

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК
РОССИЙСКИХ
УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN
UNIVERSITIES
REPORTS
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 29
№ 146
2024

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 29, № 146,
2024

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям:
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки);
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки) (категория K1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	123
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>Н.П. Волчкова, В.В. Волчков</i>	О гармоничности функции с условием типа Бохера–Кёбе 125
<i>С.М. Дзюба</i>	О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве 138
<i>Д.И. Доровских, А.Ф. Измаилов, Е.И. Усков</i>	Глобализация сходимости кусочных ньютоновских методов 149
<i>Е.Б. Ланеев, А.В. Климишин</i>	О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра 164
<i>Н.А. Лобода</i>	Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения 176
<i>В.В. Провоторов, С.М. Сергеев</i>	Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах 188
<i>А.А. Успенский, П.Д. Лебедев</i>	Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае 204

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Лансеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина

Редакторы английских текстов: М.С. Пустовалова, Д.Г. Самодуров

Технический редактор Ю.А. Бирюкова

Технический секретарь М.В. Борзова

Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 146. 108 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146>

Подписано в печать 14.06.2024. Дата выхода в свет 26.06.2024

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 13,5. Усл. печ. л. 12,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 24149. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Контент доступен под лицензией [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2024

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2024

При перепечатке, при цитировании материалов, в том числе в электронных СМИ, ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

Volume 29, no. 146,
2024

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:

1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);

1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>N.P. Volchkova, V.V. Volchkov</i>	On the harmonicity of a function with a Bocher–Koebe type condition	125
<i>S.M. Dzyuba</i>	About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space	138
<i>D.I. Dorovskikh, A.F. Izmailov, E.I. Uskov</i>	Globalizing convergence of piecewise Newton methods	149
<i>E.B. Laneev, A.V. Klimishin</i>	On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder	164
<i>N.A. Loboda</i>	Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system	176
<i>V.V. Provotorov, S.M. Sergeev</i>	Mathematical modeling of physical processes in composition media	188
<i>A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev</i>	Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case	204
<i>I.M. Fedotova, M.I. Medvedeva, A.S. Katsunova</i>	Methods for constructing invariant cubature formulas for integrals over the surface of a torus in $\mathbb{R}^3$	218

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenkov, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponomarev, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zhukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: M.S. Pustovalova, D.G. Samodurov
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. 2024. Vol. 29, no. 146. 108 p. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146>

Signed for printing 14.06.2024. Release date 26.06.2024
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 13,5. Conv. pr. sheet 12,6. Copies printed 1000. Order no. 24149. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2024
© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2024
While reprinting, citing materials, including in electronic media, a reference to the journal is required.
The author is responsible for the contents of publications

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Волчкова Н.П., Волчков В.В., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137>

УДК 517.5



О гармоничности функции с условием типа Бохера–Кёбе

Наталья Петровна ВОЛЧКОВА¹, Виталий Владимирович ВОЛЧКОВ²¹ ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический университет»

283000, Российская Федерация, г. Донецк, ул. Артема, 58

² ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет»

283001, Российская Федерация, г. Донецк, ул. Университетская, 24

Аннотация. Пусть B_R — открытый шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $B_{0,R} = B_R \setminus \{0\}$ и функция f гармонична в $B_{0,R}$. Если f имеет нулевой вычет в точке $x = 0$, то поток ее градиента через любую сферу, лежащую в $B_{0,R}$, равен нулю. В данной работе изучается обратное явление для случая, когда допустимы лишь сферы одного или двух фиксированных радиусов r_1 и r_2 . Найдено описание класса функций

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \setminus S_r \right\},$$

где $r \in (0, R/2)$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$, $S_r = S_r(0)$. Доказано, что если r_1/r_2 не является отношением нулей функции Бесселя $J_{n/2}$ и $f \in (\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$, то функция f является гармонической в $B_{0,R}$ и $\text{Res}(f, 0) = 0$. Этот результат нельзя существенно усилить. А именно, если $r_1/r_2 = \alpha/\beta$, где $J_{n/2}(\alpha) = J_{n/2}(\beta) = 0$, или $R < r_1 + r_2$, то существует негармоническая в $B_{0,R}$ функция $f \in C^\infty(B_R)$ такая, что

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Кроме того, условие $f \in C^\infty(B_{0,R})$ нельзя заменить, вообще говоря, требованием $f \in C^s(B_R)$ при произвольном фиксированном $s \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: гармонические функции, условие Бохера–Кёбе, сферические гармоники, множества Помпейю

Благодарности: Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 124012400352-6).

Для цитирования: Волчкова Н.П., Волчков В.В. О гармоничности функции с условием типа Бохера–Кёбе // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 125–137. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137>

SCIENTIFIC ARTICLE

© N. P. Volchkova, V. V. Volchikov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137>

On the harmonicity of a function with a Bôcher–Koebe type condition

Natalia P. VOLCHKOVA¹, Vitaliy V. VOLCHKOV²¹ Donetsk National Technical University

58 Artioma St., Donetsk 283000, Russian Federation

² Donetsk State University

24 Universitetskaya St., Donetsk 283001, Russian Federation

Abstract. Let B_R be an open ball of radius R in $\mathbb{R}^n$ with the center at zero, $B_{0,R} = B_R \setminus \{0\}$, and a function f be harmonic in $B_{0,R}$. If f has zero residue at the point $x = 0$, then the flow of its gradient through any sphere lying in $B_{0,R}$ is zero. In this paper, the reverse phenomenon is studied for the case when only spheres of one or two fixed radii r_1 and r_2 are allowed. A description of the class

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \setminus S_r \right\}$$

was found, where $r \in (0, R/2)$, $S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$, $S_r = S_r(0)$. It is proved that if r_1/r_2 is not a ratio of the zeros of the Bessel function $J_{n/2}$ and $f \in (\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$, then the function f is harmonic in $B_{0,R}$ and $\text{Res}(f, 0) = 0$. This result cannot be significantly improved. Namely, if $r_1/r_2 = \alpha/\beta$, where $J_{n/2}(\alpha) = J_{n/2}(\beta) = 0$, or $R < r_1 + r_2$, then there exists a function $f \in C^\infty(B_R)$ non-harmonic in $B_{0,R}$ and such that

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

In addition, the condition $f \in C^\infty(B_{0,R})$ cannot be replaced, generally speaking, by the requirement $f \in C^s(B_R)$ for an arbitrary fixed $s \in \mathbb{N}$.

Keywords: harmonic functions, Bôcher–Koebe condition, spherical harmonics, Pompeiu sets

Acknowledgements: The research was conducted on the topic of the state task (registration number 124012400352-6).

Mathematics Subject Classification: 31B05, 33C10, 33C55.

For citation: Volchkova N.P., Volchikov V.V. On the harmonicity of a function with a Bôcher–Koebe type condition. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 125–137. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-125-137> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Классическая теорема Гаусса о гармонических функциях утверждает, что поток градиента гармонической функции через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность равен нулю. В начале двадцатого века начали изучать различные варианты обращения этого утверждения. Первый результат такого типа принадлежит М. Бохеру [1] и П. Кёбе [2].

Теорема А (М. Бохер, П. Кёбе). Пусть $\mathcal{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), $f \in C^1(\mathcal{D})$ и для любого шара B такого, что $\bar{B} \subset \mathcal{D}$, выполнено равенство

$$\int_{\partial B} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad (0.1)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂B , $d\omega$ — элемент площади. Тогда функция f гармонична в области $\mathcal{D}$.

Теорема А получила дальнейшее развитие и уточнение в ряде работ. В частности, Г.К. Эвансом [3] исследовался аналог уравнения (0.1), в котором ослаблялось условие непрерывности градиента ∇f . Г.Э. Рейнор [4] допустил наличие у f конечного числа особенностей и получил, помимо гармоничности f , некоторую информацию о поведении f в окрестности особых точек. Д.Д. Герген [5] установил обобщение теоремы А, заменив (0.1) равенством

$$\int_{\partial B} \left(f \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} - h \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) d\omega = 0, \quad (0.2)$$

где h — гармоническая положительная в $\mathcal{D}$ функция. С. Сакс [6] усилил результаты М. Бохера, П. Кёбе и Д.Д. Горгена, рассматривая вместо (0.1) и (0.2) асимптотическое поведение интегралов по сферам в окрестности каждой точки $x \in \mathcal{D}$. В работе [7] Э.Ф. Беккенбах получил аналог теоремы А, заменив шары в (0.1) на кубы с ребрами, параллельными осям (в этой связи см. также [3]). Более детальная информация об этих и близких результатах содержится в обзорах [8, 9].

Ряд уточнений теоремы А может быть получен на основе исследования проблемы инъективности преобразования Помпейю [10–14].

О п р е д е л е н и е 0.1. Пусть $M(n)$ — группа евклидовых движений пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Набор $A_1, \dots, A_m$ ($m \geq 1$) компактных множеств положительной лебеговой меры в $\mathbb{R}^n$ называется семейством Помпейю, если не существует ненулевой локально суммируемой функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что

$$\int_{g(A_j)} f(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

для любого $g \in M(n)$.

Подобным образом определяется семейство со свойством Помпейю относительно заданной области в $\mathbb{R}^n$ (см. [10, § 3], [13, часть 4]). Формула Грина

$$\int_{\partial G} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = \int_G \Delta f dx \quad (0.3)$$

влечет следующую простую связь между гармоничностью и свойством Помпейю.

Теорема В. *Предположим, что $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ — семейство областей в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей и их замыкания $\overline{\mathcal{A}}_1, \dots, \overline{\mathcal{A}}_m$ обладают свойством Помпейю относительно области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $f \in C^2(\mathcal{D})$, и для любого $j \in \{1, \dots, m\}$ и всех $g \in M(n)$ таких, что $g(\overline{\mathcal{A}}_j) \subset \mathcal{D}$, выполнено равенство*

$$\int_{\partial(g(\mathcal{A}_j))} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0.$$

Тогда функция f гармонична в области $\mathcal{D}$.

Используя теорему В и известные достаточные условия для множеств Помпейю (см. [10–14]), можно получать различные уточнения теоремы А. В частности, имеет место следующая теорема о двух радиусах: если $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и равенство (0.1) справедливо для любых шаров $B \subset \mathbb{R}^n$ с радиусами r_1 и r_2 , причем r_1/r_2 не является отношением корней функции Бесселя $J_{n/2}$, то функция f является гармонической на $\mathbb{R}^n$ (см. [15, 16], а также [17–20], где содержатся локальные аналоги этого утверждения для шара).

В данной работе изучается случай, когда $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < R\}$, $f \in C^\infty(\mathcal{D})$, а интегрирование в (0.1) ведется по всем сферам радиусов r_1 и r_2 , лежащим в $\mathcal{D}$. При этом переход к теореме В осуществить нельзя ввиду возможной особенности у функции f в нуле. Показано, что при указанных выше условиях на радиусы и $R \geq r_1 + r_2$ можно сделать вывод о гармоничности функции f в $\mathcal{D}$ (см. теорему 1.1 ниже). Отметим, что эти требования в общем случае ослабить нельзя (см. § 2).

1. Формулировка основного результата

Пусть (x, y) — стандартное скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Положим

$$\begin{aligned} B_{a,b} &= \{y \in \mathbb{R}^n : a < |y| < b\}, \quad 0 \leq a < b, \\ B_a(x) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < a\}, \quad S_a(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = a\}, \\ B_a &= B_a(0), \quad S_a = S_a(0). \end{aligned}$$

Определим множество $E_n \subset (0, +\infty)$ равенством $E_n = \{\zeta_m/\zeta_j : m, j = 1, 2, \dots\}$, где $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — возрастающая последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $J_{n/2}$. Отметим, что

$$\zeta_m = \pi \left(m + \frac{n-1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow +\infty \quad (1.1)$$

и E_1 совпадает с множеством всех положительных рациональных чисел. Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $0 < r_1 < r_2$, $r_1/r_2 \notin E_n$, $R \geq r_1 + r_2$ и $f \in C^\infty(B_{0,R})$. Если для любого $j \in \{1; 2\}$ и всех $x \in B_{R-r_j} \setminus S_{r_j}$ справедливо равенство*

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0,$$

то функция f является гармонической в $B_{0,R}$.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 1.1 функция f имеет нулевой вычет в точке $x = 0$ (см. [21, гл. 10]). Обратно, если f гармонична в $B_{0,R}$ и $\text{Res}(f, 0) = 0$, то $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$ имеет нулевые интегралы по всем сферам, лежащим в $B_{0,R}$. Далее, если $r_1/r_2 \in E_n$ или $R < r_1 + r_2$, то теорема 2 в [19] показывает, что существует негармоническая в $B_{0,R}$ функция $f \in C^\infty(B_R)$, такая что

$$\int_{S_{r_j}(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad x \in B_{R-r_j}, \quad j \in \{1; 2\}.$$

Кроме того, условие $f \in C^\infty(B_{0,R})$ в теореме 1.1 нельзя заменить, вообще говоря, требованием произвольной конечной гладкости функции f в B_R (см. [20, теорема 1 (5)]).

2. Вспомогательные утверждения

Обозначим через $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_+$ множества натуральных и неотрицательных целых чисел соответственно. Далее будем считать, что всякая функция $f \in C(B_{0,R})$, допускающая непрерывное продолжение в точку 0, доопределена в нуле по непрерывности.

Нам потребуется классическая теорема о среднем для решений уравнения Гельмгольца: если функция f непрерывна в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и

$$\Delta f = -\lambda^2 f \quad \text{в } \mathcal{D} \quad \text{при некотором } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

то

$$\int_{B_r(x)} f(y) dy = \left(\frac{2\pi r}{\lambda} \right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\lambda r) f(x) \quad (2.2)$$

для любого шара $B_r(x)$, такого, что $\overline{B_r(x)} \subset \mathcal{D}$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{H}^{n,k}$ — пространство сферических гармоник степени k на S_1 , рассматриваемое как подпространство $L^2(S_1)$, $d(n, k)$ — размерность $\mathcal{H}^{n,k}$, $\{Y_j^k\}_{j=1}^{d(n,k)}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{n,k}$ (см. [22, гл. 4]). Положим

$$Y_1^0 = \frac{1}{\sqrt{\omega_{n-1}}}, \quad \text{где } \omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{— площадь сферы } S_1.$$

Продолжим Y_j^k до гармонического многочлена на $\mathbb{R}^n$ равенством $Y_j^k(x) = \rho^k Y_j^k(\sigma)$, где ρ , σ — полярные координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ ($\rho = |x|$, а если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, то $\sigma = x/\rho \in S_1$). Явный вид Y_j^k может быть выписан в терминах многочленов Гегенбауэра (см. [23, гл. 11, §§ 11.2–11.4]).

Обозначим через $T^n(\tau)$ ($\tau \in O(n)$) квазирегулярное представление ортогональной группы $O(n)$ в $L^2(S_1)$. Тогда $T^n(\tau)$ является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $T^{n,k}(\tau)$, действующих на $\mathcal{H}^{n,k}$ (см. [24, гл. 9, § 2.1]). Пусть $\{t_{l,j}^k(\tau)\}$ — матрица представления $T^{n,k}(\tau)$, т. е.

$$Y_j^k(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{l=1}^{d(n,k)} t_{l,j}^k(\tau) Y_l^k(\sigma), \quad \sigma \in S_1.$$

Всякой функции $f \in C(B_{a,b})$ соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(n,k)} f^{k,j}(x), \quad x \in B_{a,b}, \quad (2.3)$$

где

$$f^{k,j}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_j^k(\sigma), \quad f_{k,j}(\rho) = \int_{S_1} f(\rho\sigma)\overline{Y_j^k(\sigma)} d\omega(\sigma).$$

Для функций $f^{k,j,l}(x) = f_{k,j}(\rho)Y_l^k(\sigma)$ справедливо равенство

$$f^{k,j,l}(x) = d(n, k) \int_{O(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{l,j}^k(\tau)} d\tau, \quad (2.4)$$

где $d\tau$ — мера Хаара на группе $O(n)$ единичной массы. Если $f \in C^\infty(B_{a,b})$, то ряд в правой части (2.3) сходится к f в стандартной топологии пространства $C^\infty(B_{a,b})$.

Компоненты Фурье функции f и ее лапласиана Δf связаны соотношениями

$$(\Delta f)^{k,j} = \Delta(f^{k,j}), \quad (\Delta f)_{k,j}(\rho) = \rho^{1-n-k} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^{n+2k-1} \frac{d}{d\rho} (\rho^{-k} f_{k,j}(\rho)) \right). \quad (2.5)$$

В частности,

$$\Delta(\Phi_{k,n}(\rho)Y_j^k(\sigma)) = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (2.6)$$

где

$$\Phi_{k,n}(\rho) = \begin{cases} \ln \rho, & \text{если } n = 2, k = 0, \\ \rho^{2-n-k}, & \text{если } n + 2k \neq 2. \end{cases}$$

Положим

$$\gamma_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \geq 1, \\ \sqrt{2\pi}, & \text{если } n = 2, k = 0, \\ (2-n)\sqrt{\omega_{n-1}}, & \text{если } n \geq 3, k = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Лемма 2.1. Пусть $f(y) = \Phi_{k,n}(|y|)Y_j^k(y/|y|)$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = \begin{cases} 0, & |x| > r, \\ \gamma_{k,n}, & |x| < r. \end{cases} \quad (2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Требуемое равенство следует из (2.6) и теоремы о вычетах для гармонических функций (см. [21, теорема 10.8]). $\square$

Обозначим через Z_ν функцию Бесселя J_ν или функцию Неймана N_ν .

Лемма 2.2. При $\lambda > 0$ имеет место равенство

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|y|)}{|y|^{\frac{n}{2}+k-1}} Y_j^k(y) \right) d\omega(y) = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \lambda^{2-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(\lambda r) \frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda|x|)}{|x|^{\frac{n}{2}+k-1}} Y_j^k(x), \quad (2.9)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ и $|x| > r$ для $J_{\frac{n}{2}+k-1}$ и $N_{\frac{n}{2}+k-1}$ соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (2.5) и формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dt}(t^\nu Z_\nu(t)) = t^\nu Z_{\nu-1}(t), \quad \frac{d}{dt}(t^{-\nu} Z_\nu(t)) = -t^{-\nu} Z_{\nu+1}(t) \quad (2.10)$$

влекут равенство

$$\Delta \left(\frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}} Y_j^k(\sigma) \right) = -\lambda^2 \frac{Z_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}} Y_j^k(\sigma), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.11)$$

При этом

$$\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}(\lambda\rho)}{\rho^{\frac{n}{2}-1}}Y_j^k(\sigma) = \frac{\lambda^{\frac{n}{2}-1}}{i^k(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S_1} e^{i\lambda(\rho\sigma,\eta)} Y_j^k(\eta) d\omega(\eta)$$

(см., например, [13, часть 1, формула (5.29)]). Поэтому в случае функции Бесселя соотношение (2.11) справедливо всюду на $\mathbb{R}^n$. Из (0.3), (2.11) и (2.2) получаем требуемое. $\square$

Для $R > 0$, $r \in (0, R)$ положим

$$\mathfrak{H}_r(B_{0,R}) = \left\{ f \in C^\infty(B_{0,R}) : \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0 \quad \forall x \in B_{R-r} \setminus S_r \right\}.$$

Лемма 2.3. *Класс $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ инвариантен относительно дифференцирований, ортогональных преобразований и операторов $f \rightarrow f^{k,j,l}$ ($k \in \mathbb{Z}_+$, $j, l \in \{1, \dots, d(n, k)\}$).*

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. По определению класса $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = \frac{1}{r} \int_{S_r(x)} (\nabla f(\eta), \eta - x) d\omega(\eta) \\ &= -\frac{1}{r} \int_{S_r} (\nabla f(x - \eta), \eta) d\omega(\eta), \quad x \in B_{R-r} \setminus S_r. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Дифференцируя это равенство по x , приходим к инвариантности класса $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ относительно дифференцирований. Далее, нетрудно видеть, что

$$\nabla(f \circ \tau) = \tau^{-1} \circ \nabla f \circ \tau \quad \text{для любого } \tau \in O(n). \quad (2.13)$$

Используя (2.12), (2.13) и учитывая, что ортогональные преобразования сохраняют скалярное произведение, получаем

$$\int_{S_r(x)} (\nabla(f \circ \tau)(\eta), \eta - x) d\omega(\eta) = \int_{S_r(\tau x)} (\nabla f(\eta), \eta - \tau x) d\omega(\eta) = 0.$$

Тогда (см. (2.4))

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (f^{k,j,l}) d\omega = \frac{d(n, k)}{r} \int_{O(n)} \int_{S_r(\tau^{-1}x)} (\nabla f(\eta), \eta - \tau^{-1}x) d\omega(\eta) \overline{t_{l,j}^k(\tau)} d\tau = 0.$$

Таким образом, $f \circ \tau$ и $f^{k,j,l}$ принадлежат классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$, что завершает доказательство леммы 2.3. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть $Y \in \mathcal{H}^{n,k} \setminus \{0\}$ и $h(\rho)Y(\sigma) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Тогда*

$$\rho^k \frac{d}{d\rho} (\rho^{-k} h(\rho)) Y_j^{k+1}(\sigma) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R}) \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, d(n, k+1)\}.$$

Кроме того, если $k \geq 1$, то

$$\rho^{2-n-k} \frac{d}{d\rho} (\rho^{n+k-2} h(\rho)) Y_j^{k-1}(\sigma) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R}) \quad \text{при всех } j \in \{1, \dots, d(n, k-1)\}.$$

Доказательство. Используя лемму 2.3 и повторяя рассуждение из [20, лемма 2], получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 2.5. Пусть $Y \in \mathcal{H}^{n,k} \setminus \{0\}$, $f(x) = \rho^{4-n-k}Y(\sigma)$. Если $R > 2r$ и $n + 2k \neq 4$, то $f \notin \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$.

Доказательство. Используя (2.5), находим

$$(\Delta f)(x) = 2(4 - n - 2k)\rho^{2-n-k}Y(\sigma), \quad \Delta(\rho^{2-n-k}Y(\sigma)) = 0.$$

Из этих равенств, формулы (0.3) и теоремы о среднем для гармонических функций имеем

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 4(4 - n - 2k) \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{n\Gamma(\frac{n}{2})} |x|^{2-n-2k} Y(x), \quad x \in B_{r,R-r}.$$

Отсюда видно, что $f \notin \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. □

Лемма 2.6. Пусть $\lambda > 0$, $x \in B_r$ и $f(y) = f_0(|y|) = |y|^{1-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|y|)$. Тогда

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \lambda^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r) |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|). \quad (2.14)$$

Доказательство. Обозначим через $F(x)$ интеграл в левой части равенства (2.14). Используя (2.10), имеем

$$F(0) = \int_{S_r} f'_0(|y|) d\omega(y) = -\lambda \int_{S_r} |y|^{1-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda|y|) d\omega(y) = -\frac{2\lambda(\pi r)^{\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r)}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \quad (2.15)$$

Далее, из (2.12) и (2.13) следует, что F — радиальная гладкая функция в B_r , удовлетворяющая уравнению (2.1). Поэтому

$$F(x) = c |x|^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|), \quad x \in B_r,$$

для некоторой константы c (см. (2.11)). Учитывая (2.15) и равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})},$$

получаем $c = -(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \lambda^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\lambda r)$. Таким образом, $F(x)$ совпадает с правой частью в (2.14). □

Для доказательства следующей леммы напомним известные асимптотики бесселевых функций:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\cos \left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2.16)$$

$$N_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left(\sin \left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow +\infty \quad (2.17)$$

(см. [23, гл. 7, § 7.13]).

Лемма 2.7. Пусть $0 \leq a < b$, $0 < r < (b-a)/2$, $f \in C^\infty(B_{a,b})$. Тогда

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0 \quad \text{на} \quad B_{a+r,b-r} \quad (2.18)$$

в том и только том случае, когда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ имеет место равенство

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\Phi_{k,n}(\rho) + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) + d_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right), \quad a < \rho < b, \quad (2.19)$$

где $a_{k,j}, b_{k,j}, c_{m,k,j}, d_{m,k,j} \in \mathbb{C}$ и $|c_{m,k,j}| + |d_{m,k,j}| = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что функция f удовлетворяет условию (2.18). Тогда в силу (0.3) ее лапласиан Δf имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r , лежащим в $B_{a,b}$. Поэтому при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$

$$(\Delta f)_{k,j}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) + \beta_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right), \quad a < \rho < b,$$

где $\alpha_{m,k,j}, \beta_{m,k,j} \in \mathbb{C}$ и $|\alpha_{m,k,j}| + |\beta_{m,k,j}| = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$ (см. [25, теорема 3]). Используя это представление, равенство (2.5), первую формулу в (2.10) и (1.1), (2.16), (2.17), приходим к разложению

$$\rho^{n+2k-1} \frac{d}{d\rho}(\rho^{-k} f_{k,j}(\rho)) = \gamma_{k,j} + r\rho^{\frac{n}{2}+k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m,k,j}}{\zeta_m} J_{\frac{n}{2}+k}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) + \frac{\beta_{m,k,j}}{\zeta_m} N_{\frac{n}{2}+k}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right), \quad a < \rho < b,$$

где $\gamma_{k,j} \in \mathbb{C}$. Отсюда и из второй формулы в (2.10) аналогично находим

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j}\rho^k + b_{k,j}\Phi_{k,n}(\rho) - \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\zeta_m}\right)^2 \left(\alpha_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) + \beta_{m,k,j} N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) \right).$$

Тем самым разложение (2.19) доказано.

Обратно, если компоненты $f_{k,j}$ функции f имеют вид (2.19), то из (0.3), (1.1), (2.16), (2.17), (2.9) и (2.8) заключаем, что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(f^{k,j}) d\omega = 0, \quad x \in B_{a+r, b-r}.$$

Следовательно, функция f удовлетворяет условию (2.18). □

Лемма 2.8. Пусть $R > 2r$ и $f(x) = f_0(\rho) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Тогда

$$f_0(\rho) = a_0 + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right), \quad 0 < \rho < R, \quad (2.20)$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ и $a_m = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.7 имеем

$$f_0(\rho) = a_0 + b_0\Phi_{0,n}(\rho) + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right) + b_m N_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\zeta_m}{r}\rho\right), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, b_0, a_m, b_m \in \mathbb{C}$ и $|a_m| + |b_m| = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$. Используем теперь условие

$$\int_{S_r(x)} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} d\omega = 0, \quad x \in B_r.$$

Учитывая (1.1), (2.16), (2.17), (2.9), (2.8) и (2.14), находим

$$(2\pi r)^{\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \zeta_m^{2-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\zeta_m t) = b_0 \sqrt{\omega_{n-1}} \gamma_{0,n} r, \quad 0 < t < 1. \quad (2.21)$$

Дифференцируя этот ряд по t (см. (1.1), (2.10), (2.16), (2.17)), получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) J_{\frac{n}{2}}(\zeta_m t) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда и из известных соотношений ортогональности

$$\int_0^1 t J_{\frac{n}{2}}(\zeta_m t) J_{\frac{n}{2}}(\zeta_j t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq j, \\ J_{\frac{n}{2}+1}^2(\zeta_m)/2, & m = j, \end{cases}$$

следуют равенства

$$b_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} N_{\frac{n}{2}}(\zeta_m) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Комбинируя их с формулой Ломмеля–Ганкеля

$$J_{\nu}(t) N_{\nu+1}(t) - J_{\nu+1}(t) N_{\nu}(t) = -\frac{2}{\pi t},$$

делаем вывод, что $b_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда $b_0 = 0$ (см. (2.21) и (2.7)). Тем самым разложение (2.20) доказано. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $R > 2r$, $f \in C^{\infty}(B_{0,R})$. Тогда $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ в том и только том случае, когда при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$ имеет место равенство

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j} \rho^k + b_{k,j} \rho^{2-n-k} + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,j} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r} \rho\right), \quad 0 < \rho < R, \quad (2.22)$$

где $a_{k,j}, b_{k,j}, c_{m,k,j} \in \mathbb{C}$, $b_{0,1} = 0$ и $c_{m,k,j} = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$.

Доказательство. Если $f \in C^{\infty}(B_{0,R})$ и выполнено разложение (2.22), то все $f^{k,j}$ принадлежат классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$ (см. (1.1), (2.10), (2.16), (2.9), (2.8)). Поэтому $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$.

Далее, докажем индукцией, что если некоторая функция $h(\rho) Y_1^k(\sigma)$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_r(B_{0,R})$, то h можно представить рядом вида (2.22) при $j = 1$. В случае $k = 0$ это утверждение следует из леммы 2.8. Предположим, что оно справедливо при некотором k и установим его для $k+1$. Пусть $h(\rho) Y_1^{k+1}(\sigma) \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Тогда, в силу леммы 2.4,

$$\rho^{1-n-k} \frac{d}{d\rho} (\rho^{n+k-1} h(\rho)) = a_{k,1} \rho^k + b_{k,1} \rho^{2-n-k} + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,1} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\zeta_m}{r} \rho\right).$$

Отсюда находим (см. (2.10))

$$h(\rho) = \frac{a_{k,1}}{n+2k} \rho^{k+1} + \frac{b_{k,1}}{2} \rho^{3-n-k} + d_k \rho^{1-n-k} + r \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{m,k,1}}{\zeta_m} J_{\frac{n}{2}+k}\left(\frac{\zeta_m}{r} \rho\right),$$

где $d_k \in \mathbb{C}$. Это представление, соотношения (2.9), (2.8) и лемма 2.5 влекут равенство $b_{k,1} = 0$, что и требовалось. Теперь из леммы 2.3 получаем (2.22) для $f \in \mathfrak{H}_r(B_{0,R})$. Таким образом, теорема 2.1 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 1.1

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.1. По лемме 2.3 функция $f^{0,1}$ принадлежит классу $(\mathfrak{H}_{r_1} \cap \mathfrak{H}_{r_2})(B_{0,R})$. Так как $R > 2r_1$, на основании леммы 2.8 имеем

$$f_{0,1}(\rho) = a_0 + \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_{\frac{n}{2}-1} \left(\frac{\zeta_m}{r_1} \rho \right), \quad 0 < \rho < R,$$

где $a_0, a_m \in \mathbb{C}$ и $a_m = O(\zeta_m^{-s})$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$. Учитывая, что $R \geq r_1 + r_2$ и $f^{0,1} \in \mathfrak{H}_{r_2}(B_{0,R})$, с использованием (2.9) находим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \zeta_m^{2-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{r_2 \zeta_m}{r_1} \right) t^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\zeta_m t) = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда (см. доказательство леммы 2.8)

$$a_m \zeta_m^{3-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}} \left(\frac{r_2 \zeta_m}{r_1} \right) = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств и условия $r_1/r_2 \notin E_n$ видно, что $a_m = 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$ и, значит, $f_{0,1}(\rho) = a_0$. Теперь, повторяя рассуждения в доказательстве теоремы 2.1, получаем

$$f_{k,j}(\rho) = a_{k,j} \rho^k + b_{k,j} \rho^{2-n-k}, \quad 0 < \rho < R$$

при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1, \dots, d(n, k)\}$, где $a_{k,j}, b_{k,j} \in \mathbb{C}$ и $b_{0,1} = 0$. Поэтому функция f гармонична в $B_{0,R}$, что и требовалось.

References

- [1] M. Bôcher, “On harmonic functions in two dimensions”, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, **41** (1906), 557–583.
- [2] P. Koebe, “Herleitung der partiellen differentialgleichungen der potentialfunktion aus deren integraleigenschaft”, *Sitzungsber. Berlin. Math. Gessellschaft*, **5** (1906), 39–42.
- [3] G. C. Evans, “Problems of potential theory”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **7** (1921), 89–98.
- [4] G. E. Raynor, “On the integro-differential equation of the Bôcher type in three space”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **32** (1926), 654–658.
- [5] J. J. Gergen, “Note on a theorem of Bôcher and Koebe”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **37** (1931), 591–596.
- [6] S. Saks, “Note on defining properties of harmonic functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38** (1932), 380–382.
- [7] E. F. Beckenbach, “Concerning the definition of harmonic functions”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 240–245.
- [8] N. Kuznetsov, “Mean value properties of harmonic functions and related topics (a Survey)”, *J. Math. Sci.*, **242** (2019), 177–199.
- [9] I. Netuka, J. Veselý, “Mean value property and harmonic functions”, *Classical and Modern Potential Theory and Applications. NATO ASI Series*, **430** (1994), 359–398.
- [10] К. А. Беренштейн, Д. Струппа, “Комплексный анализ и уравнения в свертках”, *Комплексный анализ – многие переменные – 5*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундамент. направления, **54**, 1989, 5–111; англ. пер.: C. A. Berenstein, D. C. Struppa, “Complex analysis and convolution equations”, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences. V. 54: Several complex variables V. Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, ed. G. M. Khenkin, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, 1–108.

- [11] L. Zalcman, “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Nato Science Series C: Mathematical and Physical Sciences, **365**, eds. B. Fuglede, M. Goldstein, W. Haussmann, W.K. Hayman, L. Rogge, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992, 185–194.
- [12] L. Zalcman, “Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem”, *Contemporary Mathematics*. V.278: *Radon Transform and Tomography*, eds. E.T. Quinto, L. Ehrenpreis, A. Faridani, F. Gonzalez, E. Grinberg, AMS, 2001, 69–74.
- [13] V. V. Volchkov, *Integral Geometry and Convolution Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [14] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Basel, 2013.
- [15] L. Zalcman, “Analyticity and the Pompeiu problem”, *Arch. Rat. Anal. Mech.*, **47** (1972), 237–254.
- [16] L. Brown, B.M. Schreiber, B. A. Taylor, “Spectral synthesis and the Pompeiu problem”, *Ann. Inst. Fourier*, **23** (1973), 125–154.
- [17] J.D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72** (1972), 403–416.
- [18] C. A. Berenstein, R. Gay, “A local version of the two-circles theorem”, *Israel J. Math.*, **55** (1986), 267–288.
- [19] В. В. Волчков, “Теоремы о двух радиусах на ограниченных областях евклидовых пространств”, *Дифф. уравн.*, **30**:10 (1994), 1719–1724; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Theorems on two radii on bounded domains of Euclidean spaces”, *Differ. Equ.*, **30**:10 (1994), 1587–1592.
- [20] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах”, *Матем. сб.*, **186**:6 (1995), 15–34; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A definitive version of the local two-radii theorem”, *Sb. Math.*, **186**:6 (1995), 783–802.
- [21] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer, New York, 1992.
- [22] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; англ. пер.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton–New Jersey, 1971.
- [23] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, **II**, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, **II**, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [24] Н. Я. Виленкин, *Специальные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1991; англ. пер.: N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, AMS, RI, 1968.
- [25] В. В. Волчков, “Решение проблемы носителя для некоторых классов функций”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 13–30; англ. пер.: V. V. Volchkov, “Solution of the support problem for several function classes”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1279–1294.

Информация об авторах

Волчкова Наталья Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Донецкий национальный технический университет, г. Донецк, Российская Федерация. E-mail: volna936@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6193-2782>

Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий государственный университет, г. Донецк, Российская Федерация. E-mail: vit.v.volchkov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>

Information about the authors

Natalia P. Volchkova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Donetsk National Technical University, Donetsk, Russian Federation. E-mail: volna936@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6193-2782>

Vitaliy V. Volchkov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department, Donetsk State University, Donetsk, Russian Federation. E-mail: vit.v.volchkov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4274-0034>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Волчкова Наталья Петровна

E-mail: volna936@gmail.com

Corresponding author:

Natalia P. Volchkova

E-mail: volna936@gmail.com

Поступила в редакцию 16.01.2024 г.

Поступила после рецензирования 27.05.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Received 16.01.2024

Reviewed 27.05.2024

Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Дзюба С.М., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148>

УДК 517.938



О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению свойств рекуррентных движений периодических процессов, заданных в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ .

Введено определение рекуррентного движения периодического процесса и установлено основное свойство движений, которое жестко связывает произвольные и рекуррентные движения. На основании этого свойства показано, что в случае автономного процесса, заданного в пространстве Γ , классическое определение рекуррентного движения Дж. Биркгофа эквивалентно введенному в данной работе определению рекуррентного движения периодического процесса. Кроме того, показано, что в Γ ω - и α -предельные множества каждого движения автономного процесса являются секвенциально компактными минимальными множествами.

Основное значение полученных результатов состоит в том, что они фактически устанавливают взаимоотношение движений периодических процессов в пространстве Γ .

Ключевые слова: хаусдорфово топологическое секвенциально компактное пространство, периодические процессы, рекуррентные движения

Для цитирования: Дзюба С.М. О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 138–148. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148>

SCIENTIFIC ARTICLE

© S. M. Dzyuba, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148>

About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space

Sergei M. DZYUBA

Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the properties of recurrent motions of periodic processes defined in a Hausdorff sequentially compact topological space Γ .

The definition of a recurrent motion of a periodic process is introduced and the main property of the motions is established. This property strictly connects arbitrary motions and recurrent motions in Γ . Based on this property, it is shown that, in the case of an autonomous process defined in the space Γ , the classical G. Birkhoff definition of a recurrent motion is equivalent to the definition of a recurrent motion of a periodic process introduced in this article. Besides, it is shown that in Γ , the ω - and α -limit sets of each motion of an autonomous process are sequentially compact minimal sets.

The main significance of the results obtained in the article is that they actually establish the interrelation between the motions of periodic processes in the space Γ .

Keywords: Hausdorff topological sequentially compact space, periodic processes, recurrent motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 138–148. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-138-148> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \Sigma$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

- (а) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;
- (б) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

- (с) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \rightarrow f(t, p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Важнейшим из всех движений является рекуррентное, так как в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}(p)$ траектории

$$K(p) = \{f(t, p): t \in \mathbb{R}\}$$

рекуррентного движения $f(t, p)$ представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]), а каждое движение, расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентно (см. [1, с. 402]); кроме того, любое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]).

Еще до недавнего времени считалось, что в связном пространстве Σ существуют компактные инвариантные множества

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset \dots,$$

каждое из которых не является объединением компактных минимальных множеств (см. [1, гл. V]). Однако, в работе [2] было доказано, что если $M_1 \neq \Sigma$, то в связном компактном пространстве Σ

$$M_1 = M_2 = \dots = M_k = \dots = \emptyset.$$

Это, очевидно, означает, что в компактном пространстве Σ не существует ни устойчивых по Пуассону нереккуррентных движений, ни притягивающих множеств типа гомоклинического (или гетероклинического) аттрактора.

В продолжение результатов из [2] в работах [3, 4] было установлено полное взаимоотношение движений в Σ и на топологическом компактном многообразии. Здесь необходимо отметить, что в [1, с. 365, с. 375] приведены три концептуальных примера построения множеств типа M_k на торе и на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$. К сожалению, данные примеры оказались некорректными, что было показано в работе [5].

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов работ [2–4], заключающееся в изучении свойств рекуррентных движений периодических процессов в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ . В частности, будет установлено полное взаимоотношение движений автономных процессов в Γ .

1. Процессы и движения

Пусть Γ — хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ и положим

$$f(\tau, t, p) = G(\tau, t)p.$$

При этом будем считать, что:

(a') отображение f непрерывно по совокупности переменных τ, t, p на $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Sigma$;

(b') для всех $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \Gamma$

$$G(\tau, 0)p = p;$$

(c') для всех $(\tau, t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$G(\tau, t + s) = G(\tau + s, t)G(\tau, s).$$

Тогда будем говорить, что отображение f — *процесс*, а для любых $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ функция $t \rightarrow f(\tau, t, p)$ — *движение* (см. [6, с. 98]).

Если оператор $G(\tau, t)$ не зависит от τ , то процесс f называется *автономным*. В этом случае для всех $(t, p) \in \mathbb{R} \times \Gamma$

$$G(0, t)p = f(t, p)$$

и, следовательно, $G(0, t)$ представляет собой полную однопараметрическую группу преобразований g^t на Γ (см. [6, с. 99]).

Из всего множества процессов в дальнейшем будет рассматриваться только *периодический процесс*, т. е. процесс, удовлетворяющий условию

$$G(\tau + 1, t) \equiv G(\tau, t).$$

Заметим, что автономный процесс по определению является периодическим.

Как обычно, в автономном случае множество $A \subset \Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t \in \mathbb{R}$

$$G(0, t)A = A.$$

В автономном случае мы можем также принять важнейшие определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [7, гл. VII]). Именно:

(d) если $p \in \Gamma$, то ω -*предельным* множеством $\Omega(p)$ движения $f(t, p)$ называется множество

$$\Omega(p) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} f(s, p)};$$

(e) если $p \in \Gamma$, то α -*предельным* множеством $A(p)$ движения $f(t, p)$ называется множество

$$A(p) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\bigcup_{s \leq t} f(s, p)};$$

(f) множество $M \subset \Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами;

(g) любое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M , называется *рекуррентным*.

Вообще говоря, в неавтономном случае траектория

$$K(\tau, p) = \{f(\tau, t, p) : t \in \mathbb{R}\}$$

движения $f(\tau, t, p)$ зависит не только от p , но и от τ . Поэтому траектории движений здесь начинают пересекаться. Значит, определения (f) и (g) на неавтономные процессы прямо не переносятся. Это является основной проблемой при распространении свойств автономных процессов на неавтономные (в том числе и периодические).

2. Рекуррентные движения

Прежде всего, заметим, что пространство Γ является полуметризуемым пространством с отделимой структурой как хаусдорфово компактное пространство (см. [8, с. 458]). Поэтому везде в дальнейшем мы будем считать Γ именно полуметрическим пространством с отделимой структурой.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [8, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma : \Gamma \times \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(A) для всех $(p, q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p, q) = d_\gamma(q, p);$$

(B) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p, p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p, q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(C) для всех $p \in \Gamma, q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p, q) \leq d_\gamma(p, r) + d_\gamma(r, q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ , что

$$d_\gamma(p, q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [8, с. 456]).

Полуметрики на Γ мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторое непустое открытое множество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ и зададим непрерывное отображение $\gamma : \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$, такое, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in \Gamma_0$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда, очевидно, равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на Γ (см. [8, с. 457]).

Изменяя функцию γ , мы можем получать различные полуметрики d_γ . Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I_0}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ найдется полуметрика d_γ , для которой $d_\gamma(p, q) > 0$. Проведя эту процедуру на всех непустых открытых множествах $\Gamma_0 \subset \Gamma$, мы превратим Γ в полуметрическое пространство с отделимой структурой, где топология вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$.

Пример 2.1. Важным примером секвенциально компактного полуметрического пространства Γ с отделимой структурой может служить компактное топологическое многообразие V (см., например, [4, 9]).

Чтобы привести простейший пример периодического процесса на V , предположим, что V — дифференцируемое многообразие размерности n в аффинном пространстве E размерности ν над полем $\mathbb{R}$, принадлежащее классу C^2 . Обозначим через $\vec{E}$ — векторное пространство, присоединенное к E . Пусть для всех $x \in V$ и $t \in \mathbb{R}$ в векторном пространстве $\vec{T}(x; V) \subset \vec{E}$, касательном к V в точке x , лежит вектор $\vec{X}(x, t)$, и пусть отображение $\vec{X}: V \times \mathbb{R} \rightarrow \vec{T}(x; V)$ непрерывно и локально удовлетворяет условию Липшица по x . И, наконец, будем считать, что

$$\vec{X}(x, t+1) \equiv \vec{X}(x, t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{X}(x, t). \quad (2.1)$$

Если многообразие V компактно, то, действуя стандартным образом, несложно показать, что любое непродолжаемое решение $x = f(\tau, t, p)$ уравнения (2.1) с начальными значениями $(\tau, p) \in \mathbb{R} \times V$ определено для всех $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [8, с. 34]). Отсюда непосредственно следует, что отображение $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — периодический процесс.

Определение 2.1. Пусть f — периодический процесс, и пусть $f(\tau, t, p)$ — некоторое движение. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $t \in \mathbb{R}$

$$d_i(f(\tau, t, p), f(\tau, t + N_\varepsilon, p)) < \varepsilon, \quad i \in I. \quad (2.2)$$

Тогда будем говорить, что $f(\tau, t, p)$ — *рекуррентное движение*.

В силу равенства (2.2) несложно заметить, что если $f(\tau, t, p)$ — рекуррентное движение, то найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} d_i(f(\tau, t, p), f(\tau, t + N_k, p)) = 0, \quad i \in I,$$

и обратно. Существование рекуррентных (в смысле определения 2.1) движений устанавливает следующая

Теорема 2.1. Пусть f — периодический процесс, и пусть $f(\tau, t, p)$ — некоторое движение. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существуют рекуррентные движения $f(\tau, t, q)$ и $f(\tau, t, r)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t + N_{k_l}, p), f(\tau, t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t - N_{k_l}, p), f(\tau, t, r)) = 0, \quad i \in I;$$

(ii) равномерно на всей оси $\mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, q), f(\tau, t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t - N_{k_{l+1}} + N_{k_l}, r), f(\tau, t, r)) = 0, \quad i \in I.$$

Доказательство. Очевидно, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить существование рекуррентного движения $f(\tau, t, q)$, удовлетворяющего условиям (i) и (ii). Проделаем это.

Для всех $N = 1, 2, \dots$ положим

$$p_N = f(\tau, N, p). \quad (2.3)$$

Тогда в силу периодичности процесса f несложно заметить, что

$$p_{N+m} = f(\tau, m, p_N), \quad N = 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Пусть $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствии с $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ из $(p_N)_{N \in \mathbb{N}}$ выберем последовательность $(p_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$. В силу секвенциальной компактности пространства Γ из $(p_{N_k})_{k \in \mathbb{N}}$ можно извлечь такую ее подпоследовательность $(p_{N_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$, что для некоторой точки $q \in \Gamma$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(p_{N_{k_l}}, q) = 0, \quad i \in I,$$

и $f(\tau, t, q)$ — движение, расположенное в Γ .

Поскольку отображение $(\tau, t, x) \rightarrow f(\tau, t, x)$ непрерывно и пространство Γ компактно, множество P функций

$$t \rightarrow f(\tau, t, p_N), \quad N = 1, 2, \dots,$$

определенных при $t \in \mathbb{R}$, равномерно непрерывно на произвольном отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (см. [9]). Поэтому согласно теореме Арцела – Асколи равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t, p_{N_{k_l}}), f(\tau, t, q)) = 0, \quad i \in I, \quad (2.5)$$

(см. [8, с. 489]). Аналогичным образом, множество Q функций

$$t \rightarrow f(\tau, t \pm m, q), \quad m = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$, равномерно непрерывно на $[0, 1]$. Следовательно, его замыкание $\bar{Q}$ компактно в топологии равномерной сходимости.

Для всех $l = 1, 2, \dots$ обозначим через $P_{N_{k_l}}$ множество функций

$$t \rightarrow f(t + m, p_{N_{k_l}}), \quad m = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$, а через $Q_0 \subset Q$ — множество функций

$$t \rightarrow f(t + m, q), \quad m = 0, 1, \dots,$$

также определенных на $[0, 1]$. Тогда в силу равенств (2.3) и (2.5)

$$\bar{Q}_0 \subset \bigcap_{l \geq 1} \bar{P}_{N_{k_l}}, \quad (2.6)$$

где $\bar{P}_{N_{k_l}}$ и $\bar{Q}_0$ — замыкания множеств $P_{N_{k_l}}$ и Q_0 соответственно.

Пусть

$$\Delta_{N_{k_l}} = N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Принимая во внимание равенство (2.4), заметим, что

$$p_{N_{k_{l+1}}} = f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}).$$

Следовательно, согласно равенству (2.5)

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(\tau, f(\Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), q) = 0, \quad i \in I. \quad (2.7)$$

Более того, так как пространство Γ секвенциально компактно, то без какой-либо потери общности можем считать, что найдется такая точка $q^* \in \Gamma$, что существует предел

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, q), q^*) = 0, \quad i \in I. \quad (2.8)$$

Заметим теперь, что в пространстве Γ введена отделимая полуметрическая структура. Поэтому, если $q \neq q^*$, то существует такая полуметрика d_γ , что

$$d_\gamma(q, q^*) > 0.$$

Тогда в силу равенств (2.7) и (2.8) найдется такое положительное число $\varepsilon > 0$, что при всех $l = 1, 2, \dots$

$$d_\gamma(f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, p_{N_{k_l}}), f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, q)) \geq \varepsilon. \quad (2.9)$$

В этом случае движение $f(\tau, t, q)$ не является периодическим движением с натуральным периодом. Значит,

$$\sup_{l \geq 1} \Delta_{N_{k_l}} = +\infty \quad (2.10)$$

и

$$\sup_{l \geq 1} (\Delta_{N_{k_{l+1}}} - \Delta_{N_{k_l}}) = +\infty. \quad (2.11)$$

Для простоты обозначений положим

$$t_{k_l} = \Delta_{N_{k_l}} + 1, \quad l = 1, 2, \dots$$

Тогда согласно неравенству (2.9) для всех $l = 1, 2, \dots$

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau, t, p_{N_{k_l}}), f(\tau, t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому в силу равенства (2.5) без какой-либо потери общности можем считать, что существует такая последовательность положительных чисел $(\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{N}} \downarrow 0$, что

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau, t, p_{N_{k_l}}), f(\tau, t, q)) \geq \varepsilon \quad (2.12)$$

и

$$\max_{0 \leq t \leq t_{k_l}} d_\gamma(f(\tau, t, p_{N_{k_l+1}}), f(\tau, t, q)) < \varepsilon_l. \quad (2.13)$$

Согласно (2.10) объединение

$$\bigcup_{l \geq 1} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \dots \subset [0, t_{k_l}] \subset \dots$$

исчерпывает всю полуось $[0, +\infty)$, а на каждом отрезке $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (2.12) и (2.13). Последнее, однако, в силу равенства (2.11) и включения (2.6) невозможно.

Полученное противоречие означает, что вне зависимости от периодичности движения $f(\tau, t, q)$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, \Delta_{N_{k_l}}, q), q) = 0, \quad i \in I.$$

Следовательно, равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(\tau, t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(\tau, t, q)) = 0, \quad i \in I. \quad (2.14)$$

Кроме того, поскольку множество $\bar{Q}$ компактно, то согласно равенству (2.14)

$$\bar{Q} = \bigcap_{l \geq 1} g^{\Delta_{N_{k_l}}} \bar{Q} \quad (2.15)$$

(см. [9]).

Предположим, что сходимость в (2.14) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и $j \in I$, что для всех $l = 1, 2, \dots$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d_j(f(\tau, t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(\tau, t, q)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l \in \mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_l)_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_l = \max_{-m_l \leq t \leq m_l} d_j(f(\tau, t + \Delta_{N_{k_l}}, q), f(\tau, t, q)) \geq \varepsilon_l.$$

Следовательно,

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup \delta_l \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (2.15). Значит, сходимость в равенстве (2.14) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Отсюда в силу определения 2.1 непосредственно следует, что $f(\tau, t, q)$ — рекуррентное движение. $\square$

Очевидно, что теорема 2.1 фактически устанавливает взаимоотношение движений в секвенциально компактном пространстве Γ . При этом необходимо отметить, что предположение о секвенциальности пространства Γ выглядит вполне естественным и прямо связано с определением 2.1.

3. Автономный случай

Для полноты картины обратимся к рассмотрению автономного процесса и заметим, что согласно теоремам 2.1 и 3.1 работы [9] справедлива следующая

Теорема 3.1. Пусть f — автономный процесс, и пусть $f(t, p)$ — некоторое движение. Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существуют рекуррентные (в смысле определения (g)) движения $f(t, q)$ и $f(t, r)$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i') равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t + N_{k_l}, p), f(t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t - N_{k_l}, p), f(t, r)) = 0, \quad i \in I;$$

(ii') равномерно на всей оси $\mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, q), f(t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t - N_{k_{l+1}} + N_{k_l}, r), f(t, r)) = 0, \quad i \in I.$$

Таким образом, в силу теорем 2.1 и 3.1 настоящей работы видим, что в секвенциально компактном пространстве Γ для автономного процесса f определения 2.1 и (g) эквивалентны. При этом необходимо отметить, что в условиях теоремы 3.1 ω - и α -предельные множества движения $f(t, p)$ являются секвенциально компактными минимальными множествами (см. [9]). Следовательно, теорема 3.1 устанавливает полное взаимоотношение движений автономных процессов в Γ .

References

- [1] В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].
- [2] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:13 (2021), 5–14 (In Russian)].
- [3] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].
- [4] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.
- [5] A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space”, *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.
- [6] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

- [7] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].
- [8] Л. Шварц, *Анализ*. Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisis*. V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [9] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, “On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственной технической университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

Поступила после рецензирования 13.05.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Received 15.01.2024

Reviewed 13.05.2024

Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Доровских Д.И., Измаилов А.Ф., Усков Е.И.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-149-163>

УДК 519.6



Глобализация сходимости кусочных ньютоновских методов

Дмитрий Игоревич ДОРОВСКИХ¹, Алексей Ферилович ИЗМАИЛОВ¹,Евгений Иванович УСКОВ²¹ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
119992, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматриваются варианты метода Ньютона для кусочно-гладких нелинейных уравнений, а также метода Гаусса–Ньютона для случая наличия дополнительных ограничений, снабженные процедурами одномерного поиска для невязки уравнения в целях глобализации сходимости. Кусочно-гладкие нелинейные уравнения с ограничениями естественным образом возникают как переформулировки систем уравнений и неравенств, включающих в себя условия комплементарности. В случаях, когда направление метода Ньютона не удастся вычислить, или оно оказывается слишком длинным, алгоритм переключается на страховочные шаги градиентного метода для квадрата невязки уравнения с гладким кусочным отображением, активным в текущем приближении. Для метода Гаусса–Ньютона используются страховочные шаги метода проекции градиента. Получены результаты, характеризующие свойства возможных предельных точек последовательностей, генерируемых этими методами, а именно, стационарность всякой такой точки хотя бы для одного активного в ней гладкого кусочного отображения, а также условия асимптотической сверхлинейной скорости сходимости таких последовательностей. Особое внимание уделено требованию мажорирования нормы отображения нормами гладких кусочных отображений, играющему ключевую роль в анализе для кусочно-гладкого случая. Приведены примеры, демонстрирующие, что при невыполнении этого условия рассматриваемые алгоритмы могут генерировать последовательности, сходящиеся к точкам, не являющимся стационарными ни для одного активного гладкого кусочного отображения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение с ограничением, кусочно-гладкое отображение, кусочный метод Ньютона, кусочный метод Гаусса–Ньютона, одномерный поиск, глобальная сходимость, сверхлинейная скорость сходимости

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

Для цитирования: Доровских Д.И., Измаилов А.Ф., Усков Е.И. Глобализация сходимости кусочных ньютоновских методов // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 149–163. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-149-163>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. I. Dorovdkikh, A. F. Izmailov, E. I. Uskov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-149-163>

Globalizing convergence of piecewise Newton methods

Dmitriy I. DOROVSKIKH¹, Alexey F. IZMAILOV¹, Evgeniy I. USKOV²¹ Lomonosov Moscow State University

1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider versions of the Newton method for piecewise smooth nonlinear equations, as well as of the Gauss–Newton method for the case when additional constraints are imposed, supplied with linesearch procedures for the residual of the equation, aiming at globalization of convergence. (Constrained) piecewise smooth nonlinear equations arise naturally as reformulations of systems of equations and inequalities involving complementarity conditions. In cases when the direction of the Newton method cannot be computed, or appears too long, the algorithm switches to a safeguarding step of the gradient descent method for the squared residual of the equation with smooth selection mapping active at the current iterate. For the Gauss–Newton method, safeguarding steps of the gradient projection method are employed. We obtain results characterizing properties of possible accumulation points of sequences generated by these methods, namely, stationarity of any such point for at least one smooth selection mapping active at it, and conditions assuring asymptotic superlinear convergence rate of such sequences. Special attention is paid to the majorization condition for the norm of the mapping by the norms of smooth selection mappings, playing a crucial role in the analysis for the piecewise smooth case. Examples are provided demonstrating that in cases of violation of this condition, the algorithms in question may produce sequences converging to points that are not stationary for any active smooth selection mapping.

Keywords: constrained nonlinear equation, piecewise smooth mapping, piecewise Newton method, piecewise Gauss–Newton method, linesearch, global convergence, superlinear convergence rate

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, <https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/>).

Mathematics Subject Classification: 47J05, 65K15.

For citation: Dorovskikh D.I., Izmailov A.F., Uskov E.I. Globalizing convergence of piecewise Newton methods. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 149–163. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-149-163> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается уравнение с ограничением

$$\Phi(u) = 0, \quad u \in P, \quad (0.1)$$

где $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ — заданное отображение, а $P \subset \mathbb{R}^p$ — заданное непустое замкнутое множество. Целью данной работы является глобализация сходимости ньютоновских методов для задачи (0.1) в пониженных требованиях гладкости. Основным объектом интереса является случай, когда отображение Φ в (0.1) является кусочно-гладким, т. е. оно непрерывно, и существует конечный набор гладких (в том или ином смысле; точные требования гладкости будут приводиться в каждом формулируемом ниже утверждении) *кусочных* отображений $\Phi^1, \dots, \Phi^s : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ таких, что

$$\Phi(u) \in \{\Phi^1(u), \dots, \Phi^s(u)\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^p.$$

Случай $s = 1$ соответствует гладкому отображению Φ . Согласно [1, теорема 2.1], любое кусочно-гладкое отображение с непрерывно дифференцируемыми кусочными отображениями является локально липшицевым.

Важнейшим источником кусочно-гладких уравнений являются комплементарные системы

$$a(u) = 0, \quad b(u) \geq 0, \quad c(u) \geq 0, \quad d(u) \geq 0, \quad \langle c(u), d(u) \rangle = 0, \quad (0.2)$$

с заданными непрерывно дифференцируемыми отображениями $a : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^l$, $b : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $c : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$, $d : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$. Система (0.2) может быть эквивалентным образом записана в виде (0.1) с кусочно-гладким $\Phi(u) = (a(u), \min\{c(u), d(u)\})$, где минимум берется покомпонентно, и с $P = \{u \in \mathbb{R}^p \mid b(u) \geq 0, c(u) \geq 0, d(u) \geq 0\}$, или просто с $P = \{u \in \mathbb{R}^p \mid b(u) \geq 0\}$. Ограничения, задающие P , можно заменить простыми, а именно, условиями неотрицательности на дополнительные переменные («слэки»; детали см., например, в [2]).

Для каждого $u \in \mathbb{R}^p$ определим множество

$$\mathcal{A}(u) = \{j \in \{1, \dots, s\} \mid \Phi(u) = \Phi^j(u)\} \quad (0.3)$$

индексов кусочных отображений *активных* в точке u . Пусть $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{q \times p}$ — любое отображение, удовлетворяющее

$$G(u) \in \{(\Phi^j)'(u) \mid j \in \mathcal{A}(u)\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^p. \quad (0.4)$$

Кусочные ньютоновские методы — это общее название для класса алгоритмов, каждая итерация которого в текущем приближении u^k состоит в осуществлении итерации соответствующего ньютоновского метода для гладкого уравнения с ограничением

$$\Phi^j(u) = 0, \quad u \in P, \quad (0.5)$$

для *некоторого* $j \in \mathcal{A}(u^k)$. Разумеется, индекс j на разных итерациях может быть разным. Иными словами, это ньютоновский метод, в котором (вообще говоря не существующая) производная $\Phi'(u^k)$ заменяется ее кусочным «суррогатом» $G(u^k)$.

Ключевую роль в анализе глобальной сходимости ниже будет играть следующее предположение, которое уже появлялось в [3, (4.8)], [4, (32)]:

$$\|\Phi(u)\| \leq \|\Phi^j(u)\| \quad \forall j \in \{1, \dots, s\} \quad \forall u \in P. \quad (0.6)$$

Для определенности здесь и далее будем считать, что используется евклидова норма.

В этой связи заметим, что ограничения $c(u) \geq 0$ и $d(u) \geq 0$ в определении P для переформулировки комплементарной системы (0.2) могут показаться излишними: если их опустить, то множество решений соответствующей задачи (0.1) не изменится. Однако, как легко видеть, именно наличие этих ограничений обеспечивает выполнение в данном случае условия (0.6); см. примеры 1.1 и 1.2 ниже, а также обсуждения этого вопроса в [2–4].

1. Кусочный метод Ньютона

В этом разделе будем рассматривать случай, когда число уравнений равно числу переменных, и ограничений нет: пусть $p = q$ и $P = \mathbb{R}^p$. Для текущего приближения $u^k \in \mathbb{R}^p$ итерация *кусочного метода Ньютона* генерирует следующее приближение как $u^k + v^k$, где v^k определяется как решение линейного уравнения

$$\Phi(u^k) + G(u^k)v = 0, \quad (1.1)$$

а G задается соотношениями (0.3) и (0.4). Иными словами, v^k является решением линейного уравнения

$$\Phi^j(u^k) + (\Phi^j)'(u^k)v = 0 \quad (1.2)$$

с некоторым $j \in \mathcal{A}(u^k)$, а такая итерация есть итерация базового метода Ньютона для соответствующего гладкого уравнения в (0.5).

Для функции $\varphi_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_j(u) = \frac{1}{2} \|\Phi^j(u)\|^2, \quad (1.3)$$

имеет место

$$\varphi_j'(u^k) = ((\Phi^j)'(u^k))^\top \Phi^j(u^k), \quad (1.4)$$

и поэтому

$$\langle \varphi_j'(u^k), v^k \rangle = \langle ((\Phi^j)'(u^k))^\top \Phi^j(u^k), v^k \rangle = \langle \Phi^j(u^k), (\Phi^j)'(u^k)v^k \rangle = -\|\Phi^j(u^k)\|^2, \quad (1.5)$$

где последнее равенство следует из (1.2). Отсюда получаем, что v^k является направлением убывания для функции φ_j в точке u^k , если только $\Phi^j(u^k) = \Phi(u^k) \neq 0$, т. е. если текущее приближение u^k не является решением уравнения в (0.1). Это соображение служит основанием для использования одномерного поиска по направлению v^k с целью глобализации сходимости кусочного метода Ньютона, реализованной в алгоритме 1 ниже.

Заметим, однако, что матрица $G(u^k)$ в (1.1) может оказываться вырожденной, и тогда это уравнение может не иметь решений. Более того, даже если v^k существует, его «качество» как направления убывания может быть недостаточным для обеспечения разумных свойств глобальной сходимости такого алгоритма. В таких случаях (а именно, в тех случаях, когда направление v^k оказывается «слишком длинным») алгоритм использует страховочный градиентный шаг для функции φ_j . Для гладких уравнений данная стратегия глобализации сходимости метода Ньютона обсуждалась в [5, разд. 5.1].

Алгоритм 1. Фиксируем параметры $C > 0$, $\tau > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varkappa \in (0, 1)$. Выбираем $u^0 \in \mathbb{R}^p$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $\Phi(u^k) = 0$, стоп.
2. Вычисляем v^k как решение линейного уравнения (1.1). Если v^k не удастся вычислить, или v^k нарушает неравенство

$$\|v^k\| \leq \max\{C, 1/\|\Phi(u^k)\|^\tau\}, \quad (1.6)$$

переходим к шагу 4.

3. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство

$$\|\Phi(u^k + \alpha v^k)\| \leq (1 - \varepsilon\alpha)\|\Phi(u^k)\|, \quad (1.7)$$

полагаем $\alpha_k = \alpha$ и переходим к шагу 6. В противном случае заменяем α на $\varkappa\alpha$ и проверяем снова неравенство (1.7) до тех пор, пока оно не выполнится, после чего полагаем $\alpha_k = \alpha$ и переходим к шагу 6.

4. Для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$ (см. (0.4)), полагаем $v^k = -\varphi_j'(u^k)$, где функция φ_j определена в (1.3) (см. (1.4)). Если $v^k = 0$, стоп.
5. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство Армихо

$$\varphi_j(u^k + \alpha v^k) \leq \varphi_j(u^k) - \varepsilon\alpha\|v^k\|^2, \quad (1.8)$$

полагаем $\alpha_k = \alpha$. В противном случае заменяем α на $\varkappa\alpha$ и проверяем снова неравенство (1.8) до тех пор, пока оно не выполнится, после чего полагаем $\alpha_k = \alpha$.

6. Полагаем $u^{k+1} = u^k + \alpha_k v^k$, увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 1.

Если заменить Φ в (1.7) на Φ^j для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$ (что при выполнении (0.6) дает неравенство, из которого следует (1.7)), то, согласно (1.3) и (1.4), получим

$$\begin{aligned} \varphi_j(u^k + \alpha v^k) &\leq (1 - \varepsilon\alpha)^2 \varphi_j(u^k) = \varphi_j(u^k) - \varepsilon\alpha\|\Phi^j(u^k)\|^2 + \frac{1}{2}\alpha^2\|\Phi^j(u^k)\|^2 \\ &= \varphi_j(u^k) - \varepsilon\alpha\langle \varphi_j'(u^k), v^k \rangle + \frac{1}{2}\alpha^2\|\Phi(u^k)\|^2, \end{aligned}$$

что автоматически выполняется в случае выполнения соответствующей формы неравенства Армихо

$$\varphi_j(u^k + \alpha v^k) \leq \varphi_j(u^k) + \varepsilon\alpha\langle \varphi_j'(u^k), v^k \rangle. \quad (1.9)$$

Иными словами, в п. 3 алгоритма 1 вместо (1.7) можно было бы, как и в п. 5, использовать неравенство Армихо (1.9) для φ_j , но это приводило бы, вообще говоря, к более ограничительному требованию на параметр длины шага α_k .

Теорема 1.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — кусочно-гладкое отображение с непрерывно дифференцируемыми кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^s$. Пусть для $P = \mathbb{R}^p$ выполняется предположение (0.6). Пусть $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ — любое отображение, удовлетворяющее (0.4).

Тогда алгоритм 1 либо останавливается в точке u^k , удовлетворяющей

$$((\Phi^j)'(u^k))^T \Phi(u^k) = 0 \quad (1.10)$$

по крайней мере для одного $j \in \mathcal{A}(u^k)$, либо генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\}$, любая предельная точка $\bar{u}$ которой удовлетворяет

$$((\Phi^j)'(\bar{u}))^T \Phi(\bar{u}) = 0 \quad (1.11)$$

по крайней мере для одного $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$.

Доказательство. Согласно (1.4), алгоритм может остановиться на некоторой итерации k , только если либо u^k удовлетворяет $\Phi(u^k) = 0$, либо выполняется (1.10) для некоторого $j \in \mathcal{A}(u^k)$, причем в первом случае, согласно (0.3), $\Phi^j(u^k) = \Phi(u^k) = 0$, и равенство (1.10) тоже выполняется (для любого $j \in \mathcal{A}(u^k)$).

Вместе с тем, если (1.10) не выполняется для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$, то при любом выборе v^k в алгоритме 1, из (1.5) следует, что $\langle \varphi_j'(u^k), v^k \rangle < 0$. Но тогда, с учетом обсуждения перед формулировкой теоремы, стандартным образом получаем (см., например, [6, лемма 3.1.2]), что подходящее значение $\alpha_k > 0$ в п. 3 или 5 алгоритма будет найдено после конечного числа дроблений (умножений текущего α на $\varkappa$), а значит, алгоритм успешно определит u^{k+1} .

Пусть теперь (1.10) не выполняется для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$, ни для какого k , а значит, алгоритм генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\}$. Для любой предельной точки $\bar{u}$ этой последовательности, в силу включения $\mathcal{A}(u) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$ для всех $u \in \mathbb{R}^p$ достаточно близких к $\bar{u}$, и в силу конечности множества $\mathcal{A}(\bar{u})$, а также с учетом (0.4), найдется сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$ такая, что $G(u^{k_i}) = (\Phi^j)'(u^{k_i})$ для всех i , для некоторого фиксированного $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$.

Если бесконечную подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$ выше можно выбрать так, что ньютоновское направление принимается на шаге 2 алгоритма для любого i , то дальнейшее рассуждение повторяет доказательство в [7, теорема 3.1] применительно к Φ^j (вместо Φ).

Остается рассмотреть случай, когда ньютоновское направление не принимается на шаге 2 алгоритма в точках подпоследовательности $\{u^{k_i}\}$ ни для какого i . Заметим, что в силу (0.6) и (1.7), (1.8), для всякого i выполняется

$$\begin{aligned} \varphi_j(u^{k_i}) &\geq \varphi_j(u^{k_{i+1}}) \geq \frac{1}{2} \|\Phi(u^{k_{i+1}})\|^2 \geq \frac{1}{2} \|\Phi(u^{k_{i+2}})\|^2 \geq \dots \\ &\geq \frac{1}{2} \|\Phi(u^{k_{i+1}})\|^2 = \varphi_j(u^{k_{i+1}}) \geq \varphi_j(u^{k_{i+1}+1}) \geq \dots, \end{aligned} \quad (1.12)$$

т. е. последовательность $\{\dots \varphi_j(u^{k_i}), \varphi_j(u^{k_{i+1}}), \dots\}$ монотонно невозрастает. При этом подпоследовательность $\{\varphi_j(u^{k_{i+1}})\}$ этой последовательности сгенерирована градиентными шагами с использованием правила Армихо. Тогда, согласно [8, теорема 1.16], любая предельная точка последовательности $\{u^{k_i}\}$, т.е. $\bar{u}$, удовлетворяет $\varphi_j'(\bar{u}) = 0$, что, согласно (0.3) и (1.4), и есть (1.11). $\square$

Теорема 1.2. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — кусочно-гладкое отображение с дифференцируемыми вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^s$, причем производные Φ^j , $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$, непрерывны в этой точке. Пусть $\bar{u}$ является решением уравнения в (0.1), причем матрицы Якоби $(\Phi^j)'(\bar{u})$ невырождены для всех $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$. Пусть $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ — любое отображение, удовлетворяющее (0.4).

Тогда, если алгоритм 1 генерирует приближение достаточно близкое к $\bar{u}$, то либо он останавливается с $u^k = \bar{u}$, либо генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\}$, которая сходится к $\bar{u}$ сверхлинейно. Если производные Φ^j , $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$, удовлетворяют условию Липшица относительно $\bar{u}$, то скорость сходимости квадратичная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При достаточной близости u^k к $\bar{u}$, с учетом включения $\mathcal{A}(u^k) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$ и (0.4), и невырожденности $(\Phi^j)'(\bar{u})$ для всех $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$ из стандартных результатов о локальной сверхлинейной сходимости метода Ньютона (например [5, теорема 2.2]) для уравнения в (0.5), и из конечности множества $\mathcal{A}(\bar{u})$, вытекает существование и единственность v^k , удовлетворяющего (1.1), причем

$$u^k + v^k - \bar{u} = o(\|u^k - \bar{u}\|) \quad (1.13)$$

при $u^k \rightarrow \bar{u}$. Очевидным последствием этого является то, что при достаточной близости u^k к $\bar{u}$ направление v^k принимается тестом (1.6) на шаге 2 алгоритма 1.

Далее, из [5, предложение 1.32] и $(\Phi^j)'(\bar{u})$ для всех $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$ вытекает оценка

$$u^k - \bar{u} = O(\|\Phi^j(u^k)\|)$$

при $u^k \rightarrow \bar{u}$, для всех таких j . Из этой оценки, из включения $\mathcal{A}(u^k) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$, и (0.3), с учетом локальной липшицевости Φ и (1.13) вытекает, что при любом выборе $j \in \mathcal{A}(u^k)$

$$\begin{aligned} \Phi(u^k + v^k) &= \Phi(u^k + v^k) - \Phi(\bar{u}) = O(\|u^k + v^k - \bar{u}\|) = o(\|u^k - \bar{u}\|) \\ &= o(\|\Phi^j(u^k)\|) = o(\|\Phi(u^k)\|) \end{aligned} \quad (1.14)$$

при $u^k \rightarrow \bar{u}$. Отсюда следует, что при достаточной близости u^k к $\bar{u}$ имеет место

$$\|\Phi(u^k + v^k)\| \leq (1 - \varepsilon)\|\Phi(u^k)\|,$$

т. е. $\alpha = 1$ принимается тестом (1.7) на шаге 3 алгоритма 1.

Таким образом, итерация алгоритма 1 в этом случае принимает вид итерации базового метода Ньютона для уравнения в (0.5) с соответствующим $j \in \mathcal{A}(u^k) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$, и утверждение о сверхлинейной сходимости $\{u^k\}$ к $\bar{u}$ вытекает из (1.13). Детали см. в [5, теорема 2.2], где также приводится доказательство квадратичной скорости сходимости в случае липшицевости производных относительно $\bar{u}$, которое легко распространяется на рассматриваемый здесь кусочно-гладкий случай, опять же с использованием конечности $\mathcal{A}(\bar{u})$. $\square$

Роль предположения (0.6) в этом анализе демонстрируется следующим простым примером: в случаях, когда $\mathcal{A}(u^k)$ не является одноточечным, при нарушении (0.6) направления кусочного метода Ньютона могут не быть направлениями убывания для функции $\|\Phi(\cdot)\|$ в точке u^k .

П р и м е р 1.1. Рассмотрим нелинейную комплементарную задачу

$$u \geq 0, \quad F(u) \geq 0, \quad \langle u, F(u) \rangle = 0, \quad (1.15)$$

с отображением $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Эта задача является частным случаем (0.2) при $l = m = 0$, $r = p$, $c(u) = u$, $d(u) = F(u)$. Эквивалентной переформулировкой (1.15) является (0.1) с кусочно-гладким $\Phi(u) = \min\{u, F(u)\}$, где можно взять $P = \mathbb{R}^p$.

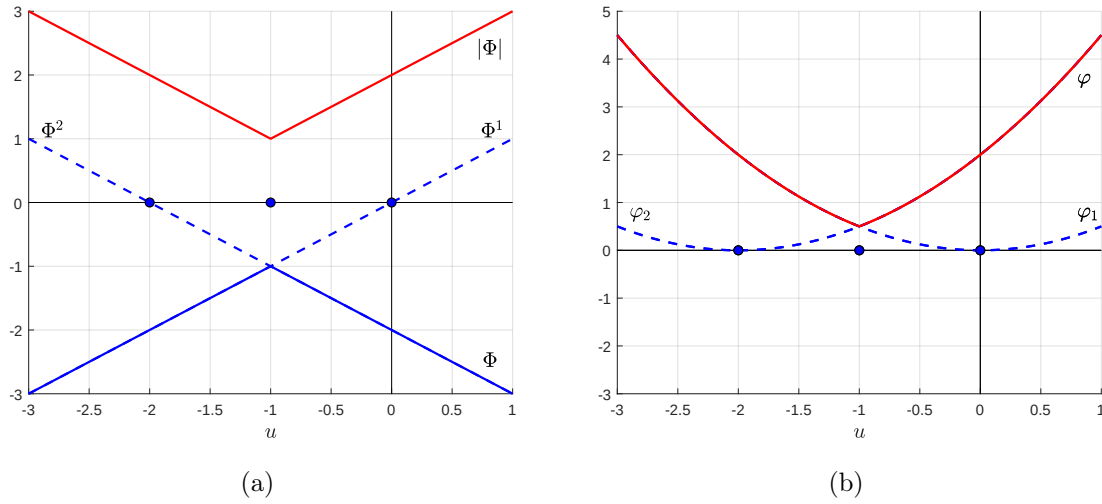


Рис. 1. Пример 1.1

Пусть, например, $p = 1$, $F(u) = -u - 2$. Тогда естественные соответствующие кусочные отображения имеют вид $\Phi^1(u) = u$ и $\Phi^2(u) = -u - 2$ (см. графики на рис. 1a). В точке $u^k = -1$, которая не является решением (у задачи (1.15) с указанным F вообще нет решений), выполняется $\mathcal{A}(u^k) = \{1, 2\}$. Если удовлетворяющее (0.4) отображение $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выбрано так, что $G(u^k) = (\Phi^1)'(u^k) = 1$, то уравнение (1.1) принимает вид $-1 + v = 0$, т. е. $v^k = 1$. Тогда для любого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} |\Phi(u^k + \alpha v^k)| &= |\min\{-1 + \alpha, 1 - \alpha - 2\}| = |\min\{-1 + \alpha, -1 - \alpha\}| \\ &= |-1 - \alpha| = 1 + \alpha > 1 = |\Phi(u^k)|. \end{aligned}$$

Аналогично, если $G(u^k) = (\Phi^2)'(u^k) = -1$, то уравнение (1.1) принимает вид $-1 - v = 0$, т. е. $v^k = -1$, и для любого $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} |\Phi(u^k + \alpha v^k)| &= |\min\{-1 - \alpha, 1 + \alpha - 2\}| = |\min\{-1 - \alpha, -1 + \alpha\}| \\ &= |-1 - \alpha| = 1 + \alpha > 1 = |\Phi(u^k)|. \end{aligned}$$

Таким образом, при любом допустимом выборе $G(u^k)$ направление v^k не является направлением убывания для $|\Phi(\cdot)|$ в точке u^k , и, в частности, (1.7) не выполняется ни для какого $\alpha > 0$.

Объяснение этого эффекта состоит в нарушении (0.6): если, например, $u > -1$, то

$$|\Phi^1(u)| = |u| < u + 2 = |-u - 2| = |\Phi(u)|,$$

а для $u < -1$ аналогичное неравенство выполняется с Φ^2 вместо Φ^1 .

Заметим, что здесь $u^k = F(u^k) = -1 < 0$: в точках $u \geq 0$, в которых $F(u) \geq 0$, неравенство из (0.6) для кусочно-гладкого Φ из указанной переформулировки задачи (1.15) выполняется автоматически. См. обсуждение роли множества P для выполнения (0.6) в конце введения.

Поскольку множество точек $u^k \in \mathbb{R}^p$, в которых $\mathcal{A}(u^k)$ содержит более одного индекса, обычно является тощим, то может возникнуть впечатление, что даже при нарушении

(0.6) указанный эффект не должен создавать практических проблем: алгоритм не может сделать шаг только из таких точек u^k , попадание в которые является нетипичным исходом. Однако, это не так: для задачи из примера 1.1 из любого начального приближения алгоритм 1 сходится к точке $\bar{u} = -1$ (обычно попадает точно в нее за один или два шага), выбраться из которой уже не может по причинам, указанным в этом примере. Несмотря на то, что в этой точке $\bar{u}$ (1.11) не выполняется ни для одного $j \in \mathcal{A}(\bar{u}) = \{1, 2\}$, такой исход можно рассматривать как благоприятный, поскольку -1 минимизирует невязку задачи (см. рис. 1a). Как показывает следующий пример, из широких областей начальных точек алгоритм 1 может генерировать бесконечные последовательности, *сходящиеся* к таким проблемным тощим множествам все более короткими шагами, и в итоге «застревающие» вблизи таких множеств, что в итоге приводит к неудачным запускам для практических реализаций алгоритма, причем предельные точки могут не быть точками минимума невязки.

Пример 1.2. Рассмотрим нелинейную комплементарную задачу (1.15) из [9, пример 6.1], с отображением $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(u) = ((u_1 - 1)^2, u_1 + u_2 + u_2^2 - 1)$, и ее эквивалентную переформулировку (0.1) с $\Phi(u) = \min\{u, F(u)\}$ и $P = \mathbb{R}^2$.

На рис. 2–4 синими точками показаны два решения $(0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ и $(1, 0)$ данной задачи, а синие линии являются линиями уровня функции $\|\Phi(\cdot)\|$. Красные линии соответствуют границам между областями активности разных гладких кусочных отображений, и, в частности, состоят из точек $u \in \mathbb{R}^2$, в которых $\mathcal{A}(u)$ содержит более одного индекса.

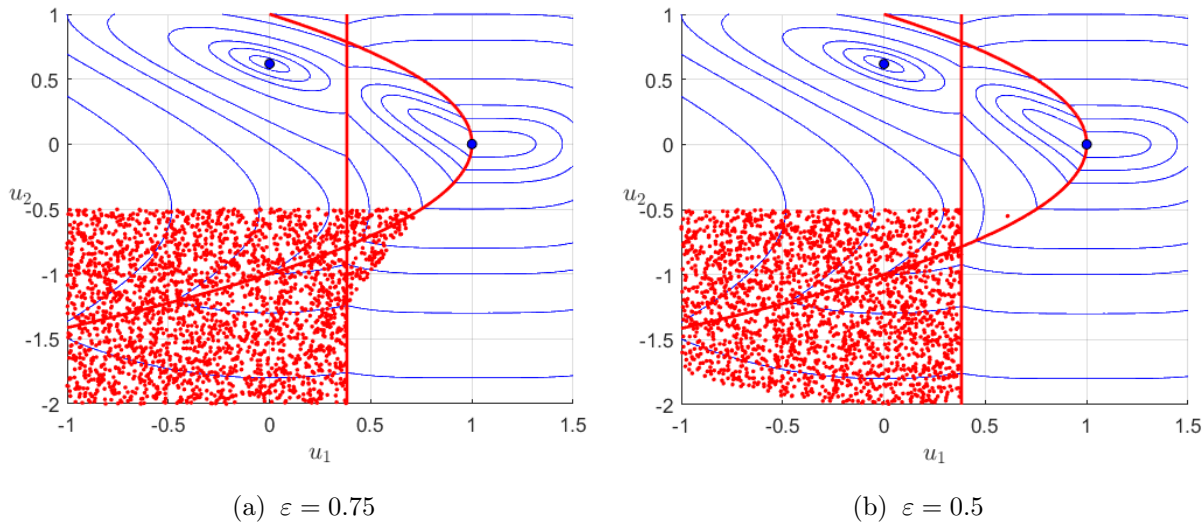


Рис. 2. Пример 1.2: начальные точки, порождающие неудачные запуски

Запуск алгоритма 1 объявлялся неудачным в случаях, когда на шаге 3 алгоритма реализовывалось неравенство $\alpha\|v^k\| \leq 10^{-12}$. Рис. 2, 3 демонстрируют начальные точки (которые выбирались случайным образом в области, изображенной на этих рисунках), запуски из которых были неудачными в указанном смысле, для разных значений параметра ε в тесте (1.7). Рис. 4 содержит некоторые примеры конкретных неудачных запусков.

Причиной такого поведения является существование точек $u \in P = \mathbb{R}^2$, в которых нарушаются какие-то из неравенств $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_1 + u_2 + u_2^2 - 1 \geq 0$, что приводит к невыполнению (0.6). Например, для естественных кусочных отображений $\Phi^1(u) = (u_1, u_2)$ и

$\Phi^2(u) = (u_1, u_1 + u_2 + u_2^2 - 1)$ в точках $u = (1 - t - t^2, t)$ при $t < 0$ имеем: $\Phi^1(u) = (1 - t - t^2, t)$, $\Phi^2(u) = (1 - t - t^2, 0)$, причем если $t^4 + 2t^3 + 2t^2 + t > 1$, то $\Phi(u) = \Phi^1(u)$, и при этом $\|\Phi^2(u)\| < \|\Phi(u)\|$.

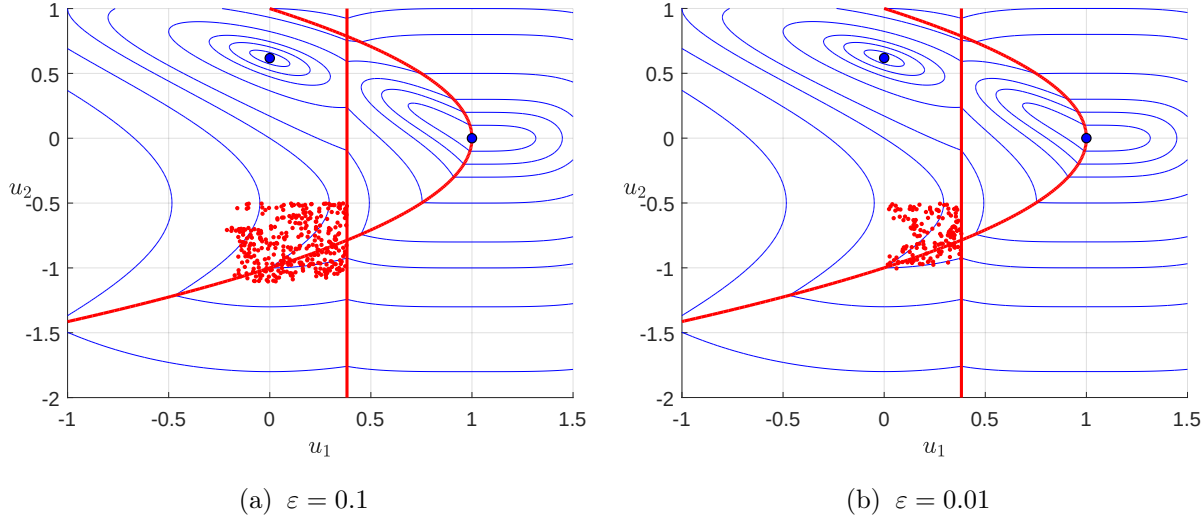


Рис. 3. Пример 1.2: начальные точки, порождающие неудачные запуски

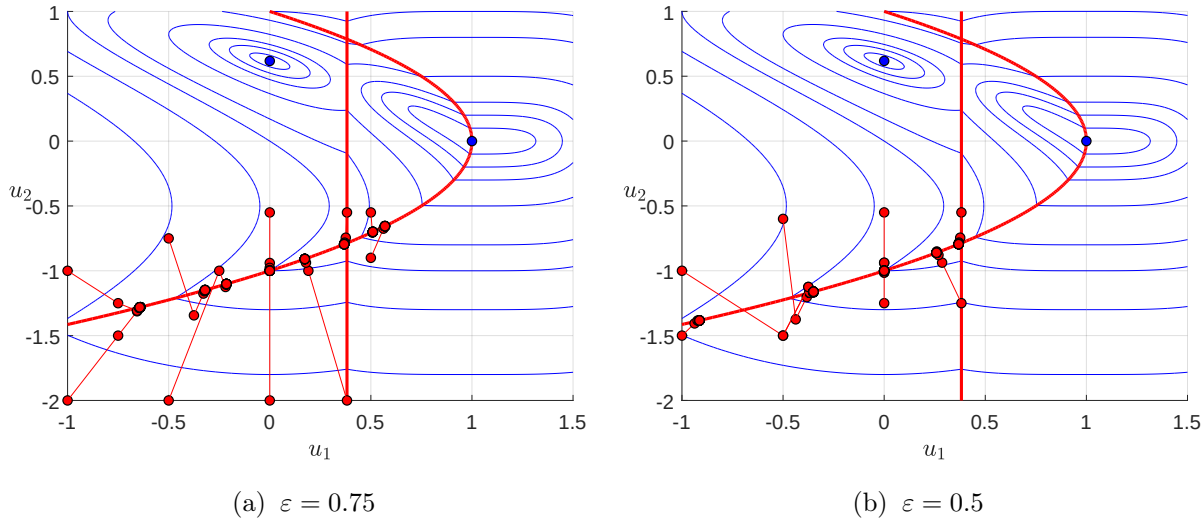


Рис. 4. Пример 1.2: некоторые неудачные запуски

Ситуация в примере 1.2 не сохраняется, если заменить Φ в (1.7) на Φ^j , или заменить (1.7) на (1.9), для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$. Заметим, однако, что при нарушении (0.6) эти модификации не гарантируют выполнение (1.7), и при этом на них не распространяется приведенное в теореме 1.1 обоснование глобальной сходимости. Для задачи из примера 1.1 последовательность алгоритма с заменой Φ в (1.7) на Φ^j «скачет» между точками 0 и -2 , где первая является нулем Φ^1 и, соответственно, минимизирует φ_1 , а вторая является нулем Φ^2 и φ_2 , но Φ^1 не является активным в точке 0, а Φ^2 — в точке -2 (см. рис. 1). Алгоритм с заменой (1.7) на (1.9) ведет себя аналогично, но также периодически «посещает» и точку -1 .

2. Кусочный метод Гаусса–Ньютона

Возвращаясь к общей постановке задачи (0.1), для текущего приближения $u^k \in P$ кусочный метод Гаусса–Ньютона (с ограничением) генерирует следующее приближение как $u^k + v^k$, где v^k минимизирует невязку (в квадрате) «линеаризованного» уравнения из (0.1) на $P - u^k$, а именно, v^k определяется как решение задачи оптимизации

$$\frac{1}{2} \|\Phi(u^k) + G(u^k)v\|^2 \rightarrow \min, \quad u^k + v \in P, \quad (2.1)$$

где G задается соотношениями (0.3) и (0.4). Целевая функция в (2.1) является выпуклой квадратичной функцией, и, согласно теореме Фрэнк–Вулфа [10], эта подзадача всегда имеет решение в случае полиэдрального P , но решение может быть не единственным. Учитывая определение G , подзадача (2.1) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2} \|\Phi^j(u^k) + (\Phi^j)'(u^k)v\|^2 \rightarrow \min, \quad u^k + v \in P,$$

с некоторым $j \in \mathcal{A}(u^k)$, т. е. итерация такого метода есть итерация метода Гаусса–Ньютона для соответствующего гладкого уравнения с ограничением (0.5).

Следующий алгоритм реализует гибридную глобализацию сходимости кусочного метода Гаусса–Ньютона, основанную на объединении этого алгоритма в качестве локальной фазы с методом проекции градиента в качестве глобальной фазы, в духе [11, алгоритм 2.12] для метода Левенберга–Марквардта. Пусть P выпукло, и через $\pi_P(u)$ обозначается проекция точки $u \in \mathbb{R}^p$ на P .

Алгоритм 2. Фиксируем параметры $\rho \in (0, 1)$, $\hat{\alpha} > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varkappa \in (0, 1)$. Выбираем $u^0 \in P$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $\Phi(u^k) = 0$, стоп.
2. Вычисляем v^k как некоторое решение задачи (2.1). Если v^k не удастся вычислить, переходим к шагу 4.
3. Если

$$\|\Phi(u^k + v^k)\| \leq \rho \|\Phi(u^k)\|, \quad (2.2)$$

полагаем $u^{k+1} = u^k + v^k$, увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 1.

4. Для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$ (см. (0.4)), полагаем $v^k = -\varphi'_j(u^k)$, где функция φ_j определена в (1.3) (см. (1.4)). Если $\pi_P(u^k - \hat{\alpha}v^k) = u^k$, стоп.
5. Полагаем $\alpha = \hat{\alpha}$. Если выполняется неравенство Армихо

$$\varphi_j(\pi_P(u^k - \alpha v^k)) \leq \varphi_j(u^k) + \varepsilon \langle \varphi'_j(u^k), \pi_P(u^k - \alpha v^k) - u^k \rangle, \quad (2.3)$$

полагаем $\alpha_k = \alpha$. В противном случае заменяем α на $\varkappa\alpha$ и проверяем снова неравенство (2.3) до тех пор, пока оно не выполнится, после чего полагаем $\alpha_k = \alpha$.

6. Полагаем $u^{k+1} = \pi_P(u^k - \alpha_k v^k)$, увеличиваем k на 1 и переходим к шагу 1.

Следующий результат обобщает [8, теорема 1.16] (оно же [12, предложение 1.2.6] с градиентных методов безусловной оптимизации на методы проекции градиента. Его обоснование получается по сути повторением доказательства в [12, предложение 2.3.3 (b)] для соответствующей подпоследовательности.

Предложение 2.1. Пусть $P \subset \mathbb{R}^p$ — замкнутое выпуклое множество, а $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая на P функция. Пусть последовательность $\{u^k\} \subset \mathbb{R}^p$ такова, что для некоторой ее бесконечной подпоследовательности $\{u^{k_i}\} \subset P$ последовательность $\{\dots \varphi(u^{k_i}), \varphi(u^{k_{i+1}}), \dots\}$ монотонно невозрастает. Пусть, кроме того, $\hat{\alpha} > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varkappa \in (0, 1)$ фиксированы, и для каждого i точка $u^{k_{i+1}}$ получена шагом метода проекции градиента с выбором параметра длины шага по правилу Армихо, а именно, $u^{k_{i+1}} = \pi_P(u^{k_i} - \alpha_{k_i} \varphi'(u^{k_i}))$, где α_{k_i} есть $\alpha = \varkappa^r \hat{\alpha}$ с минимальным $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого выполняется

$$\varphi(\pi_P(u^{k_i} - \alpha \varphi'(u^{k_i}))) \leq \varphi(u^{k_i}) + \varepsilon \langle \varphi'(u^{k_i}), \pi_P(u^{k_i} - \alpha \varphi'(u^{k_i})) - u^{k_i} \rangle.$$

Тогда любая предельная точка $\bar{u}$ подпоследовательности $\{u^{k_i}\}$ стационарна в задаче оптимизации

$$\varphi(u) \rightarrow \min, \quad u \in P,$$

т. е. $\bar{u} \in P$ и

$$\langle \varphi'(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in P,$$

что равносильно выполнению равенства

$$\pi_P(\bar{u} - t \varphi'(\bar{u})) = \bar{u}$$

для некоторого $t > 0$, а значит и для любого $t > 0$.

Теорема 2.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — кусочно-гладкое отображение с непрерывно дифференцируемыми кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^s$. Пусть для $P \subset \mathbb{R}^p$ — выпуклое замкнутое множество, причем выполняется предположение (0.6). Пусть $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{q \times p}$ — любое отображение, удовлетворяющее (0.4).

Тогда алгоритм 2 либо останавливается в точке $u^k \in P$, удовлетворяющей

$$\langle ((\Phi^j)'(u^k))^T \Phi(u^k), u - u^k \rangle \geq 0 \quad \forall u \in P \quad (2.4)$$

по крайней мере для одного $j \in \mathcal{A}(u^k)$, либо генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\}$, любая предельная точка $\bar{u}$ которой лежит в P и удовлетворяет

$$\langle ((\Phi^j)'(\bar{u}))^T \Phi(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in P \quad (2.5)$$

по крайней мере для одного $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$.

Доказательство. Согласно (1.4), алгоритм может остановиться на некоторой итерации k только если либо $u^k \in P$ удовлетворяет $\Phi(u^k) = 0$, либо выполняется (2.4) для некоторого $j \in \mathcal{A}(u^k)$, причем в первом случае, согласно (0.3), $\Phi^j(u^k) = \Phi(u^k) = 0$, и (2.4) тоже выполняется (как равенство, для любого $j \in \mathcal{A}(u^k)$).

Вместе с тем, если (2.4) не выполняется для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$, то либо на шаге 3 алгоритма 1 принимается шаг метода Гаусса–Ньютона (т. е. для соответствующего v^k выполняется (2.2)), либо, согласно [12, предложение 2.3.3 (а)], на шаге 5 алгоритма подходящее значение $\alpha_k > 0$ будет найдено после конечного числа дроблений, а значит, алгоритм успешно определит $u^{k+1} \in P$.

Пусть теперь (2.4) не выполняется для $j \in \mathcal{A}(u^k)$ такого, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$, ни для какого k , а значит, алгоритм генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\} \subset P$.

Из (0.3), (0.6) и из (2.2), (2.3) при этом вытекает монотонное невозрастание последовательности $\{\|\Phi(u^k)\|\}$. Но тогда, если (2.2) выполняется для бесконечного количества номеров k , то эта последовательность стремится к 0, и поэтому, с учетом замкнутости P , всякая предельная точка $\bar{u}$ последовательности $\{u^k\} \subset P$ является решением (0.1), а значит, в частности, удовлетворяет (2.5) (как равенству, для любого $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$).

Остается рассмотреть случай, когда (2.2) не выполняется ни для какого достаточно большого k , т. е. каждая итерация алгоритма 1, начиная с некоторой, является шагом метода проекции градиента для задачи оптимизации

$$\varphi_j(u) \rightarrow \min, \quad u \in P,$$

с некоторым $j \in \mathcal{A}(u^k)$ таким, что $G(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$. Для любой предельной точки $\bar{u}$ последовательности $\{u^k\}$, в силу включения $\mathcal{A}(u) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$ для всех $u \in \mathbb{R}^p$ достаточно близких к $\bar{u}$, и в силу конечности множества $\mathcal{A}(\bar{u})$, а также с учетом (0.4), найдется сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$ такая, что $G(u^{k_i}) = (\Phi^j)'(u^{k_i})$ для всех i , для некоторого фиксированного $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$.

В силу (0.6) и (2.3), поскольку последовательность $\{\|\Phi(u^k)\|\}$ монотонно невозрастает, снова выводим цепочку неравенств (1.12), откуда следует, что последовательность $\{\dots \varphi_j(u^{k_i}), \varphi_j(u^{k_{i+1}}), \dots\}$ монотонно невозрастает. Остается воспользоваться предложением 2.1, согласно которому $\bar{u} \in P$ и

$$\langle \varphi_j'(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in P,$$

что, согласно (0.3) и (1.4), и есть (2.5). $\square$

Следующая теорема устанавливает сверхлинейную скорость сходимости алгоритма 2 в случае $p = q$, $P = \mathbb{R}^p$.

Теорема 2.2. *Теорема 1.2 остается справедливой, если алгоритм 1 в ней заменить на алгоритм 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из рассуждений в доказательстве теоремы 1.2 вытекает, что в предположениях этой теоремы алгоритм 2 локально (для u^k достаточно близкого к $\bar{u}$) генерирует то же самое u^{k+1} , что и алгоритм 1: в силу (1.14), тест (2.2) на шаге 3 алгоритма 2 при этом выполняется, а итерационная подзадача (2.1) кусочного метода Гаусса–Ньютона эквивалентна итерационному уравнению (1.1) кусочного метода Ньютона. Это дает требуемое. $\square$

Интересный вопрос состоит в возможности получения результатов о сверхлинейной скорости сходимости для алгоритма 2 при $p \neq q$, или при $P \neq \mathbb{R}^p$. Если решения могут быть изолированы (что естественным образом реализуется при $p > q$), в предположении о естественных предположениях о выполнении локальной липшицевой оценки расстояния до множества решений с этим вопросом нет полной ясности даже в случае $P = \mathbb{R}^p$ и гладкого Φ . Точнее, известные результаты о локальной квадратичной сходимости метода Гаусса–Ньютона [13] (даже при выборе единственного решения подзадачи (2.1) минимальной нормы) основаны на ограничительных формах оценок расстояния, и на требованиях на поведение сингулярных чисел производной, необходимость которых в этом анализе даже при $p = q$ и $P = \mathbb{R}^p$ демонстрируется в [13, пример 4.5]. Результаты такого рода в случае $P \neq \mathbb{R}^p$ даже при $p = q$ авторам не известны.

References

- [1] W.W. Hager, “Lipschitz continuity for constrained processes”, *SIAM J. on Control and Optimization*, **17** (1979), 321–338.
- [2] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, Yan Zhibai, “The piecewise Levenberg–Marquardt method”, *Advances in System Sciences and Applications*, 2024 (to appear).
- [3] A. Fischer, M. Herrich, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “A globally convergent LP-Newton method”, *SIAM J. on Optimization*, **26** (2016), 2012–2033.
- [4] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. Jelitte, “Newton-type methods near critical solutions of piecewise smooth nonlinear equations”, *Computational Optimization and Applications*, **80** (2021), 587–615.
- [5] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, Cham, 2014.
- [6] А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов, *Численные методы оптимизации*, 2-е изд., перераб. и доп., Физматлит, М., 2008. [A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Numerical Optimization Methods*, 2nd ed., revised. and additional, Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russian)].
- [7] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Accelerating convergence of the globalized Newton method to critical solutions of nonlinear equations”, *Computational Optimization and Applications*, **78** (2021), 273–286.
- [8] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, Радио и связь, М., 1987; англ. пер.: D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Athena, Belmont, 1996.
- [9] A. N. Daryina, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “A class of active-set newton methods for mixed complementarity problems”, *SIAM J. on Optimization*, **15** (2004), 409–429.
- [10] M. Frank, P. Wolfe, “An algorithm for quadratic programming”, *Naval Research Logistics Quarterly*, **3** (1956), 95–110.
- [11] C. Kanzow, N. Yamashita, M. Fukushima, “Levenberg–Marquardt methods with strong local convergence properties for solving nonlinear equations with convex constraints”, *J. of Computational and Applied Mathematics*, **172** (2004), 375–397.
- [12] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd ed., Athena, Belmont, 1999.
- [13] R. Behling, *The Method and the Trajectory of Levenberg–Marquardt*, PhD Thesis, IMPA — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil https://impa.br/wp-content/uploads/2017/08/tese_dout_roger_behling.pdf, 2011.

Информация об авторах

Доровских Дмитрий Игоревич, студент, кафедра исследования операций, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: deamterr@gmail.com

Измаилов Алексей Ферилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Усков Евгений Иванович, научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

Information about the authors

Dmitriy I. Dorovskikh, Student, Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: deamterr@gmail.com

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Evgeniy I. Uskov, Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Измаилов Алексей Ферилович

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Corresponding author:

Alexey F. Izmailov

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 09.03.2024 г.

Поступила после рецензирования 31.05.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Received 09.03.2024

Reviewed 31.05.2024

Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ланеев Е.Б., Климишин А.В., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175>

УДК 519.63, 517.955.2



О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Александр Владиславович КЛИМИШИН

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматривается смешанная по краевым условиям задача для уравнения Лапласа в области, представляющая собой часть цилиндра прямоугольного сечения с однородными краевыми условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра. Цилиндрическая область с одной стороны ограничена поверхностью общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная, а другая граница цилиндрической области свободна. В этом случае задача обладает свойством неустойчивости задачи Коши для уравнения Лапласа по отношению к погрешности в данных Коши, т. е. некорректно поставлена, и ее приближенное решение, устойчивое к погрешности в данных Коши, требует применения методов регуляризации. Рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения, полученного в виде ряда Фурье по собственным функциям второй краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике, построено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое приближенное решение интегрального уравнения построено методом регуляризации Тихонова. В качестве приближенного решения интегрального уравнения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе приближенного решения интегрального уравнения строится приближенное решение краевой задачи в целом. Доказана теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, задача Коши для уравнения Лапласа, интегральное уравнение первого рода, метод регуляризации Тихонова

Для цитирования: Ланеев Е.Б., Климишин А.В. О приближенном решении некорректно поставленной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в цилиндрической области с однородными условиями второго рода на боковой поверхности цилиндра // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 164–175.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175>

SCIENTIFIC ARTICLE

© E. B. Laneev, A. V. Klimishin, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175>

On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Alexander V. KLIMISHIN

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Abstract. We consider a problem mixed in boundary conditions for the Laplace equation in a domain that is a part of a cylinder of a rectangular cross-section with homogeneous boundary conditions of the second kind on the side surface of the cylinder. The cylindrical region is limited on one side by surface of a general kind on which the Cauchy conditions are specified, i. e. a function and its normal derivative are given, and the other boundary of the cylindrical region is free. In this case, the problem has the property of instability of the Cauchy problem for the Laplace equation with respect to the error in the Cauchy data, i. e. is ill-posed, and its approximate solution, robust to errors in Cauchy data, requires the use of regularization methods. The problem under consideration is reduced to the Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation obtained in the form of a Fourier series on the eigenfunctions of the second boundary value problem for the Laplace equation in a rectangle, an explicit representation of the exact solution of the problem was constructed. A stable approximate solution to the integral equation was constructed using the Tikhonov regularization method. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution to the integral equation. Based on the approximate solution of the integral equation, an approximate solution of the boundary value problem as a whole is constructed. A theorem is proved for the convergence of an approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is consistent with the error in the data.

Keywords: ill-posed problem, Cauchy problem for the Laplace equation, integral equation of the first kind, Tikhonov regularization method

Mathematics Subject Classification: 35R25, 65N20.

For citation: Laneev E.B., Klimishin A.V. On an approximate solution to an ill-posed mixed boundary value problem for the Laplace equation in a cylindrical domain with homogeneous conditions of the second kind on the lateral surface of the cylinder. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 164–175. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-164-175> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задача Коши для уравнения Лапласа — классический пример некорректно поставленной задачи. К этой задаче приводят разнообразные математические модели, используемые в приложениях, и интерес к построению ее устойчивых решений не ослабевает даже для задач Коши для областей с простыми границами [1, 2].

В работе [3] М. М. Лаврентьевым для задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерной области рассматривается обобщение «гасящей» функции Карлемана [4], которое, с одной стороны, дает интегральное представление (приближенного) решения задачи Коши для уравнения Лапласа, аналогично функции Грина для корректно поставленных краевых задач, с другой — выполняет регуляризующие функции.

В работе [5] предложен метод построения решения смешанной краевой задачи в цилиндрической области прямоугольного сечения с данными Коши на поверхности общего вида. При этом на боковых гранях цилиндра заданы однородные условия первого рода. Решение поставленной задачи, в том числе точное, построено в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи в прямоугольнике. С использованием формул Грина задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, устойчивое приближенное решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [6]. Как следствие, из этого приближенного решения в явном виде выделена функция Карлемана–Лаврентьева и доказано, что она является таковой и по определению [3].

Предложенный в [5] метод в настоящей работе с соответствующими модификациями применен к некорректно поставленной смешанной задаче с условиями второго рода.

1. Постановка задачи

В цилиндре прямоугольного сечения

$$D^\infty = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\}$$

рассмотрим область $D(F, H)$, т. е. часть цилиндра, ограниченную с одной стороны плоскостью $z = H$, с другой — поверхностью

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y) < H\}, \quad F \in C^2.$$

В области $D(F, H)$ рассмотрим следующую смешанную краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \quad M \in D(F, H), \\ u|_S &= f, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_S = g, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=0, l_x} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=0, l_y} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u \in C^2(D(F, H)) \cap C^1(\overline{D(F, H)})$ задачи (1.1).

Как задача Коши для уравнения Лапласа задача (1.1) имеет единственное решение [7].

Так как граница $z = H$ свободна, смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g . Получим явное выражение для точного решения задачи.

2. Явное представление точного решения задачи

В бесконечном цилиндре D^∞ рассмотрим функцию источника задачи Неймана для уравнения Лапласа, то есть — решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta w(P) &= -\delta_{MP}, \quad P \in D^\infty, \\ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{x=0, l_x} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &\rightarrow \pm \frac{1}{2l_x l_y} \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (2.1)$$

для которой выполнено необходимое условие разрешимости

$$\int_{D^\infty} \delta_{MP} dV_P = 2l_x l_y \frac{1}{2l_x l_y} = 1.$$

Функция источника $\varphi(M, P)$ задачи (2.1) может быть представлена в виде

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M, P), \quad (2.2)$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P , $W(M, P)$ — гармоническая функция по P .

Функция источника может быть получена методом отражений в виде суммы функций точечных источников с периодом $2l_x$ по x и $2l_y$ по y

$$\varphi(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{1,nm}} + \frac{1}{r_{2,nm}} + \frac{1}{r_{3,nm}} + \frac{1}{r_{4,nm}} \right),$$

где

$$\begin{aligned} r_{1,nm} &= [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2}, \\ r_{2,nm} &= [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M - y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2}, \\ r_{3,nm} &= [(x_M - x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2}, \\ r_{4,nm} &= [(x_M + x_P + 2l_x n)^2 + (y_M + y_P + 2l_y m)^2 + (z_M - z_P)^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

так что $r_{1,00} = r_{MP}$.

Функция источника может быть также получена в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(M, P) &= -\frac{1}{2l_x l_y} |z_M - z_P| + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0, n^2+m^2 \neq 0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}} \\ &\quad \times \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} \cos \frac{\pi n x_P}{l_x} \cos \frac{\pi m y_P}{l_y}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$k_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}, \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0.5, & n = 0. \end{cases}$$

Наряду с функцией источника (2.3) будем рассматривать функцию вида

$$\tilde{\varphi}(M, P) = \frac{1}{2l_x l_y} (z_M - z_P + C) + \varphi(M, P), \quad C = \text{const},$$

которая при фиксированной точке $M \in D^\infty$ по переменной P есть решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta w(P) &= -\delta_{MP}, \quad P \in D^\infty, \\ \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{x=0, l_x} &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &\rightarrow \frac{1}{l_x l_y} \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad \frac{\partial w}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Заметим, что при условии $z_M < \min_{(x,y)} F(x, y) < z_P$ функция $\tilde{\varphi}$ представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(M, P) &= \frac{1}{2l_x l_y} C + \frac{2}{l_x l_y} \sum_{n,m=0, n^2+m^2 \neq 0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m \frac{e^{-k_{nm}|z_M - z_P|}}{k_{nm}} \\ &\quad \times \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} \cos \frac{\pi n x_P}{l_x} \cos \frac{\pi m y_P}{l_y}. \end{aligned}$$

Пусть $M \in D(F, H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функциям $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$, $\frac{z_M - z_P + C}{4\pi}$ и $W(M, P)$ в (2.2), получим

$$u(M) = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{1}{4\pi r_{MP}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{4\pi r_{MP}} \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H) \quad (2.4)$$

$$0 = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \frac{z_M - z_P + C}{4\pi} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{z_M - z_P + C}{4\pi} \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H) \quad (2.5)$$

и

$$0 = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) W(M, P) - u(P) \frac{\partial W}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H). \quad (2.6)$$

Сумма (2.4), (2.5) и (2.6) с учетом (2.2) дает

$$u(M) = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \tilde{\varphi}(M, P) - u(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(F, H). \quad (2.7)$$

Учитывая однородные граничные условия для $\tilde{\varphi}$ и u на боковых гранях цилиндрической области $D(F, H)$, получим

$$\begin{aligned} u(M) &= \int_S \left[g(P) \tilde{\varphi}(M, P) - f(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P \\ &\quad + \int_{\Pi(H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \tilde{\varphi}(M, P) - u(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \end{aligned}$$

где

$$\Pi(H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = H\}. \quad (2.8)$$

Вводя обозначения

$$\Phi(M) = - \int_S \left[g(P) \tilde{\varphi}(M, P) - f(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty, H), \quad (2.9)$$

$$v(M) = \int_{\Pi(H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \tilde{\varphi}(M, P) - u(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty, H), \quad (2.10)$$

решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) - \Phi(M), \quad M \in D(F, H), \quad (2.11)$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g и может рассматриваться как известная функция.

Гармоническую в области

$$D(-\infty, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < H\}$$

функцию v вида (2.10), в области $D(F, H) \subset D(-\infty, H)$ можно представить согласно (2.11), при условии существования решения задачи (1.1), как $v = u + \Phi$ и доопределить ее на границе $\Pi(H)$ как непрерывную функцию

$$v|_{z=H} = u|_{z=H} + \Phi|_{z=H} = v_H. \quad (2.12)$$

Кроме того, так как функция $\tilde{\varphi}(M, P)$ и ее производные ограничены при $z_M \rightarrow -\infty$, функция $v(M)$ также ограничена $z_M \rightarrow -\infty$. Таким образом, функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta v(M) &= 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ v|_{z=H} &= v_H, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \\ v &\text{ ограничена при } z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Очевидно, задача (2.13) может быть решена методом Фурье, и функция v может быть выражена через v_H

$$v(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\tilde{v}_H)_{nm} e^{k_{nm}(z_M-H)} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (2.14)$$

$$(\tilde{v}_H)_{nm} = \frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} v_H(x, y) \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \quad (2.15)$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье (2.14), причем ряд (2.14) сходится равномерно области $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\left| (\tilde{v}_H)_{nm} e^{k_{nm}(z_M-H)} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} \right| \leq |(\tilde{v}_H)_{nm}| e^{-\varepsilon k_{nm}}.$$

Таким образом, из представления (2.11) решения задачи (1.1) и (2.14) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H (2.12) через заданные функции f и g .

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < F(x, y)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и к функции $\tilde{\varphi}(M, P)$ вида (2.2), аналогично (2.4), (2.5) и (2.7) получим

$$0 = \int_{\partial D(F, H)} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(P) \tilde{\varphi}(M, P) - u(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P, \quad M \in D(-\infty, F).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для $\tilde{\varphi}$ и u и обозначений (2.9) и (2.10) получим

$$v(M) = \Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \quad (2.16)$$

Пусть $a < \min_{(x,y)} F(x, y)$ и $M \in \Pi(a)$, где $\Pi(a)$ — область вида (2.8) при $z = a$, тогда из (2.16) и (2.14) получим систему уравнений относительно коэффициентов Фурье функции v_H

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} (\tilde{v}_H)_{nm} e^{k_{nm}(a-H)} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} = -\Phi(M). \quad (2.17)$$

Используя (2.15), уравнение (2.17) можно также записать как интегральное уравнение первого рода

$$\int_{\Pi(H)} G(M, P) v_H(P) dx_P dy_P = \Phi(M), \quad M \in \Pi(a), \quad (2.18)$$

где ядро интегрального оператора имеет вид

$$G(M, P) = \frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=0}^{\infty} \epsilon_n \epsilon_m e^{-k_{nm}(H-a)} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y} \cos \frac{\pi n x_P}{l_x} \cos \frac{\pi m y_P}{l_y}. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.18) будем также записывать в виде

$$G v_H = \Phi(a). \quad (2.20)$$

Из уравнения (2.18) с учетом разложения (2.19) при $z_M = a$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$(\tilde{v}_H)_{nm} e^{-k_{nm}(H-a)} = \tilde{\Phi}_{nm}(a), \quad (2.21)$$

где $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M \in \Pi(a)}$:

$$\tilde{\Phi}_{nm}(a) = \frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} \Phi(x, y, a) \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} dx dy.$$

Отметим, что формула (2.21) характеризует убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(a)$ с ростом n и m , если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, — функции v_H вида (2.12). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v}_H)_{nm}$ из (2.21) в ряд (2.14), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M-a)} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (2.22)$$

Ряд (2.22), как и ряд (2.14), сходится равномерно в $D(-\infty, H - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g .

Формула (2.11), где функции v и Φ вида (2.22) и (2.9) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.1).

3. Устойчивое решение задачи при неточных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, т. е. вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ , такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leq \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \rightarrow 0$. Функция Φ вида (2.9) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = - \int_S \left[g^\delta(P) \tilde{\varphi}(M, P) - f^\delta(P) \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right] d\sigma_P. \quad (3.1)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.9) при $M \in \Pi(a)$, $a < \min_{(x,y)} F(x, y)$, получим оценку правой части интегрального уравнения (2.18)

$$\begin{aligned} |\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| &\leq \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_S \tilde{\varphi}^2(M, P) d\sigma_P \right)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \\ &\quad + \max_{M \in \Pi(a)} \left(\int_S \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq C\delta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В качестве приближенного решения уравнения (2.18) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [6, с. 68] с условным стабилизатором [8, с. 35] нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \|Gw - \Phi^\delta(a)\|_{L_2(\Pi(a))}^2 + \alpha \|w\|_{L_2(\Pi(H))}^2, \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

где G — интегральный оператор в (2.20). Экстремаль может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.3), которое в операторной форме имеет вид

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta(a),$$

а в коэффициентах Фурье функции w

$$e^{-2k_{nm}(H-a)} \tilde{w}_{nm} + \alpha \tilde{w}_{nm} = e^{-k_{nm}(H-a)} \tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a),$$

где

$$\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) = \frac{4\epsilon_n\epsilon_m}{l_x l_y} \int_{\Pi(a)} \Phi^\delta(x, y, a) \cos \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} dx dy \quad (3.4)$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M \in \Pi(a)}$. Решая уравнение относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w_α^δ вместо v_H в (2.14), найдем приближение v_α^δ к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v_\alpha^\delta(M) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) e^{k_{nm}(z_M-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (3.5)$$

Отметим, что функция (3.5) отличается от точной функции (2.22) множителем $(1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствии с (2.11) приближенное решение задачи (1.1) получим в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) - \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (3.6)$$

где v_α^δ и Φ^δ — функции вида (3.5) и (3.1).

Для приближенного решения (3.6) имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть решение задачи (1.1) существует. Тогда для любого $\alpha = \alpha(\delta)$ такого, что

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \text{ и } \delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

функция $u_{\alpha(\delta)}$ вида (3.6) равномерно сходится при $\delta \rightarrow 0$ к точному решению в области $D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 0,5(H - \max_{(x,y)} F(x, y))$.

Доказательство. В области $D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$ в соответствии с (3.6) и (2.11) оценим разность

$$|u_\alpha^\delta - u| \leq |v_\alpha^\delta - v| + |\Phi^\delta - \Phi|. \quad (3.7)$$

Для разности $v_\alpha^\delta - v$ получаем

$$|v_\alpha^\delta - v| \leq |v_\alpha^\delta - v_\alpha| + |v_\alpha - v|, \quad (3.8)$$

где v_α — функция вида (3.5) при точных f и g ,

$$v_\alpha(M) = - \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}(a) e^{k_{nm}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}.$$

Оценим разность $v_\alpha^\delta - v_\alpha$ в (3.8) при $z_M < H - \varepsilon$, используя (3.2),

$$\begin{aligned} |v_\alpha^\delta(M) - v_\alpha(M)| &\leq \left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{e^{k_{nm}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \right| \cdot 4 \max_{P \in \Pi(a)} |\Phi^\delta(P) - \Phi(P)| \\ &\leq C_1 \delta \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{e^{k_{nm}(H-\varepsilon-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \leq C_1 \delta \max_x \left[\frac{e^x}{1 + \alpha e^{2x}} \right] \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-k_{nm}\varepsilon} \leq C_2 \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Для разности $v_\alpha - v$ в (3.8) при $z_M < H - \varepsilon$ имеем оценку

$$|v_\alpha - v| \leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)} e^{k_{nm}(H-\varepsilon-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} |\tilde{\Phi}_{nm}(a)|.$$

Используя (2.21) и применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |v_\alpha - v| &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)} e^{-k_{nm}\varepsilon}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} |(\tilde{v}_H)_{nm}| \\ &\leq \left[\sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha e^{2k_{nm}(H-a)}}{1 + \alpha e^{2k_{nm}(H-a)}} \right)^2 e^{-2k_{nm}\varepsilon} \right]^{1/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \|v_H\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Так как ряд, зависящий от параметра α , мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum e^{-2\epsilon k_{nm}}$, то возможен предельный переход по α и, таким образом,

$$|v_\alpha - v| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Из (3.8), (3.9) и (3.10) и условий теоремы следует, что

$$|v_{\alpha(\delta)}^\delta - v| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.11)$$

Вторая разность в правой части (3.7) оценивается аналогично (3.2), т. е., применяя к этой разности неравенство Коши–Буняковского при $M \in D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned} |\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| &\leq \max_{M \in D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)} \left(\int_S \tilde{\varphi}^2(M, P) d\sigma_P \right)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \\ &+ \max_{M \in D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)} \left(\int_S \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_P}(M, P) \right]^2 d\sigma_P \right)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq C_3 \delta. \end{aligned}$$

Отсюда, а также из (3.7) и (3.11) следует утверждение теоремы. $\square$

4. Заключение

Доказанная в предыдущем разделе теорема является обоснованием для использования формул (3.6), (3.1), (3.5), (3.4) для построения приближенного решения задачи (1.1). Аналогично [5] из приближенного решения может быть выделена функция Карлемана. Другие методы построения функции Карлемана предложены в [9, 10].

Формулы (3.6), (3.1), (3.5), (3.4) могут быть использованы для построения эффективных вычислительных алгоритмов численного решения задачи. При этом при вычислении коэффициентов Фурье по формулам (3.4) может быть использован метод [11], причем при построении приближенного решения используются дискретные ряды Фурье, суммировать которые можно, используя модифицированный метод Хемминга [12].

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии (см. [13]) в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине.

Аналогичный метод может быть применен к задаче продолжения потенциального поля в геофизике (см. [14]).

References

- [1] M. Joachimiak, “Choice of the regularization parameter for the Cauchy problem for the Laplace equation”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **30**:10 (2020), 4475–4492.
- [2] С. Б. Сорокин, “Экономичный прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа”, *Сиб. журн. вычисл. матем.*, **22**:1 (2019), 99–117; англ. пер.: S. B. Sorokin, “An Efficient Direct Method for Numerically Solving the Cauchy Problem for Laplace’s Equation”, *Num. Anal. Appl.*, **12**:1 (2019), 87–103.
- [3] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962. [M. M. Lavrent’ev, *On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Academy of Sciences Publ., Novosibirsk, 1962 (In Russian)].

- [4] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, “Обобщенная формула Carleman’a и приложение ее к аналитическому продолжению функций”, *Математический сборник*, **40:2** (1933), 144–149. [G. M. Goluzin, V. I. Krylov, “Generalized Carleman formula and its application to the analytic continuation of functions”, *Mat. Sb.*, **40:2** (1933), 144–149 (In Russian)].
- [5] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54:4** (2018), 483–491; англ. пер.: Е. В. Laneev, “Construction of a Carleman function based on the Tikhonov regularization method in an ill-posed problem for the Laplace equation”, *Differential Equations*, **54:4** (2018), 475–478.
- [6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-Posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].
- [7] Е. М. Ландис, “Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (случай многих независимых переменных)”, *Успехи математических наук*, **18:1**(109) (1963), 3–62; англ. пер.: Е. М. Landis, “Some problems of the qualitative theory of second order elliptic equations (case of several independent variables)”, *Russian Math. Surveys*, **18:1** (1963), 1–62.
- [8] В. Б. Гласко, *Обратные задачи математической физики*, Изд-во МГУ, М., 1979. [V. B. Glasko, *Inverse Problems of Mathematical Physics*, MSU Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].
- [9] Ш. Ярмухамедов, “Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа”, *Сибирский математический журнал*, **45:3** (2004), 702–719; англ. пер.: Sh. Yarmukhamedov, “Carleman function and the Cauchy problem for the Laplace equation”, *Siberian Mathematical Journal*, **45:3** (2004), 580–595.
- [10] E. N. Sattorov, Z. E. Ermamatova, “Carleman’s formula of a solutions of the Poisson equation in bounded domain”, *Ural Mathematical Journal*, **7:2** (2021), 110–120.
- [11] О. Баај, “On the application of the Fourier method to solve the problem of correction of thermographic images”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, **30:3** (2022), 205–216.
- [12] Е. В. Ланеев, О. Баај, “On a modification of the Hamming method for summing discrete Fourier series and its application to solve the problem of correction of thermographic images”, *Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, **30:4** (2022), 342–356.
- [13] Е. В. Ланеев, N. Yu. Chernikova, О. Баај, “Application of the minimum principle of a Tikhonov smoothing functional in the problem of processing thermographic data”, *Advances in Systems Science and Applications*, 2021, № 1, 139–149.
- [14] Е. В. Ланеев, Е. Ю. Пономаренко, “On a linear inverse potential problem with approximate data on the potential field on an approximately given surface”, *Eurasian Mathematical Journal*, **14:1** (2023), 57–70.

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4255-9393>

Климишин Александр Владиславович, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Institute named after S. M. Nikolsky, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4255-9393>

Alexander V. Klimishin, Post-Graduate Student, Mathematical Institute named after S. M. Nikolsky, Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation. E-mail: sa-sha-02@yandex.ru

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Ланеев Евгений Борисович

E-mail: elaneev@yandex.ru

Corresponding author:

Evgeniy B. Laneev

E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.02.2024 г.

Поступила после рецензирования 13.05.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Received 05.02.2024

Reviewed 13.05.2024

Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Лобода Н.А., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187>

УДК 517.925.5



Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения

Надежда Алексеевна ЛОБОДА

ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

385000, Российская Федерация, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208

Аннотация. В настоящей работе изучаются различные разновидности показателей блуждаемости решений линейной однородной и нелинейной двумерных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. При этом все непродолжаемые решения рассматриваемой нелинейной системы определены на всей положительной полуоси времени.

В 2010 году И. Н. Сергеевым были определены скорость блуждания и показатели блуждаемости (верхние и нижние, сильные и слабые) ненулевого решения x линейной системы. Скорость блуждания решения — это средняя по времени скорость, с которой движется центральная проекция решения на единичную сферу. А сильные и слабые показатели блуждаемости — это скорость блуждания решения, но минимизированная по всем системам координат, причем в случае слабого показателя блуждаемости минимизация производится в каждый момент времени. Следовательно, сильные и слабые показатели блуждаемости учитывают только ту информацию о решении, которая не гасится линейными преобразованиями: так, они учитывают обороты вектора x вокруг нуля, но не учитывают его локальное вращение вокруг какого-либо другого вектора.

В данной работе проведено исследование по первому приближению сильных и слабых показателей блуждаемости. Установлено отсутствие непосредственной взаимосвязи между мощностями спектров (т. е. множеств различных значений на ненулевых решениях) сильных и слабых показателей блуждаемости нелинейной системы и системы ее первого приближения. А именно, построена двумерная нелинейная система, спектры сильных и слабых показателей блуждаемости сужения которой на любую открытую окрестность нуля фазовой плоскости состоят из всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а спектры линейной системы ее первого приближения — только из одного элемента.

Ключевые слова: линейная однородная дифференциальная система, нелинейная дифференциальная система, система первого приближения, спектр показателя системы, колеблемость решения, показатель колеблемости, показатель блуждаемости, скорость блуждания решения

Для цитирования: Лобода Н.А. Сравнение спектров показателей блуждаемости нелинейной двумерной системы и системы первого приближения // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 176–187. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187>

SCIENTIFIC ARTICLE

© N. A. Loboda, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187>

Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system

Nadezhda A. LOBODA

Adyghe State University

208, Pervomayskaya St., Maykop 385000, Republic of Adyghea, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study various varieties of wandering exponents for solutions of linear homogeneous and nonlinear two-dimensional differential systems with coefficients continuous on the positive semiaxis. Moreover, all non-extendable solutions of the nonlinear system under consideration are defined on the entire positive time semi-axis.

In 2010, I. N. Sergeev determined the wandering speed and wandering exponents (upper and lower, strong and weak) of a nonzero solution x of a linear system. The wandering speed of the solution is the time-average velocity at which the central projection of the solution moves onto the unit sphere. Strong and weak exponents of wandering are the wandering speed of the solution, but minimized over all coordinate systems, and in the case of a weak exponent of wandering, minimization is performed at each moment of time. Therefore, strong and weak exponents of wandering take into account only the information about the solution that is not is suppressed by linear transformations: for example, they take into account the revolutions of the vector x around zero, but do not take into account its local rotation around some other vector.

In this work, a first approximation study of strong and weak wandering exponents was carried out. It is established that there is no dependence between the spectra (i. e., a set of different values on non-zero solutions) of strong and weak wandering exponents of a nonlinear system and the system of its first approximation. Namely, a two-dimensional nonlinear system is constructed such that the spectra of wandering exponents of its restriction to any open neighborhood of zero on the phase plane consist of all rational numbers in the interval $[0, 1]$, and the spectra of the linear system of its first approximation consist of only one element.

Keywords: linear homogeneous differential system, nonlinear differential system, first approximation system, spectrum of a system exponent, variability of solution, exponent of oscillation, exponent of wandering, the wandering speed of a solution

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34A34, 34D05.

For citation: Loboda N.A. Comparing the spectra of wandering exponents of a nonlinear two-dimensional system and a first approximation system. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 176–187.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-176-187> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–6] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. В 2015 году в статье [3] (см. также [4, 5]) все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них: полные и векторные частоты переименованы, соответственно, в сильные и слабые показатели колеблемости, показатели блуждаемости и блуждания — в сильные и слабые показатели блуждаемости, а показатели вращаемости и вращения — в сильные и слабые показатели ориентированной вращаемости. Спектры показателей колеблемости, блуждаемости и ориентированной вращаемости автономных дифференциальных систем были полностью описаны в работах [2, 7–9], а спектры этих показателей треугольных систем изучены в [11, 17], существование дифференциальных систем с континуальными спектрами доказано в [10, 13, 16, 18], возможность управления суслинскими спектрами реализована в [12], существенные значения спектров были рассмотрены в [14, 15, 19]. Подвижность асимптотических характеристик линейной дифференциальной системы (и уравнения) при равномерно малых и бесконечно малых возмущениях изучалась в [1, 2, 15, 20, 21].

Все перечисленные показатели, как и *линейные* показатели, оказались применимыми лишь к решениям, гарантированно определенным на всей положительной полуоси времени (см. [22]). Это затрудняет их вычисление для нелинейных систем, где такой гарантии дать нельзя. В работе [22] предпринята первая попытка распространить определения этих показателей на случай несуществования решений системы на всей полуоси, а именно, определены и изучены *сферические*, *радиальные* и *шаровые* функционалы и показатели. В работе [23] проведены исследования этих показателей по первому приближению, а в [24] установлено существование нелинейной системы со счетными спектрами линейных показателей колеблемости, в то время как спектры соответствующей линейной системы ее первого приближения состоят ровно из одного неотрицательного числа. В настоящей работе последнее свойство перенесено и на линейные показатели блуждаемости.

1. Показатели блуждаемости решений дифференциальных систем

Для заданной открытой окрестности G точки 0 в евклидовой (векторной) фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим дифференциальную, вообще говоря *нелинейную*, систему вида

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in G, \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad (1.1)$$

обеспечивающую наличие нулевого решения, а также существование и единственность решений задач Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x_0 \in G. \quad (1.2)$$

С системой (1.1) свяжем линейную систему ее *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f'_x(t, 0)x, \quad A(t) = f'_x(t, 0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (1.3)$$

при условии

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t, x) - f'_x(t, 0)x| = o(|x|), \quad x \rightarrow 0.$$

Через $\mathcal{S}_*(f)$ будем обозначать множество всех *непродолжаемых* ненулевых решений системы (1.1), а через $x_f(\cdot, x_0)$ — решение задачи (1.2). Зададим множества

$$G_* \equiv \{x_0 \in G \mid x_0 \neq 0\}, \quad G_\delta \equiv \{x_0 \in G \mid |x_0| = \delta\}, \quad G_{\delta, \gamma} \equiv \{x_0 \in G \mid \delta < |x_0| < \gamma\},$$

где $\gamma > \delta \geq 0$. В дальнейшем звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль.

Сначала дадим основные определения.

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [1]). Для функции $u \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2)$ и числа $t > 0$ введем *вариацию следа*

$$P(u, t) \equiv \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(u, \tau) \right| d\tau, \quad e(u, \tau) \equiv \frac{u(\tau)}{|u(\tau)|},$$

функции u за время от 0 до t , причем ситуацию, когда функция u имеет на отрезке $[0; t]$ хотя бы один нуль, считаем *вырожденной* и полагаем по определению $P(u, t) = +\infty$.

З а м е ч а н и е 1.1. Геометрический смысл вариации следа функции u — это полная *длина пути* на единичной окружности конца единичного вектора $e(u, \tau)$ при $\tau \in [0; t]$. Отсутствие у функции u нулей гарантирует, что вариация ее следа принимает только *конечные значения* (как интеграл $P(u, t)$ от непрерывной функции на отрезке).

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [1, 2]). *Линейные нижние слабый и сильный показатели блуждаемости* решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$, заданного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, определим формулами

$$\check{\rho}_\circ(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \frac{1}{t} P(Lx, t), \quad \check{\rho}_\bullet(x) \equiv \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx, t),$$

где $\text{Aut } \mathbb{R}^2$ — множество всех невырожденных линейных операторов $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. *Линейные верхние слабый* $\hat{\rho}_\circ(x)$ *и сильный* $\hat{\rho}_\bullet(x)$ показатели блуждаемости зададим теми же формулами, но с заменой в них нижних пределов при $t \rightarrow +\infty$ верхними.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [3, 4]). Для функции $x \in \mathcal{S}_*(f)$ условимся о следующем:

1) если значение верхнего (с крышечкой) показателя блуждаемости совпадает со значением нижнего (с галочкой) показателя, то будем называть это значение *точным*, записывая его без галочки и без крышечки;

2) если значение слабого (с пустым кружочком) показателя блуждаемости совпадает со значением сильного (с полным кружочком) показателя, то будем называть это значение *абсолютным*, записывая его без кружочков вообще.

О п р е д е л е н и е 1.4. Для каждого показателя блуждаемости $\varkappa = \hat{\rho}_\bullet, \check{\rho}_\bullet, \hat{\rho}_\circ, \check{\rho}_\circ$ и подмножества $M \subset \mathbb{R}^2$ определим множество $\varkappa(f, M) \equiv \{\varkappa(f, x_0) \mid x_0 \in M\}$.

Для произвольной вектор-функции $z \in C^1(E, \mathbb{R}_*^2)$ (E — либо отрезок $[0, T]$, либо полуось $\mathbb{R}_+$) однозначно определим функцию $\phi_z : E \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$\phi_z(0) \in [0, 2\pi), \quad |z(t)|(\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^\top = z(t), \quad t \in E, \quad \phi_z \in C^1(E).$$

З а м е ч а н и е 1.2. Вариацию следа функции z за время от 0 до t можно вычислять по формуле

$$P(z, t) = \int_0^t \left| \dot{\phi}_z(\tau) \right| d\tau,$$

так как

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} e(z, \tau) \right| = \left| \frac{d}{d\tau} (\cos \phi_z(t), \sin \phi_z(t))^\top \right| = |(-\sin \phi_z(t), \cos \phi_z(t))^\top \dot{\phi}_z(\tau)| = |\dot{\phi}_z(\tau)|.$$

2. Основной результат

Теорема 2.1. При $G = \mathbb{R}^2$ существуют две системы, первая из которых — линейная вида (1.3) и служащая системой первого приближения для другой, удовлетворяет соотношениям $\rho(f, G_*) = \{1\}$, а вторая система вида (1.1) при любом $\epsilon > 0$ — соотношениям

$$\rho(f, G_{0,\epsilon}) = \rho(f, G_*) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \quad (2.1)$$

Сначала сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. При $G = \mathbb{R}^2$ для некоторой линейной системы вида (1.3) со спектром показателей блуждаемости $\rho(f, G_*) = \{1\}$ при любых $q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ и $0 < \alpha < \beta \leq 1$ найдется возмущенная система

$$\dot{x} = A(t)x + B(x, t) \equiv f(t, x), \quad |B(x, t)| \leq |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

обладающая свойствами

$$\rho(f, G_\alpha) = \rho(f, G_\beta) = \{1\}, \quad \rho(f, G_{\alpha,\beta}) = \{q\}.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим линейную периодическую систему (1.3), записываемую в фиксированном базисе в $\mathbb{R}^2 \equiv G$ в виде

$$\dot{x} = \zeta(t)Ix \equiv f_t(t, x), \quad \zeta(t) \equiv \frac{\pi}{2} \cos t, \quad I \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Она задает вращение фазовой плоскости вокруг точки $x = 0$ с мгновенной скоростью $\zeta(t)$ в каждый момент $t \in \mathbb{R}_+$, в результате чего ориентированный угол поворота любого начального вектора $x_0 \in G_*$ за время t равен

$$\varphi(t, x_f(\cdot, x_0)) = \frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x_f(t_k, x_0) = (-1)^{k-1} x_f(t_1, x_0), \quad t_k \equiv \pi k - \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, решение $x_f = x_f(t, x_0)$ совершает поворот на угол π , и это свойство не меняется под действием любого преобразования $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$, поэтому

$$\frac{P(Lx_f, t_{k+1}) - P(Lx_f, t_k)}{t_{k+1} - t_k} = \frac{P(x_f, t_{k+1}) - P(x_f, t_k)}{t_{k+1} - t_k} = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \rho_\circ(x_f) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_f, t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_f, t_{k+1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^k (P(Lx_f, t_{i+1}) - P(Lx_f, t_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(x_f, t_{i+1}) - P(x_f, t_i)) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (t_{i+1} - t_i) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{t_{k+1} - t_1}{t_{k+1}} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{\bullet}(x_{f_i}) &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} P(Lx_{f_i}, t_{k+1}) \\
&= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(Lx_{f_i}, t_{i+1}) - P(Lx_{f_i}, t_i)) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_{k+1}} \sum_{i=1}^k (P(x_{f_i}, t_{i+1}) - P(x_{f_i}, t_i)) = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, все показатели блуждаемости совпадают между собой, а их спектр состоит из одного элемента $\rho(f_i, G_*) = \{1\}$.

2. На отрезке $r \in [0, 1]$ для выбранных $0 < \alpha < \beta \leq 1$ зададим функции

$$\psi_{\pm}(r) \equiv 1 \pm \frac{r^2(r - \alpha)^2(r - \beta)^2}{(r^2 + 2)^2} \in (0, 2).$$

Для нелинейной периодической системы вида (1.1) с правой частью

$$g(t, x) = \psi_{-}(|x|) \cdot f_i(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

при любом $t \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$\varphi(t, x_g(\cdot, x_0)) = \psi_{-}(|x_0|) \frac{\pi}{2} \sin t \in \left[-\psi_{-}(|x_0|) \frac{\pi}{2}, \psi_{-}(|x_0|) \frac{\pi}{2} \right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad \alpha < |x_0| < \beta.$$

В силу последнего включения для любого x_0 , удовлетворяющего условию $\alpha < |x_0| < \beta$, решение $x_g = x_g(t, x_0)$ не покидает сектор, центральный угол которого меньше чем π , причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta = \pi - \psi_{-}(|x_0|)\pi$.

Убедимся в том, что можно указать такой поворот $L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$, что вектор Lx_g лежит на фазовой плоскости $\mathbb{R}^2$ строго в одной полуплоскости относительно заданной прямой $l \subset \mathbb{R}^2$. Более того, если оператор L задавать как композицию указанного поворота и неограниченного удлинения вектора $e \perp l$, то при любом $t > 1$ можно делать сколь угодно малым величину $t^{-1}P(Lx_g, t)$. Положим

$$L_n = S_n R, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\bar{x}_g(t), \bar{y}_g(t))^{\top} = R x_g, \quad (\tilde{x}_g(t), \tilde{y}_g(t))^{\top} = L_n x_g,$$

где

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_{x_g}(0) - \delta/2.$$

Покажем, что искомым оператором является композиция L_n при достаточно больших n поворота R по часовой стрелке на угол ψ и растяжения S_n вдоль вертикальной оси. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned}
\phi_{\bar{x}_g}(0) &= \phi_{x_g}(0) - \psi = \delta/2, \\
\phi_{\bar{x}_g}(\pi/2) &= \phi_{x_g}(\pi/2) - \phi_{x_g}(0) + \delta/2 = \psi_{-}(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = \pi/2, \\
\phi_{\bar{x}_g}(3\pi/2) &= \phi_{x_g}(3\pi/2) - \phi_{x_g}(0) + \delta/2 = -\psi_{-}(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = \delta - \pi/2, \\
\phi_{\tilde{x}_g}(0) &\in (0, \pi/2), \quad \phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2) \in (0, \pi/2), \quad \phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2) \in (-\pi/2, 0).
\end{aligned}$$

Из нестрогого убывания функции ϕ_{x_g} на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ и геометрических свойств операторов R и S_n следуют соотношения

$$\dot{\phi}_{\tilde{x}_g}(t) \leq 0, \quad t \in [\pi/2, 3\pi/2],$$

$$\phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2 + t) = \phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2 - t), \quad \phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2 + t) = \phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2 - t), \quad t \in [0, \pi/2],$$

на основании которых получим

$$\begin{aligned} P(L_n x_g, 2\pi) &= \int_0^{2\pi} \left| \dot{\phi}_{\tilde{x}_g}(\tau) \right| d\tau = 2|\phi_{\tilde{x}_g}(3\pi/2) - \phi_{\tilde{x}_g}(\pi/2)| \\ &\leq 8 \operatorname{arctg} \frac{\tilde{x}_g(0)}{\tilde{y}_g(0)} = 8 \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}_g(0)}{n\bar{y}_g(0)} = 8 \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\delta/2)/n) \equiv a_n. \end{aligned}$$

Для любого достаточно малого $\gamma > 0$ в силу условия $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что $P(L_{n_0} x_g, 2\pi) \leq \gamma$, а значит, выполнится цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\bullet(x_g) &= \inf_{L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_g, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_0} x_g, t) \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} P(L_{n_0} x_g, 2\pi p) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{2\pi p} P(L_{n_0} x_g, 2\pi) \leq \frac{\gamma}{2\pi}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая произвольность $\gamma > 0$ и соотношения

$$\check{\rho}_\circ(x) \leq \check{\rho}_\bullet(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x), \quad \check{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\circ(x) \leq \hat{\rho}_\bullet(x), \quad x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_*^2), \quad (2.3)$$

вытекающие из определений показателей блуждаемости, для значения $q = 0$ выберем нелинейную систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_I(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \vee |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_-(|x|) \cdot f_I(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

3. Для нелинейной периодической системы вида (1.1) с правой частью

$$h(t, x) = \psi_+(|x|) \cdot f_I(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

будем иметь

$$\{\varphi(t, x_h(\cdot, x_0)) \mid t \in \mathbb{R}_+\} \supset \left(-\psi_+(|x_0|)\frac{\pi}{2}, \psi_+(|x_0|)\frac{\pi}{2} \right) \supset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \alpha < |x_0| < \beta. \quad (2.4)$$

В силу последнего включения каждое решение $x_h(t, x_0)$, $\alpha < |x_0| < \beta$, не покидает сектор, центральный угол которого больше чем π , причем зазор между этим сектором и целым полукругом равен $\delta = \psi_+(|x_0|)\pi - \pi$.

а) Для произвольного фиксированного решения $x_h = x_h(t, x_0)$ положим

$$L_n = S_n R, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\bar{x}_h(t), \bar{y}_h(t))^\top = R x_h, \quad (\tilde{x}_h(t), \tilde{y}_h(t))^\top = L_n x_h,$$

где

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \phi_{x_h}(0) - \delta/2.$$

Сначала для выбранного решения x_h и достаточно малого $\gamma > 0$ найдем такой номер n_0 , при котором справедливы оценки

$$P(L_{n_0} x_h, 2\pi) \leq 2\pi + \gamma. \quad (2.5)$$

Для этого вычислим

$$\begin{aligned}
\phi_{\bar{x}_h}(0) &= \phi_{x_h}(0) - \psi = \delta/2, \\
\phi_{\bar{x}_h}(\pi/2) &= \phi_{x_h}(\pi/2) - \phi_{x_h}(0) + \delta/2 = \psi_+(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = \pi/2 + \delta, \\
\phi_{\bar{x}_h}(3\pi/2) &= \phi_{x_h}(3\pi/2) - \phi_{x_h}(0) + \delta/2 = -\psi_+(|x_0|)\pi/2 + \delta/2 = -\pi/2, \\
\phi_{\bar{x}_h}(0) &\in (0, \pi/2), \quad \phi_{\bar{x}_h}(\pi/2) \in (\pi/2, \pi), \quad \phi_{\bar{x}_h}(3\pi/2) \in (-\pi/2, 0), \\
\phi_{\bar{x}_h}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{x}_h(\pi/2)}{\tilde{y}_h(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}_h(\pi/2)}{n\bar{y}_h(\pi/2)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{|Rx_h(t, x_0)| \cos \phi_{\bar{x}_h}(\pi/2)}{n|Rx_h(t, x_0)| \cos \phi_{\bar{x}_h}(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\phi_{\bar{x}_h}(\pi/2))/n) \\
&\leq \pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(\pi/2 + \pi/4)/n) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(-1/n) = \pi/2 + \operatorname{arctg}(1/n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{\bar{x}_h}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{x}_h(3\pi/2)}{\tilde{y}_h(3\pi/2)} \\
&= -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}_h(3\pi/2)}{n\bar{y}_h(3\pi/2)} = -\pi/2 - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(-\pi/2)/n) = -\pi/2,
\end{aligned}$$

$$P(L_n x_h, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \left| \dot{\phi}_{\bar{x}_h}(\tau) \right| d\tau = 2(\phi_{\bar{x}_h}(\pi/2) - \phi_{\bar{x}_h}(3\pi/2)) = 2(\pi + \operatorname{arctg}(1/n)) \equiv b_n.$$

Очевидное свойство $b_n \rightarrow 2\pi$ при $n \rightarrow +\infty$ последовательности (b_n) завершает доказательство оценки (2.5).

б) Теперь покажем, что для решения x_h и любого оператора $L \in \operatorname{Aut} \mathbb{R}^2$ выполнена оценка $P(Lx_h, 2\pi) \geq 2\pi$. Действительно, принимая во внимание непрерывность функции ϕ_{x_h} и учитывая условие (2.4), установим существованию такой точки $\tau_0 \in (\pi, 3\pi/2)$, что $\phi_{x_h}(\tau_0) = \pi + \phi_{x_h}(\pi/2)$. Поэтому при некотором $r > 0$ имеем равенство $x_h(\tau_0) = -rx_h(\pi/2)$, из которого для функции $z_h = Lx_h$ вытекает

$$z_h(\tau_0) = Lx_h(\tau_0) = L(-rx_h(\pi/2)) = -rL(x_h(\pi/2)) = -rz_h(\pi/2),$$

а значит, при некотором $m \in \mathbb{Z}$ верно и следующее равенство

$$\phi_{z_h}(\tau_0) = \phi_{z_h}(\pi/2) + \pi + 2m\pi.$$

Используя последнее равенство и условие

$$\phi_{z_h}(\pi/2 + t) = \phi_{z_h}(\pi/2 - t), \quad \phi_{z_h}(3\pi/2 + t) = \phi_{z_h}(3\pi/2 - t), \quad t \in [0, \pi/2],$$

выведем требуемое утверждение

$$\begin{aligned}
P(Lx_h, 2\pi) &= \int_0^{\pi/2} \left| \dot{\phi}_{z_h}(\tau) \right| d\tau + \int_{\pi/2}^{\tau_0} \left| \dot{\phi}_{z_h}(\tau) \right| d\tau + \int_{\tau_0}^{2\pi} \left| \dot{\phi}_{z_h}(\tau) \right| d\tau \\
&\geq 2 \left| \int_{\pi/2}^{\tau_0} \dot{\phi}_{z_h}(\tau) d\tau \right| = 2|\pi + 2m\pi| \geq 2\pi.
\end{aligned}$$

в) Для верхнего сильного показателя блуждаемости решения x_h с учетом оценки (2.5) будем иметь

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_\bullet(x_h) &= \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_h, t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_0}x_h, t) \\ &= \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} P(L_{n_0}x_h, 2\pi p) = \overline{\lim}_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{2\pi p} P(L_{n_0}x_h, 2\pi) \leq \frac{2\pi + \gamma}{2\pi}.\end{aligned}$$

Для нижнего слабого показателя блуждаемости решения x_h на основании результата п. б) получим оценку снизу

$$\begin{aligned}\check{\rho}_\circ(x_h) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_h, t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi p} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_h, 2\pi p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{2\pi p} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_h, 2\pi) \geq \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{2\pi p}{2\pi p} = 1.\end{aligned}$$

Далее, вспоминая свойства (2.3) показателей блуждаемости, придем к равенствам

$$\check{\rho}_\circ(x_h) = \check{\rho}_\bullet(x_h) = \hat{\rho}_\circ(x_h) = \hat{\rho}_\bullet(x_h) = 1.$$

Следовательно, для значения $q = 1$ выберем систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_t(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \vee |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|) \cdot f_t(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

4. Наконец, для произвольного значения $q = l_1/(l_1 + l_2)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ возьмем систему

$$f(t, x) \equiv \begin{cases} f_t(t, x), & 0 < |x| \leq \alpha \vee |x| \geq \beta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ \psi_+(|x|) \cdot f_t(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [0, 2\pi l_1], \\ \psi_-(|x|) \cdot f_t(t, x), & \alpha < |x| < \beta, \quad t \in [2\pi l_1, 2\pi(l_1 + l_2)], \end{cases}$$

где в кольце $\alpha < |x| < \beta$ функция $f(t, x)$ периодически (с периодом $T = 2\pi(l_1 + l_2)$) продолжается на всю полуось $\mathbb{R}_+$.

Действительно, для любого решения $x_f = x_f(t, x_0)$, $\alpha < |x_0| < \beta$, найдется (см. пп. 2 и 3.а) такое преобразование $L_{n_0} \in \text{Aut } \mathbb{R}^2$, что показатели блуждаемости обладают свойством

$$\begin{aligned}\rho_\circ(x_f) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} P(Lx_f, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(L_{n_0}x_f, t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{Tp} P(L_{n_0}x_f, Tp) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p}{Tp} P(L_{n_0}x_f, T) = \frac{1}{2\pi(l_1 + l_2)} \sum_{i=1}^{l_1+l_2} P(L_{n_0}x_f, 2\pi i) = \frac{2\pi l_1}{2\pi(l_1 + l_2)} = \frac{l_1}{l_1 + l_2}, \\ \rho_\circ(x_f) &\leq \rho_\bullet(x_f) = \inf_{L \in \text{Aut } \mathbb{R}^2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} P(Lx_f, t) = \frac{l_1}{l_1 + l_2}.\end{aligned}$$

Последние два соотношения полностью завершают доказательство леммы. □

Теперь перейдем к доказательству основного результата.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Занумеровав все рациональные числа из отрезка $[0, 1]$ натуральными числами, определим последовательность $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$. По этой последовательности образуем следующую

$$s_1; s_1, s_2; s_1, s_2, s_3; \dots; s_1, s_2, s_3, \dots, s_k; \dots,$$

которую обозначим через $(q_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

Единичный круг $|x| \leq 1$ разобьем на счетное число колец вида

$$\alpha_{k+1} < |x| < \alpha_k, \quad \alpha_k = 2^{1-k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Далее, выбираем линейную систему (2.2) и, на основании леммы 2.1, достраиваем ее в каждом кольце (2.6) так, чтобы при любом $k \in \mathbb{N}$ выполнялось $\rho(f, G_{\alpha_{k+1}, \alpha_k}) = \{q_k\}$.

В кольце $1 \leq |x| < +\infty$ и на каждой окружности $|x| = \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$ линейную систему (2.2) оставляем без изменения, поэтому

$$\rho(f, G_{\alpha_k}) = \rho(f, G_{1, +\infty}) = \{1\}.$$

Таким образом, из условия $\alpha_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ для любого $\epsilon > 0$ следует справедливость (2.1). $\square$

Автор выражает глубокую благодарность доценту А. Х. Сташу за постановку задачи и внимание к работе.

References

- [1] И. Н. Сергеев, “Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2006, № 25, 249–294; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **135**:1 (2006), 2764–2793.
- [2] И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы”, *Известия РАН. Серия математическая*, **76**:1 (2012), 149–172; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems”, *Izvestiya: Mathematics*, **76**:1 (2012), 139–162.
- [3] И. Н. Сергеев, “Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2015, № 2(46), 171–183. [I. N. Sergeev, “The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of Udsu*, 2015, № 2(46), 171–183 (In Russian)].
- [4] И. Н. Сергеев, “Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Математические заметки*, **99**:5 (2016), 732–751; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems”, *Mathematical Notes*, **99**:5 (2016), 729–746.
- [5] И. Н. Сергеев, “Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2016, № 31, 177–219; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **234**:4 (2018), 497–522.
- [6] И. Н. Сергеев, “Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем”, *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*, **132** (2017), 117–121; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **230**:5 (2018), 770–774.

- [7] Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, “Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2014, № 30, 75–93; англ. пер.: D. S. Burlakov, S. V. Tsoi, “Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:2 (2015), 155–167.
- [8] А. Х. Сташ, “Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 558–568. [A. Kh. Stash, “Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions”, *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 558–568 (In Russian)].
- [9] А. Х. Сташ, “Показатели ориентированной вращаемости решений автономных дифференциальных систем”, *Владикав. матем. журнал*, **24**:3 (2022), 120–132. [A. Kh. Stash, “Oriented rotatability exponents of solution of autonomous differential systems”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **24**:3 (2022), 120–132 (In Russian)].
- [10] А. Х. Сташ, “Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:1 (2015), 143–144; англ. пер.: A. Kh. Stash, “Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies”, *Differential Equation*, **51**:1 (2015), 146–148.
- [11] А. Х. Сташ, “Спектры показателей колеблемости и вращаемости решений однородных дифференциальных систем”, *Владикав. матем. журнал*, **25**:2 (2023), 136–143. [A. Kh. Stash, “Spectra of oscillation and rotatability exponents of solutions of homogeneous differential systems”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **25**:2 (2023), 136–143 (In Russian)].
- [12] А. Х. Сташ, “Об управлении спектрами верхних сильных показателей колеблемости знаков, нулей и корней дифференциальных уравнений третьего порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:5 (2023), 588–595; англ. пер.: A. Kh. Stash, “On the control of the spectra of upper strong oscillation exponents of signs, zeros, and roots of third-order differential equations”, *Differential Equation*, **59**:5 (2023), 597–605.
- [13] А. Х. Сташ, “О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем”, *Вест. рос. ун-тов. Матем.*, **28**:141 (2023), 60–67. [A. Kh. Stash, “On the continuum spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous differential systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:141 (2023), 60–67 (In Russian)].
- [14] А. Х. Сташ, “О существенных значениях показателей колеблемости решений линейной однородной двумерной дифференциальной системы”, *Труды института математики и механики УрО РАН*, **29**:2 (2023), 157–171; англ. пер.: A. Kh. Stash, “On essential values of oscillation exponents for solutions of a linear homogeneous two-dimensional differential system”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **321**:1 (2023), 216–229.
- [15] И. Н. Сергеев, “О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2019, № 1, 21–26; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:1 (2019), 20–24.
- [16] Д. С. Бурлаков, “Спектр скоростей блуждания неортогонального произведения двух поворотов”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2015, № 2, 49–53; англ. пер.: D. S. Burlakov, “Spectrum of wandering rates of a nonorthogonal product of two rotations”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **70**:2 (2015), 88–91.
- [17] В. В. Миценко, “О блуждаемости решений двумерных дагональных и треугольных дифференциальных систем”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2014, № 30, 221–241; англ. пер.: V. V. Mitsenko, “Wandering of solutions of two-dimensional diagonal and triangular systems of differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:3 (2015), 251–263.
- [18] Е. М. Шишлянников, “Пример дифференциальной системы с континуальным спектром показателя блуждаемости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2017, № 1, 64–68; англ. пер.: E. M. Shishlyannikov, “The example of a differential system with continual spectrum of wandering exponent”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72**:1 (2017), 37–40.
- [19] Е. М. Шишлянников, “Двумерные дифференциальные системы с произвольными конечными спектрами показателя блуждаемости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2017, № 5, 14–21; англ. пер.: E. M. Shishlyannikov, “Two dimensional differential systems with arbitrary finite spectra of wandering exponent”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **72**:5 (2017), 192–198.

- [20] А. Х. Сташ, “Свойства характеристик колеблемости Сергеева периодического уравнения второго порядка”, *Владикав. матем. журнал*, **23**:2 (2021), 78–86. [A. Kh. Stash, “Properties of sergeev oscilation characteristics of periodic second-order equation”, *Vladikavkaz Mathematical Journal*, **23**:2 (2021), 78–86 (In Russian)].
- [21] А. Х. Сташ, “О разрывности крайних показателей колеблемости на множестве линейных однородных дифференциальных систем”, *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2023, № 1, 78–109. [A. Kh. Stash, “On the discontinuity of extreme exponents of oscillation on a set of linear homogeneous differential systems”, *Differential Equations and Control Processes*, 2023, № 1, 78–109 (In Russian)].
- [22] И. Н. Сергеев, “Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2021, № 3, 41–46; англ. пер.: I. N. Sergeev, “The definition of the indices of oscillation, rotation, and wandering of nonlinear differential systems”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **76**:3 (2021), 129–134.
- [23] И. Н. Сергеев, “Исследование показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости по первому приближению”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:6 (2023), 726–734; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Studying the oscillation, rotation, and wandering indicators by the first approximation”, *Differential Equation*, **59**:6 (2023), 741–750.
- [24] А. Х. Сташ, “Сравнение спектров показателей колеблемости нелинейной системы и системы первого приближения”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1139–1142; англ. пер.: A. Kh. Stash, “Comparing the spectra of oscillation exponents of a nonlinear system and the first approximation system”, *Differential Equation*, **59**:8 (2023), 1147–1150.

Информация об авторе

Лобода Надежда Алексеевна, старший преподаватель, кафедра математического анализа и методики преподавания математики, Адыгейский государственный университет, г. Майкоп, Российская Федерация. E-mail: n-loboda@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6249-6158>

Поступила в редакцию 15.01.2024 г.

Поступила после рецензирования 25.04.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Information about the author

Nadejda A. Loboda, Senior Lecturer, Mathematical Analysis and Methods of Teaching Mathematics Department, Adyghe State University, Maykop, Russian Federation. E-mail: n-loboda@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6249-6158>

Received 15.01.2024

Reviewed 25.04.2024

Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Провоторов В.В., Сергеев С.М., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203>

УДК 517.972.5, 517.95



Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах

Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ¹, Сергей Михайлович СЕРГЕЕВ²¹ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

² ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Аннотация. Рассматривается достаточно часто встречающаяся в промышленной сфере сплошная среда, состоящая из совокупности слоев (фаз) — слоистой однонаправленной композиционной среды (композитов), и физические процессы в слоях — процессы переноса, волновые процессы и изменение напряженно-деформированного состояния этой среды. Осуществляется математическое описание структуры композиционной среды в терминах слоистой области, формируется соболевское пространство функций с носителем в слоистой области (вместе со вспомогательными пространствами) для описания количественных характеристик слоев и устанавливается слабая разрешимость соответствующих краевых задач. При этом в местах взаимного примыкания слоев определены условия, описывающие закономерности процесса переноса и волнового процесса, а также изменения напряженно-деформированного состояния и перемещения точек слоев. Работа состоит из трех частей. Первая часть содержит описание структуры композиционной среды, основные понятия и описание классических пространств функций с носителем в слоистой области. Вторая часть посвящена построению вспомогательных пространств для математического описания краевых задач процессов переноса и волнового процесса, получению достаточных условий их разрешимости. Третья часть содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии среды, для которой строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, устанавливаются условия слабой разрешимости указанной задачи. Результаты работы используются при анализе задач оптимизации физических процессов и явлений в композиционных материалах.

Ключевые слова: композиционная среда, слоистая область, процессы переноса, волновые процессы, напряженно-деформированное состояние композиционных материалов, слабая разрешимость

Для цитирования: Провоторов В.В., Сергеев С.М. Математическое моделирование физических процессов в композиционных средах // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 188–203. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203>

Mathematical modeling of physical processes in composition media

Vyacheslav V. PROVOTOROV¹, Sergey M. SERGEEV²¹ Voronezh State University

1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation

² Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University

29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russian Federation

Abstract. A continuous medium, which is quite common in the industrial sphere, consisting of a set of layers (phases), i.e. a layered unidirectional composite medium (composites), and physical processes in the layers, i.e. transfer processes, wave processes, and changes in the stress-strain state of this this medium, is considered. A mathematical description of the structure of the compositional medium in terms of the layered domain is realized, a Sobolev space of functions with a carrier in the layered domain (together with auxiliary spaces) is constructed to describe the quantitative characteristics of the layers, and the weak solvability of the corresponding boundary value problems is established. At the same time, in the places of mutual adjacency of the layers, the conditions describing the regularities of the transfer process and the wave process, as well as changes in the stress-strain state and the displacement of layer points were determined. The work consists of three parts. The first part contains a description of the structure of the compositional medium, the basic concepts, and a description of the classical spaces of functions with a carrier in the layered domain. The second part is devoted to the construction of auxiliary spaces for the mathematical description of boundary problems of the processes of transfer and wave process, and to obtaining sufficient conditions for their solvability. The third part contains a description of the elastic properties of the composite medium, the problem of stress-strain is formulated for which the space of admissible solutions satisfying the relations describing the laws of displacement of points at the junctions of layers is constructed, the conditions of weak solvability of the specified problem are established. The results of the work are used in the analysis of problems of optimization of physical processes and phenomena in composite materials.

Keywords: composite materials, layered domain, the problem of stress-deformed state of composition materials, weak solvability

Mathematics Subject Classification: 74G55.

For citation: Provotorov V.V., Sergeev S.M. Mathematical modeling of physical processes in composition media. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 188–203. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-188-203> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

На практике достаточно часто используются слоистые композиционные материалы (композиты), представляющие собой набор слоев из однонаправленных композитов. Каждый слой содержит длинные волокна (армирующие элементы), расположенные параллельно друг другу, и является однонаправленным волокнистым композитом. Математическое описание однонаправленных волокнистых композитов представлено в монографии [1, с. 320] с помощью формализмов периодической среды, использующих в некотором смысле предельный специальный оператор. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния материала с обладающими различными свойствами слоями. Рассматривается иной подход, не связанный с периодичностью композиционной среды, при этом определены условия, описывающие законы перемещения элементов композиционной среды. Вводимая слоистая область определяет модель слоистой упругой композиционной среды в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Работа состоит из трех частей. Первая часть посвящена математическому описанию структуры композиционной среды, в ней представлены основные понятия и даны определения пространств функций с носителем в слоистой области. Вторая часть содержит подход к построению вспомогательных пространств для математического описания краевых задач процессов переноса и волнового процесса, при этом получены достаточные условия разрешимости этих задач. Третья часть содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды, для этой задачи строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, устанавливаются условия слабой разрешимости указанной задачи.

1. Основные понятия и определения

1.1. Описание структуры композиционной среды

Сложносочлененные структуры областей (например, сетеподобные области [2]) достаточно удобны для математического описания носителей различного типа сетевых процессов [3]. Слоистая область $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^3$ ($\partial\mathfrak{Z}$ — граница $\mathfrak{Z}$), являясь частным случаем сетеподобной области, имеет аналогичное описание и состоит из двух совокупностей: совокупность подобластей $\mathfrak{Z}_j$, $j = \overline{0, N}$ — слоев области $\mathfrak{Z}$ ($\partial\mathfrak{Z}_j$ — граница $\mathfrak{Z}_j$) и совокупность поверхностей S_j , $j = \overline{1, N}$. Последние являются общими границами попарных подобластей — слоев $\mathfrak{Z}_j$. Поверхности S_j называют поверхностями примыкания слоев $\mathfrak{Z}_j$, $j = \overline{0, N}$. Таким образом, слоистая область $\mathfrak{Z}$ и ее граница $\partial\mathfrak{Z}$ определяются соотношениями

$$\mathfrak{Z} = \left(\bigcup_{j=0}^N \mathfrak{Z}_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right), \quad \partial\mathfrak{Z} = \left(\bigcup_{j=0}^N \partial\mathfrak{Z}_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^N S_j \right).$$

Рассмотрения в статье проводятся в предположениях липшицевости подобластей $\mathfrak{Z}_j$, $j = \overline{0, N}$, и гладкости поверхностей S_j , $j = \overline{1, N}$. Также предполагается, что $\mathfrak{Z}_j$ — звездная относительно шара из $\mathfrak{Z}_j$, $j = \overline{0, N}$. Допустимо различие характеристик и свойств изучаемых тепловых или волновых процессов на $\mathfrak{Z}_j$, описание физических явлений изучаемого процесса на S_j подчинено определенным соотношениям, представленным ниже.

1.2. Пространства функций с носителем в слоистой области

Используются классические пространства действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$L_2(\Omega)$ — пространство функций $u(x)$, суммируемые с квадратом в Ω , скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u, u)_\Omega}; \quad (1.1)$$

$W_2^1(\Omega)$ — пространство функций $u(x) \in L_2(\Omega)$ с обобщенными производными $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \in L_2(\Omega)$, $\iota = 1, 2, 3$, скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u, v)_\Omega^1 = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \quad \|u\|_\Omega^1 = \sqrt{(u, u)_\Omega^1}; \quad (1.2)$$

$W_{2,0}^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ — ядро $W_2^1(\Omega)$: $W_{2,0}^1(\Omega) = \{u : u \in W_2^1(\Omega), u|_{x \in \partial\Omega} = 0\}$.

Для слоистой области $\mathfrak{S} : \int_{\mathfrak{S}} u(x)dx = \sum_{j=0}^N \int_{\mathfrak{S}_j} u(x)dx$, пространства $L_2(\mathfrak{S})$ и $W_2^1(\mathfrak{S})$ аналогичны указанным выше, скалярные произведения и нормы определяются формулами

$$(u, v)_\mathfrak{S} = \sum_{j=1}^N \int_{\mathfrak{S}_j} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\mathfrak{S} = \sqrt{(u, u)_\mathfrak{S}}, \quad (1.3)$$

$$(u, v)_\mathfrak{S}^1 = \sum_{j=0}^N \int_{\mathfrak{S}_j} \left(u(x)v(x) + \sum_{\iota=1}^3 \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota} \right) dx, \quad (1.4)$$

$$\|u\|_\mathfrak{S}^1 = \left(\sum_{j=0}^N \int_{\mathfrak{S}_j} \left(u^2(x) + \sum_{\iota=1}^3 \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2} = \sqrt{(u, u)_\mathfrak{S}^1}, \quad (1.5)$$

вытекающими из соотношений (1.1) и (1.2): (1.3) для $L_2(\mathfrak{S})$ и (1.4), (1.5) для $W_2^1(\mathfrak{S})$, $W_{2,0}^1(\mathfrak{S})$.

2. Процессы переноса и волновые процессы в композиционной среде

В соответствии с подходом анализа начально-краевых задач, описывающих математические модели физических процессов в композиционных средах [3], определим пространство допустимых решений таких задач со свойствами, характеризующими закономерности физических явлений на поверхностях S_j , $j = \overline{1, N}$, примыкания слоев $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{0, N}$. При описании таких пространств используются два подхода: классическое описание физической сути процесса, в основе которого лежат априорные соображения [4], и математическое описание при использовании обобщенной постановки краевой задачи — слабая постановка задачи [3].

Приведем первый подход, основанный на классическом описании физической сути тепловых и волновых явлений на границах компонентов (фаз) композиционной среды. Представим условия продолжения функций $u(x)$ с области $\mathfrak{S}$ на $\overline{\mathfrak{S}} = \bigcup_{j=0}^N \overline{\mathfrak{S}_j}$. Пусть $C(\overline{\Omega})$ —

множество непрерывных функций в $\bar{\Omega}$. Для функции $u(x) \in C(\bar{\Omega})$ существуют $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\bar{\Omega}$ как продолжение по непрерывности с Ω на $\bar{\Omega}$. Отсюда следует, что введено множество $C^1(\bar{\Omega})$ с элементами $u(x)$, для которых определены непрерывные $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\bar{\Omega}$, при этом соотношениями (1.1) и (1.2) определяются скалярное произведение и норма, соответственно. Таким образом, можно считать, что на $\mathfrak{F}$ имеют место множества: $C(\mathfrak{F})$ — множество непрерывных функций $u(x)$ со скалярным произведением и нормой (1.3), $C^1(\mathfrak{F}_j)$ $j = \overline{0, N}$ — совокупность $N + 1$ множеств функций $u(x) \in C(\mathfrak{F})$, для которых существуют $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\mathfrak{F}_j$ при любом $j = \overline{0, N}$, $C^1(\mathfrak{F})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\mathfrak{F}_j)$ $j = \overline{0, N}$, допускающих скачок производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, на поверхностях S_j примыкания слоев и для которых соотношения (1.4) и (1.5) определяют скалярное произведение и норму.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Au := - \sum_{\kappa, \iota=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right),$$

которое определяет эллиптическую часть краевых задач математических моделей тепловых и волновых процессов; $a_{\kappa\iota}(x)$ — принадлежащие $L_2(\mathfrak{F})$ ограниченные функции (подробные описания приведены ниже в соотношении (2.3)). Пусть $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$ — множество функций $u(x) \in C^1(\mathfrak{F})$, для которых на S_j , $j = \overline{1, N}$, выполнены соотношения

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS = 0, \quad (2.1)$$

здесь $\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} = \sum_{\kappa, \iota=1}^3 a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \cos(\bar{n}, x_\kappa)$, S_j^+, S_j^- — односторонние поверхности для S_j , $\cos(\bar{n}, x_\kappa)$ — κ -й направляющий косинус внешней нормали к S_j^+ и S_j^- . Отметим, что условия (2.1) по сути своей являются условиями примыкания смежных слоев композиционной среды, разделенных поверхностью S_j : если осуществляется тепловой поток в композиционной среде, то первое соотношение определяет равенство температур на S_j^+ и S_j^- , второе — баланс тепловых потоков через S_j .

З а м е ч а н и е 2.1. Условия (2.1) могут принимать иной вид в соответствии с изменениями закономерностей явлений на поверхностях S_j , а именно,

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad \int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda} dS + \int_{S_j^-} g(x) dS = 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Слагаемое $\int_{S_j^-} g(x) dS$ означает влияние сил внешнего воздействия со стороны поверхности S_j^- , $g(x)$ — плотность распределения этих сил (влияние сил внешнего воздействия возможно и со стороны S_j^+).

О п р е д е л е н и е 2.1. Пространство $\tilde{W}^1(\mathfrak{F})$ — замыкание $\tilde{C}^1(\mathfrak{F})$ в $W_2^1(\mathfrak{F})$.

Из определения 2.1 для $u(x) \in \tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ следует, что $u(x)_{\mathfrak{Z}_j} \in W^1(\mathfrak{Z}_j)$, $j = \overline{0, N}$ (здесь $u(x)_{\mathfrak{Z}_j}$ — сужение функции $u(x)$ на $\mathfrak{Z}_j$). При этом из существования обобщенных производных $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$, $\iota = 1, 2, 3$, в $\mathfrak{Z}$ следует существование $\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}$ в $\mathfrak{Z}_j$, а значит, $u(x) \in \tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$ и имеет место (2.1).

Пусть $\tilde{C}_0^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ — подмножество множества $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{Z}})$, для элементов $u(x)$ которого имеет место равенство $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ — замыкание $\tilde{C}_0^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ в $W_2^1(\mathfrak{Z})$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ является подпространством пространства $\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$.

З а м е ч а н и е 2.2. Пространства $\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ определяют допустимые состояния краевой задачи для оператора $\mathcal{A}$: для краевой задачи Дирихле используется $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, для задачи с общими краевыми условиями — $\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$.

Другой подход формирования аналогичных пространств $\tilde{W}^1(\mathfrak{Z})$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ основан на использовании класса функций $W_2^1(\mathfrak{Z})$ при описании тепловых и волновых явлений в местах примыкания слоев — соответствующие краевые задачи определяются в слабой постановке [3].

Определим для $u(x), \eta(x) \in W_2^1(\mathfrak{Z}) \times W_2^1(\mathfrak{Z})$ билинейную непрерывную, симметричную форму

$$\rho(u, \eta) = \int_{\mathfrak{Z}} \sum_{\kappa, \iota=1}^3 a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota} \frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa} dx, \quad (2.2)$$

порожденную дифференциальным выражением $\mathcal{A}u$. При этом для (2.2) считаем выполненными условия

$$\begin{aligned} a_{\kappa\iota}(x) &= a_{\iota\kappa}(x), \\ a_* \xi^2 &\leq \sum_{\kappa, \iota=1}^3 a_{\kappa\iota}(x) \xi_\kappa \xi_\iota \leq a^* \xi^2, \\ 0 < \beta_* &\leq b(x) \leq \beta^*, \quad x \in \mathfrak{Z}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

с положительными постоянными a_*, a^*, β и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, $\xi^2 = \sum_{\kappa=1}^3 \xi_\kappa^2$, $a_{\kappa\iota}(x), b(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$; соотношения (2.3) имеют место почти всюду на $\mathfrak{Z}$.

Пусть $f(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ и L — линейный непрерывный функционал в $W_2^1(\mathfrak{Z})$, заданный линейной формой

$$L(\eta) = \int_{\mathfrak{Z}} f(x) \eta(x) dx, \quad \eta(x) \in W_2^1(\mathfrak{Z}). \quad (2.4)$$

Имеет место следующее утверждение (лемма Лакса–Мильграма [5] и [1, с. 32]): если $\rho(u, u) \geq a_* \|u\|_{W_2^1(\mathfrak{Z})}^2$ при любом $u \in W_2^1(\mathfrak{Z})$, то существует единственный элемент $u \in W_2^1(\mathfrak{Z})$, для которого

$$\rho(u, \eta) = L(\eta) \quad \forall \eta \in W_2^1(\mathfrak{Z}). \quad (2.5)$$

Используя формулу Грина (полное обоснование формулы Грина для слоистой области $\mathfrak{Z}$ аналогично приведенному в работе [3]), представим соотношение (2.5) терминами дифференциальных уравнений в слабой постановке. Для этого введем функции $\eta_j(x) \in W_{2,0}^1(\mathfrak{Z})$:

$$\eta_j(x) = \eta(x), \quad x \in \mathfrak{Z}_j, \quad \eta_j(x) = 0, \quad x \in \mathfrak{Z} \setminus \mathfrak{Z}_j, \quad j = \overline{0, N}.$$

Заменяя $\eta(x)$ в (2.4), (2.5) на $\eta_j(x)$ и используя формулу Грина на всех подобластях $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{0, N}$, получаем равенства

$$\int_{\mathfrak{S}_j} (\mathcal{A}u)(x) \eta_j(x) dx = - \int_{\partial \mathfrak{S}_j} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx + \rho(u, \eta_j) = \int_{\mathfrak{S}_j} f(x) \eta_j(x) dx, \quad (2.6)$$

где, как и (2.1), при описании условий примыкания

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{\kappa, \iota=1}^3 a_{\kappa \iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\iota}} \cos(n_j, x_{\kappa}), \quad (2.7)$$

$\cos(n_j, x_{\kappa})$ — κ -й направляющий косинус внешней нормали n_j к сторонам поверхности S_j для каждого фиксированного $j = \overline{1, N}$. Отсюда следует, что $u(x)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{A}u = f(x), \quad x \in \mathfrak{S}_j, \quad (2.8)$$

в слабой постановке для каждого $j = \overline{0, N}$, а значит, $u(x)$ в силу (2.8) удовлетворяет интегральным тождествам

$$\rho(u, \eta_j) = \int_{\mathfrak{S}_j} f(x) \eta_j(x) dx \quad \forall \eta_j(x) \in W_{2,0}^1(\mathfrak{S}_j)$$

при $j = \overline{0, N}$.

Пусть функция $\eta(x) \in W_2^1(\mathfrak{S}_j)$, отлична от нуля на поверхностях S_j , $j = \overline{1, m}$, где $1 \leq m \leq N$, и равна нулю на всех оставшихся S_j . Из уравнений (2.8) вытекает

$$\sum_{j=1}^m \int_{\mathfrak{S}_j} \mathcal{A}u(x) \eta(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_{\mathfrak{S}_j} f(x) \eta(x) dx.$$

Пользуясь формулой Грина в левой части этого равенства (см. соотношения (2.6)), а также учитывая представление (2.5) формы $L(\eta)$, получаем

$$- \sum_{j=1}^m \int_{S_j^+} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx - \sum_{j=1}^m \int_{S_j^-} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx + \rho(u, \eta_j) = \int_{\mathfrak{S}} f(x) \eta(x) dx,$$

или

$$- \sum_{j=1}^m \left(\int_{S_j^+} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx + \int_{S_j^-} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx \right) + \rho(u, \eta) = \int_{\mathfrak{S}} f(x) \eta(x) dx, \quad (2.9)$$

пояснения для S_j^+ , S_j^- и $\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$ установлены соотношениями (2.1) и (2.7), соответственно. Фиксируя в (2.9) поочередно $m = 1, m = 2, \dots, m = N$ и учитывая (2.4), приходим к соотношениям

$$\int_{S_j^+} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx + \int_{S_j^-} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \eta(x) dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (2.10)$$

Добавление условий непрерывности функций $u(x)$ на поверхностях S_j

$$u(x)|_{S_j^+} = u(x)|_{S_j^-}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (2.11)$$

характерных для границ слоев композиционных сред при анализе процессов переноса и волновых процессов, приводит к условиям (2.1).

Следуя результатам работы [3], для описания тепловых и волновых процессов в композиционной среде вводятся пространства состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S} \times (0, T)$, $T < \infty$:

1) пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ — замыкание в норме

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} \left(u^2 + \sum_{\iota=1}^n u_{x_\iota}^2 \right) dx dt \right)^{1/2},$$

функций $u(x, t) \in L_2(\mathfrak{S})$, следы которых $u(x, t_0) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$, $t_0 \in (0, T)$, непрерывно зависят от t_0 в норме $\tilde{W}_2^1(\mathfrak{S})$;

2) если норму $\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^{1,0}$ заменить на

$$\|u\|_{\mathfrak{S}_T}^1 = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{S}_k \times (0, T)} \left(u^2 + y_t^2 + \sum_{\iota=1}^n u_{x_\iota}^2 \right) dx dt \right)^{1/2},$$

получим пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T) \subset \tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$.

Математическое описание тепловых и волновых процессов в композиционных материалах осуществляется с использованием дифференциальных систем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = f(x, t), \quad u|_{t=0} = \vartheta(x), \quad x \in \mathfrak{S},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\kappa} \left(a_{\kappa\iota}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\iota} \right) = f(x, t), \quad u|_{t=0} = \vartheta(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \vartheta_1(x),$$

где $f(x, t) \in L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)$ ($\|u\|_{L_{2,1}(\mathfrak{S}_T)} = \int_0^T (\int_{\mathfrak{S}} u^2(x, t) dx)^{1/2} dt$), $\vartheta(x), \vartheta_1(x) \in L_2(\mathfrak{S})$. Устанавливается слабая разрешимость в пространствах $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{S}_T)$ и $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S}_T)$, соответственно [3]. При этом используется метод Галеркина со специальным базисом, каковым является множество обобщенных собственных функций оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$.

3. Основные результаты

3.1. Описание упругих свойств композиционной среды

Далее изучается задача о напряженно-деформированном состоянии композиционных сред. При ее анализе используются полученные выше результаты, при этом учитываются особенности, порождаемые размерностью пространств функций, описывающие количественные характеристики композиционных сред.

З а м е ч а н и е 3.1. В монографии [1, с. 321] рассматривается сплошная композиционная среда с периодической структурой. В данном исследовании представлен анализ напряженно-деформированного состояния среды со слоями, обладающими различными свойствами.

Введем векторную функцию $u = \{u_1, u_2, u_3\} \in (W_2^1(\mathfrak{S}))^3$ перемещений точек композиционной среды и через $\sigma := \{\sigma_{il}\}$, $i, l = 1, 2, 3$, обозначим тензорную функцию напряжений [4, с. 103]. Тензорная функция напряжений σ и функция перемещения u в композиционной среде связаны между собой законом Гука

$$\sigma_{il}(u) = \sum_{k,m=1}^3 a_{ilkm} \varepsilon_{km}(u), \quad (3.1)$$

здесь $\varepsilon_{km}(u)$, $k, m = 1, 2, 3$, — компоненты тензорной функции деформаций

$$\varepsilon_{km}(u) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \right), \quad k, m = 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

Везде ниже считаем выполненными следующие условия:

$$a_{ilkm}(x) \in L_\infty(\mathfrak{S}), \quad (3.3)$$

$$a_{ilkm}(x) = a_{likm}(x) = a_{ilmk}(x) = a_{mkil}(x), \quad (3.4)$$

$$\sum_{i,l,k,m=1}^3 a_{ilkm}(x) \xi_{il} \xi_{km} \geq C_0 \sum_{i,j=1}^3 \xi_{i,l}^2 \quad \forall \xi_{i,l} = \xi_{l,i}, \quad (3.5)$$

где C_0 — положительная постоянная; соотношения (3.4), (3.5) имеют место почти всюду в $\mathfrak{S}$.

3.2. Задача о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке

Для вектор-функций $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ из $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$ введем необходимые пространства, аналогичные пространствам $\tilde{W}^1(\mathfrak{S})$ и $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{S})$ раздела 2. Построение таких пространств для формального описания в слабой постановке дифференциальной системы напряженно-деформированного состояния сплошной среды вместе с необходимыми соотношениями на поверхностях примыкания несколько отличается от приведенного выше, где использовались скалярные функции для описания тепловых и волновых процессов, наблюдаемых в композиционных средах.

Относительно $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ и $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ из $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$ рассмотрим аналогичную (2.2) билинейную форму

$$a(u, v) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,l,k,m=1}^3 a_{ilkm}(x) \varepsilon_{km}(u) \varepsilon_{il}(v) dx. \quad (3.6)$$

Введем вектор-функции

$$f(x) := (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in (L_2(\mathfrak{S}))^3,$$

$$F_j(x) := (F_1^j(x), F_2^j(x), F_3^j(x)) \in (L_2(S_j))^3, \quad j = \overline{1, N}$$

и обозначим через $\mathfrak{L}$ линейный функционал в $(W_{2,0}^1(\mathfrak{S}))^3$:

$$(\mathfrak{L}, v) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i=1}^3 f_i(x) v_i dx + \sum_{j=1}^N \int_{S_j} \sum_{i=1}^3 F_i^j(x) v_i dx. \quad (3.7)$$

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке: необходимо определить функцию $u(x)$ такую, что

$$a(u, v) = (\mathfrak{L}, v) \quad (3.8)$$

для любых функций v из некоторого подпространства пространства $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$.

Подставим представления (3.6), (3.7) для $a(u, v)$ и $(\mathfrak{L}, v)$ в соотношение (3.8). Рассуждения, аналогичные второй части раздела 2., приводят (см. (2.10), (2.11)) к соотношениям на поверхностях примыкания слоев

$$u_{S_J^+} = u_{S_J^-}, \quad \int_{S_J^+} \sum_{i,l=1}^3 a_{ilkm}(x) \varepsilon_{km}(u) ds + \int_{S_J^-} \sum_{i,l=1}^3 a_{ilkm}(x) \varepsilon_{km}(u) ds + \int_{S_J^-} \sum_{i=1}^3 F_i^j ds = 0, \quad j = \overline{1, N},$$

которые определяют элементы подпространства $(\tilde{V}^1(\mathfrak{S}))^3$ пространства $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$. Если при этом к соотношениям на поверхностях примыкания слоев добавить еще условие $u|_{\partial\mathfrak{S}} = 0$, получим пространство $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3 \subset (\tilde{V}^1(\mathfrak{S}))^3$; нормы в пространствах $(\tilde{V}^1(\mathfrak{S}))^3$ и $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ определены нормой $(W_2^1(\mathfrak{S}))^3$.

Ниже рассматривается задача (3.8) в пространстве $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ (пространство $(\tilde{V}^1(\mathfrak{S}))^3$ используется для анализа задач с более общими краевыми условиями). Задача (3.8) порождает систему линейных непрерывных операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, которые для $v = \{v_1, v_2, v_3\} \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1(v) &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad N_2(v) = \sqrt{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad N_3(v) = \sqrt{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), \\ N_4(v) &= \sqrt{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \quad N_5(v) = \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad N_6(v) = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С точки зрения теории напряженно-деформированных состояний сплошных сред выражения $N_i v$, $i = 1, 2, \dots, 6$, определяемые соотношениями (3.9), задают с точностью до постоянных коэффициентов компоненты деформации среды (3.2), формируемые вектор-функцией перемещений $v = \{v_1, v_2, v_3\}$. Операторы N_i задают матрицу $\{N_{ir}(x, \xi)\}$ с элементами $N_{ir}(x, \xi) = \sum_{|k|=1} g_{irk}(x) \xi_1 \xi_2 \xi_3$, $i = 1, 2, \dots, 6$, $r = 1, 2, 3$, определяемые посредством соотношений

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 2\xi_1, \quad N_2(\xi) = \sqrt{2}(\xi_2 + \xi_1), \quad N_3(\xi) = \sqrt{2}(\xi_3 + \xi_1), \\ N_4(\xi) &= \sqrt{2}(\xi_3 + \xi_2), \quad N_5(\xi) = 2\xi_2, \quad N_6(\xi) = 2\xi_3, \end{aligned} \quad (3.10)$$

для любых комплексных чисел $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \neq 0$.

Для анализа слабой разрешимости задачи (3.8), следуя идеям работы [1, с. 59], предварительно введем понятие коэрцитивной системы операторов, установим свойства этой системы и приведем утверждения, базирующиеся на оценках норм ее операторов. Используем определения и основные утверждения для «классических» областей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $W = (W_2^1(\Omega))^m$, $\|v\|_W^2 = \sum_{r=1}^m \|v_r\|_{W_2^1(\Omega)}^2$. Рассмотрим систему линейных непрерывных операторов $N_i : W \rightarrow L_2(\Omega)$, $i = \overline{1, \nu}$, определяемых выражениями

$$N_i v = \sum_{r=1}^m \sum_{|k| \leq 1} g_{irk} D^k v_r, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad D^k v_r = \frac{\partial^k v_r}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}},$$

здесь $g_{irk} \in L_\infty(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Система операторов N_i , $i = \overline{1, \nu}$, называется W -коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^m$, если существует положительная постоянная C , для которой выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{r=1}^m \|v_r\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq C \|v\|_W^2 \quad \forall v \in W.$$

Пусть W' — замкнутое подпространство W , $W' \subseteq W$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Система операторов N_i , $i = \overline{1, \nu}$, называется коэрцитивной в W' , если существует положительная постоянная C , для которой выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq C \|v\|_{W'}^2 \quad \forall v \in W'.$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию конуса, если $x + U(\varepsilon(x), h) \in \Omega$ для произвольного $x \in \Omega$, где $U(\varepsilon(x), h)$ — прямой круговой конус с вершиной в начале координат, фиксированным раствором, высотой $h < \infty$ и вектором направления оси $e(x)$.

Для дальнейшего потребуются следующие утверждения.

Теорема 3.1 ([5, 6]). Для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию конуса, система дифференциальных операторов N_i , $i = \overline{1, \nu}$, W -коэрцитивна относительно $(L_2(\Omega))^n$, если ранг матрицы с элементами

$$N_{ir}(x, \xi) = \sum_{|k|=1} g_{irk}(x) \xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n}, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad r = \overline{1, m},$$

определенной операторами N_i , $i = \overline{1, \nu}$, равен m любого $x \in \Omega$ и для любых комплексных $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \neq 0$.

Теорема 3.2 ([1], с. 60, теорема). Пусть система операторов N_i , $i = \overline{1, \nu}$ является W -коэрцитивной относительно $(L_2(\Omega))^3$, пусть $a(u, v)$ — билинейная симметричная, непрерывная форма на $W \times W$, причем $a(v, v) \geq 0$ для произвольных $v \in W$, и пусть из соотношений

$$\omega \in W, \quad \sum_{i=1}^{\nu} \|N_i \omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(\omega, \omega) = 0 \tag{3.11}$$

следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^{\nu} \|N_i v\|_{L_2(\Omega)}^2 + a(v, v) \geq c \|v\|_W^2 \quad \forall v \in W.$$

Далее для слоистой области $\mathfrak{F}$ рассмотрим задачу (3.8) в пространстве $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{F}))^3$. Для удобства представления результатов также используем обозначение $V = (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{F}))^3$.

З а м е ч а н и е 3.2. Так как области $\mathfrak{F}_j$, $j = \overline{0, N}$, липшицевы, то они удовлетворяют условию конуса, следовательно, $\mathfrak{F}$ также удовлетворяет условию конуса.

Следствие 3.1. Из теоремы 3.1 при $n = m = 3$, $\nu = 6$, непосредственно вытекает V -коэрцитивность относительно $(L_2(\mathfrak{S}))^3$ операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, представленных соотношениями (3.9) и матрицей $\{N_{ir}(x, \xi)\}$, определенных посредством соотношений (3.10).

Используя неравенства (3.3)–(3.5), нетрудно получить неравенства, связывающие нормы $\|N_i v\|_{L_2(\mathfrak{S})}$ и $\|v\|_V$ для операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, как следствие из теоремы 3.2, а именно, справедлива

Теорема 3.3. Пусть $a(u, v)$ — билинейная симметричная, непрерывная форма на $V \times V$, причем $a(v, v) \geq 0$ для произвольных $v \in V$ и пусть из аналогичных (3.11) соотношений

$$\omega \in V, \quad \sum_{i=1}^6 \|N_i \omega\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 + a(\omega, \omega) = 0$$

следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^6 \|N_i v\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 + a(v, v) \geq C \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V. \quad (3.12)$$

Следствие 3.2. Обозначим через $V' = \{u : u \in V, a(u, u) = 0\}$ замкнутое подпространство пространства V . Тогда в силу (3.12) приходим к неравенству $\sum_{i=1}^6 \|N_i v\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 \geq C \|v\|_V^2$ при любых $v \in V'$, т. е. система операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ является коэрцитивной в V' .

Следствие 3.3. Пусть V' — замкнутое подпространство в V такое, что из условия $\sum_{i=1}^6 \|N_i \omega\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 = 0 \quad \forall \omega \in V'$ следует $\omega = 0$. Тогда существует постоянная $C_0 > 0$, при которой

$$\sum_{i=1}^6 \|N_i v\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 \geq C_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad (3.13)$$

т. е. система операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ является коэрцитивной в V' .

Действительно, из $V' \subset V$ вытекает V' -коэрцитивность относительно $(L_2(\mathfrak{S}))^3$ системы N_i ($i = 1, 2, \dots, 6$). В качестве билинейной симметричной непрерывной формы $a(u, v)$ на $V \times V$ возьмем нулевую форму ((см. следствие 3.2). Используя утверждение теоремы 3.2 для $V = V'$, получим неравенство (3.13).

Учитывая представления (3.9) операторов N_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, утверждения теоремы 3.1 и следствие 3.1, в силу определения 2.1 получим

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,l=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 \geq C \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \quad (3.14)$$

здесь $\|u\|_V^2 = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{W_2^1(\mathfrak{S})}^2$, C — положительная постоянная.

Для слоистых композиционных областей $\mathfrak{S}$ неравенство (3.14) является аналогом известного неравенства Корна [1, с. 62] (см. также, [4, с. 110]), где при анализе напряженно-деформированных состояний композитов используются «классические» области Ω .

Пусть функции $F_j(x) := (F_1^j(x), F_2^j(x), F_3^j(x))$, $j = \overline{0, N}$, описывающие внешние воздействия на композиционную среду в поверхностях примыкания, равны нулю. Определим подпространство $Q \subset V$ соотношением

$$Q = \left\{ u \in V : \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0, \quad i, l = 1, 2, 3 \right\}. \quad (3.15)$$

Элементами этого пространства являются функции, с физической точки зрения определяющие так называемые жесткие смещения среды в малом (см. соотношения (3.1), (3.2)). Элементы $u = (u_1, u_2, u_3) \in Q$, как следует из (3.15), на каждой подобласти $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{0, N}$, имеют вид (см. [5])

$$u_1^j = a_1^j - b_3^j x_2 + b_2^j x_3, \quad u_2^j = a_2^j - b_1^j x_3 + b_3^j x_1, \quad u_3^j = a_3^j - b_2^j x_1 + b_1^j x_3, \quad (3.16)$$

где a_i^j, b_i^j — постоянные, $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{0, N}$. Выражением $a(u, v) = \int_{\Upsilon} uv dx$, где Υ — открытое подмножество $\partial\mathfrak{S}$, определим билинейную симметричную форму на $V \times V$. В силу неравенств (3.3)–(3.5) имеем $\|a(u, v)\| \leq C\|u\|_V\|v\|_V$, а значит, форма $a(u, v)$ непрерывна на $V \times V$.

Пусть $u = (u_1, u_2, u_3) \in Q$ и

$$\int_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds = 0. \quad (3.17)$$

Исходя из соотношений (3.16), функция $u(x)$ на каждой подобласти $\mathfrak{S}_j$, $j = \overline{0, N}$, имеет представление

$$u^j(x) = a^j + A_j x \quad (j = \overline{0, N}), \quad (3.18)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u^j(x) = \text{col}(u_1^j(x), u_2^j(x), u_3^j(x))$, $a^j = \text{col}(a_1^j, a_2^j, a_3^j)$, элементы матриц A_j в (3.18) определяются постоянными b_i^j , $i = 1, 2, 3$, $j = \overline{0, N}$, из соотношений (3.16). Нетрудно убедиться, что в силу (3.15) и выполнения условий примыкания, выполнено $a^j = a = (a_1, a_2, a_3)$ и $u^j(x) = u(x) = a$, $j = \overline{0, N}$. А значит, учитывая соотношения $\varepsilon_{il}(u) = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = 0$, $i, l = 1, 2, 3$, и (3.17), приходим к соотношению $a = 0$, т. е. $u(x) = 0$. Таким образом, показано, что при $u \in Q$ из соотношения (3.17) (напомним, что $u|_{\Upsilon \subset \partial\mathfrak{S}} = 0$ и $Q \subset V = (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$) следует $u(x) = 0$. Поэтому из неравенства (3.14) согласно теореме 3.2 вытекает неравенство

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,l=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds \geq C\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \quad (3.19)$$

где $C = \text{const} > 0$.

В соответствии со сказанным, введем пространство

$$V' = \left\{ u : \int_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds = 0 \right\},$$

которое замкнуто в V , так как отображение $u \mapsto \int_{\Upsilon} (u_1(x)^2 + u_2(x)^2 + u_3(x)^2) ds$ является непрерывным из V в $\{0\} \subset \mathbb{R}^1$. Тогда из неравенства (3.19) и представления пространства V вытекает неравенство

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,l=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq C\|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

3.3. Достаточные условия слабой разрешимости задачи (3.8)

Сохраняя обозначения пунктов 3.1. и 3.2., рассмотрим в $(\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$ задачу (3.8) о напряженно-деформированном состоянии композиционной среды в слабой постановке.

Теорема 3.4. Пусть для коэффициентов $a_{ijkm}(x)$ функций $\sigma_{ij}(u)(x)$ выполнены условия (3.3)–(3.5), билинейная $a(u, v)$ и линейная $\mathfrak{L}$ формы заданы соотношениями (3.6) и (3.7), соответственно. Тогда существует единственное слабое решение и задачи (3.8), и для него справедлива оценка

$$\|u\|_V^2 \leq c, \quad c > 0 - \text{const.} \quad (3.20)$$

Доказательство. Из представления (3.6) билинейной формы $a(u, v)$, учитывая соотношение (3.5), получаем

$$a(u, u) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,j,k,m=1}^3 a_{ijkm}(x) \varepsilon_{km}(u) \varepsilon_{ij}(u) dx \geq c_0 \|u\|_H^2, \quad c_0 > 0 - \text{const},$$

для произвольного элемента $u \in (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$, где через $\|u\|_H^2$ обозначено

$$\|u\|_H^2 = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}^2(u) dx. \quad (3.21)$$

Исходя из неравенства (3.14) и в силу следствия 3.2 теоремы 3.2, можно показать, что выражение (3.21) задает норму $\|\cdot\|_H$ в пространстве $V = (\tilde{V}_0^1(\mathfrak{S}))^3$, эквивалентную введенной в пункте 3.2. Это вытекает из неравенства

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\varepsilon_{i,j}(u) \right)^2 dx + \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 \leq \alpha \|u\|_V$$

(здесь используется очевидное соотношение $(\theta + \vartheta)^2 \leq 2(\theta^2 + \vartheta^2)$) и, учитывая неравенство (3.14),

$$\int_{\mathfrak{S}} \sum_{i,j=1}^3 \left(\varepsilon_{i,j}(u) \right)^2 dx + \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L_2(\mathfrak{S})}^2 \geq \beta \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V,$$

с положительными постоянными α, β . Доказательство завершает использование теоремы Лакса–Мильграма [7]: из существования на $V \times V$ билинейной формы $a(u, v)$ со свойствами непрерывности и коэрцитивности вытекает существование единственного слабого решения задачи (3.8) и справедливость оценки (3.20). $\square$

Заключение

Представлены описание структуры композиционной среды, основные свойства и описание пространств функций с носителем в слоистой области для математического описания и анализа краевых задач процессов переноса и волнового процесса. Работа содержит описание упругих свойств композиционной среды, формируется задача о напряженно-деформированном состоянии среды, для которой строится пространство допустимых решений, удовлетворяющих соотношениям, описывающим законы перемещения точек в местах примыкания слоев, и устанавливаются условия слабой разрешимости этой задачи.

Результаты пункта 3.1. можно эффективно использовать при решении задач оптимального управления, представленных в работах [8–10]. Результаты пунктов 3.2. и 3.3. распространяются на более общие чем (3.2) представления компонентов тензорной функции деформаций, являющиеся основополагающими в анализе различного типа задач оптимизации деформируемых композиционных материалов.

References

- [1] В. Г. Литвинов, *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, Наука, М., 1987, 368 с. [V. G. Litvinov, *Optimization in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian), 368 pp.]
- [2] А. Р. Zhabko, А. И. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15:4** (2019), 457–471.
- [3] А. Р. Zhabko, V. V. Karelin, V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, “Optimal control of thermal and wave processes in composite materials”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **19:3** (2023), 403–418.
- [4] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1989, 384 с. [G. Duvau, J.-L. Lyons, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian), 384 pp.]
- [5] I. Hlavacek, J. Necas, “On inequalities of Korn’s type”, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, **36:4** (1970), 305–334.
- [6] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975, 480 с. [O. V. Besov, V. P. Ilyin, S. M. Nikolsky, *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 480 pp.]
- [7] P. D. Lax, N. Milgram, “Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential”, *Ann. Math. Studies*, **33** (1954), 167–190.
- [8] А. С. Волкова, Ю. А. Гнилицкая, В. В. Провоторов, “О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе”, *Системы управления и информационные технологии*, 2013, № 1(51), 11–15. [A. S. Volkova, Yu. A. Gnilitckaya, V. V. Provotorov, “On the solvability of boundary value problems for equations of parabolic and hyperbolic types on a geometric graph”, *Management Systems and Information Technologies*, 2013, № 1(51), 11–15 (In Russian)].
- [9] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972, 414 с. [J.-L. Lyons, *Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian), 414 pp.]
- [10] В. В. Провоторов, “К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки»”, *Системы управления и информационные технологии*, 2008, № 2.2(32), 293–297. [V. V. Provotorov, “On the issue of constructing boundary controls in the problem of damping oscillations of the “mast-braced” system”, *Management Systems and Information Technologies*, 2008, № 2.2(32), 293–297 (In Russian)].

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8761-7174>

Сергеев Сергей Михайлович, кандидат технических наук, доцент института промышленного менеджмента, экономики и торговли, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. E-mail: sergeev2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0195-4589>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Провоторов Вячеслав Васильевич
E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 19.02.2024 г.
Поступила после рецензирования 23.05.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Sergey M. Sergeev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Institute of Industrial Management, Economics and Trade, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation.
E-mail: sergeev2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0195-4589>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vyacheslav V. Provotorov
E-mail: wwprov@mail.ru

Received 19.02.2024
Reviewed 23.05.2024
Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Успенский А.А., Лебедев П.Д., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

УДК 514.17



Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае

Александр Александрович УСПЕНСКИЙ, Павел Дмитриевич ЛЕБЕДЕВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Аннотация. Рассмотрен класс замкнутых множеств двумерного евклидова пространства, в общем случае не являющихся чебышевскими множествами. Множества изучены с позиций двух известных определений, обобщающих классическое определение выпуклого множества. В рамках этих определений установлены аналитические взаимосвязи между параметрами, характеризующими невыпуклые множества. Найдены формула вычисления функции, определяющей степень невыпуклости замкнутого множества, и формула вычисления радиуса опорного шара. Указаны области приложения изучаемых конструкций в теории управления динамическими системами. Приведен иллюстрирующий пример, в котором предъявлена процедура аналитического вычисления чебышевского слоя невыпуклого множества с разрывной кривизной его границы.

Ключевые слова: альфа-множество, оболочка множества, метрическая проекция, мера невыпуклости, биссектриса множества, опорный шар, чебышевский слой, управление

Благодарности: Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00424, <https://rscf.ru/project/24-21-00424/>).

Для цитирования: Успенский А.А., Лебедев П.Д. Альфа-множества и их оболочки: аналитические взаимосвязи в плоском случае // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217>

Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case

Alexander A. USPENSKII, Pavel D. LEBEDEV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Abstract. The class of closed sets of two-dimensional Euclidean space that are not Chebyshev sets in common case is considered. Sets are studied from the standpoint of two well-known definitions that generalize the classical definition of a convex set. Within the framework of these definitions, analytical relationships are established between the parameters characterizing non-convex sets. A formula for calculating the function that determines the degree of non-convexity of a closed set, and a formula for calculating the radius of the support ball are found. The areas of application of the studied structures in the theory of control of dynamic systems are indicated. An illustrative example is given in which a procedure for analytical calculating the Chebyshev layer of a non-convex set with discontinuous curvature of its boundary is proposed.

Keywords: alpha set, hull of a set, metric projection, measure of non-convexity, bisector of a set, support ball, Chebyshev layer, control

Acknowledgements: This research of the first author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00424, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00424/>).

Mathematics Subject Classification: 52A10, 49Q15.

For citation: Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Alpha sets and their hulls: analytical relationships in the plane case. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 204–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-204-217> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Сфера приложений выпуклых множеств обширна и многообразна. Между тем в приложениях, в частности, в теории математического управления зачастую приходится иметь дело с невыпуклыми множествами. В ряде случаев такие множества могут рассматриваться в качестве обобщений выпуклых множеств. Среди обобщений понятия выпуклого множества выделим понятие альфа-множества (α -множества) [1]. Следует различать это понятие с понятием α -выпуклого множества, которое введено в работе [2]. Возникновение понятия альфа-множества связано с изучением свойств множеств достижимости управляемых динамических систем. Присущая множествам достижимости невыпуклость имеет разную степень выраженности. Для конкретного множества в качестве числовой характеристики его степени невыпуклости в [1] предложена неотрицательная константа α , являющаяся супремальным значением характеристической функции, определенной на дополнении множества до всего пространства. Значения функции имеют смысл угловых величин, вычисляемых между векторами, порожденными ближайшими точками на множестве. Нарушение единственности метрической проекции точки из дополнения множества на само множество указывает на его принадлежность семейству нечебышевских множеств [3].

Обзор обобщений понятия выпуклого множества приведен в монографии [4]. Свойства оператора метрической проекции рассмотрены для класса слабо выпуклых по Виалю множеств и класса сильно выпуклых множеств в [5, 6]. В частности, показано, что такие множества обладают чебышевскими слоями, в которых оператор непрерывен и для него в рамках каждого класса множеств найдена константа Липшица. Оператор метрической проекции также используется при описании свойств классического (дифференцируемого) решения уравнения эйконала для случая, когда краевое множество является солнцем [7]. В упомянутых здесь работах существенным условием является единственность значений оператора метрической проекции.

Конструкции теории альфа-множеств позволяют исследовать ситуации множественности значений оператора метрической проекции. К настоящему времени выявлены и описаны характерные признаки и особенности замкнутых множеств евклидова пространства в терминах характеристической функции, введены в рассмотрение основные структурные элементы развиваемой теории (биссектриса множества, псевдовершина множества, крайняя точка биссектрисы) [8]. Осуществлена классификация невыпуклых множеств по признакам регулярности и мажорируемости (в силу введенных определений), а для некоторых классов невыпуклых множеств сформулированы и доказаны утверждения, аналогичные теоремам из выпуклого анализа о существовании опорной гиперплоскости выпуклого множества и об отделимости выпуклых множеств в евклидовом пространстве [9].

Конструкции теории альфа-множеств приложены к построению негладких решений задач управления по быстродействию и задач геометрической оптики (см., например, [10, 11]), применены при исследовании свойств множеств достижимости нелинейных управляемых динамических систем (см. [12]).

В настоящей работе для плоских замкнутых и в классическом смысле невыпуклых множеств получены аналитические соотношения, позволяющие в ряде случаев находить точно меру невыпуклости α . Также выявлены аналитические взаимосвязи между плоскими альфа-множествами и их оболочками в силу определений [2].

1. Основные определения, понятия и предварительные результаты

Ключевым в настоящей работе является понятие α -множества, введенное в статье [1].

Пусть M — замкнутое множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$. Под проекцией $\pi(z)$ точки z на M понимается ближайшая к z точка из M в евклидовой метрике.

Полагаем

$\Omega_M(z) = \{\pi(z)\}$ — множество всех проекций $\pi(z)$ точки z на M ;

$\text{co } \Omega_M(z)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_M(z)$;

$\text{con}(\text{co } \Omega_M(z) - z) = \{h = \lambda(s - z) : \lambda \geq 0, s \in \text{co } \Omega_M(z)\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на $\text{co } \Omega_M(z) - z$;

$H_M(z)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из конуса $\text{con}(\text{co } \Omega_M(z) - z)$;

$(h_* \wedge h^*) = \arccos \frac{\langle h_*, h^* \rangle}{\|h_*\| \|h^*\|} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^* , $(h_*, h^*) \in H_M(z)$;

$\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение векторов h_* и h^* в $\mathbb{R}^n$, $\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{\frac{1}{2}}$;

$$\alpha(z) = \max_{(h_*, h^*) \in H_M(z)} (h_* \wedge h^*) \in [0, \pi].$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество M называется α -множеством в $\mathbb{R}^n$. Величина

$$\alpha = \sup_{z \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha(z) \in [0, \pi]$$

называется *мерой невыпуклости множества M* .

Приведем определения ряда конструктивных элементов теории α -множеств, сконцентрировавшись на плоском случае, когда $M \subset \mathbb{R}^2$. В дальнейшем предполагается, что граница $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ задается непрерывным отображением $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ числового отрезка $T = [\tilde{t}, \hat{t}]$, $-\infty < \tilde{t} < \hat{t} < +\infty$, $\gamma(\tilde{t}) = \gamma(\hat{t})$, или же числовой прямой $T = \mathbb{R}$, на плоскость, которое, вообще говоря, может иметь конечное число точек разрыва производных начальных порядков (до третьего порядка включительно) от координатных функций. Следует подчеркнуть, что дифференциальные свойства Γ существенным образом влияют на структуру носителя $\text{supp } \alpha = \overline{\{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \alpha(z) \neq 0\}}$ функции $\alpha(\cdot)$ и, как следствие, определяют сложность вычисления меры невыпуклости множества M . Здесь $\bar{A}$ — замыкание A .

Задача отыскания меры невыпуклости множества решается с помощью уравнения, связывающего носитель функции $\text{supp } \alpha$ с границей множества:

$$Q(t_1, t_2) = 0. \quad (1.1)$$

Структура уравнения конкретизирована ниже. Предварительно укажем на то, что $Q = Q(t_1, t_2)$ — симметрическая функция двух переменных в плоскости параметров $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Важная роль в теории отводится решениям (1.1) со специальными свойствами. Зафиксируем $t_0 \in T$, параметры малости $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Под решениями этого уравнения понимаются локальные диффеоморфизмы [13, §1], определенные с одной стороны от точки рассмотрения. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением (1.1), полунепрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую окрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую окрестность, если выполняются условия:

(A1) $t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$,

(A2) $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0$.

Наряду с полунепрерывностью функции $t_2 = t_2(t_1)$ условия (A1), (A2) выделяют неподвижные точки в пространстве параметров. Существование таких точек и их определяющих локальных диффеоморфизмов показано на примерах множеств с разным порядком гладкости их границ [14].

О п р е д е л е н и е 1.2. *Псевдовершиной кривой Γ называется точка*

$$x^{(0)} = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (x_1^*, x_2^*),$$

где $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2), x_2^*(t_1, t_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1^* - \gamma_1(t_1))\gamma_2'(t_1) = (x_2^* - \gamma_2(t_1))\gamma_1'(t_1), \\ (x_1^* - \gamma_1(t_2))\gamma_2'(t_2) = (x_2^* - \gamma_2(t_2))\gamma_1'(t_2), \end{cases} \quad (1.2)$$

определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, который задается уравнением

$$Q(t_1, t_2) \triangleq \rho^2(\gamma(t_1), (x_1^*, x_2^*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_1^*, x_2^*)) = 0 \quad (1.3)$$

и удовлетворяет условиям (A1), (A2). Здесь, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^2$.

Уравнение (1.3) конкретизирует (1.1).

Определение псевдовершины допускает естественную переформулировку в терминах обратного к $t_2 = t_2(t_1)$ локального диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$, удовлетворяющего условиям (A1), (A2). Поэтому будем называть $t_2 = t_2(t_1)$ и $t_1 = t_1(t_2)$ локальными диффеоморфизмами, порождающими псевдовершину $x^{(0)} \in \Gamma$.

Рассмотрим оператор метрической проекции $P_M(z)$ точек $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ на M . Обозначим $\text{card } P_M(z)$ мощность множества проекций точки $z \in \mathbb{R}^2 \setminus M$ на M .

О п р е д е л е н и е 1.3. *Биссектрисой множества $M \subset \mathbb{R}^2$ называется*

$$L = \{z \in \mathbb{R}^2 \setminus M : \text{card } P_M(z) > 1\}.$$

Биссектриса L множества $M \subset \mathbb{R}^2$ состоит из точек, в которых нарушается гладкость евклидова расстояния до множества. Биссектриса относится к множествам симметрии, топологические свойства которых изучаются в теории особенностей гладких отображений (см., например, [15]).

О п р е д е л е н и е 1.4. *Ветвью $L(x^{(0)})$ биссектрисы L кривой Γ , где $x^{(0)}$ — псевдовершина Γ , называется множество точек $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих системе уравнений*

$$\begin{cases} (x_1 - \gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) + (x_2 - \gamma_2(t_1))\gamma_2'(t_1) = 0, \\ (x_1 - \gamma_1(t_2))\gamma_1'(t_2) + (x_2 - \gamma_2(t_2))\gamma_2'(t_2) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм, порождающий псевдовершину $x^{(0)}$.

Система уравнений (1.4) является сопряженной к системе (1.2). Ее решениями являются точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, имеющие две различные ближайшие точки на $\Gamma = \partial M$. В силу определения носителя характеристической функции выполнено $L(x^{(0)}) \subset \text{supp } \alpha$.

2. Вычисление значений характеристической функции на биссектрисе

Задача вычисления меры невыпуклости множества M по существу требует построения носителя характеристической функции $\text{supp } \alpha$, т. е. замыкания множества из ее области определения, на котором функция отлична от нуля. Функция $\alpha_M(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus M$, полунепрерывна сверху [1], в общем случае она является разрывной. Ниже обоснована формула ее вычисления для ряда случаев. Результат сформулирован в локальных терминах, он справедлив в некоторой окрестности особой точки границы множества. При этом стоит отметить, что результат приобретает нелокальный характер в случае, когда эта точка является единственной особой точкой границы множества. Этот тезис будет проиллюстрирован далее в примере. Содержательно приводимая ниже теорема позволяет находить значения характеристической функции на гладких участках биссектрисы.

Примем ряд обозначений: $\det(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ — определитель второго порядка, построенный на векторах $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение этих векторов, $O_0(t_0, \Delta) = (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta) \setminus \{t_0\}$ — выколота окрестность точки $t_0 \in T$ радиуса $\Delta > 0$. Пусть $K = \{1, 2, 3\}$.

Ограничимся рассмотрением кривых, для которых выполняются следующие условия:

(Г1) $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ имеет непрерывную производную k -го порядка, где $k \in K$, всюду на $T \subseteq \mathbb{R}$, при этом допускается существование конечных совокупностей $T_k \subset T$ точек $t_0 \in T_k$, в которых односторонние производные k -го порядка (левая $\gamma^{(k)}(t_0 - 0)$ и правая $\gamma^{(k)}(t_0 + 0)$) конечны и при этом $\gamma^{(k)}(t_0 - 0) \neq \gamma^{(k)}(t_0 + 0)$;

(Г2) $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in T \setminus T_1$.

Совокупности кривых Γ без точек самопересечения с указанными дифференциальными свойствами (Г1), (Г2) обозначим $\{\Gamma\}_T$. Условие (Г1) фиксирует наличие точек с разрывами производных координатных функций — особых точек, которые порождают непустые подмножества из $\text{supp } \alpha$, а (Г2) — это условие регулярности кривой в точках дифференцируемости (подробнее см. в [11, 14]).

Теорема 2.1. Пусть $L(x^{(0)})$ — ветвь биссектрисы L множества $M \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$, определяемой вектор-функцией $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, где $x^{(0)}$ — псевдовершина Γ , порожденная локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, и выполняется условие

$$\det(\gamma'(t), \gamma'(\tau)) \neq 0, \quad t \in O_0(t_0, \Delta), \quad \tau \in O_0(t_0, \Delta), \quad \Delta > 0, \quad t \neq \tau. \quad (2.1)$$

Тогда для точек $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$ имеет место формула вычисления угловой величины

$$\alpha(z(t_1)) = 2 \arctg \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \quad (2.2)$$

Доказательство. Зафиксируем значение параметра $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, $\delta_1 > 0$, и отвечающее ему в силу диффеоморфизма значение $t_2 = t_2(t_1)$, $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$. По построению $t_1 < t_0 < t_2(t_1)$. Найдем точку $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*(t_1, t_2(t_1)), x_2^*(t_1, t_2(t_1)))$ пересечения касательных, равноудаленную от точек касания $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$. Для этого решим соответствующую систему линейных уравнений (1.2), здесь для краткости аргумент в

$t_2(t_1)$ опущен:

$$\begin{aligned} x_1^* &= -\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}, \\ x_2^* &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Перейдем к сопряженной системе (1.4) и найдем ее решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}, \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Формулы (2.3) и (2.4) корректны в силу условия (1.2).

Вычислим значение угловой величины на ветви $L(x^{(0)})$ биссектрисы, принимая во внимание ортогональность отрезков прямых, задаваемых системами (1.2) и (1.4), и равнолежность тех из них, что являются высотами, и тех, что являются отрезками касательных (поясняющий детали рисунок в [14]). Имеем $\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\rho(x^*, \gamma(t_1))}{\rho(x, \gamma(t_1))}$. Далее последовательно найдем числитель и знаменатель квадрата тангенса

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{\rho^2(x, \gamma(t_1))}. \quad (2.5)$$

В процессе выкладок опустим часть вычислений, которые громоздки, не представляют математического интереса и при необходимости могут быть легко восстановимы. Числитель дроби

$$\begin{aligned} \rho^2(x^*, \gamma(t_1)) &= (x_1^* - \gamma_1(t_1))^2 + (x_2^* - \gamma_2(t_1))^2 \\ &= \left(-\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_1(t_1) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_2(t_1) \right)^2 \\ &= \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left((\gamma_2'(t_1))^2 (\gamma_2'(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma_1'(t_1))^2 (\gamma_1'(t_2))^2 \right. \\ &\quad \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + (\gamma_1^2(t_1) + \gamma_2^2(t_1)) \left. \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}^2 \right. \\ &\quad + 2\gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma_2'(t_1) & \gamma_2(t_1)\gamma_1'(t_1) \\ \gamma_2'(t_2) & \gamma_2(t_2)\gamma_1'(t_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix}^2 \\ &\quad \left. + 2\gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1)\gamma_2'(t_1) & \gamma_1'(t_1) \\ \gamma_1(t_2)\gamma_2'(t_2) & \gamma_1'(t_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1'(t_1) & \gamma_2'(t_1) \\ \gamma_1'(t_2) & \gamma_2'(t_2) \end{vmatrix} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left((\gamma'_2(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_1(t_1))^2 \right. \\
& \quad \times (\gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)))^2 + (\gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2) \\
& \quad \times (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)))^2 - 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 [\gamma'_2(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) - \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))]^2 \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1)). \tag{2.6}
\end{aligned}$$

Знаменатель дроби

$$\begin{aligned}
\rho^2(x, \gamma(t_1)) & = \left(\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_1(t_1) \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} + \frac{\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix}}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))} - \gamma_2(t_1) \right)^2 \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left((\gamma'_2(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_1(t_1))^2 (\gamma'_1(t_2))^2 \right. \\
& \quad \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + \left(\gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma'_2(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_1(t_1) \\ \gamma'_2(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + \left(\gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_2(t_1) & \gamma'_1(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_2(t_2) & \gamma'_1(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad - 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) ((\gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 \\
& \quad \times (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 + \left(\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + \left(\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right)^2 \\
& \quad + 2 \gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) \left(\begin{vmatrix} \gamma_1(t_1) \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma_1(t_2) \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_1(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right) \\
& \quad + 2 \gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) \left(\begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma_2(t_1) \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma_2(t_2) \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} - \gamma_2(t_1) \begin{vmatrix} \gamma'_1(t_1) & \gamma'_2(t_1) \\ \gamma'_1(t_2) & \gamma'_2(t_2) \end{vmatrix} \right) \\
& = \det^{-2}(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) (\gamma'_1(t_1) \gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (\gamma'_2(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 \\
& \quad + (\gamma'_1(t_2) \gamma'_2(t_1))^2 (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 + (\gamma'_1(t_1) \gamma'_2(t_2))^2 (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 \\
& \quad + 2 (\gamma'_2(t_1))^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 (\gamma'_1(t_1))^2 \gamma'_1(t_2) \gamma'_2(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) \Big) \\
& = \det^{-2} (\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \left(\|\gamma'(t_1)\|^2 (\gamma'_1(t_2))^2 (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1))^2 + (s(t_1))^2 (\gamma'_2(t_2))^2 \right. \\
& \times (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1))^2 + 2 \|\gamma'(t_1)\|^2 \gamma'_2(t_2) \gamma'_1(t_2) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2)) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)) \Big) \\
& = \det^{-2} (\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 (\gamma'_1(t_2) (\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \gamma'_2(t_2) (\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)))^2 \\
& = \det^{-2} (\gamma'(t_1), \gamma'(t_2)) \|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2), \gamma(t_2) - \gamma(t_1) \rangle^2. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Подставим выражения (2.6) и (2.7) в (2.5), памятуя о том, что здесь $t_2 = t_2(t_1)$:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \frac{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}.$$

Сократим числитель и знаменатель на произведение общих отличных от нуля в силу условий (Г2) и (2.1) сомножителей $\det(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2))$, $\|\gamma'(t_1)\|^2$, затем извлечем квадратный корень:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))}{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle} \right|. \tag{2.8}$$

Из равенства (2.8) получаем требуемую формулу (2.2). $\square$

3. Аналитические взаимосвязи альфа-множества и его r -оболочки в плоском случае

В работе [2], посвященной изучению свойств чебышевских множеств, введено в рассмотрение понятие r -оболочки множества банахового пространства и изучены опорные свойства таких оболочек, здесь число $r > 0$. Вообще говоря, в упомянутой статье авторами используется термин «альфа-оболочка», который в настоящей работе вынужденно скорректирован в его буквенной части, поскольку буква альфа уже использована выше в ином контексте. Заметим также, что в монографии [4] оболочку из [2] предложено называть «множеством, слабо выпуклым по Ефимову–Стечкину с константой альфа».

О п р е д е л е н и е 3.1. Пересечение дополнений всех открытых шаров $E_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| < r\}$, $r > 0$, не пересекающихся с M , называется r -оболочкой множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и обозначается $(M)_r$. Множество M называется r -выпуклым, если $M = (M)_r$.

О п р е д е л е н и е 3.2. Замкнутый шар $\overline{E}_r(z) \triangleq \{z^* \in \mathbb{R}^n : \|z - z^*\| \leq r\}$ называется опорным к множеству $M \subset \mathbb{R}^n$ в точке $z^{(0)} \in M$, если внутри шара $\overline{E}_r(z)$ нет точек M и $z^{(0)}$ лежит на границе $\overline{E}_r(z)$.

В этом разделе класс рассмотрения множеств тот же, что и в предыдущем разделе. Изучаются плоские альфа-множества $M \subset \mathbb{R}^2$, границы $\Gamma = \partial M$ которых принадлежат семейству кривых $\{\Gamma\}_T$. Доказанная выше теорема позволяет в частном случае установить количественную связь числовых характеристик альфа-множества с его оболочкой.

Утверждение 3.1. Если в условиях теоремы 2.1 $x^{(0)}$ — псевдовершина множества M , порожденная локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, $t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0)$, граница

$\Gamma = \partial M \in \{\Gamma\}_T$ определяется вектор-функцией $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ и $L(x^{(0)})$ — отвечающая псевдовершине ветвь биссектрисы, то радиус опорного шара к M в точке $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$ вычисляется по формуле

$$r(z(t_1)) = \|\gamma'(t_1)\| \left| \frac{\langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle}{\det(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))} \right|. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отправной точкой в обосновании формулы (3.1) является равенство (2.5). В знаменателе правой части этого равенства стоит квадрат расстояния от точки $z(t_1) = (x_1, x_2) \in L(x^{(0)})$ до точки $\gamma(t_1)$ — одной из двух проекций $z(t_1) = (x_1, x_2)$ на множество M , т. е. $\rho^2(x^*, \gamma(t_1))$ — это квадрат радиуса опорного шара (здесь опорного круга) $\bar{E}_r(z(t_1))$ к M в точке $\gamma(t_1)$. Примем обозначение $r = r(z(t_1))$, подчеркивая тем самым зависимость радиуса опорного шара от выбора точки на биссектрисе. Тогда

$$r^2(z(t_1)) = \frac{\rho^2(x^*, \gamma(t_1))}{tg^2 \frac{\alpha(z(t_1))}{2}}.$$

Воспользуемся представлением (2.6) для числителя и формулой (2.8) для знаменателя этой дроби, сократим на общие отличные от нуля сомножители:

$$\begin{aligned} r^2(z(t_1)) &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1)) \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1))) \det^2(\gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1))} \\ &= \frac{\|\gamma'(t_1)\|^2 \langle \gamma'(t_2(t_1)), \gamma(t_2(t_1)) - \gamma(t_1) \rangle^2}{\det^2(\gamma'(t_1), \gamma'(t_2(t_1)))}. \end{aligned}$$

После извлечения квадратного корня получим (3.1). $\square$

4. Пример вычисления меры невыпуклости, радиуса опорного шара и радиуса чебышевского слоя для невыпуклого множества с разрывной кривизной границы

П р и м е р 4.1. В качестве множества M рассмотрим подграфик гладкой склейки двух скалярных функций

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t < 0, \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Граница $\Gamma = \partial M$ множества M задается вектор-функцией $\gamma(t) = (t, f(t))$, $t \in T = \mathbb{R}$. Касательный вектор $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ всюду отличен от нуля. При значении параметра $t_0 = 0$ имеет место разрыв производной второго порядка вектор-функции, $f''(t_0 - 0) = 2$, $f''(t_0 + 0) = 0$, т. е. здесь $T_2 = \{0\} \subset T$. Точка $x^{(0)} \triangleq (t_0, f(t_0)) = (0, 0)$ — псевдовершина графика $\Gamma = \text{gr } f$. Локальный диффеоморфизм, отображающий левую полуокрестность точки $t_0 = 0$ в ее правую полуокрестность, определяемый уравнением (1.3), найден в [14]:

$$t_2(t_1) = \frac{t_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 4t_1^2} \right), \quad t_1 < 0. \quad (4.1)$$

Важно подчеркнуть, что диффеоморфизм (4.1) в этом примере параметризует всю область определения функции, т. е. он имеет нелокальную область рассмотрения, «охватывая» окрестность точки $t_0 = 0$ максимально большого (бесконечного) радиуса. Биссектриса L содержит единственную ветвь $L(x^{(0)})$, ее параметрическое представление (см. [14])

$$L(x^{(0)}) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 = t_1 \frac{1 - \sqrt{1 + 4t_1^2}}{2}, x_2 = \frac{1}{4} + t_1^2 + \frac{\sqrt{1 + 4t_1^2}}{4}, t_1 < 0 \right\}. \quad (4.2)$$

Для отыскания меры невыпуклости множества воспользуемся формулой (2.8), которая применительно к графикам скалярных функций принимает вид:

$$tg \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{f(t_2(t_1)) - f(t_1) - (t_2(t_1) - t_1) f'(t_2(t_1))}{t_2(t_1) - t_1 + f'(t_2(t_1)) (f(t_2(t_1)) - f(t_1))} \right|.$$

Учитывая, что в данном примере вдоль диффеоморфизма выполняются тождества

$$f(t_2(t_1)) \equiv 0, \quad f'(t_2(t_1)) \equiv 0, \quad (4.3)$$

получим

$$tg \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \left| \frac{-f(t_1)}{t_2(t_1) - t_1} \right| = \left| \frac{-t_1^2}{\frac{t_1}{2} (-1 - \sqrt{1 + 4t_1^2})} \right| = \left| \frac{2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}} \right| = \frac{-2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}.$$

Тангенс монотонно растет, когда параметр $t_1 \rightarrow -\infty$, причем

$$\lim_{t_1 \rightarrow -\infty} tg \frac{\alpha(z(t_1))}{2} = \lim_{t_1 \rightarrow -\infty} \frac{-2t_1}{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}} = 1.$$

Отсюда мера невыпуклости подграфика рассматриваемой функции

$$\alpha = 2 \arctg 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Далее найдем радиус опорного шара в фиксированной точке биссектрисы, например, при значении параметра $t_1 = -\sqrt{2}$. В силу (4.1) отвечающее ему значение параметра $t_2 = t_2(t_1) = \sqrt{2}$. Согласно (4.2) центром опорного шара является точка $z(t_1) = (\sqrt{2}, 3)$. Формула (3.1) для радиуса опорного шара на графиках скалярных функций принимает вид:

$$r(z(t_1)) = \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \left| \frac{t_2(t_1) - t_1 + f'(t_2(t_1)) (f(t_2(t_1)) - f(t_1))}{f'(t_2(t_1)) - f'(t_1)} \right|.$$

Поскольку выполняются тождества (4.3), то после подстановки (4.1) получим

$$\begin{aligned} r(z(t_1)) &= \sqrt{1 + (f'(t_1))^2} \left| \frac{t_2(t_1) - t_1}{-f'(t_1)} \right| = \sqrt{1 + 4t_1^2} \left| \frac{-\frac{t_1}{2} (1 + \sqrt{1 + 4t_1^2})}{-2t_1} \right| \\ &= \sqrt{1 + 4t_1^2} \left| \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4} \right| = \sqrt{1 + 4t_1^2} \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Таким образом, $z(t_1) = (\sqrt{2}, 3)$ — центр опорного шара радиуса $r(z(t_1)) = 3$.

Интерес представляет задача поиска чебышевских слоев для невыпуклых множеств. В рассматриваемом примере, опираясь на формулу (4.4), можно найти величину (радиус) максимального чебышевского слоя [16]. Множество псевдовершин содержит единственную точку $x^{(0)} = (0, 0) \in \Gamma$, вследствие чего биссектриса L множества M исчерпывается одним одномерным многообразием $L(x^{(0)})$, здесь $L = L(x^{(0)})$. Крайняя его точка $\bar{x}$ принадлежит замыканию

$$\bar{x} \in \overline{L(x^{(0)})} = \text{supp } \varphi,$$

и может быть найдена предельным переходом в (4.2) при $t_1 \rightarrow t_0 - 0$ (см. [14]). Соответственно, переходя к пределу в (4.4), находим радиус $r_0 = r(z(t_0))$, $t_0 = 0$, максимального чебышевского слоя:

$$r_0 = \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \sqrt{1 + 4t_1^2} \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_1^2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Тем самым найден диапазон изменения параметра r -оболочки, в котором множество остается r -выпуклым. Здесь $M = (M)_r$, когда $0 < r \leq r_0 = \frac{1}{2}$.

Иллюстрация описанной ситуации приведена на рис. 1. На нем изображены невыпуклое множество M , его псевдовершина $x^{(0)} \in \partial M$, биссектриса $L(x^{(0)})$ с крайней точкой $\bar{x} \in \overline{L(x^{(0)})}$, центр опорного шара в некоторой точке $x \in \overline{L(x^{(0)})}$ и ее метрические проекции $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ на M , а также максимальный чебышевский слой величины $r_0 = \frac{1}{2}$.

Говоря о приложениях, заметим, что развиваемые алгоритмы и процедуры отыскания меры невыпуклости замкнутого множества имеют практическое значение в задачах оптимального управления. Так, например, если рассматривать M в качестве целевого множества в плоской задаче управления по быстродействию для случая, когда динамика управляемого процесса определяется кругом единичного радиуса с центром в начале координат (см. [10]), то представленная на рисунке биссектриса L является сингулярным множеством функции оптимального результата. В точках этой кривой нарушается единственность оптимальных траекторий. В данном случае из каждой точки кривой L в направлении метрических проекций на целевом множестве сходят ровно две оптимальные траектории. При этом чебышевский слой величины r , $0 < r \leq r_0$, является полосой, примыкающей к целевому множеству M , в котором функция оптимального результата сохраняет гладкость.

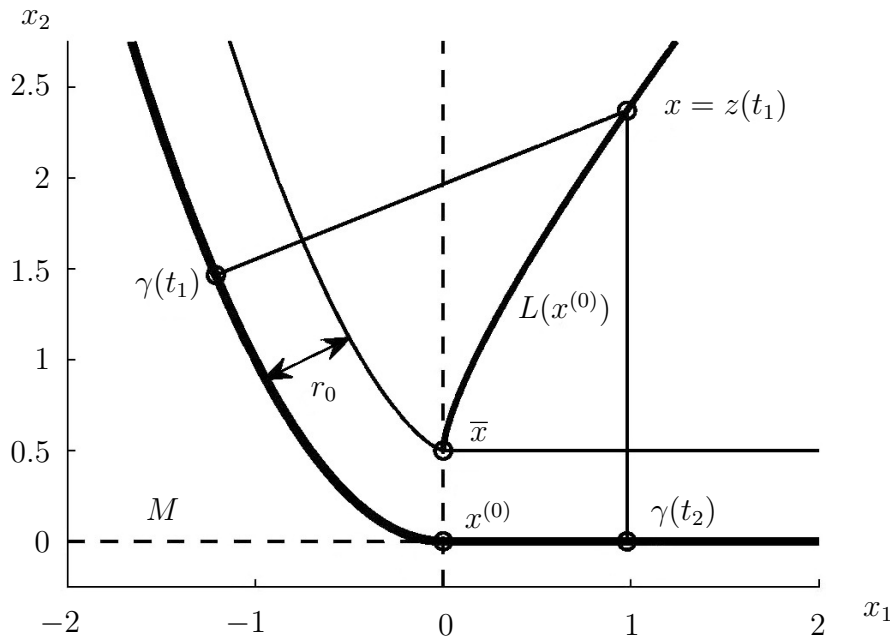


Рис. 1. Множество M , его биссектриса и максимальный чебышевский слой

References

- [1] А. А. Успенский, В. Н. Ушаков, А. Н. Фомин, α -множества и их свойства, Деп. в ВИНТИ 02.04.04, № 543–В2004, Ин-т математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, 2004, 62 с. [A. A. Uspenskii, V. N. Ushakov, A. N. Fomin, α -sets and Their Properties, Dep. in VINITI 04.02.04, No. 543–В2004, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2004, 62 pp.]
- [2] Н. В. Ефимов, С. Б. Стечкин, “Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества”, *ДАН СССР*, **127**:2 (1959), 254–257. [N. V. Efimov, S. B. Stechkin, “Support properties of sets in Banach spaces and Chebyshev sets”, *DAN USSR*, **127**:2 (1959), 254–257 (In Russian)].
- [3] Л. П. Власов, “Чебышевские множества и некоторые их обобщения”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 59–69; англ. пер.: L. P. Vlasov, “Chebyshev sets and some generalizations of them”, *Math. Notes*, **3**:1 (1968), 36–41.
- [4] Г. А. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, М., 2006. [G. A. Ivanov, *Weakly Convex Sets and Functions: Theory and Applications*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].
- [5] М. В. Балашов, Е. Е. Иванов, “Свойства метрической проекции на множество, слабо выпуклое по Виалю, и параметризация многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 483–489; англ. пер.: M. V. Balashov, G. E. Ivanov, “Properties of the metric projection on weakly vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images”, *Math. Notes*, **80**:4 (2006), 461–467.
- [6] М. В. Балашов, “Условие Липшица метрической проекции в гильбертовом пространстве”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22**:1 (2018), 13–29. [M. V. Balashov, “The Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **22**:1 (2018), 13–29 (In Russian)].
- [7] А. Р. Алимов, И. Г. Царьков, “Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения”, *УМН*, **71**:1(427) (2016), 3–84; англ. пер.: A. R. Alimov, I. G. Tsar’kov, “Connectedness and solarly in problems of best and near-best approximation”, *Russian Math. Surveys*, **71**:1 (2016), 1–77.
- [8] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront evolution”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **272**:1 (2011), 255–270.
- [9] В. Н. Ушаков, А. А. Успенский, “Альфа-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **26**:1 (2016), 95–120. [V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, “ α -sets in finite dimensional Euclidean spaces and their properties”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **26**:1 (2016), 95–120 (In Russian)].
- [10] П. Д. Лебедев, А. А. Успенский, “Элементы аналитического конструктора решений в классе задач управления по быстродействию с целевым множеством с разрывной кривизной границы”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 370–386. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, “Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 370–386].
- [11] А. А. Успенский, П. Д. Лебедев, “Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 59–73. [P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii, “Elements of analytical solutions constructor in a class of time-optimal control problems with the break of curvature of a target set”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 370–386 (In Russian)].
- [12] В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. Р. Матвийчук, “Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем”, *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Сборник статей, Труды МИАН, **315**, МИАН, М., 2021, 261–270; англ. пер.: V. N. Ushakov, A. A. Ershov, A. R. Matviychuk, “On estimating the degree of nonconvexity of reachable sets of control systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315** (2021), 247–256.
- [13] Т. Брекер, Л. Ландер, *Дифференцируемые ростки и катастрофы*, Мир, М., 1977. [T. Brecker, L. Lander, *Differentiable Germs and Catastrophes*, Mir Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

- [14] А. А. Успенский, “Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстродействия”, Тр. ИММ УрО РАН, **20**, 2014, 276–290; англ. пер.: A. A. Uspenskii, “Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291**, suppl. 1:3 (2015), 239–254.
- [15] V. D. Sedykh, “On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in $\mathbb{R}^k$ ”, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **43**, Singularity Theory and Its Applications (2006), 401–419.
- [16] М. И. Карлов, “Чебышевский слой многообразий в гильбертовом пространстве”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Труды МИАН, **219**, Наука, МАИК «Наука», М., 1997, 235–248; англ. пер.: M. I. Karlov, “Chebyshev layer of manifolds in a Hilbert space”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **219** (1997), 231–244.

Информация об авторах

Успенский Александр Александрович, доктор физико-математических наук, заведующий сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: uspen@imm.uran.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Лебедев Павел Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: pleb@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Успенский Александр Александрович
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2024 г.
Принята к публикации 07.06.2024 г.

Information about the authors

Alexander A. Uspenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the sector, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: uspen@imm.uran.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0725-4233>

Pavel D. Lebedev, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: pleb@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1693-3476>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexander A. Uspenskii
E-mail: uspen@imm.uran.ru

Received 02.04.2024
Reviewed 03.06.2024
Accepted for press 07.06.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Федотова И.М., Медведева М.И., Кацунова А.С., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228>

УДК 519.6



Методы построения инвариантных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$

Ирина Михайловна ФЕДОТОВА, Мария Ивановна МЕДВЕДЕВА,
Анастасия Сергеевна КАЦУНОВА

ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет»

660041, Российская Федерация, г. Красноярск, пр. Свободный, 79

Аннотация. В статье рассматривается вопрос о построении кубатурных формул для поверхности тора T в $\mathbb{R}^3$, инвариантных относительно группы G , порожденной отражениями T в себя. У известных на данный момент инвариантных кубатурных формул, имеющих степень точности больше 3, число узлов существенно превосходит минимально возможное. В статье построены инвариантные кубатурные формулы степени 5 и 7 для поверхности тора с числом узлов, приближенному к минимальному. Приведены таблицы значений узлов и коэффициентов построенных кубатурных формул. Исследована зависимость этих значений от отношения радиусов направляющей и образующей окружностей тора. Для построения использовался метод инвариантных кубатурных формул, основанный на теореме С. Л. Соболева.

Ключевые слова: кубатурные формулы, тор, инвариантные многочлены, группа преобразований тора в себя

Для цитирования: Федотова И.М., Медведева М.И., Кацунова А.С. Методы построения инвариантных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 146. С. 218–228.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228>

SCIENTIFIC ARTICLE

© I. M. Fedotova, M. I. Medvedeva, A. S. Katsunova, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228>

Methods for constructing invariant cubature formulas for integrals over the surface of a torus in $\mathbb{R}^3$

Irina M. FEDOTOVA, Maria I. MEDVEDEVA, Anastasiya S. KATSUNOVA

Siberian Federal University

79 Svobodny Pr., Krasnoyarsk 660041, Russian Federation

Abstract. The article considers the question of constructing cubature formulas for the surface of a torus T in $\mathbb{R}^3$, invariant under the group G generated by reflections of T into itself. For currently known invariant cubature formulas with a degree of accuracy greater than 3, the number of nodes significantly exceeds the minimum possible. The article proposes invariant cubature formulas of degree 5 and 7 for the surface of a torus with a number of nodes close to the minimum. Tables of values of nodes and coefficients of the constructed cubature formulas are given. The dependence of these values on the ratio of the radii of the guide and generatrix of the torus circles is studied. For construction, the method of invariant cubature formulas is used, based on the theorem of S. L. Sobolev.

Keywords: cubature formulas, torus, invariant polynomials, group of torus to self transformations

Mathematics Subject Classification: 65D32.

For citation: Fedotova I.M., Medvedeva M.I., Katsunova A.S. Methods for constructing invariant cubature formulas for integrals over the surface of a torus in $\mathbb{R}^3$. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 218–228. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-146-218-228> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается вопрос о построении кубатурных формул вида

$$I[f] = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f(x, y, z) dS \simeq \sum_{i=1}^N c_i f(x_i, y_i, z_i) \quad (0.1)$$

для поверхности тора T в $\mathbb{R}^3$, определяемой уравнением

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - 1)^2 + 4r^2 z^2 - 4r^2 = 0, \quad r \geq 1, \quad (0.2)$$

инвариантных относительно группы G , порожденной отражениями тора T в себя. Уравнение (0.2), являющееся нормированным уравнением тора

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 - a^2)^2 + 4R^2 Z^2 - 4R^2 a^2 = 0,$$

получено с помощью замены переменных $X = ax$, $Y = ay$, $Z = az$, где $r = R/a$.

Для исследования построения кубатурных формул для поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ есть веские причины. Во-первых, эта поверхность имеет различную кривизну в точках с фиксированным значением. Эта кривизна зависит от соотношения радиусов R, a , т. е. от $r = R/a$. В этом заключается главное различие построения кубатурных формул для поверхности тора и для поверхности с постоянной кривизной, например, сферы. Величина коэффициентов и значения координат узлов для тора тоже будет зависеть от соотношения радиусов R, a . Для некоторых соотношений формулы существуют, для некоторых нет. Во-вторых, на данный момент полностью описаны только минимальные кубатурные формулы для тора степени 3, построены отдельные минимальные формулы степени 2, а известные инвариантные формулы степеней больше 3 имеют число узлов гораздо больше минимального.

1. Основные понятия

Приведем некоторые сведения из теории инвариантных кубатурных формул.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется инвариантным множеством относительно преобразований группы G , если $g(\Omega) = \Omega$ для любого $g \in G$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Формула

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \simeq \sum_{j=1}^N c_j f(x^{(j)}), \quad \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

называется инвариантной кубатурной формулой относительно G , если область интегрирования Ω и весовая функция $p(x)$ инвариантны относительно G , и совокупность узлов данной формулы представляет собой объединение G -орбит, при этом узлам одной и той же орбиты сопоставляются одинаковые коэффициенты.

Понятие инвариантной кубатурной формулы было введено С. Л. Соболевым [1], им же была доказана приведенная ниже теорема и даны ее применения к построению инвариантных кубатурных формул для сферы.

Мы будем использовать теорему С. Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах в формулировке из [2].

Теорема 1.1. Для того, чтобы кубатурная формула (1.1), инвариантная относительно преобразований группы G , была точна для всех функций конечномерного векторного пространства Ψ , инвариантного относительно G , необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех функций из Ψ , которые инвариантны относительно G .

В работе будут строиться инвариантные кубатурные формулы, имеющие точность d .

О п р е д е л е н и е 1.3. Говорят, что кубатурная формула (1.1) имеет точность d , если она точно интегрирует (превращается в точное равенство) многочлены из $\mathbb{R}^n$ степени не выше d и существует хотя бы один многочлен степени $d + 1$, для которого формула (1.1) не точна.

В качестве группы G мы будем рассматривать группу отображений тора T в себя. Она представима в виде декартового произведения $G = G_1 \times G_2$ группы G_1 , порожденной отражением от плоскости xOy , и группой G_2 , порожденной группой симметрий плоскости xOy .

Заметим, что полученные в статье формулы не являются минимальными в том смысле, что число узлов не совпадает с нижней границей [3]. Вообще, минимальные формулы для тора известны только для $d = 2$ и $d = 3$ (см. [4–6]). Однако методы их получения, такие как метод воспроизводящего ядра и метод общих корней ортогональных многочленов, не удастся пока использовать при $d > 3$. Отметим также, что на построение и существование кубатурных формул (0.1) существенное влияние оказывает значение параметра r (впервые это было отмечено в [4]), так что наличие кубатурной формулы точности d при одном значении r не гарантирует существование таких формул при других r .

В качестве группы G_2 будем рассматривать группу D_2 (группа симметрий прямоугольника) [7]. Она включает в себя: отражения относительно осей, тождественное преобразование и поворот на угол 180° . Используя данную группу, удастся уменьшить число узлов и приблизиться к их минимальному количеству.

Построим кубатурные формулы для тора пятой и седьмой степени точности, инвариантные относительно группы $G = G_1 \times D_2$, в этом случае G -орбита точки $M(x, y, z) \in T$ может содержать самое большее 8 точек.

2. Построение инвариантной кубатурной формулы 5-й степени точности

Инвариантными для G многочленами не выше пятой степени являются

$$1, x^2 + y^2, x^2 - y^2, z^2, x^4 + y^4, x^4 - y^4, x^2 y^2, z^4, z^2(x^2 + y^2), z^2(x^2 - y^2).$$

Из (0.2) видно, что z^4 линейно выражается через многочлены

$$x^2 + y^2, z^2, x^4 + y^4, z^2(x^2 + y^2), x^2 y^2$$

и постоянные. Учитывая это, получаем, что базисными инвариантными формами относительно G для T будут многочлены

$$u_1 = 1, u_2 = x^2 + y^2, u_3 = x^2 - y^2, u_4 = z^2, u_5 = x^4 + y^4,$$

$$u_6 = x^4 - y^4, u_7 = z^2(x^2 + y^2), u_8 = z^2(x^2 - y^2), u_9 = x^2 y^2.$$

В уравнение тора (0.2) входит параметр r , поэтому узлы и коэффициенты кубатурной формулы будут зависеть от r . Выберем узлы кубатурной формулы так, чтобы их число N

было наименьшим возможным. Это число N определяется разрешимостью системы

$$I[u_j] = \sum_{i=1}^N c_i u_j(x_i, y_i, z_i), \quad j = 1, \dots, 8,$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i и координат узлов формулы.

Взяв в качестве узлов орбиты точек

$$(0; r+1; 0), (x_2; y_2; 0), (x_3; 0; z_3), (0; y_4; z_4), (0; y_5; z_5),$$

с учетом $x_2^2 + y_2^2 = (r+1)^2$ получаем $N = 18$ (нижняя граница числа узлов 14). Ранее в [8] была построена формула с 24 узлами. Приходим к следующей системе

$$\begin{aligned} 2c_1 + 4c_2 + 4c_3 + 4c_4 + 4c_5 &= 1, \\ 2c_1(r+1)^2 + 4c_2(x_2^2 + y_2^2) + 4c_3x_3^2 + 4c_4y_4^2 + 4c_5y_5^2 &= r^2 + \frac{3}{2}, \\ -2c_1(r+1)^2 + 4c_2(x_2^2 - y_2^2) + 4c_3x_3^2 - 4c_4y_4^2 - 4c_5y_5^2 &= 0, \\ 4c_3z_3^2 + 4c_4z_4^2 + 4c_5z_5^2 &= \frac{1}{2}, \\ 2c_1(r+1)^4 + 4c_2(x_2^4 + y_2^4) + 4c_3x_3^4 + 4c_4y_4^4 + 4c_5y_5^4 &= \frac{3}{4}r^4 + \frac{15}{4}r^2 + \frac{45}{32}, \\ -2c_1(r+1)^4 + 4c_2(x_2^4 - y_2^4) + 4c_3x_3^4 - 4c_4y_4^4 - 4c_5y_5^4 &= 0, \\ 4c_3z_3^2x_3^2 + 4c_4z_4^2y_4^2 + 4c_5z_5^2y_5^2 &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}, \\ 4c_3z_3^2x_3^2 - 4c_4z_4^2y_4^2 - c_5z_5^2y_5^2 &= 0, \\ 4c_2x_2^2y_2^2 &= \frac{1}{8}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{15}{64}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Складывая второе и третье, пятое и шестое, седьмое и восьмое уравнения и принимая во внимание, что узлы лежат на поверхности тора и, следовательно, $z_i^2 = 1 - (x_i - r)^2$ для $i = 4, 5$, и $z_6^2 = 1 - (y_6 - r)^2$, получаем

$$\begin{aligned} 8c_2x_2^2 + 8c_3x_3^2 &= r^2 + \frac{3}{2}, & 4c_2x_2^4 + 8c_3x_3^4 &= \frac{3}{4}r^4 + \frac{15}{4}r^2 + \frac{45}{32}, \\ 8c_3(1 - (x_3 - r)^2)x_3^2 &= \frac{r^2}{2} + \frac{3}{8}, & 4c_2x_2^2((r+1)^2 - x_2^2) &= \frac{1}{8}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

Отсюда можно найти x_2, c_2, x_3, c_3 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{2\sqrt{32r^6 - 24r^4 + 36r^2 - 9}}{128r^6 - 96r^4 + 144r^2 - 36} \\ &\quad \times \sqrt{32r^8 + 448r^7 - 972r^4 - 616r^6 + 816r^5 + 18r + 888r^3 - 207r^2 - 36}, \\ c_2 &= \frac{1(32r^6 - 24r^4 + 36r^2 - 9)^2}{48r(2r-1)(2r^2-3r+2)} \\ &\quad \times \frac{1}{(32r^8 + 448r^7 - 972r^4 - 616r^6 + 816r^5 + 18r + 888r^3 - 207r^2 - 36)}, \\ x_3 &= \frac{8r^4 - 12r - 16r^3 + 3 + 24r^2}{8r^3 - 12r^2 + 12r - 3}, \\ c_3 &= \frac{1}{192(4r^3 - 8r^2 + 7r - 2)r(8r^4 - 12r - 16r^3 + 3 + 24r^2)^2}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения x_2, c_2, x_3, c_3 в систему (2.1) и преобразовывая ее, получим систему из пяти уравнений для нахождения c_1, y_4, c_4, y_5, c_5 . Так как для произвольного r система выглядит очень громоздко, приведем пример ее решения для $r = 1$:

$$\begin{aligned} 2c_1 + 4c_4 + 4c_5 &= 19077/41552, \\ 8c_1 + 8c_4y_4 + 8c_5y_5 &= 3429/2968, \\ 8c_1 + 4c_4y_4^2 + 4c_5y_5^2 &= 745/848, \\ 32c_1 + 8c_4y_4^3 + 8c_5y_5^3 &= 1225/424, \\ 32c_1 + 4c_4y_4^4 + 4c_5y_5^4 &= 2079/848. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выразим c_1, c_4, c_5 из первых трех уравнений (2.2) и подставим в два последних. Теперь получим, что левые части последних уравнений есть симметрические многочлены относительно y_4 и y_5 . Для того, чтобы решить полученную нелинейную систему двух уравнений, произведем подстановку

$$y_4 + y_5 = a_1, \quad y_4y_5 = a_2.$$

Решая преобразованную систему, получим $a_1 = 392/187$, $a_2 = 147/187$. И так как решением исходной системы являются корни квадратного уравнения $y^2 - a_1y + a_2 = 0$, имеем $y_{4,5} = (196 \pm 7\sqrt{223})/187$. Далее находим значения c_1, c_4, c_5 :

$$c_1 = \frac{2261}{94128}, \quad c_4 = \frac{35773}{696192} + \frac{117925}{155250816}\sqrt{223}, \quad c_5 = \frac{35773}{696192} - \frac{117925}{155250816}\sqrt{223}.$$

Исследуем решение системы (2.1) в зависимости от произвольного параметра r . Коэффициенты c_2, c_3, c_4, c_5 положительны для любого r , а коэффициент c_1 меняет знак

$$\begin{aligned} c_1 &> 0 \quad \text{при} \quad 1 \leq r < 1,4981; \\ c_1 &= 0 \quad \text{при} \quad r = 1,4981; \\ c_1 &< 0 \quad \text{при} \quad r > 1,4981. \end{aligned}$$

Таким образом, при $r = 1,4981$ значение c_1 равно нулю и кубатурная формула содержит 16 узлов. Примеры построенных инвариантных формул пятой степени точности для разных радиусов приведены в табл. 1–3.

Таблица 1

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(0; 2; 0)$	2	$\frac{2261}{94128}$
$\left(\frac{\sqrt{265}}{10}; \frac{3\sqrt{15}}{10}; 0\right)$	4	$\frac{175}{2544}$
$\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{\sqrt{21}}{5}\right)$	4	$\frac{625}{9408}$
$\left(0; \frac{196 + 7\sqrt{223}}{187}; \frac{\sqrt{23961 - 126\sqrt{223}}}{187}\right)$	4	$\frac{35773}{696192} + \frac{117925\sqrt{223}}{155250816}$
$\left(0; \frac{196 - 7\sqrt{223}}{187}; \frac{\sqrt{23961 + 126\sqrt{223}}}{187}\right)$	4	$\frac{35773}{696192} - \frac{117925\sqrt{223}}{155250816}$

Таблица 2

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 2$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
(0; 3; 0)	2	-0,0420
(2,443; 1,7412; 0)	4	0,0654
(2,0270; 0; 0,9996)	4	0,0723
(0; 2,7395; 0,6731)	4	0,0808
(0; 1,1677; 0,5544)	4	0,0525

Таблица 3

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 5-й степени точности при $r = 100$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
(0; 101; 0)	2	-0,2154
(53,3428; 85,7644; 0)	4	0,1494
(99,5076; 0; 0,8704)	4	0,0833
(0; 100,5075; 0,8616)	4	0,0833
(0; 99,0000; 0,0112)	4	0,0416

3. Построение инвариантной кубатурной формулы 7-й степени точности

В этом случае базисными инвариантными формами относительно G для T будут многочлены:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 1, \quad u_2 = x^2 + y^2, \quad u_3 = x^2 - y^2, \quad u_4 = z^2, \quad u_5 = (x^2 + y^2)^2, \quad u_6 = (x^2 - y^2)^2, \quad u_7 = x^4 - y^4, \\
 u_8 &= z^2(x^2 + y^2), \quad u_9 = z^2(x^2 - y^2), \quad u_{10} = (x^2 - y^2)^3, \quad u_{11} = (x^2 + y^2)^3, \quad u_{12} = (x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2), \\
 u_{13} &= (x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2), \quad u_{14} = z^2(x^2 + y^2)^2, \quad u_{15} = z^2(x^2 - y^2)^2, \quad u_{16} = z^2(x^4 - y^4).
 \end{aligned}$$

В качестве узлов возьмем орбиты точек

$$\begin{aligned}
 (r+1; 0; 0), \quad (0; r+1; 0), \quad \left(\frac{r+1}{\sqrt{2}}; \frac{r+1}{\sqrt{2}}; 0\right), \quad (x_4; x_4; z_4), \quad (x_5; 0; z_5), \\
 (x_6; 0; z_6), \quad (0; y_7; z_7), \quad (0; y_8; z_8), \quad (0; y_9; z_9).
 \end{aligned}$$

Получаемое число узлов равно $N = 36$ (нижняя граница числа узлов 26). Ранее в [8] была построена формула с 40 узлами. Приходим к следующей системе

$$\begin{aligned}
 2c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 + 4c_5 + 4c_6 + 4c_7 + 4c_8 + 4c_9 &= 1, \\
 2c_1(r+1)^2 + 2c_2(r+1)^2 + 4c_3(r+1)^2 + 16c_4x_4^2 + 4c_5x_5^2 + 4c_6x_6^2 + 4c_7y_7^2 + 4c_8y_8^2 + 4c_9y_9^2 \\
 &= r^2 + \frac{3}{2}, \\
 2c_1(r+1)^2 - 2c_2(r+1)^2 + 4c_5x_5^2 + 4c_6x_6^2 - 4c_7y_7^2 - 4c_8y_8^2 - 4c_9y_9^2 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8c_4z_4^2 + 4c_5z_5^2 + 4c_6z_6^2 + 4c_7z_7^2 + 4c_8z_8^2 + 4c_9z_9^2 = \frac{1}{2}, \\
& 2c_1(r+1)^4 + 2c_2(r+1)^4 + 4c_3(r+1)^4 + 32c_4x_4^4 + 4c_5x_5^4 + 4c_6x_6^4 + 4c_7y_7^4 + 4c_8y_8^4 + 4c_9y_9^4 \\
& \quad = r^4 + 5r^2 + \frac{15}{8}, \\
& 2c_1(r+1)^4 + 2c_2(r+1)^4 + 4c_5x_5^4 + 4c_6x_6^4 + 4c_7y_7^4 + 4c_8y_8^4 + 4c_9y_9^4 = \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{2}r^2 + \frac{15}{16}, \\
& 2c_1(r+1)^4 - 2c_2(r+1)^4 + 4c_5x_5^4 + 4c_6x_6^4 - 4c_7y_7^4 - 4c_8y_8^4 - 4c_9y_9^4 = 0, \\
& 16c_4z_4^2x_4^2 + 4c_5z_5^2x_5^2 + 4c_6z_6^2x_6^2 + 4c_7z_7^2y_7^2 + 4c_8z_8^2y_8^2 + 4c_9z_9^2y_9^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}, \\
& 4c_5z_5^2x_5^2 + 4c_6z_6^2x_6^2 - 4c_7z_7^2y_7^2 - 4c_8z_8^2y_8^2 - 4c_9z_9^2y_9^2 = 0, \\
& 2c_1(r+1)^6 - 2c_2(r+1)^6 + 4c_5x_5^6 + 4c_6x_6^6 - 4c_7y_7^6 - 4c_8y_8^6 - 4c_9y_9^6 = 0, \\
& 2c_1(r+1)^6 + 2c_2(r+1)^6 + 4c_3(r+1)^6 + 64c_4x_4^6 + 4c_5x_5^6 + 4c_6x_6^6 + 4c_7y_7^6 + 4c_8y_8^6 + 4c_9y_9^6 \\
& \quad = r^6 + \frac{21}{2}r^4 + \frac{105}{8}r^2 + \frac{35}{16}, \\
& 2c_1(r+1)^6 + 2c_2(r+1)^6 + 4c_5x_5^6 + 4c_6x_6^6 + 4c_7y_7^6 + 4c_8y_8^6 + 4c_9y_9^6 \\
& \quad = \frac{1}{2}r^6 + \frac{21}{4}r^4 + \frac{105}{16}r^2 + \frac{35}{32}, \\
& 2c_1(r+1)^6 - 2c_2(r+1)^6 + 4c_5x_5^6 + 4c_6x_6^6 - 4c_7y_7^6 - 4c_8y_8^6 - 4c_9y_9^6 = 0, \\
& 32c_4z_4^2x_4^4 + 4c_5z_5^2x_5^4 + 4c_6z_6^2x_6^4 + 4c_7z_7^2y_7^4 + 4c_8z_8^2y_8^4 + 4c_9z_9^2y_9^4 = \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{4}r^2 + \frac{5}{16}, \\
& 4c_5z_5^2x_5^4 + 4c_6z_6^2x_6^4 + 4c_7z_7^2y_7^4 + 4c_8z_8^2y_8^4 + 4c_9z_9^2y_9^4 = \frac{1}{4}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{5}{32}, \\
& 4c_5z_5^2x_5^4 + 4c_6z_6^2x_6^4 - 4c_7z_7^2y_7^4 - 4c_8z_8^2y_8^4 - 4c_9z_9^2y_9^4 = 0.
\end{aligned}$$

Орбиты точек специально подобраны так, чтобы 10-е и 13-е уравнения системы совпали. Так как узлы лежат на поверхности тора, то $z_4^2 = 1 - (x_4\sqrt{2} - r)^2$, $z_i^2 = 1 - (x_i - r)^2$ при $i = 5, 6$, и $z_j^2 = 1 - (y_j - r)^2$ при $j = 7, 8, 9$.

В итоге рассматриваемая система состоит из 15 уравнений с 15 неизвестными. Разобьем эту систему на две подсистемы из восьми и семи уравнений. Из первой подсистемы, имеющей вид

$$\begin{aligned}
& 4c_1(r+1)^2 + 4c_3(r+1)^2 + 16c_4x_4^2 + 8c_5x_5^2 + 8c_6x_6^2 = r^2 + \frac{3}{2}, \\
& 4c_3(r+1)^4 + 32c_4x_4^4 = \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{2}r^2 + \frac{15}{16}, \\
& 16c_4z_4^2x_4^2 + 8c_5z_5^2x_5^2 + 8c_6z_6^2x_6^2 = \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}, \\
& 4c_1(r+1)^6 + 4c_3(r+1)^6 + 64c_4x_4^6 + 8c_5x_5^6 + 8c_6x_6^6 = r^6 + \frac{21}{2}r^4 + \frac{105}{8}r^2 + \frac{35}{16}, \\
& 4c_3(r+1)^6 + 64c_4x_4^6 = \frac{1}{2}r^6 + \frac{21}{4}r^4 + \frac{105}{16}r^2 + \frac{35}{32}, \\
& 4c_1(r+1)^6 + 8c_5x_5^6 + 8c_6x_6^6 = \frac{1}{2}r^6 + \frac{21}{4}r^4 + \frac{105}{16}r^2 + \frac{35}{32}, \\
& 32c_4z_4^2x_4^4 = \frac{1}{4}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{5}{32}, \\
& 8c_5z_5^2x_5^4 + 8c_6z_6^2x_6^4 = \frac{1}{4}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{5}{32},
\end{aligned}$$

найдем $c_1, c_3, c_4, x_4, c_5, x_5, c_6, x_6$.

Вторая подсистема имеет вид

$$\begin{aligned}
 2c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 + 4c_5 + 4c_6 + 4c_7 + 4c_8 + 4c_9 &= 1, \\
 4c_2(r+1)^2 + 4c_3(r+1)^2 + 16c_4x_4^2 + 8c_7y_7^2 + 8c_8y_8^2 + 8c_9y_9^2 &= r^2 + \frac{3}{2}, \\
 8c_4z_4^2 + 4c_5z_5^2 + 4c_6z_6^2 + 4c_7z_7^2 + 4c_8z_8^2 + 4c_9z_9^2 &= \frac{1}{2}, \\
 4c_2(r+1)^4 + 4c_3(r+1)^4 + 8c_7y_7^4 + 8c_8y_8^4 + 8c_9y_9^4 &= \frac{1}{2}r^4 + \frac{5}{2}r^2 + \frac{15}{16}, \\
 16c_4z_4^2x_4^2 + 8c_7z_7^2y_7^2 + 8c_8z_8^2y_8^2 + 8c_9z_9^2y_9^2 &= \frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{8}, \\
 4c_2(r+1)^6 + 4c_3(r+1)^6 + 64c_4x_4^6 + 4c_7y_7^6 + 4c_8y_8^6 + 4c_9y_9^6 &= r^6 + \frac{21}{2}r^4 + \frac{105}{8}r^2 + \frac{35}{16}, \\
 8c_7z_7^2y_7^4 + 8c_8z_8^2y_8^4 + 8c_9z_9^2y_9^4 &= \frac{1}{4}r^4 + \frac{5}{8}r^2 + \frac{5}{32}.
 \end{aligned}$$

Из этих соотношений получаем значения $c_2, c_7, y_7, c_8, y_8, c_9, y_9$.

При решении данных подсистем применяем замену переменных, подобную той, которая приведена в предыдущем пункте 2. Примеры построенных инвариантных формул седьмой степени точности для разных радиусов приведены в табл. 4–5.

Таблица 4

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 7-й степени точности при $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
(2; 0; 0)	2	0,02344
(0; 2; 0)	2	−0,00166
($\sqrt{2}/2$; $\sqrt{2}/2$; 0)	4	77/2048
$\left(11\sqrt{2}/14; 11\sqrt{2}/14; \sqrt{22/49}\right)$	8	117649/3748096
$\left(\frac{2178+11\sqrt{4659}}{1645}; 0; \frac{\sqrt{1858197-11726\sqrt{4659}}}{1645}\right)$	4	0,02866
$\left(\frac{2178-11\sqrt{4659}}{1645}; 0; \frac{\sqrt{1858197+11726\sqrt{4659}}}{1645}\right)$	4	0,02927
(0; 0,2714; 0,6849)	4	0,01614
(0; 1,0314; 0,9995)	4	0,02756
(0; 1,8910; 0,4538)	4	0,03708

Таблица 5

Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 7-й степени точности при $r = 2$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
(3; 0; 0)	2	0,01428
(0; 3; 0)	2	−0,14690
($3\sqrt{2}/2$; $3\sqrt{2}/2$; 0)	4	18823/525312
$\left(\frac{251\sqrt{2}}{218}, \frac{251\sqrt{2}}{218}, \frac{2\sqrt{2698}}{109}\right)$	8	5031300332523/154446630950912
(2,7366; 0; 0,6762)	4	0,02974
(1,3464; 0; 0,7568)	4	0,03668
(0; 1,0050; 0,1003)	4	0,01902
(0; 1,7255; 0,9615)	4	0,02467
(0; 2,9602; 0,2791)	4	0,10520

Заключение

В работе построены инвариантные кубатурные формулы пятой и седьмой степени точности для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$. Число узлов в данных формулах меньше, чем в построенных ранее, и приближено к минимальному. Показано, что существование и свойства инвариантных кубатурных формул для тора зависят от r .

References

- [1] С. Л. Соболев, В. Л. Васкевич, *Кубатурные формулы*, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996. [S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich, *Cubature Formulas*, IM SB RAN, Novosibirsk, 1996 (In Russian)].
- [2] И. П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, М., 1981. [I. P. Mysovskikh, *Interpolational Cubature Formulas*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian)].
- [3] М. В. Носков, “О приближенном интегрировании по поверхности тора”, *Вестник СПбГУ*, **3**:15 (1992), 100–102. [M. V. Noskov, “On approximate integration over the torus surface”, *Vestnik St. Petersburg University*, **3**:15 (1992), 100–102 (In Russian)].
- [4] M. V. Noskov, H. J. Schmid, “Minimal cubature formulae of degree 3 for integrals over the surface of the torus”, *Computing*, **57** (1996), 213–233.
- [5] И. М. Федотова, М. В. Носков, “Минимальные кубатурные формулы степени точности 3 для тора в $\mathbb{R}^3$ ”, *Математические труды*, **18**:2 (2015), 49–60; англ. пер.: I. M. Fedotova, M. V. Noskov, “Minimal cubature formulas of degree 3 for a torus in $\mathbb{R}^3$ ”, *Siberian Advances in Mathematics*, **26**:2 (2016), 90–98.
- [6] М. В. Носков, И. М. Федотова, “Об одной минимальной кубатурной формуле второй степени точности для тора в $\mathbb{R}^3$ ”, *Математические труды*, **23**:1 (2020), 177–186; англ. пер.: M. V. Noskov, I. M. Fedotova, “On a minimal cubature formula of degree two for a torus in $\mathbb{R}^3$ ”, *Siberian Advances in Mathematics*, **31**:1 (2021), 45–52.
- [7] Э. Б. Винберг, *Симметрия многочленов*, Библиотека «Математическое просвещение», МЦНМО, М., 2001. [E. B. Vinberg, *Symmetry of Polynomials*, MCNMO, Moscow, 2001 (In Russian)].
- [8] М. В. Носков, И. М. Федотова, “Об инвариантных кубатурных формулах для тора в $\mathbb{R}^3$ ”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:9 (2003), 1323–1329; англ. пер.: M. V. Noskov, I. M. Fedotova, “On invariant cubature formulas for a torus in $\mathbb{R}^3$ ”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **43**:9 (2003), 1270–1276.

Информация об авторах

Федотова Ирина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: frim@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8673-6275>

Медведева Мария Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4615-7882>

Information about the authors

Irina M. Fedotova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: frim@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8673-6275>

Maria I. Medvedeva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4615-7882>

Кацунова Анастасия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Российская Федерация. E-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1875-4188>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Медведева Мария Ивановна

E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г.

Поступила после рецензирования 03.06.2024 г.

Принята к публикации 07.06.2024 г.

Anastasiya S. Katsunova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics and Data Analysis Department, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russian Federation. E-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1875-4188>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Maria I. Medvedeva

E-mail: mimedvedeva@rambler.ru

Received 27.03.2024

Reviewed 03.06.2024

Accepted for press 07.06.2024