Том 30, № 151 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254
УДК 517.54

Оценки в классе аналитических функций, связанных с овалом Кассини, и некоторые их применения

Федор Федорович МАЙЕР, Мейрамбек Габдуалиевич ТАСТАНОВ, Анар Алтаевна УТЕМИСОВА, Гульнар Жалгасовна БЕРДЕНОВА
НАО «Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы»
110000, Республика Казахстан, г. Костанай, ул. А. Байтурсынова, 47

Аннотация. Вводится и исследуется класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ аналитических в открытом единичном круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots,$ $n \geq 1,$ подчиненных функции $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1-\lambda)z/(1-\lambda z^2),$ $0 \leq \lambda < 1.$ С геометрической точки зрения это означает, что множество значений функции $\varphi(z)$ содержатся в области $\varphi_\lambda(E),$ ограниченной овалом Кассини. Исследованы свойства мажоранты подчинения $\varphi_\lambda(z).$ На основе этого, опираясь на метод подчиненности аналитических функций, в классе $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ установлены точные оценки $\operatorname{Re}\varphi(z),$ $|\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|,$ в частном случае приводящие к одному из классических результатов. Рассмотрено применение данных оценок для исследования экстремальных свойств некоторых классов аналитических в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots,$ $n \geq 1.$ В частности, получены теоремы роста, покрытия и радиусы выпуклости одного класса звездообразных функций, который построен с использованием функции $\varphi_\lambda(z)$ и обобщает известный подкласс звездообразных функций Р. Сингха. Также даны приложения полученных результатов к исследованию некоторых классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, связанных с функцией $\varphi_\lambda(z).$ В частности, в этих классах установлены теоремы роста и найдены радиусы звездообразности.

Все полученные результаты являются точными, представляют собой как новые оригинальные результаты, так и некоторые обобщения известных результатов.

Ключевые слова: оценки аналитических функций, звездообразные функции, почти звездообразные функции, радиусы выпуклости, радиусы звездообразности

Для цитирования: *Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Берденова Г.Ж.* Оценки в классе аналитических функций, связанных с овалом Кассини, и некоторые их применения // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 238–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254

Estimates in the class of analytical functions related to the Cassini oval and some of their applications

Fedor F. MAIYER, Meirambek G. TASTANOV, Anar A. UTEMISSOVA, Gulnar Zh. BERDENOVA

NJSC "Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly"

47 A. Baitursynov St., Kostanay 110000, Republic of Kazakhstan

Abstract. In this article, we introduce and study a class $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ of functions $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots,\ n \geq 1,$ analytic in the open unit disk E, subordinate to the function $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1-\lambda)z/(1-\lambda z^2),\ \ 0 \leq \lambda < 1.$ From a geometric point of view, this means that the set of values of the function $\varphi(z)$ is contained within the region $\varphi_\lambda(E)$ bounded by the Cassini oval. The properties of the subordination majorant are investigated $\varphi_\lambda(z)$. Based on this, relying on the method of subordination of analytical functions, in the class $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, precise estimates are established for $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, and $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, leading to one of the classical results in a particular case. The application of these estimates to the study of extreme properties of some classes of analytical functions $f(z)$ of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots,$ $n \geq 1$ is considered. In particular, theorems of growth, covering, and radii of convexity are established for one class of starlike functions which is constructed by using the function $\varphi_\lambda(z)$ and generalizes the well-known subclass of starlike functions of R. Singh. Applications of the obtained results to the study of some classes of close-to-starlike and doubly close-to-starlike functions related to the function $\varphi_\lambda(z)$ are also given. In particular, in these classes, growth theorems are established and radii of starlikeness are found.

All obtained results are accurate, represent new original results as well as some generalizations of known results.

Keywords: estimates of analytical functions, starlike functions, close-to-starlike functions, radii of convexity, radii of starlikeness

Mathematics Subject Classification: 30C80, 30C45.

For citation: Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Berdenova G.Zh. Estimates in the class of analytical functions related to the Cassini oval and some of their applications. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 238–254. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254

Введение

Будем рассматривать аналитические в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функции $\varphi(z)$ с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots,\ n \geq 1$, класс которых обозначим через $\mathcal{A}_n$, а также аналитические в E нормированные функции $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots,\ \ n \geq 1,\ \ z \in E$, класс которых обозначим через $\mathcal{N}_n$. Пусть $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{A}_1,\ \mathcal{N} \coloneqq \mathcal{N}_1$.

Через $\mathcal{P}$ будем обозначать класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}$ с положительной вещественной частью $\operatorname{Re}\varphi(z) > 0,\ \ z \in E$, и пусть $\mathcal{P}_n$ — подкласс класса $\mathcal{P}$, функции которого принадлежат классу $\mathcal{A}_n$. При этом $\mathcal{P} \coloneqq \mathcal{P}_1$.

Напомним, что аналитическая в E функция $\varphi(z)$ называется подчиненной однолистной в E функции $\varphi_0(z)$, что обозначают в виде $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. При этом функция $\varphi_0(z)$ называется мажорантой подчинения.

В статье [1, § 9] изложены основные идеи и результаты применения принципа подчиненности к достаточным условиям однолистности. Развивая эту методологию, в [2] был предложен унифицированный способ определения подклассов класса S^0 выпуклых и класса S^* звездообразных функций с помощью условия подчиненности, то есть

$$S^0(\varphi_0) = \left\{ f \in \mathcal{N} :\ 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_0(z) \right\},\quad S^*(\varphi_0) = \left\{ f \in \mathcal{N} :\ z\frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) \right\}.$$

Здесь $\varphi_0(z)$ — это однолистная аналитическая в круге E функция, которая удовлетворяет условиям $\operatorname{Re}\varphi_0(z) > 0,\ \operatorname{Im}\varphi_0'(0) = 0,\ \varphi_0'(0) > 0$ и отображает круг E на область, симметричную относительно вещественной оси и звездообразную относительно точки $\varphi_0(0) = 1$. В унифицированных классах $S^*(\varphi_0)$ и $S^0(\varphi_0)$ в [2] были получены теоремы роста (искажения), покрытия и оценки коэффициентов.

Если $\varphi_0(z) = (1 + (1 - 2\alpha)z)/(1 - z),\ \ 0 \leq \alpha < 1$, то получаем классы S^0_α и S^*_α функций, выпуклых и звездообразных порядка α. При $\alpha = 0$ получаем классы S^0 и S^*.

Статья [2] дала толчок введению новых подклассов класса S^*. Например, в [3–5] исследовались, соответственно, классы функций $S^*_{\text{arsinh}} = S^*(1 + \operatorname{arsinh}(z)),\ \ S^*_{\sin} = S^*(1 + \sin z)$ и $S^*_\wp = S^*(1 + ze^z)$.

Подклассы класса $\mathcal{P}$ также удобно задавать в унифицированном виде

$$\mathcal{P}(\varphi_0) = \{\varphi(z) \in \mathcal{P} : \varphi(z) \prec \varphi_0(z)\},$$

где функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям $\varphi_0(0) = 1$ и $\operatorname{Re}\varphi_0(z) > 0,\ \ z \in E$.

Решение экстремальных задач в классе $\mathcal{N}$ часто опирается на различные оценки функций класса $\mathcal{P}(\varphi_0)$. При этом существенное значение имеют оценки функционалов

$$\max_{|z| \leq r}\ (\min) \operatorname{Re}\varphi(z),\quad \max_{|z| \leq r}\ (\min) |\varphi(z)|,\quad \max_{|z| \leq r} \left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \tag{0.1}$$

при $0 \leq r < 1$. Поэтому нахождение оценок $\operatorname{Re}\varphi(z),\ \ |\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ представляет собой как самостоятельный интерес, так и служит базой для дальнейших исследований.

В классах $\mathcal{P}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ и $\mathcal{P}(1 + z)$ точные оценки данных функционалов были получены в [6,7], их обобщения для классов $\mathcal{P}\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)$ и $\mathcal{P}_n\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)$, где $-1 < c \leq 1$, получены в [8,9], а для класса $\mathcal{P}_n\left(\left(\frac{1+z}{1-cz}\right)^\gamma\right)$, где $0 < \gamma \leq 1$, — в [10].

В настоящей статье на основе подчиненности вводится новый класс аналитических функций, множество значений которых содержится в области, ограниченной овалом Кассини. В данном классе найдены точные оценки функционалов (0.1) и даны некоторые их применения.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1. [11, p. 356]. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ — функции, аналитические в круге E. Функцию $\varphi(z)$ называют *подчиненной* функции $\varphi_0(z)$ и обозначают $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если существует аналитическая в круге E функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, такая, что $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$. В случае, когда функция $\varphi_0(z)$ является однолистной E, подчиненность $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ равносильна тому, что $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Если $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, $n \geq 1$, то из подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ следует, что $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ для всех r, $0 \leq r < 1$. Используя геометрические свойства области $\varphi_0(|z| \leq r^n)$, из условия $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ можно получить оценки $\operatorname{Re}\varphi(z)$, $\operatorname{Im}\varphi(z)$ и $|\varphi(z)|$ в круге $|z| \leq r$ при $0 \leq r < 1$.

Основой для получения оценок $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ является следующее утверждение.

Лемма 1.1. [11, p. 323]. *Если функция $\omega(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, $n \geq 1$, является аналитической в круге E и $|\omega(z)| < 1$ в E, то имеют место точные оценки*

$$|\omega(z)| \leq |z|^n, \tag{1.1}$$

$$\frac{|\omega'(z)|}{1 - |\omega(z)|^2} \leq \frac{n\,|z|^{n-1}}{1 - |z|^{2n}}. \tag{1.2}$$

Также нам потребуется следующее утверждение, являющееся эффективным примером применения метода дифференциальной подчиненности.

Лемма 1.2. [12]. *Пусть функция $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, $n \geq 1$, является аналитической в круге E, а $\varphi_0(z)$ однолистна в E и звездообразна относительно точки $w = c_0$. Тогда если $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, то*

$$\int_0^z (\varphi(t) - c_0)\,\frac{dt}{t} \prec \frac{1}{n}\int_0^z (\varphi_0(t) - c_0)\,\frac{dt}{t}.$$

2. Основной результат. Класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ и свойства его функций

2.1. Свойства функции $\varphi_\lambda(z)$

В статье [13] при исследовании обобщенных типично-вещественных функций рассматривалась однолистная функция

$$k_{p,q}(z) = \frac{z}{(1-pz)\,(1-qz)}, \quad -1 \leq p, q \leq 1,$$

которая сводится к функции Кебе $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ при $p = q = 1$. Другим частным случаем функции $k_{p,q}(z)$ является функция

$$k_{p,-p}(z) = \frac{z}{1 - p^2 z^2} = \frac{z}{1 - \lambda z^2} \coloneqq h_\lambda(z), \quad 0 \leq \lambda = p^2 \leq 1. \tag{2.1}$$

Как следует из [13] (подробнее в [14]), при увеличении λ от 0 до 1 область $h_\lambda(E)$ трансформируется из круга $|w| < 1$ в выпуклую область, которая переходит в невыпуклую односвязную область, ограниченную овалом Кассини. При $\lambda \to 1$ область $h_\lambda(E)$ преобразуется в плоскость с двумя разрезами по мнимой оси от точек $\pm i/2$ до ∞.

Введем функцию

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}, \quad 0 \le \lambda < 1. \tag{2.2}$$

Очевидно, что $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1-\lambda)h_\lambda(z)$, $0 \le \lambda < 1$.

Непосредственно из формулы (2.2) вытекает

С в о й с т в о 2.1. Функция $\varphi_\lambda(z)$ из (2.2) удовлетворяет условиям

$$\varphi_\lambda(\overline{z}) = \overline{\varphi_\lambda(z)}, \quad \varphi_\lambda(-z) - 1 = -\left(\varphi_\lambda(z) - 1\right), \quad z \in E.$$

Таким образом, при любом r, $0 \le r < 1$, область $\varphi_\lambda(|z| < r)$ является симметричной относительно вещественной оси и симметричной относительно точки $w = 1$. Таким образом, область $\varphi_\lambda(E)$ является двояко симметричной относительно прямых $\operatorname{Im} w = 0$ и $\operatorname{Re} w = 1$.

С в о й с т в о 2.2. Функция $\varphi_\lambda(z)$ является звездообразной в E относительно точки $w = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $h_\lambda(z) = \frac{z}{1-\lambda z^2}$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(1 + \lambda z^2\right) > 0, \quad z \in E.$$

Поэтому $h_\lambda(z) \in S^*$. Значит, и функция $\varphi_\lambda(z)$ является звездообразной в круге E. □

С в о й с т в о 2.3. Для функции $\varphi_\lambda(z)$ из (2.2) для всех r, $0 \le r < 1$, имеют место равенства

$$\min_{|z|\le r} |\varphi_\lambda(z)| = \min_{|z|\le r} \operatorname{Re}\varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(-r), \quad \max_{|z|\le r} |\varphi_\lambda(z)| = \max_{|z|\le r} \operatorname{Re}\varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(r), \tag{2.3}$$

$$\max_{|z|\le r} |\varphi_\lambda(z) - 1| = |\varphi_\lambda(\pm r) - 1|. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) в круге $|z| \le r$ имеем

$$|\varphi_\lambda(z)| \le 1 + \left|\frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}\right| \le 1 + \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = \varphi_\lambda(r).$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Re}\ \varphi_\lambda(z) \ge 1 - \left|\frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}\right| \ge 1 - \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = \varphi_\lambda(-r).$$

Поэтому

$$\varphi_\lambda(-r) \le \operatorname{Re}\varphi_\lambda(z) \le |\varphi_\lambda(z)| \le \varphi_\lambda(r).$$

Поскольку здесь знак равенства достигается в точке $z = -r$ (слева) и в точке $z = r$ (справа), то это доказывает равенства (2.3). Аналогично предыдущему получаем оценку

$$|\varphi_\lambda(z) - 1| = \left|\frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}\right| \le \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = |\varphi_\lambda(\pm r) - 1|,$$

которая достигается в точках $z = \pm r$. Отсюда вытекает (2.4). □

2.2. Класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ и оценки аналитических функций

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что *функция* $\varphi(z)$ *принадлежит классу* $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, если функция $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \prec \varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)\,z}{1-\lambda z^2}, \quad 0 \le \lambda < 1.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0 \le \lambda < 1$. *Тогда в круге* $|z| \le r$, $0 \le r < 1$, *имеют место точные оценки*

$$1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \le \mathrm{Re}\ \varphi(z) \le 1 + \frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \tag{2.5}$$

$$1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \le |\varphi(z)| \le 1 + \frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \tag{2.6}$$

$$|\varphi(z) - 1| \le \frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \tag{2.7}$$

$$\left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \le m(r), \quad m(r) = \frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-(1-\lambda)\,r^n - \lambda r^{2n}}\frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}}, \tag{2.8}$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_\lambda(z^n)$, *где* $\varphi_\lambda(z)$ *— функция из* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и $\varphi(z) \prec \varphi_\lambda(z)$, то для всех r, $0 \le r < 1$, выполнено $\varphi(|z| \le r) \subset \varphi_\lambda(|z| \le r^n)$. Поэтому из равенств (2.3),(2.4) в круге $|z| \le r$ получаем оценки (2.5)–(2.7).

Для доказательства оценки (2.8) обозначим $\Phi(z) = \ln\ \varphi(z)$, $\Phi_\lambda(z) = \ln\ \varphi_\lambda(z)$. Так как $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, то $\Phi(z) \prec \Phi_\lambda(z)$ и $\Phi(z) = c_n z^n + c_{n+1}z^{n+1} + \ldots$. Поэтому по определению подчиненности функций существует функция $\omega(z) = b_n z^n + b_{n+1}z^{n+1} + \ldots$, $n \ge 1$, такая, что $|\omega(z)| < 1$ и $\Phi(z) = \Phi_\lambda(\omega(z))$. Отсюда

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \equiv \Phi'(z) = \Phi'_\lambda(\omega(z))\omega'(z). \tag{2.9}$$

Используя формулу (2.2), находим

$$\Phi'_\lambda(z) = (1-\lambda)\,\frac{1+\lambda z^2}{1-\lambda z^2}\,\frac{1}{1+(1-\lambda)z - \lambda z^2}.$$

Отсюда

$$|\Phi'_\lambda(z)| \le (1-\lambda)\,\frac{1+\lambda\,|z|^2}{1-\lambda\,|z|^2}\,\frac{1}{1-(1-\lambda)\,|z| - \lambda\,|z|^2}.$$

Поэтому в силу (2.9) имеем

$$\left|\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \le (1-\lambda)\,\frac{1+\lambda\,|\omega(z)|^2}{1-\lambda\,|\omega(z)|^2}\,\frac{1}{1-(1-\lambda)\,|\omega(z)| - \lambda\,|\omega(z)|^2}\,|\omega'(z)|\,.$$

Отсюда на основе неравенства (1.2) получаем

$$\left| z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \le \frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-r^{2n}}\frac{1+\lambda\,|\omega(z)|^2}{1-\lambda\,|\omega(z)|^2}\,\frac{1-|\omega(z)|^2}{1-(1-\lambda)\,|\omega(z)| - \lambda\,|\omega(z)|^2}.$$

Таким образом,

$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leq \frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-r^{2n}}H\left(x\right), \tag{2.10}$$

где $x = |\omega\left(z\right)| \in [0;1)$ и

$$H\left(x\right) = \frac{1+\lambda x^2}{1-\lambda x^2}\ \frac{1-x^2}{1-\left(1-\lambda\right)x-\lambda x^2}.$$

Функция

$$H_0\left(x\right) = \frac{1-x^2}{1-\left(1-\lambda\right)x-\lambda x^2}$$

является возрастающей на $[0;1]$, так как

$$H_0'\left(x\right) = \frac{\left(1-x\right)^2}{\left(1-\left(1-\lambda\right)x-\lambda x^2\right)^2} \geq 0, \quad x \in [0;1]\,.$$

Поскольку и функция $\frac{1+\lambda x^2}{1-\lambda x^2}$ является возрастающей на $[0;1]$, то функция $H\left(x\right)$ возрастает на $[0;1]$. Поэтому с учетом того, что в силу оценки (1.1) $x = |\omega\left(z\right)| \leq r^n$, находим:

$$H\left(x\right) \leq H\left(r^n\right) = \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}}\ \frac{1-r^{2n}}{1-\left(1-\lambda\right)r^n-\lambda r^{2n}}.$$

На основе данного неравенства и оценки (2.10) получаем оценку (2.8).

Точность оценок (2.5)–(2.8) следует из того, что для функции

$$\varphi(z) = \varphi_\lambda\left(z^n\right) = 1 + \frac{\left(1-\lambda\right)z^n}{1-\lambda z^{2n}}$$

в оценках (2.5)–(2.8) достигается знак равенства (в левых оценках (2.5),(2.6) и в оценке (2.8) — в точке $z = \sqrt[n]{-1}\,r$, в правых оценках (2.5),(2.6) — в точке $z = r$, в оценке (2.7) — в точках $z = \sqrt[n]{-1}\,r$ и $z = r$). □

Следствие 2.1. *Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ при $\lambda = 0$, то есть функция $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$ удовлетворяет условию $|\varphi\left(z\right)-1| < 1$, $z \in E$. Тогда в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки*

$$1 - r^n \leq \operatorname{Re}\varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq 1 + r^n, \quad |\varphi(z)-1| \leq r^n, \quad \left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| \leq \frac{nr^n}{1-r^n},$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = 1 + z^n$.

При $n = 1$ из следствия 2.1 вытекают оценки, полученные в [7].

3. Некоторые приложения

3.1. Свойства звездообразных функций обобщенного класса Р. Сингха

В статьях [15, 16] исследовался класс S_U^* звездообразных функций $f(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1\right| < 1, \quad z \in E. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что *функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $S_n^*(\varphi_\lambda)$ тогда и только тогда, когда $f(z)\in\mathcal{N}_n$ и $z\frac{f'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0\le\lambda<1$.

Поскольку в силу оценки (2.8) из условия $\varphi(z)=zf'(z)/f(z)\prec\varphi_\lambda(z)$ следует, что

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|\le\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}<1,$$

то $S_n^*(\varphi_\lambda)\subset S_U^*\subset S^*$.

Теорема 3.1. *Пусть* $f(z)\in S_n^*(\varphi_\lambda)$, $0\le\lambda<1$. *Тогда*

$$\ln\frac{f(z)}{z}\prec\psi_0(z)=\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}z}{1-\sqrt{\lambda}z}$$

и в круге $|z|\le r$, $0\le r<1$, *имеют место точные оценки*

$$1-\frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}\le\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\le\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le1+\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}},\tag{3.2}$$

$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|\le\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}},\tag{3.3}$$

$$\left|\operatorname{Re}\ln\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n},\tag{3.4}$$

$$\left|\arg\frac{f(z)}{z}\right|\equiv\left|\operatorname{Im}\ln\frac{f(z)}{z}\right|\le\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\lambda}r^n}{1-\lambda r^{2n}},\tag{3.5}$$

$$r\exp\left\{-\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n}\right\}\le|f(z)|\le r\exp\left\{\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n}\right\}.\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)&\exp\left\{-\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n}\right\}\\&\le|f'(z)|\le\left(1+\frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\exp\left\{\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n}\right\}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi(z)=z\frac{f'(z)}{f(z)}\prec\varphi_\lambda(z)=1+\frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}$, то оценки (3.2),(3.3) вытекают из оценок (2.5)–(2.7). Из условия $zf'(z)/f(z)\prec\varphi_\lambda(z)$ в силу леммы 1.2 получаем

$$\ln\frac{f(z)}{z}=\int_0^z\left(t\frac{f'(t)}{f(t)}-1\right)\frac{dt}{t}\prec\frac{1}{n}\int_0^z\frac{1-\lambda}{1-\lambda t^2}\,dt=\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}z}{1-\sqrt{\lambda}z}:=\psi_0(z).$$

Поскольку $\psi(z)=\ln\frac{f(z)}{z}\prec\psi_0(z)$, то для всех r, $0\le r<1$, имеет место соотношение $\psi(|z|\le r)\subset\psi_0(|z|\le r^n)$. Так как функция $\varphi_\lambda(z)-1=\frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}$ является звездообразной, то функция $\psi_0(z)=\int_0^z(\varphi_\lambda(t)-1)\frac{dt}{t}$ является выпуклой. Поскольку $\psi_0(|z|\le r^n)$ — выпуклая область, симметричная относительно осей координат, то отсюда вытекают следующие равенства

$$\max_{|z|\le r}|\operatorname{Re}\psi(z)|=\psi_0(r^n)=\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n},$$

$$\max_{|z|\le r}|\operatorname{Im}\psi(z)|=\psi_0\left(ir^n\right)=\arctan\frac{2\sqrt{\lambda}r^n}{1-\lambda r^{2n}}.$$

Отсюда следуют оценки (3.4) и (3.5). Оценка (3.6) вытекают из оценки (3.4).

Для доказательства оценки (3.7) перепишем оценку (3.2) в виде

$$\left(1-\frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\left|\frac{f\left(z\right)}{z}\right|\le\left|f'\left(z\right)\right|\le\left(1+\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\left|\frac{f\left(z\right)}{z}\right|.$$

Отсюда, используя оценку (3.6), приходим к оценке (3.7).

Все оценки точные и достигаются для функции

$$f_0(z)=z\exp\left\{\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}\,n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}\,z^n}{1-\sqrt{\lambda}\,z^n}\right\}.$$

□

Полагая в левой оценке (3.6) $r=1$, получаем теорему покрытия класса $S_n^*(\varphi_\lambda)$.

Следствие 3.1. *Для любой функции* $f(z)\in S_n^*(\varphi_\lambda)$ *образ круга* E *при отображении* $w=f(z)$ *содержит круг* $|w|<\exp\left\{-\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}}\right\}$.

Теорема 3.2. *Радиус выпуклости* r_0 *класса* $S_n^*(\varphi_\lambda)$ *определяется как единственный на интервале* $(0;1)$ *корень уравнения*

$$1-\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}-\frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-(1-\lambda)\,r^n-\lambda r^{2n}}\,\frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}}=0. \tag{3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi\left(z\right)=z\frac{f'(z)}{f(z)}$. Тогда

$$1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}=z\frac{f'(z)}{f(z)}+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\varphi(z)+z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\ge\operatorname{Re}\varphi(z)-\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|.$$

Поскольку $\varphi(z)\in\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, то, применяя левую оценку (2.5) и оценку (2.8), в круге $|z|\le r$ находим

$$\operatorname{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\ge1-\left(\frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}+\frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-(1-\lambda)\,r^n-\lambda r^{2n}}\,\frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}}\right):=1-g(r).$$

Поскольку функция $g(r)$ возрастает на $[0;1)$ от 0 до $+\infty$, то уравнение $1-g(r)=0$, а значит и уравнение (3.8) на $(0;1)$ имеет единственный корень r_0. Поэтому в круге $|z|\le r_0$ выполняется условие выпуклости $1+\operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)\ge0$. Следовательно, функция $f(z)$ является выпуклой в этом круге.

Для доказательства точности радиуса выпуклости r_0 рассмотрим экстремальную функцию $f_0(z)$, которую определим из уравнения $z\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi_\lambda\left(z^n\right)$. Тогда

$$1+z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}=1+\frac{(1-\lambda)\,z^n}{1-\lambda z^{2n}}+\frac{(1-\lambda)\,nz^n}{1+(1-\lambda)\,z^n-\lambda z^{2n}}\,\frac{1+\lambda z^{2n}}{1-\lambda z^{2n}}$$

и в точке $z = \sqrt[n]{-1}\, r$, где $r = r_0$, в условии выпуклости достигается знак равенства:

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}\right)\bigg|_{z=\sqrt[n]{-1}r} = 1 - \frac{(1-\lambda)\, r^n}{1-\lambda r^{2n}} - \frac{(1-\lambda)\, n r^n}{1-(1-\lambda)\, r^n - \lambda r^{2n}}\, \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} = 0.$$

□

При $\lambda = 0$ из уравнения (3.8) находим

$$r_0 = \left(\frac{1}{2}\left(2 + n - \sqrt{n\,(4+n)}\right)\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{3.9}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ln\frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n} = 2r^n, \quad \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{2\sqrt{\lambda}r^n}{1-\lambda r^{2n}} = 2r^n.$$

из теорем 3.1, 3.2 и следствия 3.1 получаем

Следствие 3.2. *Пусть функция $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$ удовлетворяет условию (3.1). Тогда в круге $|z| \le r$ имеют место точные оценки*

$$r\exp\left(-\frac{r^n}{n}\right) \le |f(z)| \le r\exp\left(\frac{r^n}{n}\right), \qquad \left|\arg\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right| \le \frac{r^n}{n},$$

$$(1-r^n)\exp\left(-\frac{r^n}{n}\right) \le |f'(z)| \le (1+r^n)\exp\left(\frac{r^n}{n}\right),$$

область $f(E)$ содержит круг $|w| < \exp\left(-\frac{1}{n}\right)$, а радиус выпуклости r_0 класса функций $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию (3.1), определяется по формуле (3.9).

При $n = 1$ из следствия 3.2 вытекают оценки для $|f\,(z)|$ и $|f'(z)|$ из [15] и значение радиуса выпуклости $r_0 = (3-\sqrt{5})/2$ класса S_u^* из [16].

3.2. Теоремы роста и радиусы звездообразности некоторых классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций

Определение 3.2. [17] Говорят, что *функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу K^* почти звездообразных функций*, тогда и только тогда, когда существует звездообразная функция $g(z)$ такая, что в круге E выполняется условие

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{g(z)} > 0. \tag{3.10}$$

Если же в условии (3.10) функция $g(z)$ является почти звездообразной, то функция $f(z)$ называется *дважды почти звездообразной функцией.*

Класс дважды почти звездообразных функций обозначим через CK^*.

Таким образом, $f(z) \in CK^*$ тогда и только тогда, когда для некоторой звездообразной функции $h(z)$ выполняются условия

$$\operatorname{Re}\frac{f(z)}{g(z)} > 0, \quad \operatorname{Re}\frac{g(z)}{h(z)} > 0, \quad z \in E. \tag{3.11}$$

Классы K^*, CK^* и некоторые их подклассы изучались в работах [6, 7, 17–19] и других. При этом, наряду с общим случаем, исследовались и случаи, когда вместо условий вида $\mathrm{Re}\,\varphi(z) > 0$ использовались другие условия, обеспечивающие принадлежность значений $\varphi(z)$ при $z \in E$ полуплоскости $\mathrm{Re}\,w > 0$, либо в качестве $g(z)$ в (3.10) или $h(z)$ в (3.11) использовались функции некоторых подклассов класса S^* или конкретные звездообразные функции.

Определение 3.3. Будем говорить, что при некоторых фиксированных η и γ, $0 < \gamma \le 1$, $0 \le \eta \le 1$, *функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $K_n^*(\eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \in \mathcal{A}_n$ и выполняется условие

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{h_\eta(z)}\right)^{1/\gamma} > 0,$$

где функция $h_\eta(z)$ *определена по формуле* (2.1).

Определение 3.4. Будем говорить, что *функция* $f(z)$ *принадлежит классу* $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда существует функция $g(z) \in K_n^*(\eta, \gamma)$ такая, что выполняется условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0 \le \lambda < 1$.

Таким образом, $f(z) \in \mathcal{C}K_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(z)}{g(z)} \prec \varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}, \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z)\right)^{\frac{1}{\gamma}} > 0. \tag{3.12}$$

Пусть $\lambda \to 1$. Тогда $\lim_{\lambda \to 1} \varphi_\lambda(z) \equiv 1$ в круге E. В силу этого, в пределе при $\lambda \to 1$ из подчиненности $\frac{f(z)}{g(z)} \prec \varphi_\lambda(z)$ вытекает, что $f(z) \equiv g(z)$ в круге E. Первое из условий в (3.12) становится тривиальным, и класс $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций $K_n^*(\eta, \gamma)$.

Пусть теперь $\gamma \to 0$. Поскольку второе из условий в (3.12) можно записать в виде

$$\left|\arg\left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z)\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in E,$$

то с учетом того, что $\left.\left((1-\eta z^2)\, g(z)/z\right)\right|_{z=0} = 1$, получаем, что

$$\lim_{\gamma \to 0}\left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z)\right) \equiv 1, \quad z \in E.$$

Поэтому в пределе при $\gamma \to 0$ из второго условия в (3.12) вытекает, что

$$g(z) \equiv h_\eta(z) = \frac{z}{1-\eta z^2},$$

и класс $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций

$$\widehat{K_n^*}(\lambda, \eta) := CK_n^*(\lambda, \eta, 0) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \ \frac{1-\eta z^2}{z} f(z) \prec \varphi_\lambda(z) \right\}.$$

Заметим, что $K_n^*(\lambda, \eta) \subset CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma) \subset CK^*$ и $\widehat{K_n^*}(\lambda, \eta) \subset CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma) \subset CK^*$.

Теорема 3.3. *Пусть* $f(z) \in CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$, $k = n$ *при* $\eta = 0$ *и* $k = \min\{2; n\}$ *при* $0 < \eta \leq 1$. *Тогда в круге* $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, *справедлива точная оценка*

$$\frac{r}{1+\eta r^2}\left(1 - \frac{(1-\lambda) r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\left(\frac{1-r^k}{1+r^k}\right)^{\gamma} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-\eta r^2}\left(1 + \frac{(1-\lambda) r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\left(\frac{1+r^k}{1-r^k}\right)^{\gamma}, \quad (3.13)$$

и радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ *порядка* α *класса* $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ *определяется как единственный на интервале* $(0; 1)$ *корень уравнения*

$$\frac{1-\eta r^2}{1+\eta r^2} - \frac{(1-\lambda) n r^n}{1-(1-\lambda) r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1-r^{2k}} - \alpha = 0. \quad (3.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $\psi(z) = \frac{g(z)}{h_\eta(z)}$, где $h_\eta(z) = \frac{z}{1-\eta z^2}$. Тогда $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$. Так как $g(z) \in \mathcal{N}_n$, $h_\eta(z) \in \mathcal{N}_2$ при $0 < \eta \leq 1$ и $h_\eta(z) \in \mathcal{N}_1$ при $\eta = 0$, то $\psi(z) \in \mathcal{A}_k$, где $k = n$ при $\eta = 0$ и $k = \min\{2; n\}$ при $0 < \eta \leq 1$. Поскольку $\operatorname{Re}\psi^{1/\gamma}(z) > 0$, то $\psi(z) \prec ((1+z)/(1-z))^{\gamma}$, откуда в круге $|z| \leq r$ получаем оценку

$$\left(\frac{1-r^k}{1+r^k}\right)^{\gamma} \leq |\psi(z)| \leq \left(\frac{1+r^k}{1-r^k}\right)^{\gamma}.$$

Кроме того,

$$\frac{r}{1+\eta r^2} \leq |h_\eta(z)| \leq \frac{r}{1-\eta r^2}.$$

Применяя данные оценки и оценку (2.6) для функции $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, в силу равенства $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$ приходим к оценке (3.13).

Из равенства $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$ находим

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1+\eta z^2}{1-\eta z^2} + z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

откуда в круге $|z| \leq r$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq \min_{|z|\leq r}\operatorname{Re}\frac{1+\lambda z^2}{1-\lambda z^2} - \max_{|z|\leq r}\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right| - \max_{|z|\leq r}\left|z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right|. \quad (3.15)$$

Поскольку $\operatorname{Re}\psi^{1/\gamma}(z) > 0$, то функция $u(z) = \psi^{1/\gamma}(z) \in \mathcal{P}_k$, где $k = n$ при $\eta = 0$, и $k = \min\{2, n\}$ при $0 < \eta \leq 1$. Поэтому, согласно [7], $|zu'(z)/u(z)| \leq 2kr^k/(1-r^{2k})$. Так как $z\psi'(z)/\psi(z) = \gamma z u'(z)/u(z)$, получаем

$$\left|z\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right| \leq \frac{2\gamma k r^k}{1-r^{2k}}.$$

В круге $|z| \leq r$ выполнено еще и неравенство

$$\operatorname{Re}\frac{1+\eta z^2}{1-\eta z^2} \geq \frac{1-\eta r^2}{1+\eta r^2},$$

В силу этих неравенств, применяя оценку (2.8) к функции $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, из (3.15) получаем

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq \frac{1-\eta r^2}{1+\eta r^2} - \frac{(1-\lambda) n r^n}{1-(1-\lambda) r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1-r^{2k}}.$$

Пусть $r = r^*(\alpha)$ — корень уравнения (3.14). Тогда в круге $|z| \le r$ выполняется условие $\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \ge \alpha$, которое обеспечивает звездообразность порядка α функции $f(z)$.

Как и при доказательстве теоремы 3.2 нетрудно доказать, что уравнение (3.14) имеет единственный корень $r = r^*(\alpha)$, причем $r^*(\alpha) \in (0;1)$.

Покажем, что полученнія оценка (3.13) и радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ порядка α класса $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ являются точными. Для этого рассмотрим функции

$$f_0(z) = \frac{z}{1-\eta z^2}\left(1 + \frac{(1-\lambda)z^n}{1-\lambda z^{2n}}\right)\left(\frac{1+z^k}{1-z^k}\right)^{\gamma}, \tag{3.16}$$

$$f_1(z) = \frac{z}{1-\eta z^2}\left(1 + \frac{(1-\lambda)i^{2-n}z^n}{1-\lambda i^{2(2-n)}z^{2n}}\right)\left(\frac{1+i^{2-k}z^k}{1-i^{2-k}z^k}\right)^{\gamma}. \tag{3.17}$$

Пусть $\eta = 0$. Тогда $k = n$ и

$$f_0(z) = z\left(1 + \frac{(1-\lambda)z^n}{1-\lambda z^{2n}}\right)\left(\frac{1+z^n}{1-z^n}\right)^{\gamma},$$

$$z\frac{f_0'(z)}{f_0(z)} = 1 + \frac{(1-\lambda)\,nz^n}{1+(1-\lambda)\,z^n - \lambda z^{2n}}\frac{1+\lambda z^{2n}}{1-\lambda z^{2n}} + \frac{2\gamma n z^n}{1-z^{2n}}.$$

Поэтому для функции $f_0(z)$ равенство в оценке (3.13) достигается в точках $z = \sqrt[n]{-1}\,r$ и $z = r$, соответственно, слева и справа, а радиус звездообразности порядка α — в точке $z = \sqrt[n]{-1}\,r$.

Пусть $0 < \eta \le 1$. Тогда $k = \min\{2; n\}$.

Правая оценка в (3.13) достигается для функции $f_0(z)$ из (3.16) в точке $z = r$.

Пусть $z = ir$. Тогда $z^2 = -r^2$ и для любого $n = 1, 2, \ldots$ имеем $i^{2-n}z^n = -\,r^n$, $i^{2(2-n)}z^{2n} = r^{2n}$. Поэтому левая оценка в (3.13) достигается для функции $f_1(z)$ из (3.17) в точке $z = ir$, так как

$$f_1(ir) = \frac{ir}{1+\eta r^2}\left(1 - \frac{(1-\lambda)\,r^n}{1-\lambda r^{2n}}\right)\left(\frac{1-r^k}{1+r^k}\right)^{\gamma}.$$

Для функции $f_1(z)$ имеем

$$z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \frac{1+\eta z^2}{1-\eta z^2} + \frac{(1-\lambda)\,ni^{2-n}z^n}{1+(1-\lambda)\,i^{2-n}z^n - \lambda i^{2(2-n)}z^{2n}}\,\frac{1+\lambda i^{2(2-n)}z^{2n}}{1-\lambda i^{2(2-n)}z^{2n}} + \frac{2\gamma k i^{2-k}z^k}{(1+i^{2-k}z^k)(1-i^{2-k}z^k)}.$$

Поэтому в точке $z = ir$, где $r = r^*(\alpha)$ — корень уравнения (3.14), имеем

$$\mathrm{Re}\left(z\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right)\bigg|_{z=ir} = \frac{1-\eta r^2}{1+\eta r^2} - \frac{(1-\lambda)\,nr^n}{1-(1-\lambda)\,r^n - \lambda r^{2n}}\,\frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1-r^{2k}} = \alpha.$$

Итак, в условии $\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \ge \alpha$ звездообразности порядка α достигается знак равенства. Следовательно, радиус звездообразности порядка α увеличить нельзя. □

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 3.3.

1) Пусть $\lambda \to 1$, $\gamma = 1$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ и получаем класс

$$K_n^*(\eta, 1) := CK_n^*(1, \eta, 1) = \left\{f(z) \in \mathcal{N}_n : \ \mathrm{Re}\left(\frac{(1-\eta z^2)\,f(z)}{z}\right) > 0\right\},$$

для которого

$$\frac{r}{1+\eta r^2}\left(\frac{1-r^k}{1+r^k}\right)\le |f(z)|\le \frac{r}{1-\eta r^2}\left(\frac{1+r^k}{1-r^k}\right)$$

и $r^*(\alpha)$ определяется из уравнения

$$\left(1-\eta r^2\right)\left(1-r^{2k}\right)-2kr^k\left(1+\eta r^2\right)-\alpha\left(1+\eta r^2\right)\left(1-r^{2k}\right)=0.$$

Полагая $\eta=0$, $\alpha=0$, из данного уравнения получаем радиус звездообразности $r^*=\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^{1/n}$ класса $K_n^*(0,1)=\{f(z)\in\mathcal{N}_n:\ \mathrm{Re}\,(f(z)/z)>0\}$ из [6].

Пусть $n=1$. Тогда $k=1$ и уравнение (3.14) приобретает вид

$$\left(1-\eta r^2\right)\left(1-r^2\right)-2r\left(1+\eta r^2\right)-\alpha\left(1+\eta r^2\right)\left(1-r^2\right)=0.$$

Из этого уравнения при $\eta=1$ выводится радиус звездообразности порядка α класса $\mathcal{K}_3=K_n^*(1,1)=\{f(z)\in\mathcal{N}:\ \mathrm{Re}\,((1-z^2)f(z)/z)>0\}$, полученный в [18].

Если дополнительно предполагать, что $f(z)$ принимает вещественные значения при $z\in(-1;1)$, то класс $K_1^*(1,1)$ совпадает с классом T типично вещественных функций [20]. Поэтому при $n=1$, $\eta=1$, $k=1$, $\alpha=0$ получаем теорему роста класса T

$$\frac{r}{1+r^2}\ \left(\frac{1-r}{1+r}\right)\le |f(z)|\le \frac{r}{(1-r)^2}$$

и радиус звездообразности $r^*=\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{2\left(\sqrt{5}+1\right)}\right)/2$ класса T из [21, 22].

2) Пусть $\lambda=0$, $\eta=0$, $\gamma=1$, $k=n$. Тогда имеем класс

$$CK_n^*(0,0,1)=\left\{f(z)\in\mathcal{N}_n:\ \left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1,\ \mathrm{Re}\,\frac{g(z)}{z}>0\right\},$$

для которого

$$r\frac{(1-r^n)^2}{1+r^n}\le |f(z)|\le r\frac{(1+r^n)^2}{1-r^n}$$

и

$$r^*(\alpha)=\left(\frac{2(1-\alpha)}{3n+\sqrt{9n^2+4(n+1-\alpha)(1-\alpha)}}\right)^{1/n}.$$

При $n=1$ отсюда вытекает радиус $r^*(\alpha)$ класса $\mathcal{F}_3=CK_1^*(0,0,1)$ из [19].

3) Пусть $\lambda=0$, $\eta=1$, $\gamma=1$, $k=\min\{2;n\}$. В этом случае получаем класс

$$CK_n^*(0,1,1)=\left\{f(z)\in\mathcal{N}_n:\ \left|\frac{f(z)}{g(z)}-1\right|<1,\ \mathrm{Re}\left(\frac{1-z^2}{z}g(z)\right)>0\right\},$$

для которого

$$\frac{r(1-r^n)}{1+r^2}\frac{1-r^k}{1+r^k}\le |f(z)|\le \frac{r(1+r^n)}{1-r^2}\frac{1+r^k}{1-r^k}$$

и $r^*(\alpha)$ определяется из уравнения

$$\frac{1-r^2}{1+r^2}-\frac{nr^n}{1-r^n}-\frac{2kr^k}{1-r^{2k}}-\alpha=0.$$

Отсюда при $n=1$ с учетом того, что $k=1$, вытекает результат статьи [18] о радиусе звездообразности порядка α класса $\mathcal{F}_2=CK_1^*(0,1,1)$.

4) Пусть $\lambda = 0$, $\eta = 0$, $\gamma \to 0$, $k = n$. Тогда получаем класс

$$CK_n^*(0,0,0) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1 \right\},$$

для которого

$$r\left(1 - r^n\right) \le \left|f\left(z\right)\right| \le r\left(1 + r^n\right)$$

и

$$r^*\left(\alpha\right) = \left(\frac{1-\alpha}{n+1-\alpha} \right)^{1/n}.$$

При $n = 1$ отсюда вытекает радиус звездообразности $r^* = 1/2$ класса $CK_1^*\left(0,0,0\right)$ из [7].

4. Заключение

В настоящей статье введен новый класс ограниченных аналитических функций, множества значений которых принадлежат области, ограниченной овалом Кассини. В данном классе получен набор точных оценок функционалов (0.1), что позволяет достаточно полно исследовать ряд новых классов нормированных функций. В частном случае, когда овал Кассини совпадает с кругом, мы приходим к ряду известных результатов.

References

[1] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, “Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций”, *УМН*, **30**:4(184) (1975), 3–60; англ. пер.:F. G. Avkhadiev, L. A. Aksent’ev, “The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht”, *Russian Mathematical Surveys*, **30**:4 (1975), 1–64.

[2] W. Ma, D. Minda, “A unified treatment of some special classes of univalent functions”, *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, eds. Z. Li, F. Ren, L. Yang, S. Zhang, International Press, New York, 1994, 157–169.

[3] S. Kumar, K. Arora, “Starlike functions associated with a petal shaped domain”, 2020, 1–15, arXiv: pdf/2010.10072.

[4] N. E. Cho, V. Kumar, S. S. Kumar, V. Ravichandran, “Radius problems for starlike functions associated with the sine function”, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **45**:1 (2019), 213–232.

[5] S. S. Kumar, K. Gangania, “A cardioid domain and starlike functions”, 2020, 1–28, arXiv: pdf/2008.06833.

[6] T. H. MacGregor, “The radius of univalence of certain analytic functions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**:3 (1963), 514–520.

[7] T. H. MacGregor, “The radius of univalence of certain analytic functions. II”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**:3 (1963), 521–524.

[8] R. M. Goel, “A class of close-to-convex functions”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **18**:1 (1968), 104–116.

[9] D. B. Shaffer, “Distortion theorems for a special class of analytic functions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **39**:2 (1973), 281–287.

[10] Ф. Ф. Майер, М. Г. Тастанов, А. А. Утемисова, “Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка $1/2$”, *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2025, № 94, 5–23. [F. F. Maiyer, M. G. Tastanov, A. A. Utemisova, “On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order $1/2$”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, **94** (2025), 5–23 (In Russian)].

[11] G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable.* V. 26, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Soc., Providence–Rhode Island, 1969, 676 pp.

[12] T. J. Suffridge, "Some remarks on convex maps of the unit disk", *Duke Math. J.*, **37(4)** (1970), 775–777.

[13] S. Kanasa, A. Tatarczak, "Generalized typically real functions", *Filomat*, **30**:7 (2016), 1697–1710.

[14] О. А. Кувшинов, "О геометрии овала Кассини, его мере невыпуклости и ε-слое", *Изв. ИМИ УдГУ*, **60** (2022), 34–57. [O. A. Kuvshinov, "About the geometry of the Cassini oval, its non-convexity degree and ε-offset layer", *Izvestija Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **60** (2022), 34–57 (In Russian)].

[15] R. Singh, "On a class of star-like functions", *Compositio Mathematica*, **19**:1 (1968), 78–82.

[16] V. Singh, R. M. Goel, "On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions", *J. Math. Soc. Japan*, **23(2)** (1971), 323–339.

[17] M. O. Reade, "The coefficients of close-to-convex functions", *Duke Math. J.*, **23**:3 (1956), 459–462.

[18] K. Khatter, S. K. Lee, V. Ravichandran, "Radius of starlikeness for classes of analytic functions", 2020, 1–15, arXiv: pdf/2006.11744.

[19] R. M. Ali, N. K. Jain, V. Ravichandran, "On the radius constants for classes of analytic functions", 2012, 1–16, arXiv: pdf/1207.4529.

[20] W. Rogosinski, "Über positive harmonische entwicklungen und typisch-reelle potenzreihen", *Math. Zeitschr.*, **35**:1 (1932), 93–121.

[21] С. А. Гельфер, "Типично вещественные функции", *Матем. сб.*, **64(106)**:2 (1964), 171–184. [S. A. Gel'fer, "Typically real functions", *Sb. Math.*, **64(106)**:2 (1964), 171–184 (In Russian)].

[22] R. J. Libera, "Some radius of convexity problems", *Duke Math. J.*, **31**:1 (1964), 143–158.

Информация об авторах

Майер Федор Федорович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: maiyer@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: tastao@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Утемисова Анар Алтаевна, кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Information about the authors

Fedor F. Maiyer, Candidate of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: maiyer@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2278-2723

Meyrambek G. Tastanov, Candidate of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: tastao@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1926-8958

Anar A. Utemissova, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: anar_utemisova@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5143-0260

Берденова Гульнар Жалгасовна, магистр, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: gulnar.berdenova.72@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-5182-3553

Gulnar Zh. Berdenova, Master, Senior Lecturer of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: gulnar.berdenova.72@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0009-5182-3553

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Утемисова Анар Алтаевна
E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Corresponding author:
Anar A. Utemissova
E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Поступила в редакцию 10.07.2025 г.
Поступила после рецензирования 11.09.2025 г.
Принята к публикации 12.09.2025 г.

Received 10.07.2025
Reviewed 11.09.2025
Accepted for press 12.09.2025