переходам от системы (3.1) к системе (3.2), (3.3) в примере 3.1 и от системы (3.5) к системе (3.6) в примере 3.2 и оказавшихся в этих примерах некорректными.

Рассмотрим первый из упомянутых переходов.

По условию множество $\mathfrak{T}$ содержит окружность

$$C = \{(x_1, x_2, x_3):\ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 = 0\}.$$

Пусть ξ — длина дуги данной окружности с выбранными точкой отсчета P и направлением обхода. На первом этапе примера Майера в некоторой окрестности точки P строятся дуги

$$L_1, L_2, \dots, L_\omega, L_{\omega+1}, \dots, L_\gamma, \dots, L_\beta, \tag{4.1}$$

каждая из которых допускает представление

$$L_\gamma(\xi) = (x_{1,\gamma}(\xi),\, x_{2,\gamma}(\xi),\, x_{3,\gamma}(\xi)),$$

где каждая функция $\xi \to x_{i,\gamma}(\xi)$ имеет непрерывную производную

$$\frac{dx_{i,\gamma}}{d\xi}, \quad i = 1, 2, 3,$$

вне сколь угодно малой окрестности E_P точки P. В [2, с. 381] утверждается, что на основании только лишь этого на $\mathfrak{T}$ могут быть построены функции F_i, локально удовлетворяющие условию Липшица вне E_P, такие, что все непродолжаемые решения автономной системы

$$\frac{dx_i}{d\xi} = F_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.2}$$

определены для всех $\xi \in \mathbb{R}$, причем все дуги (4.1) расположены на соответствующих кривых данной системы.

Очевидно, что без доказательства существования системы (4.2), обладающей указанными в [2, с. 381] свойствами, пример Майера превращается в некую аксиому. Однако, мы не будем прерывать обсуждение на столь ранней стадии и предположим, что такая автономная система может существовать.

Приняв это, заметим, что далее в [2, с. 381] формальной подстановкой

$$d\xi = \mu(x_1, x_2, x_3)\, dt,$$

где

$$\mu(x_1, x_2, x_3) \geq 0,$$

наряду с системой (4.2) вводится в рассмотрение система

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.3}$$

Система (4.3) отличается от системы (4.2) тем, что в ней точка P становится положением равновесия. В результате все функции G_i удовлетворяют условию Липшица на $\mathfrak{T}$. При этом утверждается, что движения, соответствующие решениям системы (4.3), определенным при $t \in \mathbb{R}$, осуществляются по кривым системы (4.2) (см. [2, с. 382]).

Аналогичным образом, формальной подстановкой

$$dt = \nu(x_1, x_2, x_3)\, d\tau,$$

где

$$\nu(x_1, x_2, x_3) \geq 0,$$

производится переход от системы (4.3) к новой системе

$$\frac{dx_i}{d\tau} = H_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.4}$$

в которой функции H_i удовлетворяют условию Липшица на $\mathfrak{T}$, как и функции G_i в системе (4.3).

Как утверждается, движения, соответствующие решениям системы (4.4), определенным при $\tau \in \mathbb{R}$, осуществляются по траекториям системы (4.3), т. е. по кривым системы (4.2). Более того, система (4.4) содержит несчетное множество $\mathcal{P}$ положений равновесия, содержащее точку P (см. [2, с. 388]). После перехода к системе (4.4) должна получиться последовательность траекторий

$$K_1, K_2, \ldots, K_\omega, K_{\omega+1}, \ldots, K_\beta \tag{4.5}$$

данной системы, обладающая следующим свойством: ω- или α-предельными точками движений на любой траектории K_δ при всех числах $\gamma > \delta$ являются точки траекторий K_γ и только они. В результате этого и образуется множество M_α, $\alpha > \beta$.

Очевидно, что говорить о построении последовательности (4.5) можно лишь тогда, когда переход от системы (4.3) к системе (4.4) корректен. Однако, какое-либо обоснование корректности каждого из указанных выше переходов в [2, с. 387, 388] отсутствует. Кроме того, в примерах 3.1 и 3.2 мы видели, что создание даже одного положения равновесия в простейшей системе принципиально меняет качественную картину поведения траекторий. Следовательно, без соответствующего полного и подробного обоснования разговор о построении последовательности (4.5) теряет какой-либо смысл.

Остается добавить, концепция примера Майера опровергается как теоремой 1.1, так и теоремой 2.2.

З а м е ч а н и е 4.1. Очевидно, что пример Майера содержит слишком много противоречивых утверждений аксиоматического характера. Только этим можно объяснить то, что данный пример был исключен из перевода [8] монографии [2].

5. Вероятностные свойства движений

Общие вероятностные свойства последовательности (2.1) были изучены еще Биркгофом (см. [1, с. 201]).

Принимая во внимание теорему 2.2, здесь мы не будем останавливаться на соответствующей теореме Биркгофа, а ограничимся лишь следующим определением (см. [1, с. 390]).

Пусть $f(t,p)$ — произвольное движение и пусть E — некоторая открытая часть многообразия V. Тогда для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t_1 > t_0$ *вероятность принадлежности* дуги $\{f(t,p)\colon t \in [t_0,t_1]\}$ траектории K движения $f(t,p)$ множеству E есть величина

$$\frac{\operatorname{mes} E(t_0,t_1)}{t_1 - t_0}, \tag{5.1}$$

где $\operatorname{mes} E(t_0,t_1)$ — обычная лебегова линейная мера множества тех $t \in [t_0,t_1]$, для которых $f(t,p) \in E$.

З а м е ч а н и е 5.1. Поскольку множество E открыто и отображение f непрерывно, вероятность (5.1) определена для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t_1 > t_0$.

Вероятностные свойства движений системы g^t на топологическом компактном многообразии V устанавливает следующая

Теорема 5.1. *Пусть $f(t,p)$ — некоторое движение системы g^t. Тогда существуют компактные минимальные множества Ω и A, обладающие следующим свойством: для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и любых окрестностей E_Ω и E_A множеств Ω и A*

$$\lim_{t_1 \to +\infty} \frac{\operatorname{mes} E_\Omega(t_0,t_1)}{t_1 - t_0} = 1 \tag{5.2}$$

и

$$\lim_{t_1 \to +\infty} \frac{\operatorname{mes} E_\mathrm{A}(-t_1,t_0)}{t_1 - t_0} = 1. \tag{5.3}$$

Доказательство. Прежде всего, зафиксируем произвольное движение $f(t,p)$. Пусть Ω и A — соответственно ω- и α-предельные множества движения $f(t,p)$, согласно теореме 1.1 компактные и минимальные. Для простоты обозначений положим

$$M' = \Omega \cup \mathrm{A} \tag{5.4}$$

и заметим, что в силу свойства (i) теоремы 1.1 для каждой окрестности E множества M' существуют натуральное N и положительное T, удовлетворяющие следующему условию: всегда можно указать N интервалов длины T, таких, что при всех t, не принадлежащих ни одному из них, точка $f(t,p)$ лежит в E (см. [1, с. 390]). Отсюда непосредственно следуют равенства (5.2) и (5.3). □

Следствие 5.1. *Любая окрестность E множества M', задаваемого равенством* (5.4)*, обладает следующим свойством*:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \frac{\operatorname{mes} E(-\tau,\tau)}{2\tau} = 1.$$

Замечание 5.2. Теорема 1.1 справедлива для системы g^t, заданной в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ (см. [9]). Поэтому теоремы 2.1–5.1 и следствие 5.1 также справедливы в Γ.

References

[1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[3] D. N. Cheban, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, HPC Publ., New York, 2009.

[4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, "О взаимоотношении движений динамических систем", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "On the interrelation of motions of dynamical systems", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].

[5] S. M. Dzyuba, "On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds", *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[6] Л. Шварц, *Анализ.* Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys.* V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[7] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЛКИ, М., 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Ordinary differential equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[8] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press Publ., Princeton, 1960.

[9] С. М. Дзюба, "О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве", *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, "On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Поступила в редакцию 20.06.2024 г.
Поступила после рецензирования 02.12.2024 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Received 20.06.2024
Reviewed 02.12.2024
Accepted for press 13.03.2025