ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424
УДК 517.977

Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости и их представления в терминах ультрафильтров

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматриваются абстрактные задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) с ограничениями асимптотического характера (ОАХ), реализуемыми посредством непустого семейства множеств в пространстве обычных решений (управлений). В качестве аналога множества достижимости, определяемого образом целевого оператора (ЦО) со значениями в ТП, рассматривается множество притяжения (МП) в классе фильтров или направленностей обычных решений. Исследуются вопросы, связанные с зависимостью МП при изменении семейства множеств в пространстве обычных решений, порождающего ОАХ. Особое внимание уделяется случаю, когда данное семейство является фильтром (всякое МП или может быть порождено ОАХ на основе фильтра, или пусто). В то же время МП при ОАХ, порождаемых ультрафильтром (у/ф), т. е. максимальным фильтром, при неограничительных условиях на ТП и ЦО является синглетоном, что позволяет ввести оператор притяжения (ОП), который в случае регулярного ТП оказывается непрерывным при оснащении множества всех у/ф на множестве обычных решений топологией Стоуна. На этой основе удается дать практически исчерпывающее представление конструкций, связанных с построением МП в регулярном ТП, в классе у/ф при их естественной факторизации на основе ЦО. Целый ряд полученных свойств распространяется на случай ЦО со значениями в хаусдорфовом ТП. Исследуются некоторые вопросы, связанные с ослаблением топологии пространства, в котором реализуется МП.

Ключевые слова: множество притяжения, топология, ультрафильтр

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости и их представления в терминах ультрафильтров // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 392–424.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

Attraction sets in abstract attainability problems and their representations in terms of ultrafilters

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. Abstract problems about attainability in topological space (TS) under constraints of asymptotic nature (CAN) realized by nonempty family of sets in the space of usual solutions (controls) are considered. As analog of the attainability set defined by image of the target operator (TO) with values in TS, attraction set (AS) in classes of filters or directednesses of usual solutions is considered. Questions connected with the AS dependence under cange in the family of sets of usual solutions generating CAN are investigated. The special attention is paid to the case when this family is a filter (every AS is either generated by a filter used as CAN or is empty set). At the same time, AS under CAN generated by ultrafilters (u/f) that is by maximal filter under unrestrictive conditions on TS and TO there is a singleton, which allows to enter attraction operator which, in the case of regular TS, is continuous under equipment of the set of all ultrafilters on the set of usual solutions with Stone topology. On this basis, it is possible to give a practically exhaustive representation of constructions connected with AS in a regular TS in the class of u/f with their natural factorization based on TO. A whole range of obtained properties extend to the case of TO with values in a Hausdorff TS. Some questions connected with topology weakening of the space in which AS is realized are investigated.

Keywords: attraction set, topology, ultrafilter

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems and their representations in terms of ultrafilters. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 392–424.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

Введение

В теории управления важную роль играет проблема построения и исследования свойств области достижимости (ОД) (см. [1–3] и др.) при наличии тех или иных ограничений на выбор управляющих функций. При ослаблении ограничений может, однако, возникать скачкообразное расширение ОД; получающиеся при этом множества — аналоги ОД — могут при ужесточении ослабленных ограничений не сходиться к замыканию исходной ОД. Подобные эффекты для экстремальных задач и, в частности, для задач оптимального управления детально рассматривались в [4, гл. III,IV]. Возвращаясь к задаче об исследовании ОД, заметим, что при ослаблении исходной системы ограничений у нас возникает свое множество допустимых элементов (ДЭ) в пространстве обычных (по смыслу, реализуемых) решений. Поскольку обычно мы допускаем ослабление условий «на разную глубину», у нас получается целое семейство упомянутых множеств, «составленных» всякий раз из ДЭ в задаче о достижимости с ослабленными ограничениями. Возникающее таким образом семейство будем рассматривать в качестве ограничений асимптотического характера (ОАХ). Соответственно, у нас возникает и целое семейство ОД, отвечающее данным ОАХ; предел данного семейства ОД при неограниченном ужесточении ослабленных ограничений мы и рассматриваем (здесь) в качестве множества притяжения (МП).

Уже из упомянутых рассуждений видно, что проблема перехода от ОД к МП может рассматриваться как вариант более общей постановки, уже необязательно связанной с задачами управления. Речь идет о построении некоторых предельных множеств в топологическом (вообще говоря) пространстве для семейства образов характерных множеств в пространстве обычных (доступных для реализации) решений при действии заданного оператора, называемого далее целевым. Сами же упомянутые (характерные, для той или иной постановки) множества образуют в совокупности непустое семейство, с которым, собственно говоря, и можно отождествить ограничения асимптотического характера (ОАХ). В случае «обычной» задачи управления, как уже отмечалось, точками упомянутых множеств являются ДЭ в смысле ослабленных ограничений. Наиболее естественным является вариант, когда данное семейство является направленным: любые два множества этого семейства содержат в пересечении некоторое третье множество, также принадлежащее семейству, порождающему ОАХ. Мы ограничимся сейчас этим случаем. Тогда МП определяется в виде пересечения замыканий образов множеств семейства, порождающего соответствующие ОАХ, при действии целевого оператора (ЦО). Вместе с тем, указанное МП допускает представление [5, (8.3.11)], в котором задействованы обобщенные пределы семейств, являющихся образами у/ф пространства обычных решений, мажорирующих семейство, порождающее ОАХ (отметим аналогичное представление в классе направленностей; см. [5, (8.3.10)]). Заметим, кстати, что множество у/ф, мажорирующих семейство, порождающее ОАХ, само является МП в компакте Стоуна при условии, что обычным решениям сопоставляются всякий раз соответствующие тривиальные у/ф (здесь, строго говоря, мы также имеем задачу о достижимости в компакте при ОАХ, не имеющую, конечно, никакого отношения к случаю ОД управляемых систем).

Нетрудно показать, что всякое МП либо пусто, либо может быть порождено фильтром множества обычных решений; последний случай собственно и представляет основной интерес. В частности, мы можем рассматривать случай, когда упомянутый фильтр максимален, т. е. является у/ф (см. [6, гл. I]). Оказывается, что в этом последнем случае МП (отвечающее ОАХ, порожденным у/ф) непременно одноэлементно, т. е. является синглетоном; данный факт имеет место при очень общих предположениях (имеется в виду случай, когда исследуется проблема в T_2-пространстве на значениях ЦО, для которого образ исходного множества обычных решений содержится в компакте; данный случай типичен для задач управления). С учетом этого (в упомянутом случае) каждому у/ф можно сопоставить (см. [7, раздел 4]) элемент притяжения (ЭП) и получить, как следствие, оператор притяжения (ОП), действующий из компакта у/ф в T_2-пространство. Если же последнее топологическое пространство (ТП) регулярно, то данный ОП непрерывен. Важно, что МП в исходном T_2-пространстве, отвечающее действию ЦО, совпадает в случае, когда ОАХ порождаются фильтром, с образом множества всех у/ф, мажорирующих упомянутый фильтр.

Комбинируя вышеупомянутые положения, получаем, что в случае, когда исходное ТП, содержащее значения ЦО, регулярно, а само ЦО обладает свойством предкомпактности образа множества обычных решений, компакт Стоуна в сочетании с ОП реализует компактификатор [5, с. 325] исходной задачи, который по смыслу является [5, предложение 8.6.1] инструментом решения исходной задачи о достижимости на значениях данного ЦО. Целый ряд упомянутых положений распространяется на более общий случай T_2-отделимости исходного ТП, где, однако, свойство регулярности, не оговариваемое заранее, проявляется в некотором подпространстве данного ТП.

1. Общие сведения, обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки), $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами; принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначаем неупорядоченную пару этих объектов, т. е. единственное множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов (итак, при $z \in \{x;y\}$ непременно $(z = x)\vee(z = y)$). Если u — объект, то $\{u\} \triangleq \{u;u\}$ — синглетон, содержащий $u : u \in \{u\}$. Множество рассматриваем как вариант объекта, а тогда (см. [8, с. 67]) для любых двух объектов α и β в виде $(\alpha,\beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$ имеем упорядоченную пару (УП) с первым элементом α и вторым элементом β; если же h — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы УП h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Всякому множеству S сопоставляем непустое семейство $\mathcal{P}(S)$ всех подмножеств (п/м) S, $\mathcal{P}'(S) \triangleq \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(S)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(S)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м S. В качестве S может, конечно, использоваться семейство. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A\cap B : \ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.1}$$

семейства $\mathcal{A}$ на множестве B; (1.1) будет часто использоваться при введении подпространства (п/п) ТП, а точнее, при введении топологии, индуцированной из упомянутого ТП. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ (т. е. $\mathcal{M}$ — непустое семейство п/м $\mathbb{M}$), то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : \ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})) \tag{1.2}$$

есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\mathbb{M})$, двойственное к $\mathcal{M}$. В частности, полагая, что $\mathcal{M}$ — топология на $\mathbb{M}$, в виде (1.2) мы получаем семейство всех п/м $\mathbb{M}$, замкнутых в соответствующем ТП. Если A и B множества, то [8, гл. II,§9] через B^A обозначаем множество всех функций из A в B; при $f \in B^A$ используем также традиционную запись

$$f : A \longrightarrow B$$

(при $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем, как обычно, значение f в точке a). Если X и Y — множества, $g \in Y^X$ и $Z \in \mathcal{P}(X)$, то

$$g^1(Z) \triangleq \{g(x) : x \in Z\} \in \mathcal{P}(Y)$$

есть образ Z при действии g; через $g^{-1}(H)$ обозначаем при $H \in \mathcal{P}(Y)$ прообраз H, т. е. $g^{-1}(H) \triangleq \{x \in X \mid g(x) \in H\} \in \mathcal{P}(X)$.

Специальные семейства.

До конца настоящего пункта фиксируем множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.3}$$

имеем семейство всех π-систем [9, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ (с «нулем» и «единицей»), а в виде

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I}\}$$

аналогичное семейство решеток на множестве $\mathbf{I}$. При этом

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; кроме того,

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] : \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$$

есть семейство всех замкнутых топологий П. С. Александрова (см. [10, с. 98]).

Каждому непустому семейству $\mathcal{T}$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{T}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{T}$. Если $\mathbb{H}$ — множество и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, то в виде

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{H} \mid \mathcal{H}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}) \mid \mathbb{H} = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z\}$$

имеем семейство всех непустых покрытий $\mathbb{H}$ множествами из $\mathcal{H}$. Наконец, произвольным семейству $\mathcal{S}$ и множеству T сопоставляем следующее семейство:

$$[\mathcal{S}](T) \triangleq \{S \in \mathcal{S} \mid T \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{S}). \tag{1.4}$$

Элементы топологии, 1.

В пределах настоящего пункта фиксируем множество $\mathbf{I}$; если при этом $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ имеем ТП с «единицей» $\mathbf{I}$. Через $(\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в компактное ТП:

$$\begin{aligned}(\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] &\triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall \xi \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \tau] \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\xi) : \mathbf{I} = \bigcup_{G \in \mathcal{K}} G\} \\ &= \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]]\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и определено семейство

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in N^0_\tau(x) : G \subset H\}$$

всех окрестностей x в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, понимаемых в смысле [6, гл. I]. Кроме того, при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ полагаем, что

$$\mathbf{N}^0_\tau[M] \triangleq \{G \in \tau \mid M \subset G\}$$

и $\mathbf{N}_\tau[M] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in \mathbf{N}^0_\tau[M] : G \subset H\}$, получая окрестности множества M в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; кроме того,

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(M, \tau) &\triangleq \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap H \neq \varnothing \ \ \forall H \in N_\tau(x)\} \\ &= \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap G \neq \varnothing \ \ \forall G \in N^0_\tau(x)\} = \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M)} F,\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau])$, т. к. $\mathbf{I} \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M)$; в (1.6) определено замыкание множества в ТП. Через $(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_2-пространство (см. [11, гл. I]):

$$\begin{aligned}(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall x \in \mathbf{I} \ \ \forall y \in \mathbf{I} \setminus \{x\} \\ \exists G_1 \in N^0_\tau(x) \ \ \exists G_2 \in N^0_\tau(y) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Кроме того, $(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$; при $\tau \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$ ТП $(\mathbf{I}, \tau)$ называют компактом. Заметим, что

$$(\mathcal{D}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \ \forall x \in \mathbf{I} \ \ \forall y \in \mathbf{I} \setminus \{x\} \ \ \exists G \in N^0_\tau(x) : y \notin G\} \tag{1.8}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_1-пространство. С использованием (1.8) вводятся регулярные [11, гл. I] пространства:

$$\begin{aligned}(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall F \in \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] \ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus F \ \ \exists G_1 \in N^0_\tau(x) \\ \exists G_2 \in \mathbf{N}^0_\tau[F] : G_1 \cap G_2 = \varnothing\}\end{aligned} \tag{1.9}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в регулярное пространство; легко видеть, что $(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[\mathbf{I}] \subset (\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$.

Элементы топологии, 2.

Отметим некоторые конструкции, связывающие различные, вообще говоря, ТП. Ясно, что для любого ТП (M,τ) и множества $N \in \mathcal{P}(M)$ $\tau|_N \in (\mathrm{top})[N]$; ТП $(N,\tau|_N)$ называют п/п (M,τ). Отметим простые следствия известных положений [11, гл. I], использующих очевидные свойства п/п: если (X,τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, $H \in \mathcal{P}'(X)$, то

$$(N^0_{\tau|_H}(h) = N^0_\tau(h)|_H \ \ \forall\, h \in H)\&(\mathbf{N}^0_{\tau|_H}[A] = \mathbf{N}^0_\tau[A]|_H \ \ \forall\, A \in \mathcal{P}(H)) \tag{1.10}$$

(подчеркнем, что $X \in N^0_\tau(h)$ при $h \in H$ и $X \in N^0_\tau[A]$ при $A \in \mathcal{P}(H)$). С учетом (1.10) устанавливается, что для всякого непустого множества X и $M \in \mathcal{P}'(X)$

$$\begin{aligned}(\tau|_M \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[M] \ \ \forall\, \tau \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[X])\&(\tilde\tau|_M \in (\mathrm{top})_0[M] \ \ \forall\, \tilde\tau \in (\mathrm{top})_0[X])\\ \&(\hat\tau|_M \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[M] \ \ \forall\, \hat\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Свойства (1.11) хорошо известны (см. [11, теорема 2.1.6]). Далее, учитывая (1.5), заметим, что для всякого ТП $(\mathbb{H},\tau)$, $\mathbb{H} \neq \varnothing$,

$$(\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}] \triangleq \{\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})|\ \tau|_{\mathbf{K}} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{K}]\} \tag{1.12}$$

есть семейство всех п/м $\mathbb{H}$, компактных в $(\mathbb{H},\tau)$,

$$(\tau-\mathrm{comp})^0[\mathbb{H}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \exists\, K \in (\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}] : H \subset K\}; \tag{1.13}$$

поскольку при $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{H}]$ имеет место $(\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{H}}[\tau]$ (см. [11, теорема 3.1.8]), в силу (1.13) истинна импликация

$$(\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{H}]) \Rightarrow ((\tau-\mathrm{comp})^0[\mathbb{H}] = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \mathrm{cl}(H,\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[\mathbb{H}]\}). \tag{1.14}$$

Если (U,τ_1), $U \neq \varnothing$, и (V,τ_2), $V \neq \varnothing$, — два ТП, то

$$C(U,\tau_1,V,\tau_2) \triangleq \{\ f \in V^U|\ f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \ \forall G \in \tau_2\}, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) &\triangleq \{f \in C(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid \ f^1(F) \in \mathbf{C}_V[\tau_2] \ \ \forall F \in \mathbf{C}_U[\tau_1]\}\\ &= \{f \in V^U | f^1(\mathrm{cl}(A,\tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(A),\tau_2) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(U)\};\end{aligned} \tag{1.16}$$

при этом истинна следующая импликация

$$((\tau_1 \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[U])\&(\tau_2 \in (\mathrm{top})_0[V])) \Rightarrow (C(U,\tau_1,V,\tau_2) = C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2)). \tag{1.17}$$

В (1.15) определены непрерывные, а в (1.16) — замкнутые функции; (1.17) выделяет важный частный случай непрерывных функций из компактного ТП в хаусдорфово.

Добавление.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; при $n \in \mathbb{N}$ в виде $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$ имеем дискретный интервал $\mathbb{N}$ с левым концом 1 и правым — в виде n. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами; с учетом этого для каждого множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех функций (кортежей) из $\overline{1,n}$ в H. Будем использовать индексную форму записи функций (семейства с индексом; см. [4, с. 11]) и, в частности, кортежей.

2. Фильтры и базы фильтров, направленные семейства

В настоящем разделе фиксируем непустое множество T. Будем рассматривать здесь фильтры семейства $\mathcal{P}(T)$ всех п/м T; условимся называть их стоун-чеховскими, имея в виду замечание в [12, с. 167] о реализации компактификации Стоуна–Чеха в классе максимальных фильтров, т. е. ультрафильтров (у/ф), упомянутого типа. В виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[T] \triangleq \{\, \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T)) \mid\ & (A \cap B \in \mathcal{F}\ \forall A \in \mathcal{F}\ \forall B \in \mathcal{F}) \\ & \&([\mathcal{P}(T)](F) \subset \mathcal{F}\ \forall F \in \mathcal{F})\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

имеем непустое (ясно, что $\{T\} \in \mathfrak{F}[T]$) семейство всех фильтров на T. При этом, кстати,

$$N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[T]\ \ \forall \tau \in (\mathrm{top})[T]\ \ \forall x \in T. \tag{2.2}$$

Итак, в (2.2) определены фильтры окрестностей точек в произвольном ТП с «единицей» T. Пусть

$$\beta[T] \triangleq \{\, \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T)) \mid\ \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}:\ B_3 \subset B_1 \cap B_2\}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\beta_0[T] &\triangleq \{\mathcal{B} \in \beta[T] | \varnothing \notin \mathcal{B}\} \\ &= \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T)) | \ \forall B_1 \in \mathcal{B}\ \forall B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

В (2.3) введено семейство всех направленных семейств (НС) п/м T; среди всех таких НС естественно выделить базы фильтров (БФ), что и делается в (2.4). При этом

$$(T - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(T) | \ \exists B \in \mathcal{B}:\ B \subset F\} \in \mathfrak{F}[T]\ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[T] \tag{2.5}$$

определяет простое правило построения фильтров посредством баз (кстати, при $\tau \in (\mathrm{top})[T]$ и $x \in T$ фильтр $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[T]$ реализуется посредством базы $N^0_\tau(x) \in \beta_0[T]$: $N_\tau(x) = (T - \mathbf{fi})[N^0_\tau(x)]$). Итак БФ — суть НС непустых п/м T. Напомним определение сходимости БФ: как обычно [6, гл. I], имеем при $\tau \in (\mathrm{top})[T]$, $\mathcal{B} \in \beta_0[T]$ и $x \in T$, что

$$(\mathcal{B} \overset{\tau}{\Longrightarrow} x) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (T - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \tag{2.6}$$

Отметим, что $\mathfrak{F}[T] \in \mathcal{P}'(\beta_0[T])$ и $(T - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$ при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T]$. С учетом этого реализуется понятное следствие (2.6) в части сходимости фильтров. Заметим, что из (2.1) рассуждением по индукции получается свойство

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \in \mathcal{F}\ \ \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T]\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ \ \forall (F_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{F}^m. \tag{2.7}$$

Далее, введем в рассмотрение непустое семейство всех у/ф на T :

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] &\triangleq \{\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}[T] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T]\ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathcal{F}[T] \mid \forall A \in \mathcal{P}(T)\ \ (A \in \mathcal{U}) \vee (T \setminus A \in \mathcal{U})\}\end{aligned} \tag{2.8}$$

(в связи с (2.8) см. [5, предложение 6.4.1, (1.5.1), (1.5.8)]). При $x \in T$ в виде

$$(T - \mathrm{ult})[x] \triangleq \{M \in \mathcal{P}(T) \mid x \in M\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \tag{2.9}$$

имеем тривиальный у/ф, отвечающий точке x. В связи с (2.3) заметим, что $\forall \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T))$

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{I}) \stackrel{\triangle}{=} \{\bigcap_{H\in\mathcal{K}} H : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{I})\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{\bigcap_{i=1}^{m} T_i : (T_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{I}^m\} \in \beta[T]; \tag{2.10}$$

как видно из (2.10), любое непустое подсемейство $\mathcal{P}(T)$ легко превращается в направленное.

Введем в рассмотрение $\mathbf{S}[T] \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T])^{\mathcal{P}(T)}$, полагая, что

$$\mathbf{S}[T](A) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \mid A \in \mathcal{U}\} \;\; \forall A \in \mathcal{P}(T). \tag{2.11}$$

Тогда $(\mathbf{UF})[T] \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{S}[T]^1(\mathcal{P}(T)) = \{\mathbf{S}[T](A) : A \in \mathcal{P}(T)\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]))$ есть (открытая) база топологии

$$\tau_{\mathbf{fi}}[T] \stackrel{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \;\; \exists U \in \mathcal{U} : \mathbf{S}[T](U) \subset G\} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]], \tag{2.12}$$

превращающей множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]$ в непустой нульмерный [11, с. 529] компакт

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T], \tau_{\mathbf{fi}}[T]). \tag{2.13}$$

В связи с (2.12), (2.13) напомним [5, (9.7.18)]: имеем равенство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] = \mathrm{cl}(\{(T-\mathrm{ult})[x] : x \in T\}, \tau_{\mathbf{fi}}[T]). \tag{2.14}$$

Итак, посредством отображения $x \mapsto (T-\mathrm{ult})[x] : T \to \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]$ реализуется погружение T в компакт (2.13) в виде всюду плотного множества.

3. Множества притяжения: краткие сведения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E, точки которого будем называть обычными решениями (возможно, обычными управлениями), полагая их доступными для реализации. Кроме того, фиксируем далее непустое множество X и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ (итак, в дальнейшем, если не оговорено противное, обозначение τ понимается только в этом смысле); следовательно, всюду в дальнейшем (X,τ), $X \neq \varnothing$, есть фиксированное ТП, называемое целевым. Отображения (функции) из E в X также будем называть целевыми. Если $h \in X^E$ — произвольное целевое отображение (ЦО) и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma),\tau) \in \mathbf{C}_X[\tau] \tag{3.1}$$

рассматриваем как множество притяжения (МП) в ТП (X,τ) на значениях h. В то же время с учетом (2.10) определение МП можно распространить на более общий случай, полагая при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $h \in X^E$, что

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{H}] \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\{\cap\}_\sharp(\mathcal{H})]. \tag{3.2}$$

Отметим в связи с (3.2) представления МП в [5, (8.3.10), (8.3.11)], реализуемые с применением направленностей и у/ф; сейчас ограничимся последним вариантом, учитывая [5, предложение 8.2.1]:

$$h^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[X] \;\; \forall h \in X^E \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]; \tag{3.3}$$

свойство (3.3) позволяет применить (2.6) для использования сходимости в ТП (X,τ). Итак, (см. [5, предложение 8.3.1]), с учетом (2.6) и (3.2), при $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем равенство

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = \{x \in X \mid \exists\, \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{E}) : h^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Longrightarrow} x\} \tag{3.4}$$

((3.4) есть представление МП в терминах стоун-чеховских у/ф на множестве E). В связи с (3.1), (3.2) заметим также, что (см. [5, предложение 8.4.1])

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] \ \ \forall\, h \in X^E \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.5}$$

Свойство (3.5) дополняется простым следствием, использующим (2.5): при $h \in X^E$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{B}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;(E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]]. \tag{3.6}$$

Напомним сейчас также известное [6, гл. I] положение о сохранении свойства максимальности фильтров при функциональных преобразованиях: итак (см. [5, предложение 8.2.1]) при $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ и $f \in X^E$ для БФ $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[X]$ имеем, что

$$((E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Longrightarrow ((X-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]). \tag{3.7}$$

Полезно иметь в виду цепочку вложений

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \subset \mathfrak{F}[E] \subset \beta_0[E] \subset \beta[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)), \tag{3.8}$$

позволяющую применять (3.1) в случаях, когда $\mathcal{E}$ является БФ, фильтром или у/ф. В связи с (3.8) заметим также (см. (3.1), (3.2), (3.6)), что с учетом (2.3), (2.4) и (2.10) при $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$((\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = \varnothing) \vee (\exists\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] : (\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{F}]). \tag{3.9}$$

С практической точки зрения, согласно (3.9) именно случай, когда ОАХ порождаются фильтром, для нас представляет основной интерес. Отметим, что при $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$ имеем $\{\Sigma\} \in \beta[E]$ и согласно (3.1)

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\{\Sigma\}] = \mathrm{cl}(h^1(\Sigma),\tau) \ \ \forall\, h \in X^E; \tag{3.10}$$

в качестве Σ можно использовать $\varnothing$, получаем при этом в виде (3.10) также $\varnothing$.

4. Предкомпактные варианты задач о достижимости

Заметим, что в (3.1), (3.2) вместо (X,τ) могут использоваться любые непустые ТП. В этой связи мы напомним понятия, связанные с применением компактификатора. Однако, сначала введем в рассмотрение предкомпактные ЦО, используя ТП (X,τ) предыдущего раздела. Итак, пусть (см. (1.13))

$$\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E;X;\tau] \overset{\triangle}{=} \{f \in X^E \mid f^1(E) \in (\tau-\mathrm{comp})^0[X]\}; \tag{4.1}$$

функции из (4.1) будем называть предкомпактными ЦО. В связи с (4.1) заметим, что для произвольных непустого множества $\mathbf{K}$, $\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{K}]$, $m \in \mathbf{K}^E$ и $g \in C(\mathbf{K},\mathbf{t},X,\tau)$

$$(\tau \in (\mathrm{top})_0[X]) \Longrightarrow (g \circ m \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E;X;\tau]),$$

где символ $\circ$ используется при обозначении композиции функций; см. [11, с. 18]. Более того, при вышеупомянутых условиях на $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, m и g имеем при условии $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ следующее положение:

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; g \circ m; \mathcal{E}] = g^1((\mathrm{AS})[E; K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]) \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{4.2}$$

Свойство (4.2) допускает целый ряд обобщений (см. [13, предложения 3.4.10, 3.4.11], [14]), но мы ограничимся данным положением (см. (4.2)) в связи с понятием компактификатора (см. [5, с. 325–326]). Вернемся к (4.1); отметим весьма очевидные следствия, фиксируя в дальнейшем предкомпактное ЦО

$$\mathbf{h} \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau]. \tag{4.3}$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$; итак, мы рассматриваем задачу о достижимости в T_2-пространстве (X, τ) на значениях предкомпактного ЦО $\mathbf{h}$ (4.3). Тогда, как легко видеть (см. (4.1)),

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{B}] \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]; \tag{4.4}$$

в связи с проверкой (4.4) см. построения [7, раздел 3]. Как следствие, у нас реализуется отображение

$$\mathcal{F} \mapsto (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : \mathfrak{F}[E] \to (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.5}$$

В силу (3.9) имеем, что в практически интересных случаях задач о достижимости с ОАХ именно значения отображения (4.5) представляют для нас основной интерес.

5. Представления множеств притяжения в терминах ультрафильтров

Напомним естественное оснащение множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ топологией

$$\tau_{\mathbf{fi}}[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]],$$

реализующее нульмерный компакт

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]); \tag{5.1}$$

см. (2.12), (2.13). Важную роль в построении этого оснащения играет отображение

$$\mathbf{S}[E] : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]), \tag{5.2}$$

определяемое подобно (2.11). Заметим, что множество $\mathbf{S}[E](U) \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$ определено при $U \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда (см. (2.11), (2.12))

$$\tau_{\mathbf{fi}}[E] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \ \exists U \in \mathcal{U} : \mathbf{S}[E](U) \subset G\}. \tag{5.3}$$

Напомним также важное свойство (2.14), касающееся погружения E в компакт (5.1) в виде всюду плотного п/м:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\{(E - \mathrm{ult})[x] : x \in E\}, \tau_{\mathbf{fi}}[E]). \tag{5.4}$$

Поскольку $\mathcal{P}(E) \in (\mathrm{LAT})_0[E]$, имеем (см. [5, предложение 9.4.3], [7, (4.4)]), что $\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ $\forall \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U}) \iff ((\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}) \vee (\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U})). \tag{5.5}$$

При этом, как легко видеть (см. [7, (4.5)]) в случае $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\mathrm{pr}_1(z) \cup \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\} \in \mathfrak{F}[E]. \tag{5.6}$$

В свою очередь, из (5.5), (5.6) вытекает, что (см. (1.4), [7, предложение 3])

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1) \cup [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_2). \tag{5.7}$$

Разумеется, (5.6), (5.7) позволяют рассуждением по индукции получить, что при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i = \{\bigcup_{i=1}^{m} F_i : (F_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\} \in \mathfrak{F}[E] : [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i) = \bigcup_{i=1}^{m} [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i). \tag{5.8}$$

Напомним также некоторые положения [7, раздел 5]). Так, при $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ фильтр (5.6) обладает свойством

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2} F = (\bigcap_{F\in\mathcal{F}_1} F) \cup (\bigcap_{F\in\mathcal{F}_2} F),$$

которое в силу индукции приводит к [7, следствие 2]). Более того, если T — непустое множество и $(\mathcal{F}_t)_{t\in T} \in \mathfrak{F}[E]^T$, то (см. [7, предложение 10])

$$\bigcap_{t\in T} \mathcal{F}_t = \{\bigcup_{t\in T} F_t : (F_t)_{t\in T} \in \prod_{t\in T} \mathcal{F}_t\} \in \mathfrak{F}[E] : \bigcap_{F\in \bigcap\limits_{t\in T} \mathcal{F}_t} F = \bigcup_{t\in T} (\bigcap_{F\in\mathcal{F}_t} \mathcal{F}).$$

Заметим, что (см. (3.7), (3.8)) при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеем, в частности, $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[X]$ и, кроме того,

$$(X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$$

(в самом деле, $\mathcal{U} \in \beta_0[E]$ в силу (3.8) и при этом $(E-\mathbf{fi})[\mathcal{U}] = \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$; теперь учитываем (3.7)). Напомним (3.4). В этой связи заметим, что (см. (4.3), [15, (3.8)])

$$(\mathbf{as})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{5.9}$$

В качестве семейства, порождающего ОАХ, может использоваться у/ф; при этом (см. (4.5))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \{x \in X \mid (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\} \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall \mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Более того (см. [7, предложение 2]), справедливо свойство

$$\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \ \exists!\, \mathbf{x} \in X : (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \{\mathbf{x}\}. \tag{5.10}$$

С учетом (5.10) полагаем, следуя [7, (4.15)], что отображение $\Psi \in X^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$ таково, что (см. (5.9))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = (\mathbf{as})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.11}$$

Итак, МП в случае ОАХ, порождаемых у/ф, суть синглетоны, соответствующие элементам притяжения (ЭП) в виде значений оператора Ψ, именуемого далее оператором притяжения (см. (5.11)). С учетом (3.4) и (5.11) имеем в силу [7, теорема 1]), что

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] = \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) \ \ \forall\,\mathcal{F}\in\mathfrak{F}[E]. \tag{5.12}$$

С учетом (3.9), (4.4) и (5.9) получаем, что (5.12) характеризует все практически интересные варианты МП (случай пустого МП малоинтересен). Напомним (2.9), получая, что при $u\in E$ определено значение $\Psi((E-\mathrm{ult})[u])\in X$. При этом (см. [7, (4.21)])

$$\Psi((E-\mathrm{ult})[u]) = \mathbf{h}(u) \ \ \forall\,u\in E. \tag{5.13}$$

Введем в рассмотрение $(E-\mathrm{ult})[\cdot] \triangleq ((E-\mathrm{ult})[e])_{e\in E}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E$ (оператор погружения E в компакт (5.1)). Тогда из (5.13) имеем равенство

$$\mathbf{h} = \Psi\,\circ\,(E-\mathrm{ult})[\cdot], \tag{5.14}$$

здесь $\circ$ используется при обозначении композиции функций (см. [11, с. 18]). Отметим здесь же, что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \Psi(\mathcal{U}) \ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.15}$$

В связи с (5.15) представляется естественная связь с построениями [5, раздел 2.4], где рассматривались фильтры и у/ф широко понимаемых измеримых пространств: для наших целей важно простое следствие [5, предложение 2.4.2]

$$(\tau\in(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]) \Longrightarrow (\Psi\in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathfrak{fi}}[E],X,\tau)); \tag{5.16}$$

в этой связи см. (1.9) и обсуждение в [5, раздел 4]) в связи с [5, предложение 2.4.2] (напомним, кстати, что $(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]\subset(\mathrm{top})_0[X]$). Возвращаясь к общему случаю $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$, заметим, что (см. (2.7), (5.8)) при $m\in\mathbb{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\mathfrak{F}[E]^m$ в силу (5.12)

$$\begin{aligned}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{m}\mathcal{F}_i] &= \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\bigcap_{i=1}^{m}\mathcal{F}_i)) = \Psi^1(\bigcup_{i=1}^{m}[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i))\\ &= \bigcup_{i=1}^{m}\Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i)) = \bigcup_{i=1}^{m}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}_i];\end{aligned} \tag{5.17}$$

см. [7, теорема 2]. Из (3.6) и (5.17) вытекает, что при $m\in\mathbb{N}$ и $(\mathcal{B}_i)_{i\in\overline{1,m}}\in\beta_0[E]^m$

$$\bigcup_{i=1}^{m}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{B}_i] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{m}(E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}_i]].$$

До конца настоящего раздела полагаем, что $\tau\in(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]$ (это означает, что (X,τ) есть регулярное ТП). Учитывая (1.17), (2.12) и (5.16), получаем свойство

$$\Psi\in C_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathfrak{fi}}[E],X,\tau),$$

откуда легко следует, что (см. [7, (4.23)])

$$\Psi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau); \tag{5.18}$$

в этой связи см. также (1.16), (5.13) и (5.4). В виде очевидного следствия имеем легкопроверяемое положение.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $(y_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)^n$, *то*

$$\exists\, (\mathcal{U}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n : \{y_i : i \in \overline{1,n}\} = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i]. \tag{5.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $(y_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)^n$. Тогда в силу (5.18) имеем, что

$$\mathfrak{V}_j \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid y_j = \Psi(\mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.20}$$

Поэтому имеем очевидное свойство:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{V}_i = \{(\mathfrak{U}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n \mid \mathfrak{U}_j \in \mathfrak{V}_j \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n).$$

В частности, $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{V}_i \neq \varnothing$. С учетом этого выберем $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \prod\limits_{i=1}^{n} \mathfrak{V}_i$. Тогда

$$(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n : \mathcal{V}_j \in \mathfrak{V}_j \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.21}$$

В силу (5.20) имеем, что $y_j = \Psi(\mathcal{V}_j)$ при $j \in \overline{1,n}$. С другой стороны, $(\mathcal{V}_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathfrak{F}[E]^n$, а потому (см. (2.7), (5.17)) для фильтра

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i \in \mathfrak{F}[E] \tag{5.22}$$

имеем следующее равенство (см. (5.11), (5.17), (5.22))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i] = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{V}_i] = \bigcup_{i=1}^{n} \{\Psi(\mathcal{V}_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{y_i\} = \{y_i : i \in \overline{1,n}\}.$$

С учетом (5.21) получаем теперь (5.19). □

Следствие 5.1. *Непустые конечные п/м* $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)$ *являются МП, порождаемыми фильтрами множества* E :

$$\forall\, \mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)) \ \ \exists\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] : \mathbb{K} = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}].$$

Доказательство очевидно (см.предложение 5.1)

Следствие 5.2. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $(e_i)_{i \in \overline{1,n}} \in E^n$, *то*

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E - \mathrm{ult})[e_i] \in \mathfrak{F}[E] : \{\mathbf{h}(e_i) : i \in \overline{1,n}\} = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^{n} (E - \mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $(e_i)_{i \in \overline{1,n}} \in E^n$. Тогда согласно (2.9)

$$(E - \mathrm{ult})[e_j] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.24}$$

Поэтому в силу (5.13) имеем при $j \in \overline{1,n}$, что

$$\mathbf{h}(e_j) = \Psi((E - \mathrm{ult})[e_j]) \in X,$$

где $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_j]]=\{\Psi((E-\mathrm{ult})[e_j])\}$; в итоге

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_j]]=\{\mathbf{h}(e_j)\}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что

$$\{\mathbf{h}(e_i):i\in\overline{1,n}\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{\mathbf{h}(e_i)\}=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.25}$$

При этом согласно (5.8) и (5.24) реализуется фильтр

$$\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]\in\mathfrak{F}[E], \tag{5.26}$$

для которого (см. (5.17), (5.25))

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]]=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_i]].$$

С учетом (5.25) получаем в результате равенство

$$\{\mathbf{h}(e_i):i\in\overline{1,n}\}=(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.27}$$

Из (5.26) и (5.27) вытекает (5.23). $\square$

6. Унификация множеств притяжения в классе ультрафильтров

Возвращаясь к (5.1)–(5.3), напомним, что (см. [5, (8.2.6)] при $\mathcal{E}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{E})=\{\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\mid\mathcal{E}\subset\mathcal{U}\}=\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}}\mathbf{S}[E](\Sigma)\in(\tau_{\mathbf{fi}}[E]-\mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \tag{6.1}$$

В качестве семейства $\mathcal{E}$ может, в частности, использоваться фильтр. С учетом этого фиксируем в настоящем разделе фильтр $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}[E]$, получая (см. (6.1), [5, (1.5.1), предложение 1.4.1]), что

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})=\bigcap_{F\in\mathcal{F}}\mathbf{S}[E](F)\in(\tau_{\mathbf{fi}}[E]-\mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]\setminus\{\varnothing\}. \tag{6.2}$$

Из (6.1), (6.2) вытекает, что реализуется топология

$$\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]\triangleq\tau_{\mathbf{fi}}[E]|_{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}\in(\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})], \tag{6.3}$$

превращающая множество (6.2) в непустой компакт

$$([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}),\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]); \tag{6.4}$$

компакт (6.4) является замкнутым п/п компакта (5.1). Напомним, что при $\mathcal{U}\in[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ определен ЭП $\Psi(\mathcal{U})\in X$.

В дальнейших построениях настоящего раздела полагаем, что $\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]$, получая при этом (см. (5.16), (6.2), (6.3)), что

$$\Psi^0_{\mathcal{F}} \triangleq (\Psi \mid [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) = (\Psi(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}\in[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], X, \tau). \tag{6.5}$$

Согласно (5.12) $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] = \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))$, откуда легко следует, что

$$\Psi^0_{\mathcal{F}} = (\Psi \mid [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}) \tag{6.6}$$

есть (непрерывная) сюръекция компакта (6.4) на регулярное ТП

$$((\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}) \tag{6.7}$$

(см. [11, теорема 2.1.6]). Более того, имеем, что и само ТП (6.7) — непустой компакт:

$$\tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]]. \tag{6.8}$$

Легко видеть, что на $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ в терминах (6.5) определено отношение эквивалентности $\sim$ соотношением: $\forall \mathcal{U}_1 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\ \ \forall \mathcal{U}_2 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$

$$(\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_1) = \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_2)). \tag{6.9}$$

Тогда при $\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ в виде

$$[\mathcal{U}]_\sim \triangleq \{\mathfrak{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) \mid \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathfrak{U})\} \in \mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))$$

имеем класс эквивалентности, соответствующий у/ф $\mathcal{U}$ в условиях, определяемых в (6.9); легко видеть, что

$$[\mathcal{U}]_\sim = (\Psi^0_{\mathcal{F}})^{-1}(\{\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\}). \tag{6.10}$$

Как следствие (см.(6.10)) получаем, что в виде

$$\begin{aligned}(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] &\triangleq \{[\mathcal{U}]_\sim : \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\}\\ &= \{(\Psi^0_{\mathcal{F}})^{-1}(\{\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\}) : \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})))\end{aligned} \tag{6.11}$$

реализуется (непустое) фактор-пространство, соответствующее оснащению компакта (6.4) эквивалентностью (6.9). Заметим, что из (6.5) и (6.9) следует, что

$$\forall \mathcal{U}_1 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\ \ \forall \mathcal{U}_2 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\ \ (\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2) \Longleftrightarrow (\Psi(\mathcal{U}_1) = \Psi(\mathcal{U}_2)). \tag{6.12}$$

Определено также следующее отображение

$$\pi^{(e)}_*[\mathcal{F}] \triangleq ([\mathcal{U}]_\sim)_{\mathcal{U}\in[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}. \tag{6.13}$$

В терминах (6.13) обычным образом (см. [11, с. 147]) вводим на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$ фактор-топологию:

$$\hat{\mathcal{T}}_\sim[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]] \triangleq \{G \in \mathcal{P}((\mathbf{FS})[\mathcal{F}]) \mid \pi^{(e)}_*[\mathcal{F}]^{-1}(G) \in \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]\} \in (\mathrm{top})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]], \tag{6.14}$$

получая [11, с. 147] слабейшую топологию на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$, относительно которой отображение (6.13) непрерывно. В частности,

$$\pi^{(e)}_*[\mathcal{F}] \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], (\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_\sim[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]]). \tag{6.15}$$

Итак, мы получили (см. (6.11), (6.14)) фактор-пространство

$$((\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]). \tag{6.16}$$

Заметим, кстати, что в силу (6.11) и сюръективности $\Psi_{\mathcal{F}}^0$ справедливо равенство

$$(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] = \{(\Psi_{\mathcal{F}}^0)^{-1}(\{y\}) : y \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]\}. \tag{6.17}$$

В дальнейших построениях мы широко используем конструкции [11, 2.4]. Пусть

$$\mathfrak{D}[\mathcal{F}] \triangleq \{\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))) \mid ([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) = \bigcup_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Sigma)$$
$$\&(\forall \Sigma_1 \in \mathfrak{E}\ \ \forall \Sigma_2 \in \mathfrak{E}\ \ (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing) \Longrightarrow (\Sigma_1 = \Sigma_2))\};$$

введено семейство всех невырожденных разбиений $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$. Ясно, что

$$(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{D}[\mathcal{F}]. \tag{6.18}$$

С учетом (6.11) и (6.18) легко проверяется, что

$$\forall\, H \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]\ \ \exists!\, y \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : y = \Psi_{\mathcal{F}}^0(\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in H.$$

С учетом данного свойства полагаем, что

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]^{(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]} \tag{6.19}$$

определяется следующим естественным условием: $\forall\, H \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0(H) \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : \Psi_{\mathcal{F}}^0(\mathcal{U}) = \sigma_{\mathcal{F}}^0(H)\ \ \forall \mathcal{U} \in H. \tag{6.20}$$

Заметим, что (см. (6.13), (6.28)) определена композиция

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0\ \circ\ \pi_*^{(e)}[\mathcal{F}] = (\sigma_{\mathcal{F}}^0([\mathcal{U}]_{\sim}))_{\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}. \tag{6.21}$$

Из (6.11), (6.13), (6.20) и (6.21) вытекает следующее важное равенство:

$$\Psi_{\mathcal{F}}^0 = \sigma_{\mathcal{F}}^0\ \circ\ \pi_*^{(e)}[\mathcal{F}]. \tag{6.22}$$

Отметим, далее что из (6.19) следует, конечно, включение

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in Y^{(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]}.$$

С другой стороны (см. (6.22)), как нетрудно проверить, имеет место свойство непрерывности

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in C((\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]], (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}), \tag{6.23}$$

причем $\sigma_{\mathcal{F}}^0$ является сюръекцией. Дополняя (6.15), отметим, что $\pi_*^{(e)}[\mathcal{F}]$ — сюръекция $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$. Кроме того, из (6.3), (6.17) вытекает, что

$$\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]. \tag{6.24}$$

Заметим, что в силу (6.11), (6.13) и (6.15) $\pi_*^{(e)}[\mathcal{F}]$ есть непрерывная сюръекция компакта (6.4) на ТП (6.16), а потому (6.24) вытекает из [11, теорема 3.1.10].

Условимся о следующих обозначениях. Если V и W — два непустых множества, то $W_{(*)}^V \triangleq \{h \in W^V \mid h^1(V) = W\}$ и

$$(\mathrm{bi})[V; W] \triangleq \{g \in W_{(*)}^V \mid \forall\, v_1 \in V \ \ \forall\, v_2 \in V \ \ (g(v_1) = g(v_2)) \Longrightarrow (v_1 = v_2)\}$$

(множество всех биекций V на W); если к тому же $\tau_1 \in (\mathrm{top})[V]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[W]$, то

$$(\mathrm{Hom})[V; \tau_1; W; \tau_2] \triangleq C_{\mathrm{cl}}(V, \tau_1, W, \tau_2) \cap (\mathrm{bi})[V; W] \tag{6.25}$$

есть множество всех гомеоморфизмов ТП (V, τ_1) на (W, τ_2). В случае $(\mathrm{Hom})[V; \tau_1; W; \tau_2] \neq \varnothing$ упомянутые ТП (V, τ_1) и (W, τ_2) называем гомеоморфами.

Теорема 6.1. *Отображение* $\sigma_{\mathcal{F}}^0$ (6.23) *является гомеоморфизмом ТП*

$$((\mathbf{FS})[\mathcal{F}],\ \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]])$$

на

$$((\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}), \tag{6.26}$$

т. е. $\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{Hom})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним (6.6), тогда

$$\Psi_{\mathcal{F}}^0 \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E], (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}) \\ \cap (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]_{(*)}^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}. \tag{6.27}$$

Более того, из (6.20) и (6.27) легко следует, что

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{bi})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]] \tag{6.28}$$

(здесь существенно используется (6.9)). В силу (6.11), (6.13) и (6.15) имеем, как уже фактически отмечалось, что

$$\pi_*^{(e)}[\mathcal{F}] \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E], (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]) \cap (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]_{(*)}^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})},$$

а потому (см. (6.3)) справедливо (6.24). Далее, отметим, что (6.26) есть T_2-пространство (см. (6.8)). Поэтому (см. (1.17), (6.23), (6.24)) имеем, что

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in C_{\mathrm{cl}}((\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}). \tag{6.29}$$

Из (6.25), (6.28) и (6.29) вытекает требуемое свойство гомеоморфности отображения (6.28):

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{Hom})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]}].$$

□

Итак, в виде (6.16) и (6.26) имеем гомеоморфы. В связи с весьма специальной теоремой 6.1 отметим общие построения [11, раздел 2.4] (см. в частности, [11, предложение 2.4.3]), касающиеся фактор-пространств. Мы отметим важное следствие: в терминах пространства стоун-чеховских у/ф получена по сути дела своеобразная унификация непустых МП на значениях предкомпактного ЦО (имеется в виду возможность топологического отождествления упомянутых МП с фактор-пространствами вида (6.16)); здесь полезно учитывать (6.5), (6.12).

З а м е ч а н и е 6.1. Возвращаясь к случаю фиксированного $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, напомним, что в силу (6.8) ТП (6.26) есть непустой компакт и, в частности, T_2-пространство. Поэтому в силу теоремы 6.1 ТП (6.16) также является T_2-пространством, т. е.

$$\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]] \in (\mathrm{top})_0[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]$$

и, как следствие (см. (6.24)), $\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]] \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]$, т. е. ТП (6.16) является непустым компактом.

7. Добавление, 1

Отметим, что (5.16) допускает естественное обобщение: для непрерывности Ψ достаточна T_2-отделимость ТП (X,τ). Мы проверим данное положение, получая при этом некоторые полезные представления.

Итак, всюду в дальнейшем полагаем, что $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ и, стало быть, (X,τ) есть T_2-пространство. В этом случае

$$\mathbf{t} \overset{\triangle}{=} \tau|_{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)} \in (\mathrm{top})_0[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]. \tag{7.1}$$

С другой стороны, в силу предкомпактности $\mathbf{h}^1(E)$ имеем согласно (1.14), (4.1) и (4.3), что $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X]$, а потому $\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]$ и, в итоге (см. (7.1)),

$$\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]; \tag{7.2}$$

поэтому в виде $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t})$ имеем непустой компакт.

Напомним некоторые полезные положения [5, раздел 8.3]. Так, для произвольных ТП (Y,θ), $Y \neq \varnothing$, и фильтра $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}[Y]$ множества

$$((\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] \overset{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \tilde{\mathcal{F}} \overset{\theta}{\Longrightarrow} y\} \in \mathcal{P}(Y))\&((\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}] \overset{\triangle}{=} \bigcap_{F\in\tilde{\mathcal{F}}} \mathrm{cl}(F,\theta) \in \mathcal{P}(Y)) \tag{7.3}$$

таковы, что $(\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] \subset (\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}]$ (см. [5, (8.3.37)]), причем

$$(\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Longrightarrow ((\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] = (\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}]);$$

см. [5, предложение 8.3.2]. Возвращаясь к T_2-пространству (X,τ), получаем, в частности, что

$$(\tau-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{U}}] = (\tau-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{U}}] \ \ \forall \tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]. \tag{7.4}$$

Отметим, что при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ для БФ $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[X]$ имеем в силу (3.7) свойство

$$(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X],$$

а потому с учетом (7.4)

$$(\tau-\mathrm{LIM})[(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]]=(\tau-\mathrm{CL})[(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]]=\bigcap_{F\in(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]}\mathrm{cl}(F,\tau)$$
$$=\bigcap_{F\in\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]}\mathrm{cl}(F,\tau)=\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{U}}\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma),\tau)=(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{U}]=\{\Psi(\mathcal{U})\};$$

мы учитываем здесь (2.5), (3.1) и (5.11). С учетом (7.3) получаем, что при $\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$\{x\in X\mid(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}=\{\Psi(\mathcal{U})\};$$

в силу (2.6) имеем, однако, очевидное равенство

$$\{x\in X\mid(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}=\{x\in X\mid\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}.$$

В итоге получаем следующее положение:

$$\{x\in X\mid\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}=\{\Psi(\mathcal{U})\}\ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\tag{7.5}$$

(в этой связи см. (5.15)). Заметим, что в нашем общем случае T_2-пространства (X,τ) непременно

$$\{x\in X\mid\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)\ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].\tag{7.6}$$

З а м е ч а н и е 7.1. В интересах полноты изложения проверим (7.6), фиксируя $\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $x_*\in X$ со свойством

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x_*.\tag{7.7}$$

В силу (2.6) это означает, что фильтр $\mathcal{V}\triangleq(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]$ реализует вложение

$$N_\tau(x_*)\subset\mathcal{V},\tag{7.8}$$

где $\mathcal{V}=\{F\in\mathcal{P}(X)\mid\exists\,B\in\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]:B\subset F\}$ и при этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\subset\mathcal{V}$. С учетом (7.8) имеем теперь по свойствам фильтра (см. (2.1))

$$\mathbf{h}^1(U)\cap H\neq\varnothing\ \ \forall\,U\in\mathcal{U}\ \ \forall\,H\in N_\tau(x_*).\tag{7.9}$$

Поскольку $\mathcal{U}\neq\varnothing$ и $\mathbf{h}^1(U)\subset\mathbf{h}^1(E)$ при $U\in\mathcal{U}$, (7.9) означает, что

$$\mathbf{h}^1(E)\cap H\neq\varnothing\ \ \forall\,H\in N_\tau(x_*),$$

а потому $x_*\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ в силу (1.6). Поскольку x_* со свойством (7.7) выбиралось произвольно, установлено (7.6).

Комбинируя (7.5) и (7.6), получаем, что (и при $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$)

$$\Psi(\mathcal{U})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)\ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Иными словами, получаем теперь, что

$$\Psi\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E],\tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}:\{x\in X\mid\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x\}=\{\Psi(\mathcal{U})\}\ \ \forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].\tag{7.10}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Оператор притяжения непрерывен в смысле ТП* (5.1) *и* $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t})$:

$$\Psi \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t}). \tag{7.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathfrak{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, получая при этом

$$\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]=\{\mathbf{h}^1(U):U\in\mathfrak{U}\}\in\beta_0[X]$$

в силу (3.2), причем $\mathfrak{V}\stackrel{\triangle}{=}(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]]\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ согласно (3.7). Отметим, что $\Psi(\mathfrak{U})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ в силу (7.10) и при этом

$$\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]\stackrel{\tau}{\Longrightarrow}\Psi(\mathfrak{U}). \tag{7.12}$$

Более того, из (7.5) имеем очевидное следствие: $\forall\,x\in X$

$$(\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]\stackrel{\tau}{\Longrightarrow}x)\Longrightarrow(x=\Psi(\mathfrak{U})). \tag{7.13}$$

Итак, (7.12), (7.13) непосредственно извлекаются из (7.5). Выберем произвольно $\mathbf{H}\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))$. При этом из (7.2) вытекает, что

$$\mathbf{t}\in(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]; \tag{7.14}$$

см. [11, теорема 3.1.6]. Из (7.14) получаем теперь, что для некоторой окрестности $\mathbf{F}\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))\cap\mathbf{C}_{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E],\tau)}[\mathbf{t}]$

$$\mathbf{F}\subset\mathbf{H}; \tag{7.15}$$

см. [16, гл. III, теорема 1.9]. Поскольку $\mathbf{F}$ есть окрестность $\Psi(\mathfrak{U})$ в п/п (X,τ), найдется окрестность

$$\tilde{\mathbf{F}}\in N_\tau(\Psi(\mathfrak{U})) \tag{7.16}$$

со свойством $\mathbf{F}=\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)\cap\tilde{\mathbf{F}}$. С учетом (7.12) и (7.16) имеем, что для некоторого множества $\mathbf{B}\in\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]$ реализуется (см. (2.6)) вложение $\mathbf{B}\subset\tilde{\mathbf{F}}$. Как следствие имеем для некоторого $\Phi\in\mathfrak{U}$ равенство $\mathbf{B}=\mathbf{h}^1(\Phi)$, а потому

$$\mathbf{h}^1(\Phi)\subset\tilde{\mathbf{F}},$$

где $\mathbf{S}[E](\Phi)\in(\mathbf{UF})[E]$; тогда (см. (2.12)) имеем, в частности, что

$$\mathbf{S}[E](\Phi)=\{\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\mid\Phi\in\mathcal{U}\}\in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathfrak{U}). \tag{7.17}$$

Выберем произвольно $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathbf{S}[E](\Phi)$. Тогда $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\Phi\in\tilde{\mathcal{U}}$, а потому $\mathbf{B}=\mathbf{h}^1(\Phi)\in\mathbf{h}^1[\tilde{\mathcal{U}}]$. Заметим, что $\mathbf{B}\subset\mathbf{h}^1(E)\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$. При этом согласно (3.1) и (5.11) $\Psi(\mathcal{U})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(U),\tau)$ $\forall\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ $\forall U\in\mathcal{U}$. В частности, $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Phi),\tau)$, т. е. $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)$, где

$$\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)=\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t}) \tag{7.18}$$

(в самом деле, $\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t})=\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ по определению $\mathbf{t}$; но, как уже отмечалось $\mathbf{B}\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$, а тогда $\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$). С учетом (7.18) получаем, что $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in$

$\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t})$. Однако, по выбору $\mathbf{B}$ имеем теперь, что $\mathbf{B}\subset\tilde{\mathbf{F}}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$. В силу замкнутости $\mathbf{F}$ в п/п с «единицей» $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ имеем тогда вложение $\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t})\subset\mathbf{F}$ и, как следствие, $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in\mathbf{F}$. Поскольку выбор $\tilde{\mathcal{U}}$ был произвольным, установлено, что (см. (7.15))

$$\Psi^1(\mathbf{S}[E](\Phi))\subset\mathbf{H}.$$

Учитывая (7.17) и то, что выбор $\mathbf{H}$ также был произвольным, получаем, что $\forall\,H_1\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))\ \exists\,H_2\in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathfrak{U}):$

$$\Psi^1(H_2)\subset H_1.$$

Поскольку и выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что $\forall\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\ \ \forall\,H'\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathcal{U}))$ $\exists\,H''\in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathcal{U}):$

$$\Psi^1(H'')\subset H'. \tag{7.19}$$

Из (7.19) вытекает (см. [11, гл. I, определение 3.1, предложение 3.1]) требуемое свойство (7.11). □

Следствие 7.1. *В общем случае* $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$ *оператор притяжения непрерывен в смысле ТП* (5.1) *и* (X,τ) :

$$\Psi\in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],X,\tau). \tag{7.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из предложения 7.1 вытекает, что (см. (1.15))

$$\Psi^{-1}(G)\in\tau_{\mathbf{fi}}[E]\ \ \forall\,G\in\mathbf{t}. \tag{7.21}$$

Выберем произвольно $\mathbf{G}\in\tau$. Тогда в силу (7.1) $\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)\in\mathbf{t}$, а потому (см. (7.21))

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau))=\{\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\mid\Psi(\mathcal{U})\in\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E],\tau)\}\in\tau_{\mathbf{fi}}[E]. \tag{7.22}$$

Учтем (7.10). Тогда при $\mathcal{U}\in\Psi^{-1}(\mathbf{G})$ имеем, что $\Psi(\mathcal{U})\in\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ и, как следствие (см. (7.22)), $\mathcal{U}\in\Psi^{-1}(\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau))$. Итак,

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G})\subset\Psi^{-1}(\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)).$$

Противоположное вложение очевидно, а тогда

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G})=\Psi^{-1}(\mathbf{G}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau))\in\tau_{\mathbf{fi}}[E]$$

в силу (7.22). Поскольку выбор $\mathbf{G}$ был произвольным, установлено (см. (1.15)) требуемое свойство (7.20). □

Отметим, что в рассматриваемом здесь случае $\tau\in(\mathrm{top})_0[X]$ сохраняет силу (5.18).

З а м е ч а н и е 7.2. В самом деле, в силу (1.17), следствия 7.1 и компактности ТП (5.1) в нашем (более общем в сравнении с разделом 5) случае

$$\Psi\in C_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],X,\tau), \tag{7.23}$$

а потому (см. (1.16), (7.23)) имеем, что

$$\Psi^1(\mathrm{cl}(A, \tau_{\mathbf{fi}}[E])) = \mathrm{cl}(\Psi^1(A), \tau) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]).$$

Используя (5.4) и (5.14) имеем теперь, в частности, что

$$\begin{aligned}\Psi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) = \Psi^1(\mathrm{cl}((E-\mathrm{ult})[\cdot]^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E])) = \mathrm{cl}(\Psi^1((E-\mathrm{ult})[\cdot]^1(E), \tau) \\ = \mathrm{cl}((\Psi \circ (E-\mathrm{ult})[\cdot])^1(E), \tau) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E], \tau).\end{aligned} \tag{7.24}$$

С учетом (7.24) легко проверяется справедливость предложения 5.1 и следствий 5.1 и 5.2 при $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$; для этого существенна лишь непрерывность Ψ в смысле (7.20), приводящая к (7.24).

Отметим в заключении раздела важную роль свойства регулярности ТП, либо соответствующего его п/п (см. (5.16), (7.14)), в вопросе, связанном с непрерывностью оператора притяжения.

8. Добавление, 2

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с поведением МП при ослаблении топологии на множестве X. Однако, предварительно напомним известный факт [11, следствие 3.1.14]: если M — непустое множество, $\tau_1 \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[M]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})_0[M]$, то

$$(\tau_2 \subset \tau_1) \Longrightarrow (\tau_1 = \tau_2). \tag{8.1}$$

Вернемся к задаче о достижимости при ОАХ. Наряду с топологией $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ фиксируем $\vartheta \in (\mathrm{top})_0[X]$, для которой

$$\vartheta \subset \tau. \tag{8.2}$$

С учетом (8.1), (8.2) получаем тогда, что

$$\tau|_K = \vartheta|_K \ \ \forall K \in (\tau-\mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}. \tag{8.3}$$

Далее мы будем сравнивать МП в (E, τ) и в (E, ϑ), учитывая (8.3). При этом для МП на значениях $\mathbf{h}$ в (E, ϑ) используем определение (3.1), заменяя в нем τ на ϑ и получая равенства

$$(\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \in \mathbf{C}_X[\vartheta] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{8.4}$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{E}]. \tag{8.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.1), (4.3) имеем включение $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau-\mathrm{comp})^0[X]$ (в силу (1.14)) и

$$\mathbb{K} \overset{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}, \tag{8.6}$$

В частности, $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau] \setminus \{\varnothing\}$. Если $\Sigma \in \mathcal{E}$, то $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \subset \mathbb{K}$, т. к. $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathbf{h}^1(E) \subset \mathbb{K}$, а потому (см. (8.3), (8.6))

$$\tau|_{\mathbb{K}} = \vartheta|_{\mathbb{K}}; \tag{8.7}$$

как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$, где

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \cap \mathbb{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau). \tag{8.8}$$

Вместе с тем, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \cap \mathbb{K}$, где $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \in \mathbf{C}_X[\vartheta]$. Кроме того, из (8.7), (8.8) следует, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \cap \mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau], \tag{8.9}$$

причем $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$. В итоге

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) \in [\mathbf{C}_X[\tau]](\mathbf{h}^1(\Sigma)), \tag{8.10}$$

и согласно (8.8), (8.9) $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau)$. Действительно из (8.8) с учетом (8.10)

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$$

и, как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$, где учитывается (8.7). Согласно (8.3) и (8.6)

$$\vartheta|_{\mathbb{K}} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[X],$$

а потому (см. (1.12)) $\mathbb{K} \in (\vartheta - \mathrm{comp})[X]$. Учитывая то, что $\vartheta \in (\mathrm{top})_0[X]$, получаем (см. [11, теорема 3.1.8]), что $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\vartheta]$, причем $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathbb{K}$ и, как следствие, $\mathbb{K} \in [\mathbf{C}_X[\vartheta]](\mathbf{h}^1(\Sigma))$. С учетом (1.6) имеем, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \subset \mathbb{K}$$

и согласно (8.9)

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}). \tag{8.11}$$

С учетом (8.7), (8.8) и (8.11) имеем в итоге, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta).$$

Поскольку выбор $\Sigma \in \mathcal{E}$ был произвольным, имеем из (3.1) и (8.4) требуемое равенство (8.5). □

Мы можем использовать (8.5) в случаях, когда $\mathcal{E}$ является фильтром и, в частности, у/ф. Итак,

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = (\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{U}] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{8.12}$$

Учтем (5.11). Тогда из (8.12) получаем, что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{8.13}$$

Свойство (8.13) показывает по сути дела то, что Ψ является оператором притяжения и по отношению к ТП (X, ϑ). Отметим, возвращаясь к предложению 8.1, что при $\theta \in (\mathrm{top})[X]$ со свойством $\theta \subset \tau$ имеет место оценочное свойство

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \subset (\mathrm{AS})[E; X; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E].$$

Сравнивая данное общее свойство с упомянутым предложением 8.1, имеем, что реально получить МП, отличное от $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]$, посредством ослабления топологии множества X можно только при нарушении свойства T_2-отделимости получающегося ТП.

9. Добавление, 3

В настоящем разделе рассмотрим один вариант применения предложения 8.1, имея в виду задачу управления нелинейной системой. Будем при этом предполагать, что данная система удовлетворяет условиям, подобным [17], которые не включали традиционное условие (локальной) липшицевости функции в правой части управляемого дифференциального уравнения (в [17] использовались более общие условия обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений). В этой связи напомним о фундаментальной теореме об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина в теории дифференциальных игр (см. [18,19]); данная теорема позволила установить существование седловой точки в классе позиционных стратегий для типичных вариантов функционалов платы и, по сути, определила современное состояние теории дифференциальных игр. В [18,19] исследовались конфликтно-управляемые системы, удовлетворяющие упомянутому условию липшицевости; Н. Н. Красовский поставил вопрос о возможности отказа от данного условия с сохранением альтернативы в игре сближения-уклонения. Ответ на данный вопрос был дан А. В. Кряжимским в [17, 20]. При этом была отмечена важная роль обобщенных управлений (ОУ). Все это мотивирует специальное исследование задач управления с нелипшицевой, вообще говоря, правой частью дифференциального уравнения; см. в этой связи [21].

Фиксируем $n\in\mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \tag{9.1}$$

где P — непустое ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^p$, а $p \in \mathbb{N}$ — размерность управляющего вектора u. Полагаем, что система (9.1) функционирует на промежутке $T \stackrel{\triangle}{=} [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. В отношении функции

$$f : T \times \mathbb{R}^n \times P \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{9.2}$$

постулируем сейчас только свойство непрерывности по совокупности переменных. Далее будет введено (непустое) множество $\mathbb{U}$ управляющих функций, определенных на T и принимающих значения в P, т. е. $\mathbb{U} \in \mathcal{P}'(P^T)$. Будем исследовать возможности управляющей стороны в части формирования пучка траекторий на T при тех или иных ОАХ, что можно рассматривать как задачу о достижимости в функциональном пространстве. При этом будут рассматриваться два варианта оснащения этого пространства сравнимыми топологиями.

В дальнейшем используем следующие обозначения: $\tau_{\mathbb{R}} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}]$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$ и для всякого ТП (H, ζ), $H \neq \varnothing$,

$$C(H, \zeta) \stackrel{\triangle}{=} C(H, \zeta, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}).$$

Итак, ориентируясь на [17,20,21], введем в рассмотрение ОУ, для чего, в свою очередь, потребуется ввести специальные измеримые пространства.

Если E — множество, то через $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ обозначаем семейство всех σ-алгебр п/м E и при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ полагаем (см. (1.4)), что

$$(\sigma - \mathrm{alg})[E \mid \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{S} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{S}\} = [(\sigma - \mathrm{alg})[E]](\mathcal{E}),$$

получая непустое подсемейство $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$, для которого

$$\sigma_E^0(\mathcal{E}) \triangleq \bigcap_{\mathcal{S}\in(\sigma-\mathrm{alg})[E|\mathcal{E}]} \mathcal{S} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E \mid \mathcal{E}]$$

(введена σ-алгебра п/м E, порожденная семейством $\mathcal{E}$). Полагая, как уже отмечалось, что $\tau_{\mathbb{R}} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}]$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$, введем в рассмотрение $\mathbf{t} \triangleq \tau_{\mathbb{R}}|_T \in (\mathrm{top})_0[T]$ и σ-алгебру

$$\mathcal{T} \triangleq \sigma_T^0(\mathbf{t}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[T]$$

борелевских п/м T. Кроме того, при $k \in \mathbb{N}$ через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^k]$ обозначаем (метризуемую) топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^k$. Тогда, в частности, $\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^p]$, $\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[P]$ и

$$\mathbf{t}\{\times\}\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbf{t} \times \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T \times P)) \tag{9.3}$$

есть семейство всех открытых прямоугольников в $T \times P$, являющееся базой топологии

$$\mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \triangleq \{G \in \mathcal{P}(T \times P) \mid \forall m \in G\ \ \exists B \in \mathbf{t}\{\times\}\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P : (m \in B) \\ \&(B \subset G)\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[T \times P]. \tag{9.4}$$

С учетом (9.4) вводим σ-алгебру борелевских п/м $T \times P$:

$$\mathcal{K} \triangleq \sigma_{T\times P}^0(\mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \in (\sigma - \mathrm{alg})[T \times P].$$

Наряду с (9.3), введем в рассмотрение полуалгебру [22, гл. I] измеримых прямоугольников:

$$\mathcal{T}\{\times\}\mathfrak{B} \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathcal{T} \times \mathfrak{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T \times P)),$$

где $\mathfrak{B} \triangleq \sigma_P^0(\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. С учетом положений [23, с. 308] и компактности множеств T и P

$$\mathcal{K} = \sigma_{T\times P}^0(\mathcal{T}\{\times\}\mathfrak{B}),$$

откуда, в частности, следует свойство

$$\Gamma \times P \in \mathcal{K}\ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}. \tag{9.5}$$

Если E — множество и $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, то при $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\Delta_\infty[A; \mathcal{E}] \triangleq \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \mid (A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)\&(A_k \cap A_l = \varnothing\ \ \forall k \in \mathbb{N}\ \ \forall l \in \mathbb{N} \setminus \{k\})\}$$

есть множество всех счетных разбиений A множествами из $\mathcal{E}$; в этих терминах полагаем, что

$$(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{E}] \triangleq \{\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \mid (\sum_{i=1}^{n} \mu(L_i))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mu(L)\ \ \forall L \in \mathcal{E}\ \ \forall (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Delta_\infty[L; \mathcal{E}]\},$$

получая множество всех счетно-аддитивных вещественнозначных (в/з) мер на σ-алгебре $\mathcal{E}$;

$$(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{E}] \mid 0 \leqslant \mu(\Sigma) \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\}$$

(все меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ регулярны; см. [23, гл. I]);

В дальнейшем $\lambda \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{T}]$ есть мера Лебега–Бореля на $\mathcal{T}$ (т. е., по сути, «длина») и с учетом (9.5)

$$\mathcal{R} \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}] \mid \mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}\} \tag{9.6}$$

есть множество всех обобщенных управлений (ОУ) на промежутке T. В терминах

$$C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) = C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$$

определяется нужный вариант банахова пространства (БП) с нормой равномерной сходимости. Если $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, то

$$g \mapsto \int_{T \times P} g\, d\,\mu : C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9.7}$$

есть линейный ограниченный функционал на упомянутом БП (интегрирование в (9.7) может определяться, в частности, по простейшей схеме [24, гл. 3]). Мы используем с учетом положений [23, гл. 1] теорему Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов (см. [25, гл. IV]). Нам потребуется в этой связи $*$-слабая топология на пространстве $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, изометрически изоморфном (см. (9.7)) пространству, топологически сопряженному к $C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. В этой связи при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P))$ и $\varepsilon \in]\,0\,\infty\,[$ полагаем, что

$$\mathcal{N}^*(\mu, \mathbb{K}, \varepsilon) \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}] \mid \int_{T \times P} g\, d\,\mu - \int_{T \times P} g\, d\,\nu \,|< \varepsilon \ \ \forall g \in \mathbb{K}\}.$$

Данные множества образуют в своей совокупности базу $*$-слабой топологии

$$\tau^*[\mathcal{K}] \triangleq \{G \in \mathcal{P}((\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]) \mid \forall \mu \in G \ \ \exists \mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)) \\ \exists \varepsilon \in]\,0\,\infty\,[: \mathcal{N}^*(\mu, \mathbb{K}, \varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]].$$

При этом $\mathcal{R}$ (9.6) сильно ограничено и $*$-слабо замкнуто (см. [21]), а потому

$$\mathcal{R} \in (\tau^*[\mathcal{K}] - \mathrm{comp})[(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]] \setminus \{\varnothing\}$$

и, как следствие, в виде

$$(\mathcal{R}, \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}) \tag{9.8}$$

имеем непустой компакт. Через $C_n(T)$ обозначаем множество всех непрерывных отображений из T в $\mathbb{R}^n$ с естественными топологиями:

$$C_n(T) \triangleq C(T, \mathbf{t}, \mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}),$$

где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^n]$ — топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$.

Возвращаясь к (9.2), заметим, что при $i \in \overline{1,n}$ в виде

$$(t,x,u) \mapsto f(t,x,u)(i) : T \times \mathbb{R}^n \times P \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9.9}$$

имеем i-ю компоненту f, обозначаемую ниже через f_i; ясно, что f_i (9.9) — в/з функция, непрерывная по совокупности переменных. Если же $\mathbf{x} \in C_n(T)$ и $i \in \overline{1,n}$, то функция

$$(t,u) \mapsto f_i(t,\mathbf{x}(t),u) : T \times P \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрерывна, т. е. содержится в $\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$; при $\mu \in \mathcal{R}$ и $t \in T$ определен интеграл

$$\int_{[t_0,t]\times P} f_i(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \in \mathbb{R}$$

(используем простейшую схему интегрирования [24, гл. 3]). Далее, как обычно, при $\mu \in \mathcal{R}$, $\mathbf{x} \in C_n(T)$ и $t \in T$ получаем, что

$$\int_{[t_0,t]\times P} f(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \stackrel{\triangle}{=} \Big(\int_{[t_0,t]\times P} f_i(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u))\Big)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n,$$

реализуя таким образом интегрирование вектор-функции, связанной с (9.2), покомпонентно (см. (9.9)). С учетом этого, фиксируя $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вводим при $\mu \in \mathcal{R}$ интегральную воронку

$$\Phi[\mu] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{x} \in C_n(T) \mid \mathbf{x}(t) = x_0 + \int_{[t_0,t]\times P} f(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \ \ \forall\, t \in T\}. \tag{9.10}$$

Полагаем в дальнейшем выполненным следующее

Условие обобщенной единственности:

Если $\mu \in \mathcal{R}$, то множество $\Phi[\mu]$ (9.10) одноэлементно.

Тогда (при данном условии) полагаем при $\mu \in \mathcal{R}$, что

$$\varphi(\cdot,\mu) \stackrel{\triangle}{=} (\varphi(t,\mu))_{t\in T} \in C_n(T) \tag{9.11}$$

реализует интегральную воронку $\Phi[\mu]$ в виде синглетона:

$$\Phi[\mu] = \{\varphi(\cdot,\mu)\}. \tag{9.12}$$

Вектор-функцию (9.11), (9.12) (а это скользящий режим) рассматриваем как траекторию, порожденную ОУ μ.

Далее, через $\|\cdot\|_n \stackrel{\triangle}{=} (\|x\|_n)_{x\in\mathbb{R}^n}$ обозначаем евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Полагаем далее выполненным следующее

Условие равномерной ограниченности.

Для некоторого $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$

$$\|\varphi(t,\mu)\|_n \leqslant \mathbf{b} \ \ \forall\, \mu \in \mathcal{R} \ \ \forall\, t \in T.$$

З а м е ч а н и е 9.1. Отметим простой пример непрерывной системы (9.1), не удовлетворяющей, вообще говоря, условию Липшица по фазовой переменной, но удовлетворяющей условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности.

Итак, пусть (в данном примере) $n=2$, $g \in C(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $h \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. Тогда, как легко видеть, система

$$\dot{x}_1 = g(x_2), \ \ \dot{x}_2 = h(t,u), \ \ u \in P,$$

где P — непустой компакт в $(\mathbb{R}^p, \tau_{\mathbb{R}}^{(p)})$, удовлетворяет обоим вышеупомянутым условиям, но не удовлетворяет, вообще говоря, условию локальной липшицевости по фазовой переменной; последнее обстоятельство имеет место, например, в случае, когда g есть функция

$$\xi \mapsto \sqrt{|\xi|} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$.

Возвращаясь к общей постановке, условимся, что в качестве обычных управлений будут использоваться кусочно-постоянные (к.-п.), непрерывные справа (н.спр.) на $[t_0, \vartheta_0[$ и непрерывные слева (н.сл.) в точке ϑ_0 функции из множества P^T. Итак, пусть $\mathbb{U}$ есть далее множество всех так определенных обычных управлений на T, т. е. множество всех к.-п., н.спр. на $[t_0, \vartheta_0[$ и н.сл. в точке ϑ_0 функций из P^T. Ясно, что при $u(\cdot) = (u(t))_{t \in T} \in \mathbb{U}$ в виде

$$\mathbf{g} \mapsto \int_{t_0}^{\vartheta_0} \mathbf{g}(t, u(t))\, dt : C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

реализуется линейный ограниченный функционал на БП $C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$ в оснащении нормой равномерной сходимости. С учетом теоремы Рисса имеем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что $\exists!\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}]:$

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} \mathbf{g}(t, u(t))\, dt = \int_{T \times P} \mathbf{g}\, d\mu \ \ \forall\, \mathbf{g} \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P).$$

С учетом этого полагаем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что мера $\mathbf{m}[u(\cdot)] \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}]$ такова, что

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} g(t, u(t))\, dt = \int_{T \times P} g\, d\mathbf{m}[u(\cdot)] \ \ \forall\, g \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P). \tag{9.13}$$

Более того (см. [21]), из (9.13) легко следует, что $\mathbf{m}[u(\cdot)] \in \mathcal{R} \ \ \forall\, u(\cdot) \in \mathbb{U}$. Таким образом,

$$\mathfrak{M} \triangleq (\mathbf{m}[u(\cdot)])_{u(\cdot) \in \mathbb{U}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{U}}, \tag{9.14}$$

причем $\mathrm{cl}(\mathfrak{M}^1(\mathbb{U}), \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}) = \mathrm{cl}(\mathfrak{M}^1(U), \tau^*[\mathcal{K}]) = \mathcal{R}$. Итак, посредством $\mathfrak{M}$ реализуется погружение $\mathbb{U}$ в компакт (9.8) в виде всюду плотного п/м, что вполне аналогично общим положениям [4, гл. IV]. С учетом (9.14) для непрерывной системы (9.1) логично определить обычные траектории как частный случай обобщенных: полагаем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что

$$\mathbf{x}(\cdot, u(\cdot)) = (\mathbf{x}(t, u(\cdot)))_{t \in T} \triangleq \varphi(\cdot, \mathbf{m}[u(\cdot)]) = \varphi(\cdot, \mathfrak{M}(u(\cdot))), \tag{9.15}$$

получая, конечно, в силу (9.13), что

$$\mathbf{x}(t, u(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, \mathbf{x}(\xi, u(\cdot)), u(\xi)) d\xi \ \ \forall\, t \in T$$

(римановский интеграл определяется покомпонентно).

Мы напомним, что $\mathbb{R}_+ = \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ и $C_+(T,\mathbf{t}) \triangleq \mathbf{C}(T,\mathbf{t}) \cap (\mathbb{R}_+)^T$; ясно, что

$$(\|h(t)\|_n)_{t\in T} \in C_+(T,\mathbf{t}) \;\; \forall\, h \in C_n(T).$$

С учетом этого получаем при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, что $|||g|||_{C_n(T)} \triangleq \max_{t\in T} \|g(t)\|_n \in \mathbb{R}_+$; тем самым для линейного пространства $C_n(T)$ определена норма равномерной сходимости

$$|||\cdot|||_{C_n(T)} \triangleq (|||h|||_{C_n(T)})_{h\in C_n(T)}$$

и, как следствие, топология $\tau \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)]$, порожденная данной нормой. Всюду в дальнейшем τ понимается только в этом смысле. При $\mathbf{g} \in C_n(T)$ и $\varepsilon \in]\,0,\infty\,[$ полагаем, что $N_{\sup}(g,\varepsilon) \triangleq \{h \in C_n(T) \mid |||g-h|||_{C_n(T)} < \varepsilon\}$. Тогда

$$\tau = \{G \in \mathcal{P}(C_n(T)) \mid \forall\, g \in G \;\; \exists\, \varepsilon \in]\,0,\infty\,[: N_{\sup}(g,\varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)]. \tag{9.16}$$

Мы полагаем, кроме того, что всюду в дальнейшем

$$X \triangleq C_n(T), \tag{9.17}$$

получая вариант T_2-пространства (X,τ). Напомним, что (см. [21])

$$\tilde{\varphi} \triangleq (\varphi(\cdot,\mu))_{\mu\in\mathcal{R}} \in C(\mathcal{R},\tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}},X,\tau), \tag{9.18}$$

а потому (см. (1.17)) имеем, как следствие, свойство замкнутости $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} \in C_{\mathrm{cl}}(\mathcal{R},\tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}},X,\tau).$$

При этом, конечно, $\tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}) \in \mathbf{C}_X[\tau]$. Более того, из (9.18) и компактности ТП (9.8) вытекает, что (см. [11, теорема 3.1.10])

$$\tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]. \tag{9.19}$$

Полагаем в дальнейшем, что $E \triangleq \mathbb{U}$ и

$$\mathbf{h} \triangleq (\mathbf{x}(\cdot,u(\cdot)))_{u(\cdot)\in\mathbb{U}}. \tag{9.20}$$

Тогда в силу (9.14) и (9.15) имеем равенство $\mathbf{h} = \tilde{\varphi} \circ \mathfrak{M}$, а потому

$$\mathbf{h}^1(\mathbb{U}) = \mathbf{h}^1(E) = \tilde{\varphi}^1(\mathfrak{M}^1(E)) = \tilde{\varphi}^1(\mathfrak{M}^1(\mathbb{U})) \subset \tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}).$$

С учетом (1.13) и (9.19) получаем теперь, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbb{U}) = \mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X],$$

что доставляет (см. (4.1)) следующее положение: в рассматриваемом случае выполняется (4.3), т. е. $\mathbf{h}$ (9.20) есть предкомпактное ЦО. Как следствие получаем (4.4). Кроме того, в силу (4.5) имеем в рассматриваемом случае, что

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}] \in (\tau - \mathrm{comp})[E] \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E].$$

Разумеется, при нашей конкретизации E, (X,τ) и $\mathbf{h}$ определено МП $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] \in \mathcal{P}(X)$ и в более общем случае $\mathcal{E} \in \beta[E]$, для которого справедливо (3.9).

Рассмотрим теперь другое топологическое оснащение множества X (9.17). Итак, при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, $K \in \mathrm{Fin}(T)$ и $\varepsilon \in]\,0,\infty\,[$ полагаем, что

$$N(g,K,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \{h \in C_n(T) \mid \|g(t)-h(t)\|_n < \varepsilon \ \ \forall\, t \in K\},$$

получая непустое п/м X (9.17). При этом, как легко видеть,

$$\theta \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(C_n(T)) \mid \forall\, g \in G \ \ \exists\, K \in \mathrm{Fin}(T) \ \ \exists\, \varepsilon \in]\,0,\infty\,[: N(g,K,\varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)], \tag{9.21}$$

а потому $(X,\theta) = (C_n(T),\theta)$ есть T_2-пространство, а точнее, пространство $C_n(T)$ с топологией поточечной сходимости. Ясно, что при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, $K \in \mathrm{Fin}(T)$ и $\varepsilon \in]\,0,\infty\,[$

$$N_{\sup}(g,\varepsilon) \subset N(g,K,\varepsilon).$$

Тогда (см. (9.16), (9.21)) $\theta \subset \tau$. Возвращаясь к (8.2) и предложению 8.1, получаем следующее положение.

Теорема 9.1. *Пространства $(X,\tau) = (C_n(T),\tau)$ и $(X,\theta) = (C_n(T),\theta)$ эквивалентны в смысле совпадения МП, порождаемых НС:*

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\theta;\mathbf{h};\mathcal{E}] \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E].$$

С учетом (2.10) и (3.2) получаем, как следствие, что при условиях теоремы 9.1

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;X;\theta;\mathbf{h};\mathcal{E}] \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{9.22}$$

В связи с (9.22) и теоремой 9.1 отметим общие положения [11, 2.6], касающиеся соотношений между топологиями поточечной и равномерной сходимости.

References

[1] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970. [N. N. Krasovsky, *Game Problems About Meeting of Movements*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[2] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Nauka Publ., M., 1986 (In Russian)].

[3] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[5] А. Г. Ченцов, *Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств*, ЛЕНАНД, М., 2024, 416 с. [A. G. Chentsov, *Ultrafilters and Maximal Linked Set Systems*, LENAND Publ., Moscow, 2024 (In Russian), 416 pp.]

[6] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 279 с. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 279 pp.]

[7] А. Г. Ченцов, “Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости”, Тр. ИММ УрО РАН, **31**, 2025, 294–315. [A. G. Chentsov, “Attraction sets in abstract reachability problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **31**, 2025, 294–315 (In Russian)].

[8] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[10] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Едиториал, М., 2004, 368 с. [P. S. Aleksandrov, *Introduction to Set Theory and General Topology*, Editorial Publ., Moscow, 2004 (In Russian), 368 pp.]

[11] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[12] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969. [R. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[13] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Mathematics and Its Applications, **542**, Springer Dordrecht, Boston; London, 2002, 408 pp.

[14] А. Г. Ченцов, “Замкнутые отображения и построение моделей расширения”, Тр. ИММ УрО РАН, **29**, 2023, 274–295; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Closed mappings and construction of extension models”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **323**:suppl. 1 (2023), 56–77.

[15] А. Г. Ченцов, “Множества притяжения в абстрактной задаче о достижимости в топологическом пространстве”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **65** (2025), 85–108. [A. G. Chentsov, “Attraction sets in the abstract problem of reachability in topological space”, *Izv. IMI UdGU*, **65** (2025), 85–108 (In Russian)].

[16] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, Higher School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[17] А. В. Кряжимский, “К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения”, *Докл. АН СССР*, **239**:4 (1978), 779–782. [A. V. Kryazhimskiy, “On the theory of positional differential games of convergence-evasion”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**:4 (1978), 779–782 (In Russian)].

[18] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34**:6 (1970), 1005–1022; англ. пер.:N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, “An alternative for the game problem of convergence”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **34**:6 (1970), 948–965.

[19] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[20] А. В. Кряжимский, *Дифференциальные игры для нелипшицевых систем*, дисс. … докт. физ.-матем. наук, АН СССР УНЦ Институт математики и механики, Свердловск, 1980. [A. V. Kryazhimskiy, *Differential Games for Non-Lipschitz Systems*, diss. … Doctor of Physical and Mathematical Sciences, USSR Academy of Sciences, Ufa Scientific Center, Institute of Mathematics and Mechanics, Sverdlovsk, 1980 (In Russian)].

[21] А. Г. Ченцов, Д. А. Серков, “Непрерывная зависимость множеств в пространстве мер и задача на программный минимакс”, Тр. ИММ УрО РАН, **30**, 2024, 277–299; англ. пер.:A. G. Chentsov, D. A. Serkov, “Continuous dependence of sets in a space of measures and a program minimax problem”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **325**:suppl. 1 (2024), S76–S98.

[22] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[23] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977. [P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Science Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[24] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры. I*, УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory. I*, USTU-UPI, Ekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]

[25] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Физматлит, М., 1962. [N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. General Theory*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 20.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 19.11.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

There is no conflict of interests.

Received 20.10.2025
Reviewed 19.11.2025
Accepted for press 21.11.2025