УДК 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345

ОБ УМНОЖЕНИИ СИМВОЛОВ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ КВАНТОВАНИИ

© С. В. Цыкина

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

В настоящей статье рассматривается умножение ковариантных и контравариантных символов в полиномиальном квантовании на параэрмитовых симметрических пространствах.

Ключевые слова: группы Ли и алгебры Ли; псевдо-ортогональные группы; представления групп Ли; параэрмитовы симметрические пространства; ковариантные и контравариантные символы; полиномиальное квантование

В своей конструкции квантования на *эрмитовых* симметрических пространствах G/K Березин вводит два сорта символов операторов: ковариантные и контравариантные символы. Ковариантные символы образуют алгебру с умножением, порождаемым умножением операторов. Для *пара-эрмитовых* симметрических пространств оказывается возможным определить умножение как ковариантных, так и контравариантных символов. В [1] был рассмотрен простейший случай – однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$. В настоящей статье мы делаем это для полиномиального квантования на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H с псевдо-ортогональной группой движений $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$.

Группа G сохраняет форму $[x,y]=\sum \lambda_i x_i y_i$, где $\lambda_i=-1$ для $i=1,\ldots,p$ и $\lambda_i=1$ для $i=p+1,\ldots,n$. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p>1, q>1$.

Базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G образован матрицами $L_{ij}=E_{ij}-\lambda_i\lambda_j E_{ji}$, $i<j$, где E_{ij} – матричная единица. Подгруппа H является стационарной подгруппой матрицы $Z_0=L_{1,n}$, так что G/H есть как раз G-орбита точки Z_0.

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x]=0$, $x\neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Рассмотрим два сечения конуса: $\Gamma^-=\{x_1-x_n=2\}$, $\Gamma^+=\{x_1+x_n=2\}$.

Напомним необходимый нам материал из [2], [3] о представлениях группы $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$, связанных с конусом $\mathcal{C}$. Мы будем использовать следующие обозначения для "обобщенных степеней":

$$a^{[m]}=a(a+1)\ldots(a+m-1),\quad a^{(m)}=a(a-1)\ldots(a-m+1),$$

где a – число, а также обозначение $t^{\sigma,\varepsilon}=|t|^\sigma \mathrm{sgn}^\varepsilon t$.

Пусть $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f на конусе класса C^∞ и однородных "степени σ,ε", т. е.

$$f(tx)=t^{\sigma,\varepsilon}f(x),\quad x\in\mathcal{C},\quad t\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в этом пространстве сдвигами:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(x)=f(xg).$$

Введем следующую билинейную форму в функциях на $\mathbb{R}^{n-2}$ (т. е. в функциях на Γ^- и на Γ^+):

$$\langle\langle f,\, h\rangle\rangle = \int f(\xi)\, h(\xi)\, d\xi = \int f(\eta)\, h(\eta)\, d\eta,$$

интеграл берется по $\mathbb{R}^{n-2}$. В дальнейшем подразумевается, что все интегралы по $d\xi$ и по $d\eta$ берутся по $\mathbb{R}^{n-2}$.

Сечения $\Gamma^{\pm}$ пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе дает "дробно-линейные" действия на Γ^- и Γ^+ , определенные почти всюду на $\Gamma^{\pm}$. Это позволяет ввести координаты (глобальные) на Γ^- и Γ^+ с помощью векторов $\xi=(\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ и $\eta=(\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-2}$, а именно, векторам ξ и η отвечают следующие точки из Γ^- и Γ^+ , соответственно:

$$x(\xi) = \bigl(1+\langle\xi,\xi\rangle,\, 2\xi,\, -1+\langle\xi,\xi\rangle\bigr),$$

$$y(\eta) = \bigl(1+\langle\eta,\eta\rangle,\, 2\eta,\, 1-\langle\eta,\eta\rangle\bigr).$$

Пространство G/H можно отождествить с прямым произведением многообразия образующих конуса на себя, следовательно, можно отождествить (с точностью до многообразия меньшей размерности) с прямым произведением $\Gamma^-\times\Gamma^+$. Тем самым мы вводим в G/H координаты $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{n-2}$, назовем их орисферическими координатами. Для этих координат должно выполняться условие $N(\xi,\eta)\neq 0$, где

$$N(\xi,\eta) = 1 - 2\langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle,$$

со стандартным скалярным произведением $\langle\xi,\eta\rangle$ в $\mathbb{R}^{n-2}$. Оператор

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(\xi) = \int N(\xi,\eta)^{2-n-\sigma,\,\varepsilon} f(\eta) d\eta,$$

сплетает представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$, действующие в функциях на *разных* сечениях. Для оператора $A_{\sigma,\varepsilon}$ справедливо соотношение:

$$A_{2-n-\sigma,\varepsilon}A_{\sigma,\varepsilon} = c^{-1}(\sigma,\varepsilon)E,$$

где $c(\sigma,\varepsilon)$ – некоторая функция, аналитическая по σ .

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$, $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$, группы G порождает представление T_σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G (зависимость от ε исчезает), а также представление T_σ универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В качестве исходной алгебры $\mathcal{E}$ операторов мы возьмем алгебру

$$\mathcal{E}_\sigma = T_\sigma\bigl(\mathrm{Env}(\mathfrak{g})\bigr),$$

образованную операторами $D=T_\sigma(X)$, $X\in\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$. В качестве аналога пространства Фока мы берем пространство $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\Gamma^-)$ функций $\varphi(\xi)$ на сечении Γ^- конуса $\mathcal{C}$. Оно содержится в пространстве $C^\infty(\mathbb{R}^{n-2})$ функций $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{R}^{n-2}$ и содержит пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-2})$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{2-n-\sigma,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma,\,\varepsilon}.$$

Мы будем также обозначать

$$\Phi^*(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma^*,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma^*,\,\varepsilon}, \quad \sigma^* = 2-n-\sigma.$$

Отображению $g\mapsto g^{-1}$ в группе G отвечает следующее отображение $X\mapsto X^\vee$ в алгебре $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$ (главный анти-автоморфизм): элементу $X=L_1L_2\ldots L_k$, где $L_i\in\mathfrak{g}$, отвечает элемент

$$X^\vee = (-1)^k L_k\ldots L_2L_1.$$

Отображение $X \mapsto X^\vee$ является анти-инволюцией:

$$(XY)^\vee = Y^\vee X^\vee.$$

Условие сплетаемости дает следующую формулу для $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$:

$$\left\langle \langle T_{\sigma^*}(X^\vee) f, h \rangle \right\rangle = \langle \langle f, T_\sigma(X) h \rangle \rangle.$$

Таким образом, для оператора $D = T_\sigma(X)$ сопряженным относительно формы $\langle\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\rangle$, или относительно меры $d\xi$, является оператор $D^* = T_{\sigma^*}(X^\vee)$:

$$\langle\langle\, D^*\psi, \varphi \,\rangle\rangle = \langle\langle \psi, D\varphi \,\rangle\rangle\,.$$

Оператор $A_{\sigma,\,\varepsilon}$ сплетает представления T_σ и T_{σ^*} :

$$T_{\sigma^*}(X)\, A_{\sigma,\,\varepsilon} = A_{\sigma,\,\varepsilon}\, T_\sigma(X).$$

Функция $\Phi(\xi, \eta)$ обладает следующим свойством, назовем его "инвариантностью" :

$$\big(T_\sigma(X^\vee) \otimes 1\big)\Phi = \big(1 \otimes T_\sigma(X)\big)\,\Phi\,.$$

Для оператора $D = T_\sigma(X)$ определим *ковариантный и контравариантный символы* F и $F^\natural$, соответственно, с помощью формул:

$$F(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(\xi, \eta)}\,\big((D \otimes 1)\Phi\big)(\xi, \eta)\,, \tag{1}$$

$$F^\natural(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi^*(\xi, \eta)}\,\Big(\big(D^* \otimes 1\big)\Phi^*\Big)(\xi, \eta)\,. \tag{2}$$

Считая ξ, η орисферическими координатами точки x из G/H , мы можем рассматривать символы как функции $F(x)$ и $F^\natural(x)$ на G/H . Для σ общего положения пространство символов обоих сортов есть пространство $S(G/H)$ всех многочленов на G/H .

Обозначим ковариантный и контравариантный символы $F = \mathrm{co}_\sigma D$ и $F^\natural = \mathrm{contra}_\sigma D$, соответственно. Сравнивая (1) и (2), мы видим, что

$$\mathrm{contra}_\sigma D = \mathrm{co}_{\sigma^*} D^*,$$

или

$$\mathrm{contra}_\sigma T_\sigma(X) = \mathrm{co}_{\sigma^*} T_{\sigma^*}(X^\vee).$$

Оператор D восстанавливается по своим символам с помощью равенств

$$(D\varphi)(\xi) = c \int F(\xi, v)\, \Phi(\xi, v)\, \Phi^*(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv,$$

$$(D\varphi)(\xi) = c \int F^\natural(u, v)\, \Phi(\xi, v)\, \Phi^*(u, v)\, \varphi(u)\, du\, dv.$$

Следовательно, отображения co_σ и contra_σ являются взаимно однозначными.

Умножение операторов порождает *умножение ковариантных символов*, обозначим последнее звездочкой $*$ (оно зависит от σ):

$$\mathrm{co}_\sigma D_1 * \mathrm{co}_\sigma D_2 = \mathrm{co}_\sigma (D_1 D_2).$$

То же самое можно записать так: пусть $X_1, X_2 \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$, тогда

$$F_{X_1} * F_{X_2} = F_{X_1 X_2}.$$

Пусть F_1, F_2 – ковариантные символы операторов D_1, D_2, соответственно. Так как $D_1 D_2 \otimes 1 = (D_1 \otimes 1)(D_2 \otimes 1)$, то в орисферических координатах имеем:

$$(F_1 * F_2)(\xi, \eta) = \frac{1}{\Phi(\xi, \eta)} \, (D_1 \otimes 1) \{\Phi(\xi, \eta) F_2(\xi, \eta)\}.$$

В интегральном виде умножение ковариантных символов дается следующей формулой:

$$(F_1 * F_2)(\xi, \eta) = \int_{G/H} F_1(\xi, v) F_2(u, \eta) \mathcal{B}(\xi, \eta; u, v) \, d\mu(u, v),$$

где $d\mu(u, v)$ – инвариантная мера на G/H,

$$\mathcal{B}(\xi, \eta; u, v) = c \, \frac{\Phi(\xi, v)\Phi(u, \eta)}{\Phi(\xi, \eta)\Phi(u, v)}.$$

Функция $\mathcal{B}$ есть *ядро Березина*, подробнее см. [3].

Умножение операторов также дает *умножение контравариантных символов*, мы обозначим его $\star$. Это умножение обращает порядок сомножителей:

$$F^{\natural}_{X_1 X_2} = F^{\natural}_{X_2} \star F^{\natural}_{X_1} \quad \text{или} \quad F^{\natural}_{D_1 D_2} = F^{\natural}_{D_2} \star F^{\natural}_{D_1}.$$

В самом деле, отображение $X \mapsto X^{\vee}$ является анти-инволюцией, то же верно для отображения $D \mapsto D^*$.

В интегральном виде умножение контравариантных символов дается следующей формулой:

$$(F^{\natural}_2 \star F^{\natural}_1)(\xi, \eta) = \int_{G/H} F^{\natural}_2(\xi, v) \, F^{\natural}_1(u, \eta) \, \mathcal{B}^*(\xi, \eta; u, v) \, d\mu(u, v),$$

где

$$\mathcal{B}^*(\xi, \eta; u, v) = c \, \frac{\Phi^*(\xi, v)\Phi^*(u, \eta)}{\Phi^*(\xi, \eta)\Phi^*(u, v)},$$

заметим, что c не изменяется при замене σ на σ^*.

Мы видим, что ядро $\mathcal{B}^*$ получается из ядра Березина $\mathcal{B}$ из [3] заменой σ на σ^*:

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\Big|_{\sigma \to \sigma^*},$$

а само умножение контравариантных символов получается из умножения этих функций как ковариантных символов перестановкой множителей и заменой σ на σ^*:

$$F_1 \star F_2 = (F_2 * F_1)\Big|_{\sigma \to \sigma^*}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молчанов В.Ф., Волотова Н.Б.* Об умножении контравариантных символов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 92–98.

2. *Цыкина С.В.* Символы в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2093–2097.

3. *Tsykina S.V.* Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // International workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics", Moscow, Aug. 25–30, 2007. V. II. P. 63–71.

Поступила в редакцию 6 сентября 2017 г.

Цыкина Светлана Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры функционального анализа, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

UDC 517.922
DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345

ON MULTIPLICATION OF SYMBOLS IN POLYNOMIAL QUANTIZATION

© **S. V. Tsykina**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

We consider a multiplication of covariant and contravariant symbols in polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces.
Keywords: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; representations of Lie groups; para-Hermitian symmetric spaces; covariant and contravariant symbols; polynomial quantization

REFERENCES

1. *Molchanov V.F., Volotova N.B.* On multiplication of contravariant symbols // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2012. V. 17. Iss. 1. P. 92–98.

2. *Tsykina S.V.* Symbols in polynomial quantization // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. Tambov, 2016. V. 21. Iss. 6. P. 2093–2097.

3. *Tsykina S.V.* Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudo-orthogonal group of translations // International workshop "Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics", Moscow, Aug. 25–30. 2007. V. II. P. 63–71.

Received 6 September 2017

Tsykina Svetlana Viktorovna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

Для цитирования: *Цыкина С.В.* Об умножении символов в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1341–1345. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345.

For citation: Tsykina S.V. Ob umnozhenii simvolov v polinomial'nom kvantovanii [On multiplication of symbols in polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1341–1345. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345 (In Russian, Abstr. in Engl.).