ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

УДК 517.922

Решение задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с необратимым оператором при старшей производной, вследствие чего решение существует не при каждых начальных значениях. Этот оператор фредгольмов с нулевым индексом. Для решения задачи используется метод каскадной декомпозиции уравнения и начальных условий на соответствующие уравнения и условия в подпространствах уменьшающихся размерностей. Исследуется случай обратимости некоторого оператора, построенного с помощью операторных коэффициентов уравнения. Определены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдено это решение в аналитическом виде.

Ключевые слова: задача Коши, вырожденное дифференциальное уравнение второго порядка, фредгольмовский оператор, каскадная декомпозиция

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-20012, https://rscf.ru/project/24-21-20012/).

Для цитирования: *Усков В.И.* Решение задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 382–391.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

Solution of the Cauchy problem for a degenerate second order differential equation in a Banach space

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov

8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the Cauchy problem for a second-order differential equation with a non-invertible operator at the highest derivative, as a result of which, the solution exists not for every initial value. This operator is Fredholm with a zero index. The cascade splitting method is used to solve the problem. This method splits the equation and conditions into the corresponding equation and conditions in subspaces of smaller dimensions. The case of invertibility of some operator constructed by using the operator coefficients of the equation is investigated. The conditions under which a solution to the problem exists and is unique are determined; it is found in the analytical form.

Keywords: Cauchy problem, degenerate second order differential equation, Fredholm operator, cascade splitting

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-20012, https://rscf.ru/en/project/24-21-20012/).

Mathematics Subject Classification: 34A09.

For citation: Uskov V.I. Solution of the Cauchy problem for a degenerate second order differential equation in a Banach space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 382–391.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

Введение

Пусть заданы линейные ограниченные операторы $A(t), B(t), C(t)$, действующие из банахова пространства $\mathcal{X}_1$ в банахово пространство $\mathcal{X}_2$ и сильно непрерывно зависящие от $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k]$, $u^0, u^1 \in \mathcal{X}_1$ и $f(t) \in \mathcal{X}_2$, $t \in \mathfrak{T}$. Рассмотрим задачу Коши

$$A(t)\frac{d^2u}{dt^2} = B(t)\frac{du}{dt} + C(t)u(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1. \tag{0.2}$$

Под решением задачи (0.1), (0.2) подразумевается функция $u(t)$, дважды дифференцируемая и удовлетворяющая (0.1) при каждом $t \in \mathfrak{T}$ и (0.2).

Дифференциальное уравнение второго порядка с вырожденным оператором при старшей производной рассматривалось другими авторами: в работе [1] исследовалось уравнение вязкоупругости с сильным затуханием с самосопряженным нормально разрешимым фредгольмовым оператором, имеющим длину всех жордановых цепочек 1; в работе [2] этот оператор нормально разрешимый с n-мерным ядром, обладающий относительно некоторой оператор-функции полным биканоническим жордановым набором.

В настоящей работе для решения задачи (0.1), (0.2) применяется метод каскадной декомпозиции. Каскадный метод направлен на решение задач, в которых получение решения другими методами или невозможно, или затруднительно. Он основан на:

1) расщеплении уравнения типа $Av = w$ на уравнения в подпространствах;

2) получении в одном из подпространств уравнения, аналогичного исходному уравнению;

3) получении для новой неизвестной функции условий, аналогичных заданным условиям;

4) повторении перечисленных действий с новыми уравнением и условиями.

Дифференциальное уравнение вида (0.1) с постоянными коэффициентами исследовалось с применением метода каскадной декомпозиции в работе [3]. В работе [4] задача (0.1), (0.2) решена в случае постоянного фредгольмова оператора A с n-мерным ядром при условии $\langle QBe_i, \varphi_j\rangle \neq 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\operatorname{Coker} A$. Этот результат применялся в работе [5] при исследовании рабочего процесса шнекороторного лесопожарного грунтомета.

В настоящей работе рассмотрена задача (0.1), (0.2) в более общей постановке: все операторные коэффициенты переменные, длины жордановых цепочек различные. Оператор $A(t)$ полагается фредгольмовым с нулевым индексом (далее, фредгольмов) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Статья организована следующим образом. Вначале приводятся необходимые сведения, после чего решается вспомогательная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с единичным оператором при старшей производной. Затем исследуется задача Коши (0.1), (0.2). Исследуется случай обратимости некоторого оператора, построенного с помощью заданных коэффициентов. Определяются условия, при которых решение задачи существует, единственно; находится это решение в аналитическом виде.

1. Необходимые сведения

Имеет место (см. [6]) следующее свойство.

С в о й с т в о 1.1. Фредгольмов оператор $A : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ вполне определяется свойством:

$$\mathcal{X}_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad \mathcal{X}_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ — образ, $\operatorname{Coker} A$ — дефект оператора A, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$, сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A$.

Введем проекторы $P(A)$ на $\operatorname{Ker} A$, $Q(A)$ на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^{-} = \widetilde{A}^{-1}(I - Q(A))$, где I обозначен единичный оператор в соответствующем подпространстве.

Нам понадобится следующая лемма, полученная в [7].

Лемма 1.1. *Уравнение*

$$A\xi = \eta, \quad \xi \in \mathcal{X}_1, \quad \eta \in \mathcal{X}_2,$$

равносильно системе:

$$\xi = A^{-}\eta + \zeta \quad \text{для любого} \quad \zeta \in \operatorname{Ker} A,$$

$$Q(A)\eta = 0.$$

Заметим, что $\zeta = P(A)\xi$ произвольно.

Пусть $R(t)$ — некоторый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $v(t)$ — некоторая функция из $\mathcal{X}$. Обозначим через C_n^i биномиальный коэффициент.

Имеет место следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть $R(t)$, $v(t)$ n_0 раз дифференцируемы. Тогда для любого натурального $n \leqslant n_0$ выполнено равенство:*

$$\frac{d^n(R(t)v(t))}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^{n-i}R(t)}{dt^{n-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем предложение индукцией по n. При $n = 1$ оно выполнено (см. [8, лемма 3.6]). Пусть оно выполнено при $n = N$. Тогда при $n = N + 1$ имеем:

$$\frac{d^{N+1}(R(t)v(t))}{dt^{N+1}} = \sum_{i=0}^{N} C_N^i \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{N-i}R(t)}{dt^{N-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right).$$

Применив еще раз предложение при $n = 1$ к производной в правой части и раскрыв скобки, получим:

$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i \left(\frac{d^{N+1-i}R(t)}{dt^{N+1-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right) + \sum_{i=0}^{N} C_N^i \left(\frac{d^{N-i}R(t)}{dt^{N-i}} \frac{d^{i+1} v(t)}{dt^{i+1}} \right).$$

Выделив в первой сумме слагаемое при $i = 0$, во второй — при $i = N$ и применив основное биномиальное тождество, получим:

$$\frac{d^{N+1}R(t)}{dt^{N+1}} + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(C_N^i + C_N^{i-1})}_{=C_{N+1}^i} \frac{d^{N+1-i}R(t)}{dt^{N+1-i}} \frac{d^i u(t)}{dt^i} + R(t) \frac{d^{N+1}u(t)}{dt^{N+1}},$$

что и требовалось доказать. □

2. Решение вспомогательной задачи

Для решения задачи (0.1), (0.2) будем использовать следующую вспомогательную задачу Коши:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{A}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{f}(t), \tag{2.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$ — действующие в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ линейные ограниченные операторы, сильно непрерывно зависящие от t, $u^0, u^1 \in \mathcal{X}$, $f(t) \in \mathcal{X}$, $t \in \mathfrak{T}$.

Перейдем к решению этой задачи.

Здесь и далее будем обозначать O — нулевой оператор, а I — единичный оператор в соответствующем пространстве.

Определим следующее условие.

У с л о в и е 2.1.

1) Операторы $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$ бесконечно дифференцируемы в точке $t = 0$, а все их производные $\dfrac{d^n\mathcal{A}}{dt^n}(0)$, $\dfrac{d^n\mathcal{B}}{dt^n}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются ограниченными операторами;

2) функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывна на $\mathfrak{T}$;

3) функция $\mathfrak{f}(t)$ бесконечно непрерывно дифференцируема в точке $t = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1. Тогда решение задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и определяется формулой:*

$$u(t) = \mathcal{V}^{(1)}(t)u^1 + \mathcal{V}^{(0)}(t)u^0 + \mathfrak{g}(t), \tag{2.3}$$

где операторы $\mathcal{V}^{(1)}(t)$, $\mathcal{V}^{(0)}(t)$ и функция $\mathfrak{g}(t)$ определяются по формулам:

$$\mathcal{V}^{(1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathcal{D}_n^{(1)}, \quad \mathcal{V}^{(0)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathcal{D}_n^{(0)}, \quad \mathfrak{g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\mathfrak{g}_n, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_0^{(1)} = O, \quad \mathcal{D}_0^{(0)} = I, \quad \mathfrak{g}_0 = O, \quad \mathcal{D}_1^{(1)} = I, \quad \mathcal{D}_1^{(0)} = O, \quad \mathfrak{g}_1 = O,\\
&\mathcal{D}_2^{(1)} = \mathcal{A}(0), \quad \mathcal{D}_2^{(0)} = \mathcal{B}(0), \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{f}(0),\\
&\mathcal{K}_n^{(0)} = \frac{d^{n-2}\mathcal{B}}{dt^{n-2}}(0), \quad \mathcal{K}_n^{(n-1)} = \mathcal{A}(0),\\
&\mathcal{K}_n^{(i)} = C_{n-2}^{i-1}\frac{d^{n-1-i}\mathcal{A}}{dt^{n-1-i}}(0) + C_{n-2}^{i}\frac{d^{n-2-i}\mathcal{B}}{dt^{n-2-i}}(0), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \quad n = 3, 4, \ldots,\\
&\mathcal{D}_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}\mathcal{D}_i^{(1)}, \quad \mathcal{D}_n^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}\mathcal{D}_i^{(0)}, \quad \mathfrak{g}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}g_i, \quad n = 3, 4, \ldots .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Докажем единственность решения. Заменой

$$\frac{du}{dt} = v(t) \tag{2.6}$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{A}(t)v(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{f}(t). \tag{2.7}$$

Система (2.6), (2.7) — это уравнение

$$\frac{dw}{dt} = \mathcal{C}(t)w(t) + \mathcal{F}(t),$$

где

$$w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}(t) = \begin{pmatrix} O & I \\ \mathcal{B}(t) & \mathcal{A}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{f}(t) \end{pmatrix}.$$

Ввиду замены (2.6) начальное условие имеет вид

$$w(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ ограничены, функция $f(t)$ непрерывна, следовательно, оператор $\mathcal{C}(t)$ ограничен, и функция $\mathcal{F}(t)$ непрерывна. В силу результатов монографии [8, с. 231] это влечет единственность решения.

2. Докажем справедливость формулы (2.3). Построим решение $u(t)$ в виде ряда Маклорена

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n u}{dt^n}(0) \tag{2.8}$$

и вычислим его коэффициенты. При $t = 0$ из (2.1) следует соотношение

$$\frac{d^2u}{dt^2}(0) = \mathcal{A}(0)u^1 + \mathcal{B}(0)u^0 + \mathfrak{f}(0) = \mathcal{D}_2^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_2^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_2.$$

Продифференцировав (2.1) при $t = 0$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d^3u}{dt^3}(0) &= \Big(\mathcal{A}^2(0) + \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) + \mathcal{B}(0)\Big)u^1 + \Big(\mathcal{A}(0)\mathcal{B}(0) + \frac{d\mathcal{B}}{dt}(0)\Big)u^0 + \Big(\mathcal{A}(0)\mathfrak{f}(0) + \frac{d\mathfrak{f}}{dt}(0)\Big) \\ &= \mathcal{D}_3^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_3^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_3.\end{aligned}$$

Пусть справедливы формулы:

$$\frac{d^n u}{dt^n}(0) = \mathcal{D}_n^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_n^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.9}$$

Тогда продифференцировав (2.1) $N-1$ раз и применив предложение 1.1, получим, что выполнено соотношение

$$\begin{aligned}\frac{d^{N+1}u(t)}{dt^{N+1}} = \mathcal{A}(t)\frac{d^N u(t)}{dt^N} + \sum_{i=1}^{N-1}\Big(C_{N-1}^{i-1}\frac{d^{N-i}\mathcal{A}(t)}{dt^{N-i}} + C_{N-1}^{i}\frac{d^{N-1-i}\mathcal{B}(t)}{dt^{N-1-i}}\Big)\frac{d^i u(t)}{dt^i} \\ + \frac{d^{N-1}B(t)}{dt^{N-1}}u(t) + \frac{d^{N-1}\mathfrak{f}(t)}{dt^{N-1}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

При $t = 0$ соотношение (2.10) в обозначениях (2.5) принимает вид

$$\frac{d^{N+1}u}{dt^{N+1}}(0) = \mathcal{D}_{N+1}^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_{N+1}^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_{N+1}.$$

Подставив (2.9) в (2.8), получим формулу (2.3).

Покажем, что ряды (2.4) сходятся. Возьмем некоторый элемент $\xi \in \mathcal{X}$. Операторы $\dfrac{d^n\mathcal{A}}{dt^n}(0)$, $\dfrac{d^n\mathcal{B}}{dt^n}(0)$, $n = 0, 1, \ldots,$ ограничены, что влечет ограниченность операторов $\mathcal{K}_n^{(0)}$, $\mathcal{K}_n^{(n-1)}$ и операторов $\mathcal{K}_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{K}_n^{(0)}\xi\| \leqslant \Big\|\frac{d^{n-2}\mathcal{B}}{dt^{n-2}}(0)\Big\|\|\xi\| = \kappa_0\|\xi\|,\\
&\|\mathcal{K}_n^{(n-1)}\xi\| \leqslant \|\mathcal{A}(0)\|\|\xi\| = \kappa_{n-1}\|\xi\|,\\
&\|K_n^{(i)}\xi\| \leqslant \Big(C_{n-2}^{i-1}\Big\|\frac{d^{n-1-i}\mathcal{A}}{dt^{n-1-i}}(0)\Big\| + C_{n-2}^{i}\Big\|\frac{d^{n-2-i}\mathcal{B}}{dt^{n-2-i}}(0)\Big\|\Big)\|\xi\| = \kappa_i\|\xi\|.
\end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $\mathcal{D}_1^{(j)}$, $\mathcal{D}_2^{(j)}$, $j = 0, 1,$ — очевидно, ограничены, значит, и операторы $\mathcal{D}_n^{(j)}$, $j = 0, 1$, $n = 3, 4, \ldots,$ как определяемые рекуррентным образом, ограничены:

$$\|\mathcal{D}_i^{(j)}\xi\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{K}_n^{(i)}\|\|\mathcal{D}_i^{(j)}\|\|\xi\| = \sigma_{jn}\|\xi\|, \quad j = 0, 1.$$

Функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывно дифференцируема в точке $t = 0$, следовательно,

$$\|\mathfrak{g}_n\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathcal{K}_n^{(i)}\|\|\mathfrak{g}_i\| = \sigma_n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{V}^{(j)}(t)\xi\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\mathcal{D}_n^{(j)}\xi\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_k^n}{n!}\sigma_{jn}\|\xi\|, \quad j = 0, 1,\\
&\|\mathfrak{g}(t)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\mathfrak{g}_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_k^n}{n!}\sigma_n.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ряды в оценках (2.11) сходятся, что влечет требуемое. □

3. Решение задачи (0.1), (0.2)

Перейдем к решению задачи (0.1), (0.2).

Разрешим уравнение (0.1) относительно второй производной.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&A_1 = Q(A)BP(A),\\
&R_1 = \frac{dQ(A)B}{dt} + Q(A)BA^-B + Q(A)C, \quad R_0 = \frac{dQ(A)C}{dt} + Q(A)BA^-C,\\
&Gf(t) = \frac{dQ(A)f(t)}{dt} + Q(A)BA^-f(t),\\
&\mathcal{A} = A^-B - A_1^{-1}R_0^{(1)}, \quad \mathcal{B} = A^-C - A_1^{-1}R_0^{(0)},\\
&\mathfrak{f}(t) = A^-f(t) - A_1^{-1}Gf(t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что все производные в этих обозначениях существуют.

В силу леммы 1.1 уравнение (0.1) равносильно системе:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^-B\frac{du}{dt} + A^-Cu + A^-f + P(A)\frac{d^2u}{dt^2}, \tag{3.2}$$

$$Q(A)B\frac{du}{dt} + Q(A)Cu + Q(A)f = 0, \tag{3.3}$$

где элемент $P(A)\dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A$ надлежит найти. Продифференцируем (3.3):

$$\frac{dQ(A)B}{dt}\frac{du}{dt} + Q(A)B\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dQ(A)C}{dt}u + Q(A)C\frac{du}{dt} + \frac{dQ(A)f}{dt} = 0. \tag{3.4}$$

Подставив в (3.4) равенство выражение (3.2) с учетом идемпотентности проектора, получим уравнение

$$A_1\left(P(A)\frac{d^2u}{dt^2}\right) = -R_1\frac{du}{dt} - R_0u - Gf. \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующий случай: *оператор* $A_1(t) : \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Coker} A$ *обратим в* $\operatorname{Ker} A$ *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$; *имеет место соотношение*

$$\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}(t), \quad t \in \mathfrak{T}.$$

В рассматриваемом случае из уравнения (3.5) следует

$$P(A)\frac{d^2u}{dt^2} = -A_1^{-1}R_1\frac{du}{dt} - A_1^{-1}R_0u - A_1^{-1}Gf. \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в (3.2) приводит к следующему уравнению вида (2.1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{A}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{g}(t). \tag{3.7}$$

Тем самым, получен следующий результат.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *оператор* $A_1(t)$ *обратим при каждом* $t \in \mathfrak{T}$;

2) *имеет место соотношение* $\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}(t)$, $t \in \mathfrak{T}$;

3) *операторы* $Q(A(t))B(t)$, $Q(A(t))C(t)$ *и функция* $Q(A(t))f(t)$ *дифференцируемы при каждом* $t \in \mathfrak{T}$.

Тогда уравнение (0.1) *равносильно системе* (3.7), (3.3).

С применением теоремы 2.1 эта лемма влечет следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условие* 2.1 *и условия:*

1) *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$ *оператор* $A_1(t)$ *обратим в* $\operatorname{Coker} A(t)$;

2) *имеет место соотношение* $\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}$, $t \in \mathfrak{T}$;

3) *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$ *операторы* $Q(A)B(t)$, $Q(A)C(t)$ *и функция* $Q(A)f(t)$ *дифференцируемы;*

4) *функция* $\mathfrak{g}(t)$ *непрерывна на* $\mathfrak{T}$;

5) *справедливо равенство*

$$Q(A)(0)B(0)u^1 + Q(A)(0)C(0)u^0 + Q(A)(0)f(0) = 0.$$

Тогда решение задачи (0.1), (0.2) *существует, единственно и определяется формулами* (2.3), (2.4), (2.5), (3.1).

References

[1] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, "Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24**:14 (2001), 1043–1053.

[2] С. С. Орлов, "Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах", *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, "The continuous solutions of a singular integro-differential equation of the second order in Banach spaces", *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **2**:1 (2009), 328–332 (In Russian)].

[3] В. И. Усков, "Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 375–385. [V. I. Uskov, "Solution of a second-order algebro-differential equation in a banach space", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 375–385 (In Russian)].

[4] В. И. Усков, "Задача Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве", *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*, 2023, № 4, 70–80. [V. I. Uskov, "Cauchy problem for a sedond-order degeneracy differential equation in a Banach space", *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem. [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.]*, 2023, № 4, 70–80 (In Russian)].

[5] П. И. Попиков, А. В. Зленко, А. Ф. Петков, В. П. Попиков, В. И. Усков, Р. Г. Боровиков, "Прогнозирование изменения кинематических и динамических параметров новой конструкции шнекороторного грунтомета на основе авторской методики", *Лесотехнический журнал*, **14**:3(55) (2024), 204–221. [P. I. Popikov, A. V. Zlenko, A. F. Petkov, V. P. Popikov, V. I. Uskov, R. G. Borovikov, "Prediction of changes in kinematic and dynamic parameters of a new design of auger soil thrower based on the author's methodology", *Lesotekhnicheskii zhurnal [Forestry Engineering Journal]*, **14**:3(55) (2024), 204–221 (In Russian)].

[6] С. М. Никольский, "Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах", *Известия АН СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, "Linear equations in normed linear spaces", *Izv. Math.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 392–403; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a banach space. The regular case", *Math. Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[8] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 19.06.2025 г.
Поступила после рецензирования 07.09.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

There is no conflict of interests.

Received 19.06.2025
Reviewed 07.09.2025
Accepted for press 21.11.2025