УДК 517.988.63, 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1285-1292

ОБ ОДНОМ КВАЗИМЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Т. В. Жуковская [1], Е. С. Жуковский [2),3)]

[1] Тамбовский государственный технический университет
392000, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[3] Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: zukovskys@mail.ru

Определяется M-пространство (X,ρ), как непустое множество X с расстоянием $\rho: X^2 \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющим аксиоме тождества и ослабленному неравенству треугольника. Рассматриваемое M-пространство (X,ρ) относится к классу f-квазиметрических пространств, при этом отображение ρ может не быть (c_1,c_2)-квазиметрикой ни при каких значениях c_1, c_2; а (c_1,c_2)-квазиметрическое пространство может не быть M-пространством. Исследуются свойства M-пространства. Получено распространение на M-пространство теоремы Красносельского о неподвижной точке обобщенно сжимающего отображения.

Ключевые слова: квазиметрика; неравенство треугольника; топология; неподвижная точка; обобщенное сжатие

Пусть $(X,\mathbf{d})$ — метрическое пространство, т. е. непустое множество X с заданной метрикой — отображением $\mathbf{d}: X^2 \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющим условиям

$$\forall x,y \in X \quad \mathbf{d}(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y; \tag{1}$$

$$\forall x,y \in X \quad \mathbf{d}(x,y)=\mathbf{d}(y,x); \tag{2}$$

$$\forall x,y,z \in X \quad \mathbf{d}(x,z) \le \mathbf{d}(x,y)+\mathbf{d}(y,z). \tag{3}$$

Свойства метрических пространств подробно изучены, разработаны эффективные методы анализа отображений в метрических пространствах. Оказывается, что многие из этих результатов остаются выполненными, если вместо метрики на множестве X определено расстояние $\rho: X^2 \to \mathbb{R}_+$, которое удовлетворяет менее жестким требованиям, чем (1)–(3). Отображение ρ при выполнении аксиомы тождества (1) и неравенства треугольника (3), но не отвечающее аксиоме симметрии (2), называют квазиметрикой, а пару (X,ρ) — квазиметрическим пространством. Если выполнено (1) и обобщенное неравенство треугольника

$$\rho(x,v) \le c_1\rho(x,u) + c_2\rho(u,v), \quad c_1,c_2 \ge 1, \tag{4}$$

то пространство (X,ρ) называют (c_1,c_2)-квазиметрическим. В [1], [2] исследовано (c_1,c_2)-квазиметрическое пространство, получены теоремы о точках совпадения и неподвижных точках отображений в таких пространствах.

Здесь рассматривается следующая проблема: каким минимальным условиям должно удовлетворять расстояние, чтобы в пространстве (X,ρ) выполнялись теорема Банаха [3] и теорема Красносельского ([4], теорема 3.4) о неподвижных точках сжимающих отображений.

§ 1. Определение и простейшие свойства M-квазиметрического пространства

Пусть задано непустое множество X. Будем называть отображение $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$ M-*квазиметрикой*, если оно удовлетворяет аксиоме тождества (1) и условиям

$$\exists \varsigma > 0 \quad \forall r \in (0, \varsigma) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, u, v, z \in X$$

$$\rho(u, v) \le r \ \text{ и } \ \rho(v, z) < \delta \ \Rightarrow \ \rho(u, z) < r + \varepsilon; \tag{5}$$

$$\rho(x, u) < \delta \ \text{ и } \ \rho(u, v) \le r \ \Rightarrow \ \rho(x, v) < r + \varepsilon \tag{6}$$

Пару (X, ρ) в этом случае будем называть M-*квазиметрическим* пространством. Если, кроме того, выполнена аксиома симметрии (2), то ρ назовем M-*метрикой*, а (X, ρ) — M-*метрическим* пространством.

Заметим, что подмножество M-квазиметрического пространства также является M-квазиметрическим пространством.

Условия (5), (6) можно трактовать как ослабленное неравенство треугольника. Очевидно, любое метрическое пространство есть M-метрическое пространство. Приведем другие примеры пространств, в которых расстояние удовлетворяет условиям (5), (6).

Прежде всего заметим, что если множество X конечное, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, то свойствами (5), (6) будет обладать любая функция $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$, принимающая положительные значения $\rho(x_i, x_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, при $i \ne j$, и $\rho(x_i, x_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим (c_1, c_2)-квазиметрическое пространство (X, ρ). Расстоянию $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$ в этом пространстве соответствует множество $\mathrm{C}(X, \rho)$ пар коэффициентов (c_1, c_2), для которых выполнено неравенство (4). Очевидно, если $(1, c_2) \in \mathrm{C}(X, \rho)$ при каком-либо c_2, то квазиметрика ρ обладает свойством (5) (можно положить $\delta = \varepsilon / c_2$). Аналогично, в случае $(c_1, 1) \in \mathrm{C}(X, \rho)$ квазиметрика ρ обладает свойством (6). Если же неравенство (4) имеет место только при $c_1 \ne 1$ и $c_2 \ne 1$, то в (c_1, c_2)-квазиметрическом пространстве могут не выполняться соотношения (5), (6). Обратно, из условия (5), (6) также не следует неравенство (4).

П р и м е р 1. Для множества $X = \{1, 2, \dots\}$ функция ρ, определенная условием симметрии (2) и соотношениями

$$\rho(2i-1, 2i) = \frac{1}{2i}, \ \ i = 1, 2, \dots; \quad \rho(2^k + 2m - 2, 2^k + 2m - 1) = \frac{1}{m}, \ \ k = 1, 2, \dots, \ \ m = \overline{1, 2^{k-1}};$$

$$\rho(i, j) = \frac{2}{m}, \ \ i = \overline{1, j-2}, \ \ j = 2^k + 2m - 2 \ \text{ или } \ j = 2^k + 2m - 1, \ \ k = 1, 2, \dots, \ \ m = \overline{1, 2^{k-1}}.$$

удовлетворяет неравенству (4) с коэффициентами $c_1 = c_2 = 2$.

Покажем, что для заданного здесь расстояния ρ условие (6) нарушено. Имеем

$$\rho(2^i + 2m - 1, 2^i + 2m) = \frac{1}{2^i + 2m}, \ \ \rho(2^i + 2m, 2^i + 2m + 1) = \frac{1}{m+1}, \ \ \rho(2^i + 2m - 1, 2^i + 2m + 1) = \frac{2}{m}.$$

Для любого $\varsigma > 0$ определим такое m, что

$$r \doteq \frac{1}{m+1} < \varsigma.$$

Тогда при $i \to \infty$ будет выполнены соотношения

$$\rho(2^i + 2m - 1, 2^i + 2m) \to 0, \quad \rho(2^i + 2m, 2^i + 2m + 1) = r,$$

однако $\rho(2^i + 2m - 1, 2^i + 2m + 1) \ge 2r$.

Условие (5) также нарушено вследствие симметричности отображения ρ.

П р и м е р 2. Во множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел для функции

$$\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+, \quad \rho(x,u) = \exp\big(|x-u|\big) - 1$$

оба соотношения (5), (6) выполнены (причем, при любом ς), но для любых c_1, c_2, если выбрать $x=0$, $u=2v$, то при достаточно больших v получим

$$c_1\rho(x,v) + c_2\rho(v,u) = (c_1+c_2)\big(\exp(v)-1\big),$$
$$\rho(x,u) = \exp(2v) - 1 = \big(\exp(v)+1\big)\big(\exp(v)-1\big) > (c_1+c_2)\big(\exp(v)-1\big),$$

т. е. $\rho(x,u) > c_1\rho(x,v) + c_2\rho(v,u)$.

Отметим, что при выполнении даже одного из условий (5), (6) оказывается справедливым «асимптотическое неравенство треугольника»:

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{u_i\}_{i=1}^{\infty}, \{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X \quad \rho(x_i,u_i) \to 0, \quad \rho(u_i,v_i) \to 0 \;\Rightarrow\; \rho(u_i,v_i) \to 0, \tag{7}$$

т. е. M-пространство является f-*квазиметрическим* (подробнее о f-квазиметрических пространствах см. [2]).

Для задания топологии в M-квазиметрическом пространстве можно определить L-*открытый шар*

$$B_X^L(x_0,r_0) = \{x : \rho(x,x_0) < r_0\}$$

и считать множество $U \subset X$ L-открытым, если для каждого элемента $u \in U$ существует такое $\delta > 0$, что $B_X^L(u,\delta) \subset U$. Определенную таким образом топологию на X будем обозначать через τ_X^L. Множество называем L-замкнутым, если его дополнение L-открыто.

Топологическое пространство (X, τ_X^L) удовлетворяет аксиоме отделимости T_1. Действительно, для любых $u, v \in X$, $u \neq v$, элемент u не принадлежит шару $B_X^L(v,\delta)$, и v не принадлежит шару $B_X^L(u,\delta)$ при $\delta < \min\big\{\rho(u,v), \rho(v,u)\big\}$. Аксиома T_2 в пространстве (X, τ_X^L) может не выполняться.

П р и м е р 3. Пусть $X = [0,1]$; положим $\rho(x,y) = x$ при любых $x \neq 0$, $y \neq x$, $\rho(0,y) = 1$ при любых $y \neq 0$, и конечно, $\rho(u,u) = 0$ при всех $u \in X$. Такое расстояние удовлетворяет аксиоме тождества и неравенству треугольника, т. е. является квазиметрикой. Для соответствующего топологического пространства (X, τ_X^L) не выполнена аксиома T_2, так как для любого $\delta > 0$ элемент $x = \delta \in X$ удовлетворяет соотношению $\rho(x,0) = \rho(x,1) = \delta$, таким образом x принадлежит и шару $B_X^L(0,\delta)$, и шару $B_X^L(1,\delta)$.

Рассмотренный пример показывает, что к нарушению аксиомы T_2 приводит отсутствие свойства симметрии расстояния, а не ослабление неравенства треугольника. Докажем, что в M-метрическом пространстве (в котором расстояние симметрично) аксиома T_2 выполнена. Пусть $u, v \in X$, $u \neq v$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho(u,v)$ и найдем $\delta > 0$ из условия (6) (равносильного условию (5) в силу симметричности расстояния). Проверим, что шары $B_X^L(u,\delta)$, $B_X^L(v,\delta)$, не пересекаются. В предположении противного найдется $x \in X$ такой, что $\rho(x,u) = \rho(u,x) < \delta$, $\rho(x,v) < \delta$, а из этих неравенств согласно (6) получаем $\rho(u,v) < \varepsilon$, и получено противоречие.

Покажем, что в M-квазиметрическом пространстве L-открытый шар $B_X^L(x_0,r_0)$, если его радиус $r_0 \leq \varsigma$, является L-открытым множеством. Для каждого элемента $u \in B_X^L(x_0,r_0)$ определим $r = \rho(u,x_0)$, $\varepsilon = r_0 - r$. Выберем $\delta > 0$ согласно условию (6). Тогда для любого $x \in B_X^L(u,\delta)$ выполнено $\rho(x,x_0) < r + \varepsilon = r_0$, т. е. $B_X^L(u,\delta) \subset B_X^L(x_0,r_0)$.

Несколько непривычно, но в M-квазиметрическом пространстве открытый шар радиуса большего, чем ς может уже не быть открытым множеством.

П р и м е р 4. Пусть на $X=[0,1]\cup\{x_0\}$ расстояние ρ задано соотношениями: $\rho(x,y)= = |x-y|$ при $x,y\in[0,1]$, $\rho(x_0,0)=\rho(0,x_0)=1$, $\rho(x_0,u)=\rho(u,x_0)=2$ при $u\in(0,1]$. Определенное здесь отображение $\rho: X^2\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям (1), (2) и для любого $\varsigma<1$ условиям (5), (6). В этом пространстве шар $B^L_X(x_0,r_0)$ радиуса $r_0\in(0,1)$ не будет открытым множеством, так как $0\in B^L_X(x_0,r_0)$, но для любого $\delta>0$ элемент $x=2^{-1}\delta$ удовлетворяет неравенству $\rho(x,0)<\delta$ и $\rho(x,x_0)=2$, т. е. x не принадлежит шару $B^L_X(x_0,r_0)$.

Аналогично определяется R-*открытый шар*

$$B^R_X(x_0,r_0)=\{x:\rho(x_0,x)<r_0\}$$

и топология τ^R_X. Очевидно, топологическое пространство (X,τ^R_X) обладает теми же свойствами, что и пространство (X,τ^L_X).

В M–квазиметрическом пространстве (X,ρ) для последовательности $\{x_i\}_{i=1}^\infty\subset X$ можно определить
L-*сходимость*

$$x_i\xrightarrow{L}x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}{}^L x_i=x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}\rho(x_i,x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \ \exists I\ \ \forall i>I\ \ \rho(x_i,x)<\varepsilon;$$

R-*сходимость*

$$x_i\xrightarrow{R}x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}{}^R x_i=x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}\rho(x,x_i)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \ \exists I\ \ \forall i>I\ \ \rho(x,x_i)<\varepsilon;$$

LR-*сходимость* или *«просто» сходимость*

$$x_i\to x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}x_i=x \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{i\to\infty}{}^L x_i=x \text{ и } \lim_{i\to\infty}{}^R x_i=x.$$

Отметим, что L-предел L-сходящейся последовательности может быть не единственным, но LR-предел ровно один. Более того, имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. *В M-квазиметрическом пространстве из того, что $x_i\xrightarrow{L}x$ и $x_i\xrightarrow{R}u$ следует $x=u$ и следует единственность этого предела.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\rho(u,x_i)\to0$ и $\rho(x_i,x)\to0$, то согласно (7) $\rho(u,x)\to0$, таким образом $x=u$. Если, кроме того, $\rho(x_i,\bar{x})\to0$, то $\bar{x}=u$. □

Будем называть последовательность $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ в M-квазиметрическом пространстве X фундаментальной, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists I\ \ \forall i,j>I\ \ \rho(x_i,x_j)<\varepsilon. \tag{8}$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Если для последовательности $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ в M-квазиметрическом пространстве выполнено $x_i\xrightarrow{L}x$ и $x_i\xrightarrow{R}x$, то эта последовательность является фундаментальной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в условии (5) $r=\varepsilon$, получим соотношение

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall u,v,z\in X\ \ \rho(u,v)\le\varepsilon \ \text{ и }\ \rho(v,z)<\delta\ \Rightarrow\ \rho(u,z)<2\varepsilon. \tag{9}$$

Из того, что $\rho(x_i,x)\to0$, $\rho(x,x_i)\to0$ следует:

$$\exists I\ \ \forall i,j>I\ \ \rho(x_i,x)<\varepsilon,\quad \rho(x,x_j)<\delta.$$

Тогда, в силу (9), для всех $i,j>I$ получаем $\rho(x_i,x_j)<2\varepsilon$. $\square$

Пространство (X,ρ) называем L*-полным* (R*-полным*), если всякая фундаментальная последовательность L-сходится (R-сходится). Пространство (X,ρ) называем LR*-полным* или *«просто» полным* в случае сходимости любой его фундаментальной последовательности.

§ 2. Неподвижные точки отображений в M-квазиметрическом пространстве

Для отображений M-квазиметрического пространства (X,ρ) сформулируем аналог определения обобщенного сжатия (по Красносельскому).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть любым $R\geq r>0$ поставлено в соответствие $q(r,R)\in[0,1)$. Отображение $G:X\to X$ называем q*-обобщенным сжатием*, если

$$\forall R\geq r>0\ \ \forall x,u\in X\ \ r\leq\rho(x,u)\leq R\ \Rightarrow\ \rho(Gx,Gu)\leq q(r,R)\rho(x,u). \tag{10}$$

Будем говорить, что выполнено

условие ***(a)***, если пространство (X,ρ) полное;

условие ***(b)***, если пространство (X,ρ) R-полное, и

$$\forall u,v\in X\ \ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall w\in X\ \ \rho(v,w)<\delta\ \Rightarrow\ \rho(u,w)>\rho(u,v)-\varepsilon; \tag{11}$$

условие ***(c)***, если пространство (X,ρ) R-полное, и для любой R-сходящейся последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$ множество $\Omega_R=\{\tilde{x}\in X:\rho(\tilde{x},x_i)\to 0\}$ конечно;

условие ***(d)***, если пространство (X,ρ) R-полное, а отображение $G:X\to X$ R*-замкнуто,* т. е.

$$\forall\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X\ \ \forall\tilde{x},\tilde{y}\in X\ \ \rho(\tilde{x},x_i)\to 0,\ \ \rho(\tilde{y},Gx_i)\to 0\ \Rightarrow\ \tilde{y}=G\tilde{x}$$

(такое определение свойства замкнутости предложено в [1] для (c_1,c_2)-квазиметрических пространств).

Следующее утверждение распространяет принцип неподвижной точки обобщенного сжатия ([4], [теорема 3.4]) на M-квазиметрические пространства.

Т е о р е м а 1. *Пусть (X,ρ) — M-квазиметрическое пространство, отображение $G:X\to X$ является q-обобщенным сжатием. Тогда при выполнении любого из условий* ***(a),(b),(c),(d)*** *отображение G имеет единственную неподвижную точку $\tilde{x}\in X$, и к элементу $\tilde{x}$ R-сходится последовательность итераций $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$, $x_i=Gx_{i-1}$ при любом начальном значении x_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (10) последовательность $\{\rho(x_{i-1},x_i)\}_{i=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}_+$ не возрастает. Покажем, что $\rho(x_{i-1},x_i)\to 0$. Это соотношение очевидно выполнено, если при некотором натуральном i_0 окажется, что $\rho(x_{i_0-1},x_{i_0})=0$, поэтому рассмотрим ситуацию $\rho(x_{i-1},x_i)>0$, $i=1,2,\ldots$. Если последовательность $\rho(x_{i-1},x_i)$ не является бесконечно малой, существует положительное $\alpha=\lim\limits_{i\to\infty}\rho(x_{i-1},x_i)$. Поэтому при всех i начиная с некоторого номера i_0 выполнено $\rho(x_{i-1},x_i)\in[\alpha,2\alpha]$, и следовательно,

$$\rho(x_{i-1},x_i)=\rho(Gx_{i-2},Gx_{i-1})\leq q(\alpha,2\alpha)\rho(x_{i-2},x_{i-1})\leq\big(q(\alpha,2\alpha)\big)^{i-i_0}\rho(x_{i_0-1},x_{i_0}),\ \ i>i_0.$$

Итак, $\rho(x_{i-1},x_i)\to 0$, что противоречит предположению $\alpha>0$.

Аналогично доказывается сходимость $\rho(x_i,x_{i-1})\to 0$.

Покажем, что последовательность итераций является фундаментальной. Вначале проверим, что эта последовательность удовлетворяют условию

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists I\ \ \forall j>i>I\ \ \rho(x_i,x_j)<\varepsilon. \tag{12}$$

Если это соотношение не верно, то существует $r_0>0$ такое, что для любого i найдутся натуральные $m>n\geq i$, при которых выполнено $\rho(x_n,x_m)\geq r_0$. Для наименьшего из найденных значений n среди номеров $m>n$ выберем наименьший; таким образом определены две последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$, отвечающие условиям

$$m_i > n_i \geq i, \quad \rho(x_{n_i},x_{m_i}) \geq r_0, \quad \rho(x_{n_i},x_{m_i-1}) < r_0. \tag{13}$$

Так как $\rho(x_{m_i-1},x_{m_i})\to 0$ и $\rho(x_{n_i},x_{m_i-1})<r_0$, то в силу условия (5) для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших номерах i выполнено $\rho(x_{n_i},x_{m_i})<r_0+\varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\rho(x_{n_i},x_{m_i})\geq r_0$ следует сходимость $\rho(x_{n_i},x_{m_i})\to r_0$.

Аналогично, так как $\rho(x_{n_i},x_{n_i-1})\to 0$ и $\rho(x_{n_i},x_{m_i-1})<r_0$, то в силу условия (6) для любого $\varepsilon>0$ при достаточно больших номерах i получаем неравенство $\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1})<r_0+\varepsilon$. Вследствие того, что G есть обобщенное сжатие, имеем $\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1})\geq\rho(x_{n_i},x_{m_i})$, поэтому при достаточно больших номерах i получаем неравенство $\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1})\geq r_0-\varepsilon$. Таким образом, установлена сходимость $\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1})\to r_0$.

Из установленного соотношения следует, что при всех i начиная с некоторого номера i_0 выполнено включение

$$\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1}) \in [2^{-1}r_0, 2\,r_0].$$

Согласно условию (10) имеем

$$\rho(x_{n_i},x_{m_i}) = \rho(Gx_{n_i-1},Gx_{m_i-1}) \leq q(2^{-1}r_0, 2\,r_0)\rho(x_{n_i-1},x_{m_i-1}).$$

Следовательно $r_0\leq q(2^{-1}r_0,2\,r_0)r_0$, таким образом, $r_0=0$, и последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (12).

Аналогично доказывается, что последовательность итераций удовлетворяет также условию

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists I \ \ \forall i>j>I \ \ \rho(x_i,x_j)<\varepsilon,$$

и таким образом, является фундаментальной.

При выполнении любого из предположений ***(a)***,***(b)***,***(c)***,***(d)*** существует $\tilde{x}=\lim\limits_{i\to\infty}{}^R x_i$. Для этого элемента выполнено

$$\rho(G\tilde{x},x_i) = \rho(G\tilde{x},Gx_{i-1}) \leq \rho(\tilde{x},x_{i-1}) \to 0.$$

Таким образом, $G\tilde{x}=\lim\limits_{i\to\infty}{}^R x_i$, но в силу неединственности R-предела мы пока не можем заключить, что $\tilde{x}=G\tilde{x}$.

Если выполнено ***(a)***, то в полном пространстве (X,ρ) существует $\tilde{x}=\lim\limits_{i\to\infty}x_i$, с которым совпадает единственный $\lim\limits_{i\to\infty}{}^R x_i$ (см. предложение 1). Следовательно, в случае ***(a)*** $\tilde{x}=G\tilde{x}$.

Пусть выполнено условие ***(b)***, и пусть последовательность итераций имеет более одного R-предела: существуют $\tilde{x},\tilde{u}\in X$ такие, что $\rho(\tilde{x},x_i)\to 0$, $\rho(\tilde{u},x_i)\to 0$, $\tilde{x}\neq\tilde{u}$ Для $\tilde{x},\tilde{u}$ и $\varepsilon=\rho(\tilde{x},\tilde{u})/2>0$ определим $\delta>0$, при котором выполнено (11). Так как при всех i, начиная с некоторого номера, $\rho(\tilde{u},x_i)<\delta$, то согласно (11) $\rho(\tilde{x},x_i)>\rho(\tilde{x},\tilde{u})-\varepsilon=\rho(\tilde{x},\tilde{u})/2$, но это соотношение противоречит сходимости $\rho(\tilde{x},x_i)\to 0$. Итак, R-предел последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ единственный. Таким образом $\tilde{x}=G\tilde{x}$.

Пусть выполнено условие ***(c)***. Как показано выше, для последовательности итераций из $\rho(\tilde{x},x_i)\to 0$ следует $\rho(G\tilde{x},x_i)\to 0$. Таким образом, для множества Ω_R R-пределов последовательности итераций выполнено $G(\Omega_R)\subset\Omega_R$. Без ограничения общности полагаем, что в конечном множестве Ω_R не менее двух элементов (выше отмечено, что, если это множество состоит из одного элемента, то он является неподвижной точкой). Определим множество

$$\rho(\Omega_R,\Omega_R) = \{\rho(\tilde{x},\tilde{u}),\, \forall\tilde{x},\tilde{u}\in\Omega_R,\ \tilde{x}\neq\tilde{u}\}.$$

Имеем $\rho(\Omega_R, \Omega_R) \supset \rho\big(G(\Omega_R), G(\Omega_R)\big)$. Так как эти множества конечны и оператор G является обобщенным сжатием, то максимальное число из конечного набора чисел — элементов множества $\rho(\Omega_R, \Omega_R)$ не содержится в $\rho\big(G(\Omega_R), G(\Omega_R)\big)$. Поэтому $\rho(\Omega_R, \Omega_R) \neq \rho\big(G(\Omega_R), G(\Omega_R)\big)$, $G(\Omega_R) \neq \Omega_R$. Аналогично, если во множестве $G(\Omega_R)$ не менее двух элементов, то $G^2(\Omega_R) \subset \subset G(\Omega_R)$, $G^2(\Omega_R) \neq G(\Omega_R)$. На некотором k-м шаге в $G^k(\Omega_R)$ останется только один элемент, который и будет искомой неподвижной точкой отображения G.

Пусть выполнено условие ***(d)***. В силу R-полноты последовательность итераций R-сходится, т. е. для некоторого $\tilde{x}$ выполнено $\rho(\tilde{x}, x_i) \to 0$, $\rho(G\tilde{x}, x_i) \to 0$. Отсюда вследствие замкнутости отображения G получаем $G\tilde{x} = \tilde{x}$.

Итак, во всех ситуациях ***(a),(b),(c),(d)*** доказано, что последовательность итераций R-сходится к неподвижной точке отображения G. Единственность неподвижной точки прямо следует из условия сжатия (10). $\square$

В случае, когда коэффициент сжатия не зависит от r, R, т. е. в соотношении (10) коэффициент $q(r, R) \equiv \mathrm{const}$, теорема 1 является распространением на M-квазиметрические пространства принципа сжатия Банаха.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // Доклады РАН. 2016. Т. 469. № 5. С. 527–531.

2. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V., Lokoutsievskii L.V., Storozhuk K.V.* Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics // Topology and its Applications. 2017. V. 221. P. 178–194.

3. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. P. 133–181.

4. *Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-680975) — § 1 и Российского научного фонда (соглашение № 15-11-10021) — § 2.

Поступила в редакцию 13 августа 2017 г.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики; Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник математического института им. С.М. Никольского, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.63, 515.124
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1285-1292

ABOUT ONE QUASI-METRIC SPACE

© T. V. Zhukovskaya [1], E. S. Zhukovskiy [2),3)]

[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St, Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
[3] RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow, Russian Federation, 117198
E-mail: zukovskys@mail.ru

The M-space (X,ρ) is defined as a non-empty set X with distance $\rho: X^2 \to \mathbb{R}_+$ satisfying the axiom of identity and the weakened triangle inequality. The M-space (X,ρ) belongs to the class of f-quasi-metric spaces, and the map ρ may not be (c_1,c_2)-quasi-metric for any values of c_1, c_2; and (c_1,c_2)-quasi-metric space may not be an M-space. The properties of the M-space are investigated. An extension of the Krasnosel'skii theorem about a fixed point of a generally contracting map to the M-space is obtained.
Keywords: quasi-metric; triangle inequality; topology; fixed point; generalized contraction

REFERENCES

1. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V.* Theory of $(q1,q2)$-quasimetric spaces and coincidence points // Doklady Mathematics. 2016. V. 94. Iss. 1. P. 434–437.
2. *Arutyunov A.V., Greshnov A.V., Lokoutsievskii L.V., Storozhuk K.V.* Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics // Topology and its Applications. 2017. V. 221. P. 178–194.
3. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. P. 133–181.
4. *Krasnosel'skiy M.A., Vayniko G.M., Zabreyko P.P., Rutitskiy YA.B., Stetsenko V.YA.* Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy. M.: Nauka, 1969. 456 s.

ACKNOWLEDGEMENTS: The present research is supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-41-680975) — § 1 and by the Russian Scientific Fund (the Agreement № 15-11-10021) — § 2.

Received 13 August 2017

Zhukovskaya Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics; RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Leading Researcher of the Mathematical Institute named after S.M. Nikolsky, e-mail: zukovskys@mail.ru

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Жуковский Е.С.* Об одном квазиметрическом пространстве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1285–1292. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1285-1292.

For citation: Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S. Ob odnom kvazimetricheskom prostranstve [About one quasi-metric space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1285–1292. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1285-1292 (In Russian, Abstr. in Engl.).