ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 26
№ 135
2021

ISSN 2686-9667
21135 >
9 772686 966000

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 26, № 135, 2021

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России (распоряжение от 28 декабря 2018 г. № 90-р) по физико-математическим наукам

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133
ISSN 2686-9667
Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редактор М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26, № 135. – 116 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135

Подписано в печать 24.09.2021. Дата выхода в свет 12.10.2021
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 14,5. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 21246. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

16+

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 26, no. 135, 2021

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order from December 28, 2018 no. 90-p)

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019
ПИ no. ФС77-76133
ISSN 2686-9667
Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372

Editor M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2021. – Vol. 26, no. 135. – 116 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135

Podpisano v pechat' 24.09.2021. Data vykhoda v svet 12.10.2021
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat’ na rizografe.
Pech. list 14,5. Usl. pech. list 13,5. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 21246. Svobodnaya tsena

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233
УДК 517.922, 517.927.4

О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка

Сарра БЕНАРАБ
Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 Мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, г. Гельма, п.я. 401

Аннотация. Рассматривается задача Коши для неявного дифференциального уравнения n-го порядка

$$g(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})=0,\quad t\in[0,T],\quad x(0)=A.$$

Предполагается, что $A=(A_0,\ldots,A_{n-1})\in\mathbb{R}^n$, функция $g:[0,T]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ измерима по первому аргументу $t\in[0,T]$, а при фиксированном t функция $g(t,\cdot):\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ непрерывна справа и монотонна по каждому из первых n аргументов, а по последнему $n+1$-му аргументу непрерывна. Также предполагается, что для некоторых достаточно гладких функций η,ν справедливы неравенства

$$\nu^{(i)}(0)\geq A_i\geq\eta^{(i)}(0),\ \ i=\overline{0,n-1},\ \ \nu^{(n)}(t)\geq\eta^{(n)}(t),\ \ t\in[0,T];$$
$$g\big(t,\nu(t),\dot{\nu}(t),\ldots,\nu^{(n)}(t)\big)\geq 0,\ \ g\big(t,\eta(t),\dot{\eta}(t),\ldots,\eta^{(n)}(t)\big)\leq 0,\ \ t\in[0,T].$$

Получены достаточные условия разрешимости и оценки решений рассматриваемой задачи Коши, кроме того, при выполнении этих условий множество решений, удовлетворяющих неравенствам $\eta^{(n)}(t)\leq x^{(n)}(t)\leq\nu^{(n)}(t)$, не пусто, и в этом множестве содержатся решения с наибольшей и наименьшей n-й производной. Это утверждение аналогично классической теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве. Метод доказательства использует результаты о разрешимости уравнений в частично упорядоченных пространствах. Приведены примеры применения полученных результатов к исследованию неявных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение n-го порядка, наибольшее и наименьшее решения, оценки решений, теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве

Для цитирования: *Бенараб С.* О теореме Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения n-го порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 225–233. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233

On Chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n

Sarra BENARAB
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University 8 May 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Abstract. We consider the Cauchy problem for the implicit differential equation of order n

$$g(t,x,\dot{x},\ldots,x^{(n)})=0,\quad t\in[0,T],\quad x(0)=A.$$

It is assumed that $A=(A_0,\ldots,A_{n-1})\in\mathbb{R}^n,$ the function $g:[0,T]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ is measurable with respect to the first argument $t\in[0,T],$ and for a fixed t, the function $g(t,\cdot):\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ is right continuous and monotone in each of the first n arguments, and is continuous in the last $n+1$-th argument. It is also assumed that for some sufficiently smooth functions η,ν, there hold the inequalities

$$\nu^{(i)}(0)\geq A_i\geq\eta^{(i)}(0),\quad i=\overline{0,n-1},\quad \nu^{(n)}(t)\geq\eta^{(n)}(t),\quad t\in[0,T];$$
$$g\big(t,\nu(t),\dot{\nu}(t),\ldots,\nu^{(n)}(t)\big)\geq 0,\quad g\big(t,\eta(t),\dot{\eta}(t),\ldots,\eta^{(n)}(t)\big)\leq 0,\quad t\in[0,T].$$

Sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem are derived as well as estimates of its solutions. Moreover, it is shown that under the listed conditions, the set of solutions satisfying the inequalities $\nu^{(n)}(t)\leq x^{(n)}(t)\leq\nu^{(n)}(t)$ is not empty and contains solutions with the largest and the smallest n-th derivative. This statement is similar to the classical Chaplygin theorem on differential inequality. The proof method uses results on the solvability of equations in partially ordered spaces. Examples of applying the results obtained to the study of second-order implicit differential equations are given.

Keywords: implicit differential equation of order $n,$ largest and smallest solutions, estimates of solutions, Chaplygin's theorem on differential inequality

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34A40, 34B10.

For citation: Benarab S. O teoreme Chaplygina dlya neyavnogo differentsial'nogo uravneniya n-go poryadka [On Chaplygin's theorem for an implicit differential equation of order n]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 225–233. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-225-233. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В теореме Чаплыгина (см. [1], а также [2]) утверждается, что если функция $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и для некоторой функции ϑ выполнено $\dot{\vartheta}(t) > f(t, \vartheta(t))$, $t \geq 0$, то любое решение уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, $t \geq 0$, с начальным условием $x(0) \leq \vartheta(0)$ удовлетворяет неравенству $x(t) < \vartheta(t)$, $t > 0$. Распространению теоремы Чаплыгина на задачу Коши и краевые задачи для систем дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, использованию полученных неравенств в теории таких уравнений посвящены многочисленные работы. Значимые результаты получены Н.В. Азбелевым, М.А. Красносельским, Я.Д. Мамедовым, А.И. Перовым, З.Б. Цалюком (см. статьи из собрания сочинений Н.В. Азбелева [3, раздел 1] и имеющуюся там библиографию). До недавнего времени недостаточно изученными оставались вопросы о неравенствах типа Чаплыгина для неявных (не разрешенных относительно производной) дифференциальных уравнений. Новые возможности в исследовании неявных дифференциальных уравнений появились благодаря работам А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского и др. авторов (см. [4–9]) об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими в частично упорядоченных пространствах. С использованием этих результатов в работах [10–12] были получены утверждения типа теоремы Чаплыгина для скалярных неявных дифференциальных уравнений первого порядка и интегральных уравнений. В работе [13] были получены результаты об абстрактных неравенствах, порожденных отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество, и на этой основе доказаны теоремы типа Чаплыгина о решениях краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений первого порядка (причем, в предположениях, ослабляющих «стандартные» условия непрерывности и монотонности по фазовым переменным на функций, порождающих уравнения). Это исследование было продолжено в [14], где для периодической задачи было показано существование наибольшего и наименьшего относительно специального порядка решений. В данной работе результаты [13] используются для исследования неявного дифференциального уравнения n-го порядка.

Статья разделена на три секции. В секции 1. приведены необходимые обозначения. В секции 2. сформулировано утверждение о разрешимости и оценке решения системы неявных дифференциальных уравнений первого порядка, распространяющее результаты [13, теорема 2] на случай более общего отношения порядка в пространстве векторных измеримых функций. На основании этого утверждения в секции 3. получено утверждение типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для неявного дифференциального уравнения n-го порядка и приведены иллюстративные примеры.

1. Основные обозначения

Обозначим через M пространство измеримых (по Лебегу) на $[0, T]$ вещественных функций, и через L его подпространство суммируемых на $[0, T]$ вещественных функций. Определим в M (и соответственно, в L) «естественный» порядок:

$$\forall u, v \in M \;\; u \leq v \;\Leftrightarrow\; u(t) \leq v(t) \;\text{ при п.в. }\; t \in [0, T].$$

Обозначим через AC пространство определенных на $[0, T]$ абсолютно непрерывных вещественных функций, а через AC_m — пространство $m-1$ раз дифференцируемых на $[0, T]$ функций, имеющих абсолютно непрерывную $m-1$-ю производную, таким образом, для $x \in AC_m$ выполнено

$$x^{(m)} \in L \ \text{ и } \ x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}x^{(m-1)}(0) + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^t (t-s)x^{(m)}(s)ds.$$

Для обозначения декартова произведения n множеств стандартно используем верхний индекс n (например, M^n, AC^n). В произведении M^n порядок будем задавать следующим образом. Пусть множества I_+ и I_- осуществляют разбиение множества $I := \{1, 2, \ldots, n\}$. Для $y = (y_1, \ldots, y_n) \in M^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in M^n$ полагаем

$$y \preceq z \ \Leftrightarrow \ \big(y_i \leq z_i \ \text{ при } \ i \in I_+ \ \text{ и } \ y_i \geq z_i \ \text{ при } \ i \in I_- \big). \tag{1.1}$$

2. Система дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.1}$$

где $f_i : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, некоторые заданные функции. Под решением системы (2.1) понимаем функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t \in [0, T]$.

Сформулируем достаточно очевидное распространение результатов [13, теорема 2] на случай более общего отношения порядка (1.1) в пространстве M^n векторных измеримых функций.

Теорема 2.1. *Пусть при всех $i = \overline{1, n}$ выполнено условие*

(F↓) *при п.в. $t \in [0, T]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $f_i(\cdot, x, v, y_i) : [0, T] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $f_i(t, \cdot, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$ и $v_1, \ldots, v_n$, а также убывает в случае $i \in I_+$ и возрастает в случае $i \in I_-$, функция $f_i(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что $\nu(0) \geq \eta(0)$ и $\dot{\nu} \geq \dot{\eta}$, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \leq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = I_+; \\ &f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \leq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad i = I_-. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Тогда для любого $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\eta_i(0) \leq A_i \leq \nu_i(0)$, $i = \overline{1, n}$, существует решение $x \in AC^n$ задачи Коши для системы (2.1) с начальным условием

$$x(0) = A, \tag{2.3}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta}_i(t) \leq \dot{x}_i(t) \leq \dot{\nu}_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 2.1 полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы 2 из работы [13], если на множестве M^n задать отношение порядка (1.1). Также теорема 2.1 может быть выведена из [13, теорема 2], для этого достаточно применить [13, теорема 2] к следующей системе, которая равносильна исходной системе (2.1):

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in I_+; \quad -f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad t \in [0, T], \quad i \in I_-.$$

З а м е ч а н и е 2.1. В отличие от большинства исследований дифференциальных уравнений в теореме 2.1 и в [13, теорема 2] функции f_i, $i = \overline{1, n}$, по второму и третьему аргументам не предполагаются непрерывными, т. е. эти функции не удовлетворяют условиям Каратеодори. Но так как выполнено условие (F$\downarrow$), композиция $f_i(\cdot, x(\cdot), u(\cdot), y_i)$ является измеримой при любых $x, u \in M^n$. Это свойство суперпозиционной измеримости следует из результатов [15].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 во множестве решений задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющих неравенствам (2.4), существуют решения с наименьшей и наибольшей производной (и поэтому соответствующие решения являются наименьшим и наибольшим в этом множестве).*

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения о решениях периодической краевой задачи в работе [14] и основано на результатах [13] о минимальном / максимальном решениях операторных уравнений и свойствах оператора Немыцкого.

3. Дифференциальное уравнение n-го порядка

Пусть задана функция $g : [0, T] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. Рассмотрим неявное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

«Стандартной подстановкой» $x_1 = x$, $x_{i+1} = \dot{x}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, уравнение (3.1) записывается в виде системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} - x_n = 0, \\ g(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_n) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

к которой можно применить вышеизложенные результаты. В определении порядка на множестве M^n положим $I_+ = I$, $I_- = \emptyset$. Таким образом, из теоремы 2.1 и предложения 2.1 получаем следующее утверждение типа теоремы Чаплыгина для уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть при любом $(x_1, \ldots, x_n, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ функция $g(\cdot, x_1, \ldots, x_n, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ измерима, а при п.в. $t \in [0, T]$ функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ по каждому из первых n аргументов $x_1, \ldots, x_n$ убывает и непрерывна справа, а по последнему аргументу v является непрерывной. Пусть для функций $\nu, \eta \in AC_n$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &\nu^{(i)}(0) \geq \eta^{(i)}(0), \quad i = \overline{0, n-1}, \quad \nu^{(n)}(t) \geq \eta^{(n)}(t), \quad t \in [0, T]; \\ &\nu^{(i+1)}(t) \geq \nu^{(i)}(t), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ldots, \nu^{(n)}(t)\big) \geq 0, \quad t \in [0, T]; \\ &\eta^{(i+1)}(t) \leq \eta^{(i)}(t), \quad i = \overline{0, n-2}, \quad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ldots, \eta^{(n)}(t)\big) \leq 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Тогда для любого $A = (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $\eta^{(i)}(0) \le A_i \le \nu^{(i)}(0)$ *при всех* $i = \overline{0, n-1}$, *существует решение* $x \in AC_n$ *задачи Коши для уравнения* (3.1) *с начальным условием*

$$x(0) = A_0, \ \ldots, \ x^{(n-1)}(0) = A_{n-1}, \tag{3.3}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\eta^{(n)}(t) \le x^{(n)}(t) \le \nu^{(n)}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.4}$$

Кроме того, во множестве решений задачи (3.1), (3.3), *удовлетворяющих неравенствам* (3.4), *существуют решения с наименьшей и наибольшей производной* n *-го порядка.*

Сформулируем частный случай теоремы 3.1 — утверждение о разрешимости неявного уравнения второго порядка

$$g(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Следствие 3.1. *Пусть при всех* $(x_1, x_2, v) \in \mathbb{R}^3$ *функция* $g(\cdot, x_1, x_2, v) : [0, T] \to \mathbb{R}$ *измерима, при п.в.* $t \in [0, T]$ *функция* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *по первому и второму аргументам* x_1, x_2 *убывает и непрерывна справа, а по третьему аргументу* v *является непрерывной. Пусть для функций* $\nu, \eta \in AC_2$ *выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}
&\nu(0) \ge \eta(0), \ \ \dot{\nu}(0) \ge \dot{\eta}(0), \quad \ddot{\nu}(t) \ge \ddot{\eta}(t), \ \ t \in [0, T];\\
&\dot{\nu}(t) \ge \nu(t), \qquad g\big(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \ddot{\nu}(t)\big) \ge 0, \quad t \in [0, T];\\
&\dot{\eta}(t) \le \eta(t), \qquad g\big(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \ddot{\eta}(t)\big) \le 0, \quad t \in [0, T].
\end{aligned}$$

Тогда для любых $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\eta(0) \le A_0 \le \nu(0)$, $\dot{\eta}(0) \le A_1 \le \dot{\nu}(0)$, *существует решение* $x \in AC_2$ *задачи Коши для уравнения* (3.5) *с начальным условием*

$$x(0) = A_0, \quad \dot{x}(0) = A_1, \tag{3.6}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\ddot{\eta}(t) \le \ddot{x}(t) \le \ddot{\nu}(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.7}$$

Кроме того, во множестве решений задачи (3.5), (3.6), *удовлетворяющих неравенствам* (3.7), *существуют решения с наименьшей и наибольшей второй производной.*

Проиллюстрируем полученные утверждения исследованием конкретных дифференциальных уравнений.

П р и м е р 3.1. Пусть заданы неотрицательные числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Рассмотрим на полуоси $t \ge 0$ задачу Коши для уравнения

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\dot{x} + \bar{b}x + \bar{c} \tag{3.8}$$

с начальным условием

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1 \tag{3.9}$$

(частный случай уравнения (3.8) см. [17, с. 521, уравнение 6.236]). Покажем, что для этой задачи выполнены условия следствия 3.1.

Выберем произвольное $T > 0$. Определим функцию

$$g : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}x_1 - \bar{b}x_2 - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна по остальным трем аргументам, убывает по второму и третьему аргументам. Определим также функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 1, \quad \nu(t) := \mathcal{A}\exp(t), \quad \text{где} \ \ \mathcal{A} = \max\Big\{1, \frac{1}{2}\left(\bar{a} + \bar{b} + \sqrt{(\bar{a} + \bar{b})^2 + 4\bar{c}}\,\right)\Big\}.$$

Непосредственными вычислениями легко проверяется, что эти функции удовлетворяют требованиям следствия 3.1. Таким образом, в силу следствия 3.1, можно утверждать, что существует решение $x \in AC_2$ задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le \ddot{x}(t) \le \mathcal{A}\exp(t), \quad t \in [0, T],$$

и во множестве решений задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющих этим неравенствам, есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. А так как число $T > 0$ может быть любым, то соответствующее утверждение справедливо при $t \in [0, \infty)$.

Отметим, что полученное утверждение справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\dot{x} + b(t)x + c(t)$$

с переменными коэффициентами — измеримыми неотрицательными функциями, удовлетворяющими неравенствам

$$a(t) \le \bar{a}, \quad b(t) \le \bar{b}, \quad c(t) \le \bar{c}. \tag{3.10}$$

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}^2 = \bar{a}\chi(\dot{x}) + \bar{b}\chi(x) + \bar{c}, \quad t \ge 0, \tag{3.11}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{3.12}$$

Здесь $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \ge 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$ Для исследования этого неявного дифференциального уравнения многие известные методы не применимы еще и потому, что правая часть является разрывной по x и $\dot{x}$ функцией.

Для произвольного $T > 0$ определим функцию

$$g : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad g(t, x_1, x_2, v) := v^2 - \bar{a}\chi(x_1) - \bar{b}\chi(x_2) - \bar{c}.$$

Эта функция измерима по первому аргументу, непрерывна справа и убывает по второму и третьему аргументам, непрерывна по третьему аргументу. Определим функции $\nu, \eta \in AC_2$ формулами

$$\eta(t) := 0, \quad \nu(t) := \exp(\lambda t), \quad \text{где} \ \ \lambda = \max\big\{1, \sqrt{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}}\,\big\}.$$

Определенные здесь функции удовлетворяют требованиям следствия 3.1. Поэтому, согласно следствию 3.1, существует решение $x \in AC_2$ задачи (3.11), (3.12), удовлетворяющее неравенствам

$$0 \le \ddot{x}(t) \le \lambda^2 \exp(\lambda t),$$

во множестве решений задачи (3.8), (3.9), удовлетворяющих этим неравенствам, есть решения с наименьшей и наибольшей второй производной. Данное утверждение также справедливо и для более общего уравнения

$$\ddot{x}^2 = a(t)\chi(\dot{x}) + b(t)\chi(x) + c(t),$$

где измеримые неотрицательные функциями a, b, c удовлетворяют неравенствам (3.10).

References

[1] С. А. Чаплыгин, "Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений", *Собрание сочинений.* Т. I, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, "Foundations of a new method of approximate integration of differential equations", *Collected Works.* V. I, Gostekhizdat, Moscow, 1948, 348–368 (In Russian)].

[2] Н. Н. Лузин, "О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина", *УМН*, **6**:46 (1951), 3–27. [N. N. Luzin, "On the method of approximate integration of academician S. A. Chaplygin", *Uspekhi Mat. Nauk*, **6**:46 (1951), 3–27 (In Russian)].

[3] *Избранные труды Н. В. Азбелева*, ред. В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2012. [V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Selected Works of N. V. Azbelev*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2012 (In Russian)].

[4] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces", *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[5] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On coincidence points of mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[7] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **201** (2016), 330–343.

[8] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13-33.

[9] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, И. Д. Серова, "Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 345–358. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, I. D. Serova, "Some questions of the analysis of mappings of metricand partially ordered spaces", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 345–358 (In Russian)].

[10] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities", *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[11] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On Ordered-Covering Mappings and Implicit Differential Inequalities", *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[12] Т. В. Жуковская, И. Д. Серова, "Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2020, № 186, 38–44. [T. V. Zhukovskaya, I. D. Serova, "On estimates of solutions of boundary-value problems for implicit differential equations with deviating argument", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2020, № 186, 38–44 (In Russian)].

[13] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления", *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2021), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Functional and differential inequalities and their applications to control problems", *Differential Equations*, **56**:11 (2021), 1440–1451.

[14] С. Бенараб, "Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, "Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].

[15] И. В. Шрагин, "Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, "Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[16] Н. В. Азбелев, "Как это было (Об основных этапах развития современной теории функционально дифференциальных уравнений)", *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*, **9**:1(17) (2003), 1–22. [N. V. Azbelev, "How it was (On the main stages of development of modern theory of functional differential equations)", *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, **9**:1(17) (2003), 1–22 (In Russian)].

[17] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976, 589 с. [E. Kamke, *Ordinary Differential Equations Handbook*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian), 589 pp.]

Информация об авторе

Бенараб Сарра, аспирант, Лаборатория прикладной математики и моделирования. Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
Поступила после рецензирования 21.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the author

Sarra Benarab, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory. University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Received 15.06.2021
Reviewed 21.08.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240
УДК 517.97, 517.988.38

Вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса в частично упорядоченных пространствах

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ**[2] **,**
Ольга Викторовна ФИЛИППОВА[3]

[1] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе получено утверждение о минимуме графика отображения, действующего в частично упорядоченных пространствах. В доказательстве этого утверждения используется теорема о минимуме отображения в частично упорядоченном пространстве из статьи [A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2018. V. 180. Iss. 1, 48–61]. Также в данной работе показано, что это утверждение является аналогом вариационных принципов Экланда и Бишора–Фелпса — эффективных инструментов исследования экстремальных задач для функционалов, заданных на метрических пространствах. А именно, полученное в данной работе утверждение, примененное к частично упорядоченному пространству, созданному из метрического пространства введением в нем аналогов отношения порядка Бишопа–Фелпса, равносильно классическим вариационным принципам Экланда и Бишора–Фелпса.

Ключевые слова: частично упорядоченное пространство, вариационные принципы, неравенство типа Каристи, инфимум функционала

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_а).

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковская Т.В., Филиппова О.В.* Вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса в частично упорядоченных пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 234–240.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240

Eckland and Bishop–Phelps variational principles in partially ordered spaces

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA[1] **, Tatiana V. ZHUKOVSKAIA**[2] **, Olga V. Filippova**[3]

[1] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[2] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[3] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In this paper, an assertion about the minimum of the graph of a mapping acting in partially ordered spaces is obtained. The proof of this statement uses the theorem on the minimum of a mapping in a partially ordered space from [A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces // Journal of Optimization Theory and Applications. 2018. V. 180. Iss. 1, 48–61]. It is also shown that this statement is an analogue of the Eckland and Bishop–Phelps variational principles which are effective tools for studying extremal problems for functionals defined on metric spaces. Namely, the statement obtained in this paper and applied to a partially ordered space created from a metric space by introducing analogs of the Bishop–Phelps order relation, is equivalent to the classical Eckland and Bishop–Phelps variational principles.

Keywords: partially ordered space, variational principles, Caristi-like inequality, infimum of a functional

Mathematics Subject Classification: 58E30, 49J52, 06A06.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a).

For citation: Zhukovskaya Z.T, Zhukovskaya T.V., Filippova O.V. Variacionnye principy Eklanda i Bishopa–Felpsa v chastichno uporyadochennyh prostranstvah [Eckland and Bishop–Phelps variational principles in partially ordered spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 234–240. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-234-240. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, (X, ρ) — полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственный функционал (т. е. $\{x \in X : U(x) \neq +\infty\} \neq \emptyset$), который полунепрерывен снизу и ограничен снизу. Сформулируем необходимые в данной работе вариационные принципы нелинейного анализа.

Следующее утверждение называют вариационным принципом Экланда.

Теорема 0.1 (см. [1]). *Для любых $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и для любого $x_0 \in X$ такого, что*

$$U(x_0) \leq \varepsilon + \inf_{x \in X} U(x),$$

существует $\overline{x} \in X$, удовлетворяющий неравенствам

$$U(\overline{x}) \leq U(x_0), \quad \rho(\overline{x}, x_0) \leq \lambda, \tag{0.1}$$

$$\forall x \neq \overline{x} \quad U(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x, \overline{x}) > U(\overline{x}). \tag{0.2}$$

Теперь приведем вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

Теорема 0.2 (см., например, теорему 2.1 в [2]). *Для произвольного $c > 0$ и любого $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) < +\infty$, существует $\overline{x} \in X$, удовлетворяющий неравенствам*

$$U(\overline{x}) + c\rho(x_0, \overline{x}) \leq U(x_0), \tag{0.3}$$

$$\forall x \neq \overline{x} \quad U(x) + c\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}). \tag{0.4}$$

В [3] было доказано, что вариационные принципы Экланда и Бишопа–Фелпса эквивалентны полученной в [4] теореме о достижении минимума функционала U, если этот функционал удовлетворяет следующему условию

$$\exists k > 0 \ \ \forall x \in X \ \ U(x) \neq \inf_{z \in X} U(z) \ \Rightarrow \ \exists x' \in X \setminus \{x\} \ \ U(x') + k\rho(x', x) \leq U(x). \tag{0.5}$$

Условие (0.5) называют условием типа Каристи, оно аналогично неравенству, введенному Дж. Каристи в качестве условия существования неподвижных точек (см. [5]). С использованием [4, теорема 3] в работе [6] были определены классы неограниченных снизу функций, для которых оказываются справедливыми утверждения вариационных принципов Экланда и Бишопа–Фелпса, и эти результаты были применены к исследованию липшицевых отображений. Результаты [4] были развиты в [7] применительно к функционалам, зависящим от параметров.

В работе [8] результаты [4] были распространены на отображения, действующие из одного частично упорядоченного пространства в другое, и для таких отображений были получены условия достижения минимальных значений. Естественно, возник вопрос: можно ли из теоремы [8] получить утверждение, которое играло бы в анализе отображений частично упорядоченных пространств роль, аналогичную роли принципа Экланда. В данной статье предлагается такое утверждение.

1. Основной результат

1.1. Вариационные принципы в частично упорядоченном пространстве

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $X = (X, \preceq)$ и $Y = (Y, \preceq)$ и отображение $U : X \to Y$. Напомним, что отображение U называют строго изотонным на множестве $X_0 \subset X$, если для любых $x, x' \in X_0$ таких, что $x' \prec x$ выполнено $U(x') \prec U(x)$. Будем обозначать через $\operatorname{Min} Y$ — множество минимальных элементов пространства Y, то есть

$$\forall \overline{y} \in \operatorname{Min} Y \quad \forall y \in Y \quad y \not\prec \overline{y}.$$

В [8] определено следующее условие, названное *условием типа Каристи* (*для частично упорядоченных пространств*):

(K) *для любого $x \in X$, если $U(x) \notin \operatorname{Min} Y$, то существует такой $x' \in X$, что*

$$x' \prec x, \quad U(x') \prec U(x). \tag{1.1}$$

Сформулируем полученное в работе [8] утверждение о достижении отображением $U : X \to Y$ минимальной точки пространства Y.

Теорема 1.1 (см. [8]). *Пусть выполнены условие* (K) *и условие*

(S) *произвольная бесконечная цепь $S \subset X$, сужение на которую отображения U является строго изотонным, имеет нижнюю границу $w \in X$, удовлетворяющую неравенству $U(w) \prec U(x)$ при всех $x \in S$, $x \neq w$.*

Тогда

$$U(X) \cap \operatorname{Min} Y \neq \varnothing,$$

и более того, для любого $x_0 \in X$ существует такой $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, что

$$U(\overline{x}) \in \operatorname{Min} Y, \tag{1.2}$$

$$U(\overline{x}) \preceq U(x_0). \tag{1.3}$$

Теперь приведем основной результат данной работы, который можно считать аналогом вариационных принципов Экланда и Бишопа–Фелпса для частично упорядоченных пространств, и который тесно связан с теоремой 1.1.

Определим на графике $\operatorname{gph} U = \{(x, U(x))\} \subset X \times Y$ отображения $U : X \to Y$ отношение порядка, полагая для любых $(x, y) \in \operatorname{gph} U$, $(x', y') \in \operatorname{gph} U$ выполненным строгое неравенство $(x', y') \prec (x, y)$ тогда и только тогда, когда $x' \prec x$ и $y' \prec y$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие* (S)*. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует $\overline{x} \in X$ такой, что $\overline{x} \preceq x_0$ и*

$$\big(\overline{x}, U(\overline{x})\big) \in \operatorname{Min} \operatorname{gph} U. \tag{1.4}$$

Доказательство. Включение (1.4) означает, что при любом $x \in X$ выполнено $\big(x, U(x)\big) \not\prec \big(\overline{x}, U(\overline{x})\big)$. Таким образом, включение (1.4) будет выполнено тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X \quad x \not\prec \overline{x} \ \text{ или } \ U(x) \not\prec U(\overline{x}). \tag{1.5}$$

Определим подпространство $X_0 = \{x \in X : x \preceq x_0\}$ частично упорядоченного пространства X. Сужение отображения $U : X \to Y$ на подпространство X_0 будем обозначать символом U_0. Заметим, что из выполнения условия (S) для исходного отображения $U : X \to Y$ следует, что его сужение $U_0 : X_0 \to Y$ также удовлетворяет условию (S).

Рассмотрим две взаимоисключающие ситуации: отображение U_0 удовлетворяет условию (K) и не удовлетворяет этому же условию (K). Вначале, пусть условие (K) выполнено. Тогда, согласно теореме 1.1, существует $\overline{x} \preceq x_0$ такой, что справедливо (1.2), то есть для любого $x \in X_0$ имеем $U_0(x) \not\prec U_0(\overline{x})$. Эти соотношения означают, что если $x \preceq x_0$, то и для исходного отображения U выполнено $U(x) \not\prec U(\overline{x})$. Поэтому в данном случае существует $\overline{x}$, для которого соотношение (1.5) выполнено.

Пусть теперь отображение U_0 не удовлетворяет условию (K). Это означает, что существует $\overline{x} \in X_0$ такой, что $U_0(\overline{x}) \notin \operatorname{Min} Y$ и для любого $x \in X_0$ выполнено $x \not\prec \overline{x}$ или $U_0(x) \not\prec U_0(\overline{x})$. Таким образом, определен элемент $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, для которого $x \not\prec \overline{x}$ или $U(x) \not\prec U(\overline{x})$ при всех $x \in X_0$. Если же $x \notin X_0$, то очевидно $x \not\prec \overline{x}$. Итак, и в этом случае существует $\overline{x}$, для которого соотношение (1.5) выполнено. □

1.2. Связь с принципом Экланда в метрическом пространстве

Использование порядка, предложенного Бишопом и Фелпсом (см. [9, теорема 7.5.1]), позволяет устанавливать взаимосвязь между на первый взгляд далекими результатами анализа в метрических и частично упорядоченных пространствах. Здесь мы применим эту идею, чтобы показать как из теоремы 1.2 выводится «классический» принцип Экланда (для отображений метрических пространств).

Итак, пусть $X \doteq (X, \rho)$ — полное метрическое пространство и задан собственный функционал $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, являющийся ограниченным снизу и полунепрерывным снизу. Пусть также заданы числа $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и элемент $x_0 \in X$ такой, что

$$U(x_0) \le \varepsilon + \inf_{x \in X} U(x). \tag{1.6}$$

Зададим на X порядок соотношением

$$x_2 \preceq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(x_1, x_2) \le U(x_1) - U(x_2). \tag{1.7}$$

В работе [8] показано, что при таком определении порядка в X отображение U, действующее из $(X, \preceq)$ в $\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (S).

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, удовлетворяющий соотношению (1.5). Неравенство $\overline{x} \preceq x_0$ означает, что $\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x_0) \le U(x_0) - U(\overline{x})$. Отсюда, учитывая (1.6), получаем $\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x_0) \le \varepsilon + \inf\limits_{x \in X} U(x) - U(\overline{x}) \le \varepsilon$. Следовательно, выполнено $\rho(\overline{x}, x_0) \le \lambda$ и $U(\overline{x}) \le U(x_0)$, то есть оба неравенства (0.1) справедливы.

В рассматриваемых упорядоченных пространствах для любых $x \in X$, $x \ne \overline{x}$, соотношение (1.5) записывается в виде

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) \nleq U(\overline{x}) - U(x) \ \text{ или } \ U(x) \not< U(\overline{x}).$$

Полученные соотношения равносильны совокупности неравенств

$$\frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x) \ \text{ или } \ U(x) \ge U(\overline{x}).$$

В этой совокупности из второго неравенства, очевидно, следует первое. Действительно,

$$U(x) \geq U(\overline{x}) \;\Rightarrow\; U(\overline{x}) - U(x) \leq 0 < \frac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) \;\text{ при }\; x \neq \overline{x}.$$

Таким образом, доказано, что при всех $x \neq \overline{x}$ выполнено $\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x)$, то есть установлена справедливость неравенства (0.2).

Итак, теорема 0.1 — вариационный принцип Экланда доказана.

1.3. Связь с принципом Бишопа–Фелпса в метрическом пространстве

В заключение продемонстрируем, как из теоремы 1.2 выводится теорема 0.2 — вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

Как и в предыдущем пункте, здесь $X \doteq (X, \rho)$ — полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — собственный функционал, являющийся ограниченным снизу и полунепрерывным снизу. Пусть заданы число $c > 0$ и элемент $x_0 \in X$, такой, что $U(x_0) < +\infty$. Зададим на X порядок соотношением

$$x_2 \preceq x_1 \quad \Leftrightarrow \quad c\rho(x_1, x_2) \leq U(x_1) - U(x_2). \tag{1.8}$$

При таком определении порядка в X отображение U, действующее из $(X, \preceq)$ в $\overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяет условию (S) (см. [8]).

Из теоремы 1.2 следует, что существует $\overline{x} \in X$, $\overline{x} \preceq x_0$, удовлетворяющий соотношению (1.5). Неравенство $\overline{x} \preceq x_0$ означает, что $c\rho(\overline{x}, x_0) \leq U(x_0) - U(\overline{x})$, и таким образом, справедливо неравенство (0.3) в утверждении теоремы 0.2.

Соотношение (1.5) для рассматриваемых упорядоченных пространств означает, что при любом $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, выполнено

$$c\rho(\overline{x}, x) \nleq U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \nless U(\overline{x}),$$

то есть любой $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, удовлетворяет совокупности неравенств

$$c\rho(\overline{x}, x) > U(\overline{x}) - U(x) \;\text{ или }\; U(x) \geq U(\overline{x}).$$

В этой совокупности из второго неравенства, очевидно, следует первое. Таким образом доказано, что при любом $x \in X$, $x \neq \overline{x}$, неравенство (0.4) выполнено.

Итак, принцип Экланда доказан.

References

[1] I. Ekeland, “Nonconvex minimization problems”, *Bulletin of the American Mathematical Society. New Series*, **1**:3 (1979), 443–474.

[2] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 2003, 690 pp.

[3] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение”, *Математические заметки*, **103**:6 (2018), 948–954; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization”, *Mathematical Notes*, **103**:6 (2018), 1014–1019.

[4] А. В. Арутюнов, “Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 30–44; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Caristi’s condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 24–37.

[5] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.

[6] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, “Об обобщениях и приложениях вариационных принципов нелинейного анализа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 377–385. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, “On generalizations and applications of variational principles of nonlinear analysis”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 377–385 (In Russian)].

[7] A. V. Arutyunov, B. D. Gel’man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.

[8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition and the existence of minima of mappings in partially ordered spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.

[9] Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988, 280 с. [F. Clark, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 15.02.2021 г.
Поступила после рецензирования 12.04.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 15.02.2021
Reviewed 12.04.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249
УДК 517

Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ
ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Рассматривается задача о двойной неподвижной точке пары непрерывных отображений, определенных на выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве банахового пространства. Показано, что если одно из отображений вполне непрерывно, а второе — непрерывно, то свойство существования неподвижных точек устойчиво к сжимающим возмущениям рассматриваемых отображений. Получены оценки расстояния от заданной пары точек до двойных неподвижных точек возмущенных отображений. Рассмотрена задача о неподвижной точке вполне непрерывного отображения на выпуклом замкнутом ограниченном подмножестве банахового пространства. Показано, что свойство существования неподвижной точки вполне непрерывного отображения устойчиво к сжимающим возмущениям. Получены оценки расстояния от заданной точки до неподвижной точки возмущенного отображения. В качестве приложения полученных результатов доказана разрешимость разностного уравнения специального вида.

Ключевые слова: двойная неподвижная точка, неподвижная точка, вполне непрерывное отображение, непрерывное отображение, разностное уравнение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080_а) и гранта Президента Российской Федерации (проект № МД-2658.2021.1.1).

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 241–249. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249

Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. We consider the problem of a double fixed point of pairs of continuous mappings defined on a convex closed bounded subset of a Banach space. It is shown that if one of the mappings is completely continuous and the other is continuous, then the property of the existence of fixed points is stable under contracting perturbations of the mappings. We obtain estimates for the distance from a given pair of points to double fixed points of perturbed mappings. We consider the problem of a fixed point of a completely continuous mapping on a convex closed bounded subset of a Banach space. It is shown that the property of the existence of a fixed point of a completely continuous map is stable under contracting perturbations. Estimates of the distance from a given point to a fixed point are obtained. As an application of the obtained results, the solvability of a difference equation of a special type is proved.

Keywords: double fixed point, fixed point, completely continuous mapping, continuous mapping, difference equation

Mathematics Subject Classification: 47H10.

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080_a) and by a grant from the President of the Russian Federation (project no. MD-2658.2021.1.1).

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Vozmushchenie zadachi o nepodvizhnyh tochkah nepreryvnyh otobrazhenij [Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 241–249. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-241-249. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть X — банахово пространство, $\mathcal{B} \subset X$ — замкнутое выпуклое ограниченное множество, заданы отображения $F_1, F_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = F_1(x_2), \\ x_2 = F_2(x_1). \end{cases} \tag{0.1}$$

Решение этой системы принято называть двойной неподвижной точкой отображений F_1,F_2. Задача о двойных неподвижных точках возникает естественным образом при исследовании некоторых вопросов теории функциональных уравнений и теории игр.

Одно из возможных достаточных условий разрешимости системы (0.1) состоит в следующем. Если одно из отображений F_1 или F_2 непрерывно, а второе — вполне непрерывно (т. е. оно непрерывно и его образ предкомпактен), то система (0.1) имеет решение. Это утверждение является простым следствием теоремы Шаудэра о неподвижной точке (см., например, [1, глава II, §6.3]). Отметим, что имеются и другие подходы к получению условий существования двойных неподвижных точек (см., например, [2]).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы в указанных предположениях показать устойчивость разрешимости системы (0.1) к малым сжимающим возмущениям. А именно, рассматривается следующая задача. Пусть заданы непрерывные отображения $f_1, f_2 : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{0.2}$$

Предположим, что f_1 является β-сжимающим по x_1 и вполне непрерывным по x_2, а f_2 является β-сжимающим по x_2. Система (0.2) может рассматриваться как возмущение системы (0.1). В случае, когда $f_1(x_1, x_2) \equiv F_1(x_2)$, $f_2(x_1, x_2) \equiv F_2(x_1)$, возмущение отсутствует, а системы (0.2) и (0.1) совпадают. В настоящей работе показано, что в приведенных предположениях система (0.2) имеет решение.

1. Основной результат

Всюду далее символом $\|\cdot\|$ будем обозначать норму в пространстве X. Замкнутый шар с центром в точке x радиуса $\delta > 0$ будем обозначать через $B(x, \delta)$.

Пусть $\beta \in [0, 1)$ задано. Будем говорить, что отображение $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ называется β-сжимающим, если $\|f(x) - f(x')\| \le \beta\|x - x'\|$ для любых $x, x' \in \mathcal{B}$.

Теорема 1.1. *Предположим, что*

- *отображение f_1 непрерывно; при любом $x_2 \in \mathcal{B}$ отображение $f_1(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим; при любом $x_1 \in \mathcal{B}$ отображение $f_1(x_1, \cdot)$ является вполне непрерывным;*
- *отображение f_2 непрерывно; при любом $x_1 \in \mathcal{B}$ отображение $f_2(x_1, \cdot)$ является β-сжимающим.*

Тогда существует точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ такая, что

$$\bar{x}_1 = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad \bar{x}_2 = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$

$$\|\bar{x}_1 - x_1\| \le \frac{\|x_1 - f_1(x_1, \bar{x}_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_1 \in \mathcal{B},$$

$$\|\bar{x}_2 - x_2\| \le \frac{\|x_2 - f_2(\bar{x}_1, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1.1, напомним некоторые рассуждения, используемые в доказательстве принципа сжимающих отображений (см., например, [1, глава I, §1.1]).

Пусть $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ — β-сжимающее отображение, $x \in \mathcal{B}$ — произвольная точка. Рассмотрим последовательность итераций

$$g^0 := x, \quad g^{n+1} := f(g^n), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

В доказательстве принципа сжимающих отображений показывается, что имеют место следующие неравенства

$$\|g^n - g^{n+k}\| \le \frac{\beta^n}{1-\beta}\|x - f(x)\| \quad \forall\, n, k = 0, 1, 2, \dots ,$$

Последовательность $\{g^n\}$ сходится к некоторой точке $\xi \in \mathcal{B}$, эта точка является единственной неподвижной точкой отображения f. Из приведенных рассуждений следует, что

$$\|g^n - \xi\| \le \frac{\beta^n}{1-\beta}\|x - f(x)\| \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots ,$$

и, в частности,

$$\|x - \xi\| \le \frac{\|x - f(x)\|}{1-\beta}.$$

Последние два неравенства будут использоваться в приводимом далее доказательстве теоремы 1.1.

Доказательство.

I. В силу принципа сжимающих отображений для любого $x_2 \in \mathcal{B}$ существует единственная точка $\xi_1(x_2) \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\xi_1(x_2) = f_1(\xi_1(x_2), x_2).$$

Покажем, что отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

Зафиксируем $\theta \in \mathcal{B}$. При каждом $x_2 \in \mathcal{B}$ рассмотрим последовательность итераций

$$g_1^0(x_2) := \theta, \quad g_1^{n+1}(x_2) := f_1(g_1^n(x_2), x_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Для этой последовательности, как было отмечено выше, имеет место соотношение

$$\|g_1^n(x_2) - \xi_1(x_2)\| \le \beta^n \frac{\|\theta - f_1(\theta, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots .$$

Поскольку отображение f_1 принимает значения только в ограниченном множестве $\mathcal{B}$, то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{g_1^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_1(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$.

Поскольку по предположению теоремы отображение f_1 непрерывно, то непрерывны и отображения $g_1^n(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому из равномерной сходимости $g_1^n(\cdot)$ к $\xi_1(\cdot)$ следует, что отображение $\xi_1(\cdot)$ непрерывно.

Покажем, что $\xi_1(\mathcal{B})$ предкомпактно. Поскольку по предположению теоремы множество $g_1^0(\mathcal{B})$ предкомпактно, а отображение f_1 непрерывно, то каждое из множеств $g_1^n(\mathcal{B})$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ предкомпактно. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{g_1^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_1(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$, то существует номер n такой, что

$$\|\xi_1(x_2) - g_1^n(x_2)\| \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$

Кроме того, поскольку множество $g_1^n(\mathcal{B})$ предкомпактно, то оно имеет конечную $\varepsilon/2$-сеть, т. е.

$$\exists\,\{u_1, \ldots, u_k\} \subset \mathcal{B}: \quad \forall x_2 \in \mathcal{B} \quad \exists\, j \in \{1, \ldots, k\}: \quad \|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество $\{g_1^n(u_1), ..., g_1^n(u_k)\}$ является ε-сетью множества $\xi_1(\mathcal{B})$, поскольку для любого $x_2 \in \mathcal{B}$, существует номер $j \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $\|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \varepsilon/2$, и, значит,

$$\|\xi_1(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \|\xi_1(x_2) - g_1^n(x_2)\| + \|g_1^n(x_2) - g_1^n(u_j)\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, множество $\xi_1(\mathcal{B})$ имеет конечную ε-сеть и, значит, предкомпактно.

Итак, доказано, что отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

II. В силу принципа сжимающих отображений для любого $x_1 \in \mathcal{B}$ существует единственная точка $\xi_2(x_1) \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\xi_2(x_1) = f_2(x_1, \xi_2(x_1)).$$

Покажем, что отображение $\xi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно.

Зафиксируем $\theta \in \mathcal{B}$. При каждом $x_1 \in \mathcal{B}$ рассмотрим последовательность итераций

$$g_2^0(x_1) := \theta, \quad g_2^{n+1}(x_1) := f_2(x_1, g_2^n(x_1)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для этой последовательности, как было отмечено выше, имеет место соотношение

$$\|g_2^n(x_1) - \xi_2(x_1)\| \le \beta^n \frac{\|\theta - f_2(x_1, \theta)\|}{1 - \beta} \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поскольку отображение f_2 принимает значения только в ограниченном множестве $\mathcal{B}$, то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{g_2^n(\cdot)\}$ сходится к $\xi_2(\cdot)$ равномерно при $n \to \infty$. Поскольку по предположению теоремы отображение f_2 непрерывно, то непрерывны и отображения $g_2^n(\cdot)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому из равномерной сходимости $g_2^n(\cdot)$ к $\xi_2(\cdot)$ следует, что отображение $\xi_2(\cdot)$ непрерывно.

III. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1(x_2), \\ x_2 = \xi_2(x_1). \end{cases}$$

Поскольку отображение $\xi_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ вполне непрерывно, а $\xi_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ непрерывно, то отображение $\xi_1(\xi_2(\cdot))$ вполне непрерывно. В силу принципа Шаудэра (см., например, [1, глава II, §6.3]) существует точка $\bar{x}_1 \in \mathcal{B}$ такая, что

$$\bar{x}_1 = \xi_1(\xi_2(\bar{x}_1)).$$

Положим
$$\bar{x}_2 := \xi_2(\bar{x}_1).$$
Имеем
$$\bar{x}_1 = \xi_1(\xi_2(\bar{x}_1)) = \xi_1(\bar{x}_2) = f_1(\xi_1(\bar{x}_2), \bar{x}_2) = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2),$$
$$\bar{x}_2 = \xi_2(\bar{x}_1) = f_2(\bar{x}_1, \xi_2(\bar{x}_1)) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$
Кроме того, для неподвижной точки $\bar{x}_1$ β-сжимающего отображения $f(\cdot, \bar{x}_2)$ справедливо неравенство
$$\|x_1 - \bar{x}_1\| \leq \frac{\|x_1 - f(x_1, \bar{x}_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_1 \in \mathcal{B},$$
а для неподвижной точки $\bar{x}_2$ β-сжимающего отображения $f(\bar{x}_1, \cdot)$ справедливо неравенство
$$\|x_2 - \bar{x}_2\| \leq \frac{\|x_2 - f(\bar{x}_1, x_2)\|}{1-\beta} \quad \forall\, x_2 \in \mathcal{B}.$$
Таким образом, точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является искомой. □

2. Следствия и приложения

Теорема 1.1 гарантирует существование решения системы двух уравнений. Приведем следствие теоремы 1.1, применимое к одному уравнению. Пусть задано отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Теорема 2.1. *Пусть отображение f непрерывно, отображение $f(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим при любом $x_2 \in \mathcal{B}$, отображение $f(x_1, \cdot)$ является вполне непрерывным при любом $x_1 \in \mathcal{B}$. Тогда существует точка $\bar{x} \in \mathcal{B}$ такая, что*
$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}),$$
$$\|\bar{x} - x\| \leq \frac{\|x - f(x, \bar{x})\|}{1-\beta} \quad \forall\, x \in \mathcal{B}.$$

Доказательство. Положим
$$f_1(x_1, x_2) := f(x_1, x_2), \quad f_2(x_1, x_2) := x_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}.$$
Очевидно, что для отображений f_1 и f_2 выполнены предположения теоремы 1.1. Поэтому существует точка $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, отвечающая утверждению теоремы 1.1. Очевидно, что точка $\bar{x} := \bar{x}_1$ является искомой. □

В предположениях теоремы 1.1 двойная точка может быть не единственной, и, соответственно, условия теоремы 2.1 не гарантируют единственность неподвижной точки. Так, например, для отображения $f(x_1, x_2) \equiv x_2$ предположения теоремы 2.1 выполняются, если пространство X конечномерно, а множество неподвижных точек отображения F совпадает с $\mathcal{B}$.

Отметим, что если пространство X конечномерно, то теорема 2.1 является простым следствием теоремы Брауэра о неподвижной точке (см., например, [1, глава II, §5.7]). Действительно, в указанном случае отображение F непрерывно и действует из выпуклого компактного множества $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Следовательно, по теореме Брауэра F имеет неподвижную точку. Оценка в теореме 2.1 следует из сжимаемости отображения f по первому аргументу.

Теорема 2.1 объединяет в себе принципы неподвижной точки Банаха и Шаудэра. Утверждения о существовании неподвижной точки, объединяющие в себе эти классические результаты, ранее рассматривались, например, в [3]. Теорема о неподвижной точке в [3] формулируется в терминах уплотняющих операторов.

Проиллюстрируем приложение полученных результатов к неявным разностным уравнениям.

П р и м е р 2.1. Пусть заданы числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, непрерывная ограниченная функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и последовательность $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots) \in \ell_1$. Рассмотрим разностное уравнение

$$y_n = \beta y_{n-1} + \gamma_n h(y_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad u_0 = \alpha. \tag{2.1}$$

Покажем, что *если* $\beta < 1$, *то уравнение* (2.1) *имеет решение* $\{y_n\}$ *в классе последовательностей* ℓ_1.

Пусть $\|\cdot\|$ — естественная норма пространства ℓ_1. Положим

$$r := \sup_{t\in\mathbb{R}} |h(t)|, \quad R := \frac{|a| + \|\gamma\| r}{1-\beta}.$$

Обозначим через $\mathcal{B}$ шар в ℓ_1 с центром в нуле радиуса R. Зададим отображение $f : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ по формуле

$$f(x_1, x_2) := (a, \beta u_0 + \gamma_1 h(v_2), \dots, \beta u_{n-1} + \gamma_n h(v_{n+1}), \dots),$$

$$x_1 = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathcal{B}, \quad x_2 = (v_0, v_1, v_2, \dots) \in \mathcal{B}.$$

Отображение f определено корректно, поскольку для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{B}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}\|f(x_1, x_2)\| = |a| + |\beta u_0 + \gamma_1 h(v_2)| + \dots + |\beta u_{n-1} + \gamma_n h(v_{n+1})| + \dots \\ \le |a| + \beta \|u\| + \|\gamma\| r \le |a| + \beta R + \|\gamma\| r \le R.\end{aligned}$$

Покажем, что для отображения f выполняются предположения теоремы 2.1. Имеем

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_1', x_2)\| = |\beta u_0 - \beta u_0' + \dots + \beta u_{n-1} - \beta u_{n-1}' + \dots| \le \beta \|u_0 - u_0'\|$$

$$\forall\, x_1 = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_1' = (u_0', u_1', u_2', \dots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2 = (v_0, v_1, v_2, \dots) \in \mathcal{B}.$$

Следовательно, отображение $f(\cdot, x_2)$ является β-сжимающим при любом $x_2 \in \mathcal{B}$.

Покажем, что отображение f непрерывно. Отметим сначала, что

$$\|f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2')\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_j| |h(v_{n+1}) - h(v_{n+1}')|$$

$$\forall\, x_1 = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2 = (v_0, v_1, v_2, \dots) \in \mathcal{B}, \quad \forall\, x_2' = (v_0', v_1', v_2', \dots) \in \mathcal{B}.$$

Возьмем произвольные последовательность $\{(x_1^j, x_2^j)\} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ и точку $(x^1, x^2) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ такие, что $\{(x_1^j, x_2^j)\} \to (x^1, x^2)$ при $j \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\gamma \in \ell_1$, то существует номер N такой, что

$$2r \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Поскольку $\{(x_1^j, x_2^j)\} \to (x^1, x^2)$ при $j \to \infty$, то существует номер J такой, что при $j > J$ выполняются соотношения

$$\beta \|x_2^j - x_2\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|\gamma\| \sum_{i=1}^{N} |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда получаем, что при $j > J$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\|f(x_1^j, x_2^j) - f(x_1, x_2)\| \leq \|f(x_1^j, x_2^j) - f(x_1, x_2^j)\| + \|f(x_1, x_2^j) - f(x_1, x_2)\| \\ \leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \\ \leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \sum_{i=1}^{N} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^j) - h(v_{n+1})| + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| \\ \leq \beta \|x_2^j - x_2\| + \|\gamma\| \sum_{i=1}^{N} |h(v_{n+1}^i) - h(v_{n+1})| + 2r \sum_{i=N+1}^{\infty} |\gamma_i| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что отображение f непрерывно.

Зафиксируем $x_1 = (u_0, u_1, u_2, \ldots) \in \mathcal{B}$ Покажем, что отображение $f(x_1, \cdot)$ вполне непрерывно. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $x_1, \gamma \in \ell_1$, то существует номер N такой, что

$$\beta \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_{j-1}| + r \sum_{j=N+1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon.$$

Имеем

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |\beta u_{j-1} + \gamma_n h(v_{j+1})| \leq \beta \sum_{j=N+1}^{\infty} |u_{j-1}| + r \sum_{j=N+1}^{\infty} |\gamma_n| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, множество $f(x_1, \mathcal{B})$ вполне ограничено (см. [4, глава I, упражнение 6]) и, значит, отображение $f(x_1, \cdot)$ вполне непрерывно.

Таким образом, показано, что для отображения f выполнены все предположения теоремы 2.1. Поэтому существует последовательность $\bar{x} = (y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \mathcal{B} \subset \ell_1$ такая, что $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$, т. е. $y_0 = \alpha$ и $y_n = \beta y_{n-1} + \gamma_n h(y_{n+1})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что указанная последовательность является решением уравнения (2.1).

References

[1] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 2003, 690 pp.

[2] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, "Stability theorems for estimating the distance to a set of coincidence points", *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.

[3] Р. Р. Ахмеров, М. И. Каменский, А. С. Потапов, Б. Н. Садовский, "Уплотняющие операторы", Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **18**, ВИНИТИ, М., 1980, 185–250; англ. пер.:R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, B. N. Sadovskii, "Condensing operators", *J. Soviet Math.*, **18**:4 (1982), 551–592.

[4] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1984, 263 pp.

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Зухра Тагировна
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.07.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2686-4654

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Zukhra T. Zhukovskaya
E-mail: zyxra2@yandex.ru

Received 26.04.2021
Reviewed 30.07.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270
УДК 517.927.21

О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах

Михаил Игоревич КАМЕНСКИЙ[1], **Валерий Владимирович ОБУХОВСКИЙ**[2], **Гарик Гагикович ПЕТРОСЯН**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

Аннотация. В настоящей работе исследуется периодическая краевая задача для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности. Для доказательства существования решений задачи мы сначала конструируем соответствующую функцию Грина. Затем вводим в рассмотрение многозначный разрешающий оператор в пространстве непрерывных функций и сводим поставленную задачу к существованию неподвижных точек разрешающего мультиоператора. Для доказательства существования неподвижной точки используется обобщенная теорема типа Б. Н. Садовского для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, функция Грина, уплотняющий мультиоператор, мера некомпактности, неподвижная точка

Благодарности: Работа первого и второго авторов выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-51-15003-НЦНИ_а). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (проект МК-338.2021.1.1).

Для цитирования: *Каменский М.И., Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О существовании решения периодической краевой задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 250–270. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270

On the existence of a solution for a periodic boundary value problem for semilinear fractional-order differential inclusions in Banach spaces

Mikhail I. KAMENSKII[1] **, Valeri V. OBUKHOVSKII**[2] **, Garik G. PETROSYAN**[2]

[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation
[2] Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin Str., Voronezh 394043, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study a periodic boundary value problem for a class of semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space for which the multivalued nonlinearity satisfies the regularity condition expressed in terms of measures of noncompactness. To prove the existence of solutions to the problem, we first construct the corresponding Green function. Then we introduce into consideration a multivalued resolving operator in the space of continuous functions and reduce the posed problem to the existence of fixed points of the resolving multioperator. To prove the existence of a fixed point, a generalized theorem of B.N. Sadovskii type for a condensing multivalued map is used.

Keywords: differential inclusion, fractional derivative, Green's function, condensing multioperator, measure of noncompactness, fixed point

Mathematics Subject Classification: 34A08, 34C25, 34G20, 47H04, 47H08.

Acknowledgements: The work of the first and second authors was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-51-15003-НЦНИ_а). The work of the third author was supported by the grant from the President of the Russian Federation for young scientists – candidates of science (project no. МК-338.2021.1.1).

For citation: Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. O sushchestvovanii resheniya periodicheskoy krayevoy zadachi dlya polulineynykh differentsial'nykh vklyucheniy drobnogo poryadka v banakhovykh prostranstvakh [On the existence of a solution for a periodic boundary value problem for semilinear fractional-order differential inclusions in Banach spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 250–270. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-250-270. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория управляемых систем, описываемых дифференциальными уравнениями и включениями дробного порядка в бесконечномерных пространствах, активно развивается и находит многочисленные применения в математической физике, инженерии, экономике, экологии и других разделах естествознания (см. монографии [1,2], статьи [3,4]). На данный момент разработаны различные подходы к исследованию разрешимости дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$. Например, в работах [5,6] для дифференциальных уравнений указанного дробного порядка были разрешены задачи типа Коши. Статьи [7,8] посвящены исследованию траекторий дифференциальных включений дробного порядка $q \in (0,1)$, подчиняющихся обобщенным краевым условиям, выраженным в форме операторных включений. В работах [9, 10] авторы приводят доказательства утверждений о разрешимости периодических краевых задач для дифференциальных включений того же порядка, а в работах [11,12] — для антипериодических краевых задач. Аппроксимации решений дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $q \in (0,1)$ были изучены в статьях [13,14].

В последние годы активно исследуются дифференциальные уравнения и включения дробного порядка $q > 1$. В настоящей работе разрешается периодическая задача для класса полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (1,2)$ в банаховом пространстве, для которых многозначная нелинейность удовлетворяет условию регулярности, выраженному в терминах мер некомпактности. Отметим, что для содержащих линейную часть дифференциальных уравнений дробного порядка меньшего единицы в работах [15,16] на основе метода функции Грина были изучены периодические краевые задачи.

Мы исследуем периодическую краевую задачу в сепарабельном банаховом пространстве E для полулинейного дифференциального включения следующего вида:

$$ {}^{C}D^{q}x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0,T], \tag{0.1} $$

$$ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \tag{0.2} $$

Здесь $\lambda > 0$, ${}^{C}D^{q}$ — дробная производная Капуто и $F\colon [0,T] \times E \multimap E$ — многозначное отображение. Отметим, что для полулинейного случая с дробной производной порядка $q \in (1,2)$ такого рода задачи до настоящего времени не были исследованы.

Статья организована следующим образом. В следующем разделе 1 мы приводим необходимые понятия и факты из дробного анализа и теории уплотняющих отображений. Во втором разделе мы конструируем функцию Грина для линейной части рассматриваемой задачи (0.1), (0.2). Затем мы вводим и исследуем разрешающий интегральный оператор в пространстве непрерывных функций, неподвижные точки которого совпадают с решениями задачи. На этой основе мы доказываем главный результат о существовании периодического решения (теорема 2.3).

1. Предварительные сведения

1.1. Дробный анализ

Приведем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (более подробные сведения можно найти в монографиях [1, 2]).

Определение 1.1. *Дробным интегралом порядка* $q > 0$ *функции* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ называется функция $I^q g$, определяемая соотношением

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx.$$

Отметим, что для гамма-функции Эйлера справедливо равенство (см., например, [2])

$$\frac{1}{\Gamma(q)} = 0 \quad \text{для} \quad q = 0, -1, -2, \dots . \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Дробной производной Римана–Лиувилля порядка* $q \geq 0$ *непрерывной функции* $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ называется функция $D^q g$, определяемая соотношением

$$D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g(s)\, ds, \quad n = [q] + 1$$

(символом $[q]$ здесь и далее обозначена целая часть числа q).

Определение 1.3. *Дробной производной Капуто порядка* $q \geq 0$ *функции* $g \in C^n([0, T])$ называется функция ${}^C D^q g$, определяемая соотношением

$${}^C D^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g^{(n)}(s)\, ds, \quad n = [q] + 1.$$

Дробная производная Капуто порядка $q \geq 0$ для непрерывной функции g на отрезке $[a, b]$ связана с дробной производной Римана–Лиувилля порядка $q \geq 0$ следующим соотношением:

$${}^C D^q g(t) = \Big(D^q\big(g(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\big)\Big)(t).$$

Большим преимуществом дробной производной Капуто по сравнению с дробной производной Римана–Лиувилля является сохранение основных свойств производной целого порядка, например равенство нулю производной от константы.

Определение 1.4. Функция

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn + \beta)}, \quad q > 0, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C},$$

называется *функцией Миттаг–Леффлера.*

Как правило, функцию $E_{q,1}$ обозначают более просто E_q.

Проиллюстрируем роль функции Миттаг–Леффлера в дробном исчислении. Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения дробного порядка

$$^{C}D^{q}x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad 1 < q < 2, \tag{1.2}$$

$$x(0) = c_1, \quad x'(0) = c_2, \tag{1.3}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ — функция, для которой существует дробный интеграл порядка q. Под решением данной задачи понимается непрерывная функция $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям (1.3), для которой дробная производная Капуто $^{C}D^{q}x$ также непрерывна и удовлетворяет уравнению (1.2). Известно (см. [2]), что единственным решением данной задачи является функция

$$x(t) = c_1 E_q(\lambda t^q) + c_2 t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds. \tag{1.4}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие соотношения и утверждения (см. [17])

$$E_{q,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{q,\beta+q}(t), \tag{1.5}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q)) = t^{\beta-n-1} E_{q,\beta-n}(\lambda t^q), \tag{1.6}$$

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{q,\beta}(\lambda t^q) dt = z^{\beta} E_{q,\beta+1}(\lambda z^q), \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. *Для функции* $f \in C([0,T];E)$ *и* $1 < q < 2$ *справедливо равенство*

$$\left(\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds\right)_t' = \int_0^t (t-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Для того чтобы установить аналогичный результат для функции $f \in L^{\infty}([0,T];E)$, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1.2. *Для всякой функции* $f \in L^{\infty}([0,T];E)$ *существует последовательность* $\{f_n\} \subset C([0,T];E)$ *такая, что* $f_n(t) \to f(t)$ *во всех точках Лебега функции* f *из* $[0,T]$, *причем* $\|f_n\|_{C([0,T];E)} \le \|f\|_{L^{\infty}([0,T];E)}$.

Примером последовательности, удовлетворяющей утверждению леммы 1.2, может служить следующая последовательность, построенная на основе проектора Стеклова

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \hat{f}(s) ds, & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T]; \end{cases} \qquad \hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0,T], \\ 0, & t \notin [0,T]. \end{cases}$$

Лемма 1.3. (см. [18]) *Для всякой функции* $f \in L^{\infty}([0,T];E)$ *множество ее точек Лебега есть множество полной меры для* $[0,T]$.

Лемма 1.4. (см. [19]) *Пусть все функции* $\{f_n\}$ *дифференцируемы в промежутке* $[0,T]$ *и последовательность производных* $\{f_n'\}$ *сходится во всем промежутке равномерно относительно* $t \in [0,T]$. *Тогда, если последовательность* $\{f_n\}$ *сходится хотя бы в одной точке из* $[0,T]$, *то*

(1) *последовательность* $\{f_n\}$ *сходится во всем промежутке и даже равномерно;*

(2) *предельная функция* f *дифференцируема, причем выполнено* $f'(t) = \lim_{n\to\infty} f_n'(t)$.

Лемма 1.5. *Для функции* $f \in L^{\infty}([0,T];E)$ *и* $1 < q < 2$ *справедливо равенство*

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds\Big)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L^{\infty}([0,T];E)$, тогда в силу лемм 1.2 и 1.3 существует последовательность функций $\{f_n\} \subset C([0,T];E)$ такая, что $f_n(t) \to f(t)$ для п. в. $t \in [0,T]$. В силу леммы 1.1 для каждой функции $f_n \in C([0,T];E)$ справедливо равенство

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big)'_t = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds.$$

По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds,$$
$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Теперь, воспользовавшись пунктом (2) леммы 1.4, получим

$$\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds\Big)'_t = \lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big)'_t$$
$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f_n(s)\,ds\Big) = \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

□

1.2. Многозначные отображения

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, $P(\mathcal{E})$ — совокупность его непустых подмножеств. Введем следующие обозначения:

$$Pb(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ ограничено}\}, \quad Pv(\mathcal{E}) = \{A \in P(\mathcal{E}) : A \text{ выпукло}\},$$
$$K(\mathcal{E}) = \{A \in Pb(\mathcal{E}) : A \text{ компактно}\}, \quad Kv(\mathcal{E}) = Pv(\mathcal{E}) \cap K(\mathcal{E}).$$

Норму множества $M \in Pb(\mathcal{E})$ определим формулой $\|M\| = \sup_{x\in M}\|x\|_{\mathcal{E}}$.

О п р е д е л е н и е 1.5. (см., например, [20,21]). Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется мерой некомпактности (мнк) в $\mathcal{E}$, если для каждого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества Ω.

Мера некомпактности β называется:

1) *монотонной,* если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$, включение $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ влечет неравенство $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной,* если для любого $a \in \mathcal{E}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполняется равенство $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathcal{A}$ — это конус в банаховом пространстве, то мера некомпактности β называется:

3) *правильной,* если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$;

4) *вещественной,* если $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ — множество неотрицательных действительных чисел с естественным порядком;
5) *алгебраически полуаддитивной,* если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \le \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$, для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathcal{E})$.

Примером вещественной мнк, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является мнк Хаусдорфа χ, определяемая формулой

$$\chi(\Omega) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathcal{E}\right\}.$$

Отметим, что мнк Хаусдорфа удовлетворяет также свойству *полуоднородности*: для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$ выполнено $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$. Более того, если $\mathcal{L} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — линейный ограниченный оператор, то $\chi(\mathcal{L}(\Omega)) = \|\mathcal{L}\|\chi(\Omega)$ для любого $\Omega \in Pb(\mathcal{E})$.

Следующие понятия и утверждения можно найти в монографиях [20, 21].

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \to P(\mathcal{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху (п.н.с.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset \mathcal{E}$;

(ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times E$;

(iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ — относительно компактно в $\mathcal{E}$;

(iv) *квазикомпактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 1.6. *Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ – замкнутое квазикомпактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.с.*

О п р е д е л е н и е 1.7. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется уплотняющим относительно мнк β (β-уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, не являющегося относительно компактным, выполнено $\beta(F(\Omega)) \not\ge \beta(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема о неподвижной точке для уплотняющих мультиотображений (см., например, [20, 21]).

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество банахова пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — есть β-уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная мера некомпактности в $\mathcal{E}$. Тогда множество* $\operatorname{Fix}\mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *неподвижных точек мультиотображения $\mathcal{F}$ не пусто.*

1.3. Измеримые мультифункции

Пусть $p \ge 1$, E — банахово пространство. Напомним следующие понятия (см., например, [20, 21]).

О п р е д е л е н и е 1.8. Мультифункция $G : [0, T] \to K(E)$ называется:

L^p-*интегрируемой*, если она допускает L^p-интегрируемое сечение по Бохнеру, т. е. существует функция $g \in L^p([0, T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, T]$;

L^p-*интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0, T])$ такая, что

$$\|G(t)\| := \sup\left\{\|g\|_E : g(t) \in G(t)\right\} \le \xi(t) \text{ для п. в. } t \in [0, T].$$

Множество всех L^p-интегрируемых сечений мультифункции $G:[0,T]\to K(E)$ обозначается через $\mathcal{S}^p_G$.

О п р е д е л е н и е 1.9. Последовательность функций $\{\xi_n\}\subset L^p([0,T];E)$ называется L^p*-полукомпактной*, если она L^p-интегрально ограничена, т. е.

$$\exists v\in L^p_+([0,T])\ \ \|\xi_n(t)\|_E\le v(t)\ \text{ для всех } n=1,2,\ldots \text{ и п. в. } t\in[0,T],$$

и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п. в. $t\in[0,T]$.

О п р е д е л е н и е 1.10. Мультифункция G называется *измеримой*, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0,T]$) для любого открытого подмножества $V\subset E$. Мультифункция G называется *сильно измеримой*, если существует последовательность ступенчатых мультифункций $G_n:[0,T]\to K(E)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}(G_n(t),G(t))=0 \text{ для п. в. } t\in[0,T],$$

где $\mathcal{H}$ — хаусдорфова метрика в $K(E)$.

Отметим, что в случае сепарабельного пространства E понятия измеримой и сильно измеримой мультифункции совпадают. Если G сильно измерима и L^p-интегрально ограничена, то она L^p-интегрируема. Для L^p-интегрируемой мультифункции G при любом $t\in[0,T]$ определен многозначный интеграл

$$\int_0^t G(s)ds:=\Big\{\int_0^t g(s)ds : g\in\mathcal{S}^p_G\Big\}.$$

Лемма 1.7. (см. [20, Теорема 4.2.3.]) *Пусть E — сепарабельное банахово пространство. Пусть $G:[0,T]\to P(E)$ — L^p-интегрируемая и L^p-интегрально ограниченная мультифункция такая, что для п. в. $t\in[0,T]$*

$$\chi(G(t))\le q(t),\quad q\in L^p_+([0,T]).$$

Тогда для всех $t\in[0,T]$ выполнено

$$\chi\Big(\int_0^t G(s)ds\Big)\le\int_0^t q(s)ds.$$

В частности, если мультифункция $G:[0,T]\to K(E)$ измерима и L^p-интегрально ограничена, то функция $\chi(G(\cdot))$ интегрируема, причем для всех $t\in[0,T]$

$$\chi\Big(\int_0^t G(s)ds\Big)\le\int_0^t \chi(G(s))ds.$$

Лемма 1.8. (см. [20, Теорема 4.2.1.]) *Пусть последовательность $\{\xi_n\}\subset L^1([0,T];E)$ является L^1-интегрально ограниченной. Предположим, что*

$$\exists\alpha\in L^1_+([0,T])\ \ \chi(\{\xi_n(t)\})\le\alpha(t) \ \text{ для п. в. } t\in[0,T].$$

Тогда для любого $\delta>0$ существует компактное множество $K_\delta\subset E$ и множество $m_\delta\subset[0,T]$ с лебеговой мерой $m_\delta<\delta$, а также множество функций $G_\delta\subset L^1([0,T];E)$ со значениями в K_δ, такие, что для каждого $n\ge1$ существует функция $b_n\in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t)-b_n(t)\|_E\le 2\alpha(t)+\delta,\quad t\in[0,T]\backslash m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n\equiv0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Основные результаты

Рассмотрим в сепарабельном банаховом пространстве E краевую задачу (1.2), (1.3), где $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0,T] \to E$.

Определение 2.1. *Интегральным решением* краевой задачи (1.2), (1.3) называется функция $x \in C([0,T];E)$, удовлетворяющая равенству (1.4).

Лемма 2.1. *Пусть* $f \in C([0,T];E)$ *и*

$$(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q) \neq 0. \tag{2.1}$$

Тогда краевая задача (1.2), (0.2) *имеет единственное решение, это решение представимо в виде*

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)f(s)ds,$$

где функция Грина $G(t,s)$ *определяется формулой*

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)+TE_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ +\frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q) \\ \qquad +(t-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(t-s)^q), \qquad 0 \le s \le t < T, \\ \frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)+TE_{q,2}(\lambda T^q)(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}E_q(\lambda t^q) \\ +\frac{(1-E_q(\lambda T^q))(T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)+T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q))(T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)}{(1-E_q(\lambda T^q))^2-E_{q,0}(\lambda T^q)E_{q,2}(\lambda T^q)}tE_{q,2}(\lambda t^q), \\ \qquad 0 \le t < s < T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Решение краевой задачи (1.2), (1.3) в банаховом пространстве E имеет вид (1.4). Применяя формулу (1.6) и лемму 1.1, определим производную этого решения

$$x'(t) = c_1 t^{-1}E_{q,0}(\lambda t^q) + c_2 E_{q,1}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(t-s)^q)f(s)\,ds.$$

Заметим, что вследствие равенства $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$ для функции $E_{q,0}(\lambda t^q)$ имеем

$$E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \frac{1}{\Gamma(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t^q)^n}{\Gamma(qn)},$$

следовательно,

$$t^{-1}E_{q,0}(\lambda t^q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n t^{qn-1}}{\Gamma(qn)}.$$

Из последней формулы получаем $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$.

Теперь, используя условие (0.2), получаем систему

$$\begin{cases} c_1 = c_1E_q(\lambda T^q) + c_2TE_{q,2}(\lambda T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-1}E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds, \\ c_2 = c_1T^{-1}E_{q,0}(\lambda T^q) + c_2E_{q,1}(\lambda T^q) + \int_0^T (T-s)^{q-2}E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)f(s)\,ds. \end{cases}$$

Ее решением является

$$c_1 = \frac{(1 - E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)},$$

$$c_2 = \frac{(1 - E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1.4), получаем

$$x(t) = \frac{(1 - E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1 - E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds = \int_0^T G(t,s) f(s) ds.$$

□

Рассуждая так же, как и в доказательстве леммы 1.5, можно показать, что и в случае $f \in L^\infty([0,T];E)$ функция Грина краевой задачи (1.2), (0.2) определяется формулой (2.2).

Будем полагать, что мультиотображение $F : [0,T] \times E \to Kv(E)$ из задачи (0.1), (0.2) удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для всех $x \in E$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п. в. $t \in [0,T]$ многозначное отображение $F(t,\cdot) : E \to Kv(E)$ — полунепрерывно сверху;

$(F3)$ для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого $x \in E$ с $\|x\|_E < r$ выполнено $\|F(t,x)\|_E \le \omega_r(t)$;

$(F4)$ существует функция $\mu \in L^\infty_+([0,T])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset E$ выполнено $\chi(F(t,\Omega)) \le \mu(t)\chi(\Omega)$, при п. в. $t \in [0,T]$ (где χ — мнк Хаусдорфа в E).

Для каждого $x \in C([0,T];E)$ введем в рассмотрение мультифункцию

$$F(\cdot, x(\cdot)) : [0,T] \to Kv(E).$$

Из условий $(F1)$–$(F3)$ следует (см., например, [20, теорема 1.3.5]), что мультифункция $F(\cdot, x(\cdot))$ является L^p-интегрируемой для любого $p \ge 1$. Определим суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : C([0,T];E) \multimap L^\infty([0,T];E)$, который каждому $x \in C([0,T];E)$ ставит в соответствие множество $\mathcal{P}_F^\infty(x)$ измеримых сечений мультифункции $F(\cdot, x(\cdot))$. Далее рассмотрим мультиоператор Γ, который каждому $x \in C([0,T];E)$ ставит в соответствие множество

$$\Gamma x(t) = \Big\{ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) f(s)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds \Big\} = \Big\{ \int_0^T G(t,s) f(s) ds \Big\},$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$.

Из условий $(F1)-(F4)$ следует, что для функции $x \in C([0,T];E)$ функция $f \in L^\infty([0,T];E)$. При этом, из определения функции Грина следует, что для любого $t \in [0,T]$ при $1 < q < 2$ выполнено $G(\cdot, s) \in L^p([0,T]), p > 1$, и функция Грина теряет непрерывность только в точке $s = t$, поэтому $\Gamma : C([0,T];E) \multimap C([0,T];E)$. Очевидно, если $x \in C([0,T];E)$ является решением задачи (0.1), (0.2), то x является неподвижной точкой мультиоператора Γ. Поэтому, для установления разрешимости краевой задачи (0.1), (0.2) будем доказывать существование неподвижных точек мультиоператора Γ.

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Если выполнено условие*

(A) *функция Грина G не меняет знак на интервале $[0,T]$*

то справедливо равенство

$$\int_0^T |G(t,s)|\, ds = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int_0^T G(t,s) ds = \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T E_{q,2}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1-E_q(\lambda T^q)) \int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda(T-s)^q)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) \int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q)\, ds}{(1-E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q) + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\, ds.$$

Вычислим интегралы в последнем выражении с помощью формулы (1.7):

$$\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) ds = -\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(T-s)^q) d(T-s) =$$

$$\int_0^T y^{q-1} E_{q,q}(\lambda y^q) dy = T^q E_{q,q+1}(\lambda T^q).$$

Таким образом,

$$\int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (T-s)^q)\, ds = T^{q-1} E_{q,q}(\lambda T^q),$$
$$\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) ds = t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Полагая в (1.5) $\beta = 1$, получим

$$E_q(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda T^q E_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda T^q E_{q,q+1}(\lambda T^q),$$
$$E_q(\lambda t^q) = \frac{1}{\Gamma(1)} + \lambda t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q) = 1 + \lambda t^q E_{q,q+1}(\lambda t^q).$$

Используя свойство (1.1), из (1.5) при $\beta = 0$ получим

$$E_{q,0}(\lambda T^q) = \frac{1}{\Gamma(0)} + \lambda T^q E_{q,q}(\lambda T^q) = \lambda T^q E_{q,q}(\lambda T^q).$$

Итак, справедливы следующие равенства:

$$\int_0^T (T-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (T-s)^q) ds = T^q \frac{1}{\lambda T^q}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right),$$
$$\int_0^T (T-s)^{q-2} E_{q,q-1}(\lambda (T-s)^q)\, ds = \frac{1}{\lambda T} E_{q,0}(\lambda T^q),$$
$$\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) ds = \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q) - 1\right).$$

Окончательно получаем

$$\int_0^T G(t,s) ds = \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right) + T E_{q,2}(\lambda T^q)\frac{1}{\lambda T} E_{q,0}(\lambda T^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} E_q(\lambda t^q)$$
$$+ \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))\frac{1}{\lambda T} E_{q,0}(\lambda T^q) + T^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q)\frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda T^q) - 1\right)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)} t E_{q,2}(\lambda t^q) + \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q) - 1\right)$$
$$= -\frac{1}{\lambda} E_q(\lambda t^q) \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ t E_{q,2}(\lambda t^q) \frac{(1 - E_q(\lambda T^q))(\lambda T)^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q) - (1 - E_q(\lambda T^q))(\lambda T)^{-1} E_{q,0}(\lambda T^q)}{(1 - E_q(\lambda T^q))^2 - E_{q,0}(\lambda T^q) E_{q,2}(\lambda T^q)}$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q) - 1\right) = -\frac{1}{\lambda} E_q(\lambda t^q) + \frac{1}{\lambda}\left(E_q(\lambda t^q) - 1\right) = -\frac{1}{\lambda}.$$

Доказано, что равенство (2.3) выполняется. □

Для доказательства существования неподвижных точек мультиоператора Γ введем в рассмотрение оператор

$$S : L^\infty([0,T]; E) \to C([0,T]; E), \quad S(f)(t) = \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda (t-s)^q) f(s)\, ds.$$

Лемма 2.3. *Пусть последовательность* $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ *ограниченная и* $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ *в* $L^1([0,T];E)$. *Тогда* $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Доказательство. Для $d > 0$ рассмотрим оператор

$$S_d : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E), \quad S_d(\eta_n) = \begin{cases} 0, & t \le d, \\ \int_0^{t-d} (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds, & t > d. \end{cases}$$

Поскольку подынтегральное выражение в последней формуле есть непрерывная на $[0, t-d]$ функция, имеем

$$S_d(\eta_n) \rightharpoonup S_d(\eta_0), \tag{2.4}$$

в пространстве $C([0,T];E)$.

Пусть ψ — непрерывный линейный функционал на $C([0,T];E)$, т. е. $\psi \in C^*([0,T];E)$. Тогда справедливо равенство

$$(\psi, S(\eta_n)) = (\psi, S_d(\eta_n)) + (\psi, S(\eta_n) - S_d(\eta_n)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

Из определения оператора S_d следует

$$(S(\eta_n) - S_d(\eta_n))(t) = \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds, & t \le d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)ds & t > d; \end{cases}$$

$$\|S(\eta_n) - S_d(\eta_n)\|_{C([0,T];E)} \le \begin{cases} \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \cdot \|\eta_n(s)\|_E \, ds, & t \le d, \\ \int_{t-d}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) \cdot \|\eta_n(s)\|_E \, ds, & t > d, \end{cases}$$

$$\le d^q E_{q,q}(\lambda T^q)\|\eta_n\|_{L^\infty([0,T];E)}.$$

Следовательно, для произвольного $\epsilon > 0$ можно подобрать число $d > 0$ таким, что выполняется оценка:

$$\|S(\eta_n) - S_d(\eta_n)\|_{C([0,T];E)} \le \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,T];E)}}. \tag{2.6}$$

В силу (2.4) имеем $(\psi, S_d(\eta_n)) \to (\psi, S_d(\eta_0))$, но тогда для данного ϵ можно найти номер n_0 такой, что

$$(\psi, S_d(\eta_{n_0}) - S_d(\eta_0)) < \epsilon/2 \tag{2.7}$$

Теперь, используя (2.5)–(2.7), получаем оценки:

$$(\psi, S(\eta_n) - S(\eta_0)) = (\psi, S_d(\eta_n) - S_d(\eta_0)) + (\psi, S(\eta_n) - S_d(\eta_n)) + (\psi, S_d(\eta_0) - S(\eta_0))$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + 2\|\psi\|_{C^*([0,T];E)} \frac{\epsilon}{4\|\psi\|_{C^*([0,T];E)}} = \epsilon,$$

которые заключают доказательство. □

Лемма 2.4. *Для каждого компактного множества* $K \subset E$ *и ограниченной последовательности* $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0,T];E)$ *такой, что* $\{\eta_n(t)\} \subset K$ *для п. в.* $t \in [0,T]$, *слабая сходимость* $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ *в* $L^1([0,T];E)$ *влечет сходимость* $S(\eta_n) \to S(\eta_0)$ *в* $C([0,T];E)$.

Доказательство. Вначале заметим, что справедлива следующая оценка:

$$\chi\Big(\big\{S\left(\eta_n\right)(t)\big\}\Big) \leq \int_0^t (t-s)^{q-1}\chi(\{E_{q,q}(\lambda(t-s)^q)\eta_n(s)\})ds = 0.$$

Из этой оценки следует, что последовательность $\{S\left(\eta_n\right)(t)\} \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0,T]$. С другой стороны, если мы возьмем $t_1, t_2 \in [0,T]$ такими, что $0 < t_1 < t_2 \leq T$, то получим оценку:

$$\begin{aligned}
&\big\|S\left(\eta_n\right)(t_2) - S\left(\eta_n\right)(t_1)\big\|_E \\
&= \Big\|\int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&= \Big\|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\|\int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&\leq \Big\|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\|\int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
&+ \Big\|\int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} \left(E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right)\eta_n(s)ds\Big\|_E = Z_1 + Z_2 + Z_3,
\end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \Big\|\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$Z_2 = \Big\|\int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$Z_3 = \Big\|\int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} \left(E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right)\eta_n(s)ds\Big\|_E.$$

Для произвольного $\epsilon > 0$ положим $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon/4$.

В силу условия $(F3)$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что неравенство $|t_2 - t_1| < \delta_1$ влечет оценку

$$Z_1 \leq \|\omega_K\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q)\frac{(t_2-t_1)^q}{q} < \epsilon_1.$$

Для оценки Z_2, выберем константу $d > 0$, для которой справедливо

$$\begin{aligned}
Z_2 \leq &\Big\|\int_0^{t_1-d} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E \\
+&\Big\|\int_{t_1-d}^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

где

$$I_1 = \Big\|\int_0^{t_1-d} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E,$$

$$I_2 = \Big\|\int_{t_1-d}^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} - (t_1-s)^{q-1}\right) E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\eta_n(s)ds\Big\|_E.$$

Рассмотрим функцию $v : [d,T] \to E, \quad v(\tau) = \tau^{q-1}$. Данная функция непрерывна на отрезке $[d,T]$, поэтому, по теореме Кантора, она равномерно непрерывна на этом отрезке, т. е. для каждого $\gamma > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что при любых $\tau_1, \tau_2 \in [d,T]$ неравенство $|\tau_2 - \tau_1| < \delta_2 < d$ влечет оценку

$$\left|\tau_2^{q-1} - \tau_1^{q-1}\right| < \gamma.$$

Теперь, выбрав $\tau = t - s$, получим

$$I_1 \leq \|\omega_K\|_\infty \gamma(t_1 - d)E_{q,q}(\lambda T^q) < \epsilon_2,$$

и в то же время для I_2 справедлива оценка

$$I_2 \leq \frac{\|\omega_K\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q)d^q\,(2 + 2^q)}{q} < \epsilon_3.$$

В силу определения функции Миттаг–Леффлера для любых $x \in K$ и $\gamma_1 > 0$ существует $\delta_3 > 0$ такое, что в случае $|t_2 - t_1| < \delta_3$ справедливо неравенство

$$\|E_{q,q}(\lambda(t_2 - s)^q)x - E_{q,q}(\lambda(t_1 - s)^q)x\| < \gamma_1,$$

благодаря которому получаем оценку

$$Z_3 \leq \gamma_1 T^q < \epsilon_4.$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$, выбрав $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, получим

$$\left\|S\left(\eta_n\right)\left(t_2\right) - S\left(\eta_n\right)\left(t_1\right)\right\|_E \leq Z_1 + Z_2 + Z_3 < \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = \epsilon.$$

Следовательно, последовательность $\{S\left(\eta_n\right)\}$ есть равностепенно непрерывное множество. Согласно теореме Арцела–Асколи множество $\{S\left(\eta_n\right)\}$ относительно компактно в $C([0,T];E)$. Из леммы 2.3 следует, что $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ влечет $S\left(\eta_n\right) \rightharpoonup S\left(\eta_0\right)$. А поскольку последовательность $\{S\left(\eta_n\right)\}$ относительно компактна, заключаем, что $S\left(\eta_n\right) \to S\left(\eta_0\right)$ в $C([0,T];E)$. □

Определим условия, при которых мультиоператор Γ является уплотняющим. Рассмотрим конус

$$\mathbb{R}^2_+ = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : \zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0\}$$

с естественным частичным порядком. Введем в пространстве $C([0,T];E)$ векторную меру некомпактности

$$\nu : Pb(C([0,T];E)) \to \mathbb{R}^2_+, \quad \nu(\Omega) = \big(\varphi(\Omega), mod_C(\Omega)\big),$$

где первая компонента есть модуль послойной некомпактности

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0,T]} \chi(\{y(t) : y \in \Omega\}),$$

а вторая компонента — модуль равностепенной непрерывности

$$mod_C(\Omega) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{y \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* $(F1)$ – $(F4)$, (2.1), (A) *и, кроме того, функция* $\mu(\cdot)$ *из условия* $(F4)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda} < 1. \tag{2.8}$$

Тогда мультиоператор Γ *является* ν*-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega \subset C([0,T];E)$ — непустое ограниченное множество такое, что

$$\nu(\Gamma(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \tag{2.9}$$

Покажем, что это множество относительно компактно.

Из (2.9) следует, что

$$\varphi(\Gamma(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \tag{2.10}$$

Используя свойство $(F4)$ и (2.3) получаем

$$\chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq \chi\left(\int_0^T G(t,s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right)$$
$$\leq \|\mu\|_\infty \int_0^T |G(t,s)|\,\chi(\Omega(s))ds \leq \|\mu\|_\infty \varphi(\Omega) \int_0^T |G(t,s)|\,ds = \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Следовательно,

$$\varphi\left(\Gamma(\Omega)\right) = \sup_{t\in[0,T]} \chi\left(\Gamma(\Omega)(t)\right) \leq \frac{\|\mu\|_\infty}{\lambda}\varphi(\Omega).$$

Полученное неравенство и неравенства (2.8), (2.10) влекут равенство $\varphi(\Omega) = 0$.

Теперь покажем, что $mod_C(\Gamma(\Omega)) = 0$.

Используя (2.9) докажем неравенство

$$mod_C(\Gamma(\Omega)) \geq mod_C(\Omega). \tag{2.11}$$

Достаточно показать равностепенную непрерывность множества

$$M = \left\{S(f)(t) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right\} = \left\{\int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(x),\, x \in \Omega\right\}.$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. При любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ таких, что $0 < t_1 < t_2 \leq T$, для произвольного $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, выполнено

$$\left\|S\left(f\right)\left(t_2\right) - S\left(f\right)\left(t_1\right)\right\|_E$$
$$\leq \Big\| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) f(s)ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) f(s)ds \Big\|_E$$
$$\leq \Big\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) f(s)ds \Big\|_E$$
$$+ \Big\| \int_0^{t_1} \left((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q)\right) f(s)ds \Big\|_E = Z_1 + Z_2,$$

где

$$Z_1 = \Big\| \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) f(s)ds \Big\|_E,$$

$$Z_2 = \Big\| \int_0^{t_1} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) f(s) ds \Big\|_E.$$

По условию $(F3)$ существует такое $\delta_1 > 0$, что если $|t_2 - t_1| < \delta_1$, то для любого $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, справедливо неравество

$$Z_1 \le \|\omega_{r\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) \frac{(t_2-t_1)^q}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Для оценки Z_2 выберем

$$d < \delta_2 := \left[\frac{\frac{\epsilon}{6} q}{\|\omega_{r\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q)(2^q+1)} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда для $t_1 < d$ и $t_2 - t_1 < d$ имеем

$$Z_2 \le \int_0^{t_1} (t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) \|f(s)\|_E \, ds + \int_0^{t_1} (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \|f(s)\|_E \, ds$$
$$\le \|\omega_{r\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) \, (2^q+1) \, \frac{d^q}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Для $t_1 > d$ получаем

$$Z_2 \le \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E$$
$$+ \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E,$$
$$I_2 = \Big\| \int_{t_1-d}^{t_1} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) f(s) ds \Big\|_E.$$

Возьмем d настолько малым, что

$$I_2 \le \frac{\|\omega_{r\Omega}\|_\infty E_{q,q}(\lambda T^q) d^q \, (2+2^q)}{q} < \frac{\epsilon}{6}.$$

Поскольку $\chi(\Omega(t)) \equiv 0$, то согласно лемме 1.8 для любого $\delta_3 > 0$ существуют компактное множество $K_{\delta_3} \subset E$, множество $m_{\delta_3} \subseteq [0,T]$ с лебеговой мерой $\mathrm{mes}(m_{\delta_3}) < \delta_3$ и множество функций $\Delta \subset L^1([0,T];E)$ со значениями из K_{δ_3} такие, что существует функция $b \in \Delta$, для которой

$$\|f(t) - b(t)\|_E \le \delta_3, \quad t \in [0,T] \setminus m_{\delta_3}. \tag{2.12}$$

Более того, функция $b \in \Delta$ может быть выбрана такой, что $b(t) \equiv 0$ на m_{δ_3}, и множество Δ слабо компактно в $L^1([0,T];E)$.

Тогда для I_1 выполнено:

$$I_1 = \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s) - b(s) + b(s) \big) ds \Big\|_E$$

$$\leq \Big\| \int_0^{t_1-d} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_0^{t_1-d} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) b(s) ds \Big\|_E$$

$$\leq \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E$$

$$= \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) (f(s)-b(s))\, ds \Big\|_E$$

$$+ \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \Big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \Big) b(s) ds \Big\|_E$$

$$= N_1 + N_2 + N_3,$$

где

$$N_1 = \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s)-b(s)\big) ds \Big\|_E,$$

$$N_2 = \Big\| \int_{[0,t_1-d]\cap m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) \big(f(s)-b(s)\big) ds \Big\|_E,$$

$$N_3 = \Big\| \int_{[0,t_1-d]\setminus m_{\delta_3}} \big((t_2-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_2-s)^q) - (t_1-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t_1-s)^q) \big) b(s) ds \Big\|_E.$$

В силу неравенства (2.12), можно выбрать $\delta_3 > 0$ настолько малым, что если

$$\operatorname{mes}(m_{\delta_3}) < 2\frac{\epsilon}{6} d^{1-q},$$

то справедливы неравенства $N_1 < \frac{\epsilon}{6}$ и $N_2 < \frac{\epsilon}{6}$.

Заметим, что функции из Δ принимают значения во множестве K_{δ_3}, что влечет включение $\Delta \subset L^\infty([0,T];E)$. Поэтому, используя лемму 2.4, можем выбрать $\delta_4 > 0$ таким, что если $|t_2 - t_1| < \delta_4$, то $N_3 < \frac{\epsilon}{6}$.

Итак, для произвольного $\epsilon > 0$, определив $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, получим

$$\big\| S(f)(t_2) - S(f)(t_1) \big\|_E \leq Z_1 + Z_2 \leq Z_1 + I_1 + I_2 \leq Z_1 + I_2 + N_1 + N_2 + N_3$$
$$< \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \epsilon$$

для любых $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $x \in \Omega$, и $|t_2 - t_1| < \delta$. Таким образом, множество M равностепенно непрерывно. Из неравенства (2.11) следует, что $mod_C(\Omega) = 0$, поэтому $\nu(\Omega) = (0,0)$, что доказывает относительную компактность множества Ω. □

Теорема 2.2. *Мультиоператор* Γ *является п.н.с.*

Доказательство. Из аналитического задания мультиоператора Γ и свойств многозначных отображений (см., например, [20]) следует, что утверждение достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является квазикомпактным. Возьмем непустое компактное множество $A \subset C([0,T];E)$ и рассмотрим последовательность $\{y_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F^\infty(A)$, $y_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset A$. Предположим, без ограничения общности, что $x_n \to x_0 \in A$. Из условия $(F4)$ следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компактна для п. в. $t \in [0,T]$, поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1-полукомпактной. Согласно критерию слабой относительной компактности Дистеля (см. [22]), для произвольной подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$ выполнено $f_{n_k} \overset{L^1}{\rightharpoonup} f_0$. В силу свойств слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [20, лемма 5.1.1]) получаем, что $f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$. Теперь, применяя лемму 2.4, для соответствующей подпоследовательности получаем, что $y_{n_k} \to y_0 = S(f_0) \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$.

Аналогично доказывается, что мультиоператор $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является замкнутым, и согласно лемме 1.6 этот мультиоператор является п.н.с. □

Теперь приведем основное утверждение данной работы.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, (2.1), (A). *Пусть также выполнено условие*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L_+^\infty([0,T])$ *такая, что*

$$\|F(t,x)\|_E \le \alpha(t)(1 + \|x\|_E).$$

Тогда, если

$$k := \max\{\|\alpha\|_\infty, \|\mu\|_\infty\} < \lambda,$$

где функции α *и* μ *из условий* $(F3')$ *и* $(F4)$ *соответственно, то краевая задача* (0.1), (0.2) *имеет решение.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0,T];E)$. Для любых $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0,T]$ имеем:

$$\|\Gamma x(t)\|_E \le \Big\| \int_0^T G(t,s) f(s) ds \Big\|_E \le \int_0^T |G(t,s)| \, \|f(s)\|_E ds$$
$$\le \int_0^T |G(t,s)| \, \|\alpha\|_\infty \big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big) ds = \|\alpha\|_\infty \left(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\right) \int_0^T |G(t,s)| \, ds$$
$$= \frac{\|\alpha\|_\infty \big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big)}{\lambda} \le \frac{k\big(1 + \|x\|_{C([0,T];E)}\big)}{\lambda}.$$

Таким образом, для

$$R \ge \frac{k\lambda^{-1}}{1 - k\lambda^{-1}},$$

из неравенства $\|x\|_{C([0,T];E)} \le R$ следует, что $\|\Gamma x\|_{C([0,T];E)} \le R$. Поэтому мультиоператор Γ преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0,T];E)$ в себя. А поскольку мультиоператор Γ уплотняющий, по теореме 1.1 он имеет неподвижную точку, которая является решением задачи (0.1), (0.2). □

References

[1] S. G. Samco, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publ., Amsterdam, 1993.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science B.V., North–Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 2006.

[3] F. Mainardi, S. Rionero, T. Ruggeri, "On the initial value problem for the fractional diffusionwave equation", *Waves and Stability in Continuous Media*, 1994, 246–251.

[4] M. Afanasova, Y. Ch. Liou, V. Obukhoskii, G. Petrosyan, "On controllability for a system governed by a fractional-order semilinear functional differential inclusion in a Banach space", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **20**:9 (2019), 1919–1935.

[5] J. Appell, B. Lopez, K. Sadarangani, "Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives", *J. Nonlinear Var. Anal.*, 2018, № 2, 25–33.

[6] T. D. Ke, N. V. Loi, V. Obukhovskii, "Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2015, № 18, 531–553.

[7] М. С. Афанасова, Г. Г. Петросян, "О краевой задаче для функционально-дифференциального включения дробного порядка с обобщенным начальным условием в банаховом пространстве", *Известия вузов. Математика*, 2019, № 9, 3–15; англ. пер.:M. Afanasova, G. Petrosyan, "On the boundary value problem for functional differential inclusion of fractional order with general initial condition in a Banach space", *Russian Mathematics*, **63**:9 (2019), 1–11.

[8] I. Benedetti, V. Obukhovskii, V. Taddei, "On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions", *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, № 20, 1424–1446.

[9] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space", *Applicable Analysis*, **97**:4 (2018), 571–591.

[10] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional–Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space", *Mathematics*, **7**:12, Special Issue "Fixed Point, Optimization, and Applications" (2019), 5–19.

[11] Г. Г. Петросян, "Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве", *Уфимский математический журнал*, **12**:3 (2020), 71–82; англ. пер.:G. Petrosyan, "On antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential inclusion of fractional order with a deviating argument in a Banach space", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:3 (2020), 69–80.

[12] R. Agarwal, B. Ahmad, "Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions", *Comput. Math. Appl.*, 2011, № 62, 1200–1214.

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "Existence and Approximation of Solutions to Nonlocal Boundary Value Problems for Fractional Differential Inclusions", *Fixed Point Theory and Applications*, 2019, № 2, 1–21.

[14] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, G. Petrosyan, J. C. Yao, "On approximate solutions for a class of semilinear fractional-order differential equations in Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, **28**:4 (2017), 1–28.

[15] M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez–Lopez, "Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation", *Boundary Value Problems*, **2009** (2009), 1–18, Article ID 324561.

[16] M. Belmekki, J. J. Nieto, R. Rodriguez–Lopez, "Existence of solution to a periodic boundary value problem for a nonlinear impulsive fractional differential equation", *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **16** (2014), 1–27.

[17] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin, *Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer–Verlag, Berlin; Heidelberg, 2014.

[18] V. M. Bogdan, *Generalized Vectorial Lebesgue and Bochner Integration Theory*, 2010, arXiv: 1006.3881v1.

[19] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1, Физматлит, М., 2006. [G. M. Fichtengolts, *Course in Differential and Integral Calculus.* V. 1, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[20] M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin; New–York, 2001.

[21] V. V. Obukhovskii, B. Gelman, *Multivalued Maps and Differential Inclusions. Elements of Theory and Applications*, World Scientific, Singapore, 2020.

[22] J. Diestel, W. M. Ruess, W. Schachermayer, "On weak compactness in $L^1(\mu, X)$", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, № 118, 447–453.

Информация об авторах

Каменский Михаил Игоревич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой функционального анализа и операторных уравнений. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7542-0902

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Петросян Гарик Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Петросян Гарик Гагикович
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 24.05.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Information about the authors

Mikhail I. Kamenskii, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Functional Analysis and Operator Equations Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7542-0902

Valeri V. Obukhovskii, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation.
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4201-0739

Garik G. Petrosyan, Candidate of Physics and Mathematics, Docent of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8154-6299

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Garik G. Petrosyan
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Received 15.03.2021
Reviewed 24.05.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-271-295

Existence and stability of periodic solutions in a neural field equation

Karina KOLODINA[1] **, Vadim KOSTRYKIN**[2] **, Anna OLEYNIK**[3]

[1] Norwegian University of Life Sciences
P.O. Box 5003, №-1432 Ås 5003, Norway
[2] Johannes Gutenberg University of Mainz
Staudingerweg 9, 55099 Mainz, Germany
[3] University of Bergen
P.O. Box 7803, №-5020 Bergen 7803, Norway

Abstract. We study the existence and linear stability of stationary periodic solutions to a neural field model, an intergo-differential equation of the Hammerstein type. Under the assumption that the activation function is a discontinuous step function and the kernel is decaying sufficiently fast, we formulate necessary and sufficient conditions for the existence of a special class of solutions that we call 1-bump periodic solutions. We then analyze the stability of these solutions by studying the spectrum of the Frechet derivative of the corresponding Hammerstein operator. We prove that the spectrum of this operator agrees up to zero with the spectrum of a block Laurent operator. We show that the non-zero spectrum consists of only eigenvalues and obtain an analytical expression for the eigenvalues and the eigenfunctions. The results are illustrated by multiple examples.

Keywords: nonlinear integral equations, sigmoid type nonlinearities, neural field model, periodic solutions, block Laurent operators

Mathematics Subject Classification: 45M10, 47B35, 92B25.

Acknowledgements: This research work was supported by the Norwegian University of Life Sciences and The Research Council of Norway (projects no. 239070).

For citation: Kolodina K., Kostrykin V., Oleynik A. Sushchestvovaniye i ustoychivost' periodicheskikh resheniy uravneniya neyronnogo polya [Existence and stability of periodic solutions in a neural field equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 271–295. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-271-295.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-271-295
УДК 517.98

Существование и устойчивость периодических решений уравнения нейронного поля

Карина КОЛОДИНА[1] **, Вадим КОСТРЫКИН**[2] **, Анна ОЛЕЙНИК**[3]
[1] Норвежский университет естественных наук
5003, Норвегия, г. Ос ПО 5003, №-1432
[2] Университет Майнца
55099, Германия, г. Майнц, ул. Штаудингера, 9
[3] Бергенский университет
7803, Норвегия, г. Берген ПО 7803, №-5020

Аннотация. В статье изучаются существование и устойчивость стационарных периодических решений модели нейронного поля, а именно интегрально-дифференциального уравнения типа Гаммерштейна. Полагая, что функция активации — ступенчатая функция, а ядро оператора — быстроубывающая функция, мы формулируем необходимые и достаточные условия существования особого класса решений — 1 -бамповые (выпуклые) периодические решения. Далее мы изучаем устойчивость этих решений с помощью спектра производной Фреше соответствующего оператора Гаммерштейна. Мы доказываем, что этот спектр согласуется с точностью до нуля со спектром блочного оператора Лорана. Также показываем, что ненулевой спектр состоит только из собственных значений, и получаем аналитические выражения как для собственных значений, так и для собственных функций. Кроме того в статье рассмотрены примеры.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, сигмоивидная функция активации, модель нейронного поля, периодические решения, блочные операторы Лорана

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Норвежского университета естественных наук и исследовательского совета Норвегии (проект № 239070).

Для цитирования: *Колодина К., Кострыкин В., Олейник А.* Существование и устойчивость периодических решений уравнения нейронного поля // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 271–295. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-271-295. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The behavior of a single layer of neurons can be modeled by a nonlinear integro-differential equation of the Hammerstein type,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = -u(x,t) + \int_{\mathbb{R}} \omega(x-y)f(u(y,t)-h)dy. \tag{0.1}$$

Here $u(x,t)$ and $f(u(x,t)-h)$ represent the averaged local activity and the firing rate of neurons at the position $x \in \mathbb{R}$ and time $t > 0$, respectively. The parameter $h \in \mathbb{R}$ denotes the threshold of firing and $\omega(x-y)$ describes a coupling between neurons at positions x and y.

The model (0.1) belongs to a special class of models, so called neural field models, where the neural tissue is treated as a continuous structure, and is often referred to as the Amari model. Since the original paper by Amari [1], this model has been studied in numerous mathematical papers, for a review see, e. g., [2, 3] and [4]. In particular, the global existence and uniqueness of solutions to the initial value problem for (0.1) under rather mild assumptions on f and ω has been proven in [5].

In [1] Amari studied pattern formation in (0.1) for a model under the simplifying assumption that f is the unit step function H, and ω is of the "lateral-inhibitory type", i. e., continuous, integrable and even, with $\omega(0) > 0$ and having exactly one positive zero. In particular, he analyzed the existence and stability of stationary localized solutions, or so called 1-bump solutions, of the fixed point problem

$$u(x) = (\mathcal{H}u)(x), \quad (\mathcal{H}u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-y)f(u(y)-h)dy. \tag{0.2}$$

The equations (0.1) and (0.2) have been studied with respect to various combinations of firing rate functions and connectivity functions, see [2, 4, 6]. Common examples of ω are the exponentially decaying function,

$$\omega(x) = Se^{-s|x|}, \quad S, s > 0, \tag{0.3}$$

the so-called wizard-hat function,

$$\omega(x) = S_1 e^{-s_1|x|} - S_2 e^{-s_2|x|}, \quad S_1 > S_2 > 0, \quad s_1 > s_2 > 0, \tag{0.4}$$

and the periodically modulated function

$$\omega(x) = e^{-b|x|}(b\sin(|x|)) + \cos(x)), \quad b > 0, \tag{0.5}$$

see Pic. 1. In the paper we impose the following assumptions on ω.

Assumption A. *The connectivity function ω satisfies the following conditions.*

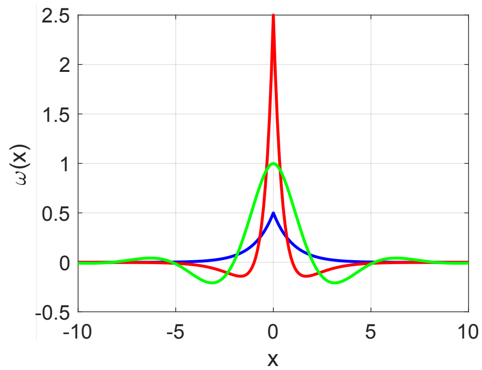
(i) $\omega(x) = \omega(-x)$

(ii) $\omega(x) \to 0$ *as* $|x| \to \infty$ *and* $|\omega(x)| \le C(1+|x|)^{-1-\delta}$, $C, \delta = \text{const} > 0$.

(iii) $\omega \in C_b^{0,1}(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}} \omega(x)dx =: h_0 > 0$.

One can easily check that the functions in (0.3)–(0.5) satisfy Assumption A and decrease exponentially fast as $|x| \to 0$.

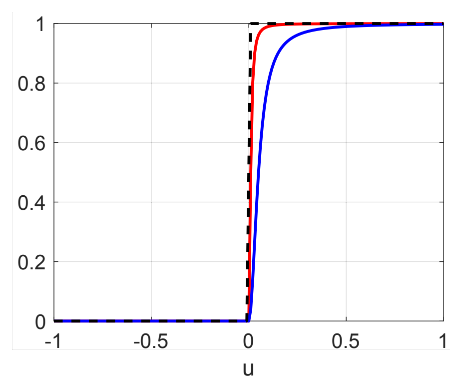


Picture 1. Connectivity functions $\omega(x)$ given by (0.3) with $S = 0.5$, $s = 1$ (blue curve), (0.4) with $S_1 = 4$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$ (red curve), and (0.5) with $b = 0.5$ (green curve).

The firing rate function $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ is usually given as a smooth function of sigmoid shape. It is often represented by a parameterized function $f(u) = S(\beta u)$, see e. g. [7–10] where $S(\beta u)$ approaches (in some specific way) the unit step function $H(u)$ as $\beta \to \infty$. One example of $f(u)$ is

$$f(u) = S(\beta u), \quad S(u) = \frac{u^p}{u^p + 1} H(u), \quad p > 1, \tag{0.6}$$

see Pic. 2.



Picture 2. Functions $f(u) = S(\beta u)$, S is as in (0.6), $p = 2$, with $\beta = 100$ (red curve) and $\beta = 20$ (blue curve) and the unit step function $H(u)$ (black dashed line).

Already in his seminal paper Amari conjectured that there must exist periodic stationary solutions in the absence of bump solutions and constant solutions. He however did not pursue a further study of periodic solutions. Of course the absence of other types of stationary solutions is not necessary for periodic solutions to exist. In fact, as in some cases bump solutions can be viewed as a homoclinic orbits of an ordinary differential equation (ODE) with ω being the Green's function of its linear part, see e. g. [11], periodic solutions are very likely to co-exist with the bump solution, see [12, 13] (in Russian) and [14], and [15]. In [3, 16, 17] it has been shown numerically that stable periodic solutions of the two population version of the Amari model exist and emerge from homogeneous solutions via Turing-Hopf bifurcation. To the best of our knowledge there are no theoretical studies that address the existence of periodic solutions to (0.1) except [8], and no studies on the stability of these solutions.

Krisner in [8] studied the existence of periodic solutions to (0.1) with ω given by (0.5). In this case, any bounded solution of (0.2) is a solution of a forth order ODE, see [18] and can be studied by methods developed for ODEs. Given f as a smooth steep sigmoid function it has been shown that (0.1) has at least two periodic solution under some assumptions on the parameters. The analysis is however rather cumbersome and is not applicable for general types of ω as, e. g., (0.3) and (0.4). Thus, we would like to proceed in a different way and address the existence of periodic solutions without reformulating (0.2) as ODEs.

When f is approximated by a step function H it is possible to obtain analytical expressions for some types of stationary solutions and travelling waves, see e. g. chapter 3 in [4] and [19]. However, the operator $\mathcal{H}$ in this case is discontinuous in any classical functional space and thus, classical functional analysis tools such as e. g. generalized Picard-Lindelof theorem or Hartman-Grobman theorem, usually fail. However, many papers still conveniently assume that the model is well-posed on the considered spaces and study the stability of solutions by first approximation, see [1, 19, 20] and [21] just to name a few.

The natural way to overcome this problem is to study the model (0.1) with $f(u) = S(\beta u)$ and only use the limiting case $f = H$ to gain the knowledge about the existence and stability of solutions for large values of β. The approximation of $f = H$ with $f = S(\beta u)$ then must be properly justified. This has been successfully done for bumps solutions in [10, 22] and [23].

Our overall aim is to generalize the analysis in the mentioned papers for the periodic 1-bump solutions. In this paper we take the first crucial step towards this direction and study the limiting case $f = H$.

The paper organized as follows: First we introduce the notation we use. In Section 1 we give the definition of 1-bump periodic solutions and study their existence by means of the Amari approach. We formulate necessary and sufficient conditions for the existence of 1-bump periodic solutions and show that for $\omega \geq 0$ there is a unique solution for each period $T > 0$. Section 2 is dedicated to the linear stability of 1-bump periodic solutions. We show that the spectrum of the corresponding linearized operator $\mathcal{H}$ can be obtained as the spectrum of an infinite block Laurent (or bi-infinite block Toeplitz) operator. We give an analytical expression for the spectrum in terms of the symbol of the Laurent operator and discuss ways how it can be calculated numerically. We prove that the spectrum consists only of eigenvalues and give a formula for calculating eigenfunctions. The results in Section 1 and Section 2 are illustrated for the case of ω given by (0.3) and (0.4). Finally, we make conclusions and discus future perspectives.

Notations

For the convenience of the readers we give a list of functional spaces and specify other notations we use.

- S^1 is the unit circle.
- i is the imaginary unit.
- $\overline{z}$ is the complex conjugate of $z \in \mathbb{C}$.
- $cl(\Omega)$ is the closure of a set Ω.
- $\|\cdot\|_{op}$ denotes the operator norm.
- $C_b^{0,1}(\mathbb{R})$ is the space of all Lipschitz continuous bounded functions on $\mathbb{R}$ equipped with

the norm

$$\|f\|_{C_b^{0,1}(\mathbb{R})} = \sup_{x,y\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}, \quad x \neq y.$$

- $\ell_p^m(\mathbb{Z})$ is the Banach space of sequences with entries from $\mathbb{R}^m$ where $1 \leq p \leq \infty$ and $m \in \mathbb{N}$ equipped with the norm

$$\|x\|_{\ell_p^m(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

and

$$\|x\|_{\ell_\infty^m(\mathbb{Z})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|, \quad p = \infty,$$

where $\|\cdot\|$ is any norm in $\mathbb{R}^m$.

- $\ell_p^{m\times m}(\mathbb{Z})$ is the space of sequences where components are matrices m by m on $\mathbb{R}$, equipped with the norm

$$\|A\|_{\ell_p^{m\times m}(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|A_k\|_{op}^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

and

$$\|A\|_{\ell_\infty^{m\times m}(\mathbb{Z})} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \|A_k\|_{op}, \quad p = \infty.$$

- $\mathcal{W}(S^1)$ is the Wiener space of functions defined on S^1 (continuous functions whose Fourier coefficients is an $\ell_1(\mathbb{Z})$ sequence) equipped with the norm

$$\|f\|_{\mathcal{W}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|,$$

where a_k are the Fourier coefficients of f.

- $\mathcal{W}^{m\times m}(S^1)$ is the Wiener space of m by m matrix functions defined on S^1 equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{op} = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_{ij}\|_{\mathcal{W}}.$$

- $\sigma(L)$ is the spectrum of the linear operator L.
- $\rho(L)$ is the resolvent of the linear operator L.

1. Existence of 1-bump periodic solutions

We consider a particular type of periodic solution that we call a 1-bump periodic solution, due to its shape on one considered period, that is, $u(x) \geq h$ on a (connected) interval and $u(x) < h$ otherwise. Krisner in [8] proved the existence of the same type of periodic solutions for ω given in (0.5). Below we define the class of periodic functions that we intent to consider.

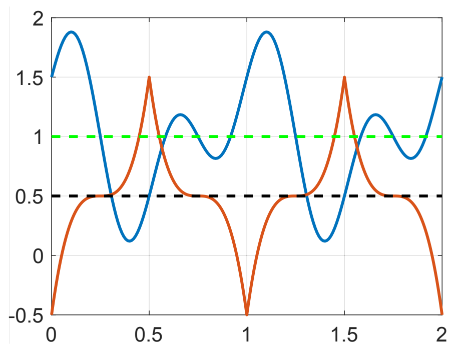
D e f i n i t i o n 1.1. Let $h \in \mathbb{R}$, and $u(x)$ be a continuous periodic function defined on $\mathbb{R}$ with a period $T > 0$. We say that $u(x)$ is a *1-bump periodic* function with period T, or simply 1-bump periodic, if there is a translation of $u(x)$, say $p(x) = u(x-c)$, with the following properties:

(i) It has two symmetric intersection, say at $x = \pm a$ with the straight line $y = h$, i. e., $p(\pm a) = h$.

(ii) It lies above $y = h$ for all $x \in (-a, a)$ and below for $x \in [-T/2, T/2] \setminus [-a, a]$, i. e., $p(x) > h$ for $x \in (-a, a)$ and $p(x) < h$ for $x \in [-T/2, T/2] \setminus [-a, a]$.

If in addition $u \in C_b^1(\mathbb{R})$ with $p'(\pm a) \neq 0$ then we say that $u(x)$ is regular.

We illustrate the definition above in Pic. 3.



Picture 3. The function corresponding to the blue curve is the regular 1-bump periodic if $h = 0.5$ and is not a 1-bump periodic if $h = 1$. The red curve corresponds to the 1-bump periodic function for both $h = 0.5$ and $h = 1$. Here we assume that the functions given by blue and red curves both have period $T = 1$.

A small perturbation of a regular 1-bump periodic function in $C_b^{0,1}(\mathbb{R})$ does not destroy the 1-bump structure of the function. We formulate it as the lemma below.

Lemma 1.1. *Let $h \in \mathbb{R}$ and $T > 0$ be fixed and $p(x)$ be a regular 1-bump periodic function with $p(\pm a) = h$, $0 < a < T/2$. Then there exists $\varepsilon > 0$ such that any $v \in B_\varepsilon(u_p) := \{v| : \|v - u_p\|_{C^{0,1}} < \varepsilon\}$ has exactly two intersection with the straight line $y = h$ on each of the intervals $(-T/2 + kT, T/2 + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, i. e., there are $a_\pm(\varepsilon, k) \in (-T/2 + kT, T/2 + kT)$ such that $v(a_\pm(\varepsilon, k)) = h$. Moreover $a_\pm(\varepsilon, k) \to \pm a + kT$ as $\varepsilon \to 0$ and $v(x) > h$ for $x \in (a_-(\varepsilon, k), a_+(\varepsilon, k))$ and $v(x) < h$ for $x \in [-T/2 + kT, T/2 + kT] \setminus (a_-(\varepsilon, k), a_+(\varepsilon, k))$.*

P r o o f. The proof goes in line with the proof of Lemma 3.6 in [24].

D e f i n i t i o n 1.2. A (regular) 1-bump periodic function which is a solution to (0.2) we call a (regular) 1-bump periodic solution to (0.1).

We notice that any solution to (0.2) is translation invariant, i. e., if $u(x)$ is a solution to (0.2) then so is $u(x - c)$ for any $c \in \mathbb{R}$. Thus, without loss of generality we can simply consider $p(x) = u(x)$ in (ii) of Definition 1.1.

Given that f is a unit step function, a 1-bump periodic solution can be expressed as

$$u_p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-a+kT}^{a+kT} \omega(x - y) dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} \omega(x - y + Tk) dy \tag{1.1}$$

where $a \in (0, T/2)$ is the root of $u_p(a) = h$.

We notice here that the critical cases $a = 0$ and $a = T/2$ correspond to the constant solutions $u_p(x) = 0$ and $u_p(x) = h_0$ where $h_0 = \int_{\mathbb{R}} \omega(y)dy > 0$. This serves as a motivation to consider $h \in (0, h_0)$. Further we will show that for some connectivity functions the condition $h \in (0, h_0)$ is sufficient for the existence of a 1-bump periodic solution.

It is easy to see that the function in (1.1) is periodic. Indeed,

$$u_p(x+T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} \omega(x - y + T(k+1))dy = u_p(x).$$

Moreover, due to Assumption A (i), it is even

$$\begin{aligned} u_p(-x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} \omega(-x - y + Tk)dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} \omega(-x + y + Tk)dy \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-a}^{a} \omega(x - y - Tk)dy = u_p(x). \end{aligned}$$

From Assumption A(ii) we obtain the following estimate

$$\max_{\substack{x\in[-T/2,T/2] \\ y\in[-a,a]}} |\omega(x - y + Tk)| \le C\alpha_k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

where

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ (1 + T|k| - a - T)^{-1-\delta}, & |k| \ge 1. \end{cases}$$

Since $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k$ converges, the series $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \omega(x + Tk)$ converges absolutely and uniformly on $[-a - T/2, a + T/2]$. Due to periodicity of this series, it converges absolutely and uniformly on any bounded interval to an even periodic function

$$\omega_p(x;T) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \omega(x - Tk) \tag{1.2}$$

that has the antiderivative

$$W_p(x;T) := \int_0^x \omega_p(y;T)dy = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^x \omega(y - kT)dy. \tag{1.3}$$

Using the notations above we obtain

$$u_p(x) = \int\limits_{-a}^{a} \omega_p(x - y;T)dy \tag{1.4}$$

or, equivalently,

$$u_p(x) = W_p(x + a;T) - W_p(x - a;T) \tag{1.5}$$

where a is then given as

$$W_p(2a;T) = h. \tag{1.6}$$

Thus, the procedure of finding 1-bump periodic solutions becomes analogous to the one of finding 1-bump solutions proposed by Amari in [1] where instead of ω and W we use ω_p and W_p, respectively. Namely, first we find a from (1.6). Then we verify that the function in (1.5) is indeed a 1-bump periodic function. As the function u_p is even and periodic, it is enough to consider the interval $[0, T/2]$. We summarize this in a theorem.

Theorem 1.1. *The function $u_p(x)$ given by (1.5) is a periodic solution to (0.1) if and only if the following three conditions hold*

(1) $u_p(a) = h$, *or equivalently,* $W_p(2a;T) = h$, *for some* $0 < a < T/2$,

(2) $u_p(x) > h$ *for all* $x \in (0, a)$,

(3) $u_p(x) < h$ *for all* $x \in (a, T/2]$.

Similarly as for the bump solutions, it is not generally possible to verify the conditions of the theorem above without additional information about ω. However, for a particular choice of ω the verification procedure is rather simple.

Observe that from (1.5) $u_p \in C_b^1(\mathbb{R})$. Then we calculate

$$u_p'(x) = \omega_p(x + a; T) - \omega_p(x - a; T) \tag{1.7}$$

and

$$|u_p'(a)| = \omega_p(0; T) - \omega_p(2a; T). \tag{1.8}$$

Hence, if u_p is a 1-bump periodic solution, $\omega_p(0;T) \geq \omega_p(2a;T)$ must be satisfied. Then for $\omega \geq 0$ we can simplify conditions of Theorem (1.1).

Lemma 1.2. *Let $T > 0$ be arbitrary and ω satisfies Assumption A. Then for any $0 < h < h_0$ the equation $u_p(a) = h$ possesses at least one solution $a \in (0, T/2)$. If $\omega \geq 0$ and can have only isolated zeros then such $a = a(T)$ is unique and the corresponding u_p is a 1-bump regular periodic solution provided that $\omega_p(2a(T);T) < \omega_p(0;T)$.*

P r o o f. Since the function $W_p(x;T)$ is continuous and $W_p(0;T) = 0$ and $W_p(T;T) = h_0 > 0$, there is at least one solution to the equation $W_p(2a;T) = h$ with $0 < a < T/2$.

Assume now that $\omega \geq 0$ and does not have non isolated zeros. Then $W_p(x;T)$ is strictly monotone increasing on $[0, T/2]$. Indeed,

$$\frac{d}{dx} W_p(x;T) = \omega_p(x;T) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega(x + Tk) \geq 0$$

and may have only isolated zeros. This implies the uniqueness of a as a function of T. The final statement follows from (1.8) and uniqueness of a. □

For more general function ω number of 1-bump periodic solution may vary with the period. Now let us consider several examples of ω, T and h for which the solutions do not exist, exist and are unique or non-unique.

E x a m p l e 1.1. We consider two examples of the connectivity functions given in (0.3) and (0.4) where most of the calculations can be done analytically.

Indeed, for ω given by (0.3) we get $h_0 = 2S/s$,

$$\omega_p(x;T) = S\psi(x \bmod T; s), \text{ and } W_p(x) = \frac{2S}{s} \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + S\Psi(x \bmod T; s)$$

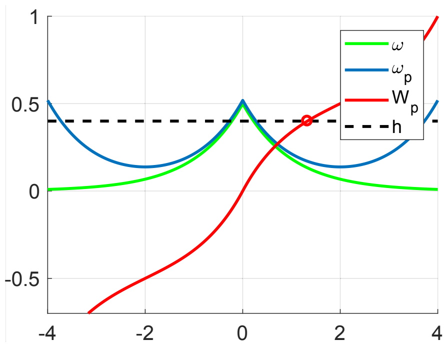
where

$$\psi(x;s) = \frac{\exp(-sx) + \exp(-s(T - x))}{1 - \exp(-sT)} \tag{1.9}$$

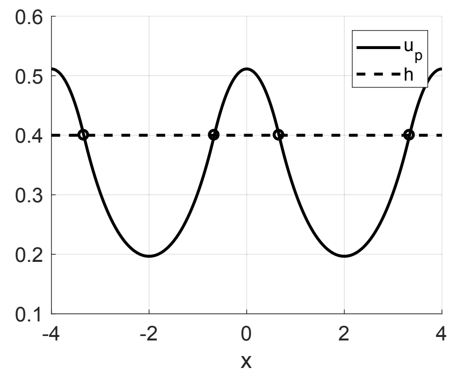
$$\Psi(x;s) = \frac{\exp(s(x-T)) - \exp(-sx) - \exp(-sT) + 1}{s(1-\exp(-sT))}, \tag{1.10}$$

see Pic. 4(a).

From Lemma 1.2 the equation $W_p(2a;T) = h$, $h \in (0, h_0)$ possesses a unique solution $0 < a(T) < T/2$. Moreover, $\omega_p(0;T) = 2S/(1-\exp(-sT))$ and $\omega_p(2a;T) = (\exp(-2sa) + \exp(-s(T-2a)))/(1-\exp(-sT))$ and thus, $\omega_p(2a;T) < \omega_p(0;T)$ for any $T > 0$ which implies that $u_p(x)$ is a 1-bump regular periodic solution, see Pic. 3.



(a)



(b)

Picture 4. (a) The function ω given in (0.3) with $S = 0.5$, $s = 1$ and the corresponding ω_p and W_p with $T = 4$. The intersection point corresponds to $a = 0.6633$ (rounded up to 4 decimals) and $h = 0.4$. (b) 1-periodic bump solution (1.5) with W_p as in (a).

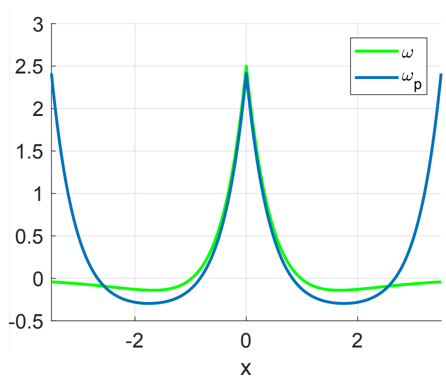
For ω given by (0.4) we find $h_0 = 2(S_1/s_1 - S_2/s_2)$,

$$\omega_p(x;T) = S_1\psi(x \bmod T; s_1) - S_2\psi(x \bmod T; s_2) \tag{1.11}$$

and

$$W_p(x;T) = \left(\frac{2S_1}{s_1} - \frac{2S_2}{s_2}\right)\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + S_1\Psi(x \bmod T; s_1) - S_2\Psi(x \bmod T; s_2) \tag{1.12}$$

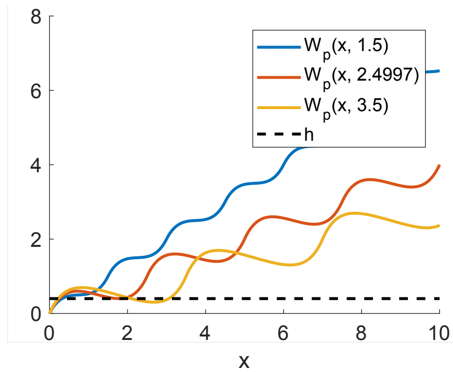
with ψ and Ψ given as in (1.9)–(1.10), see Pic. 5.



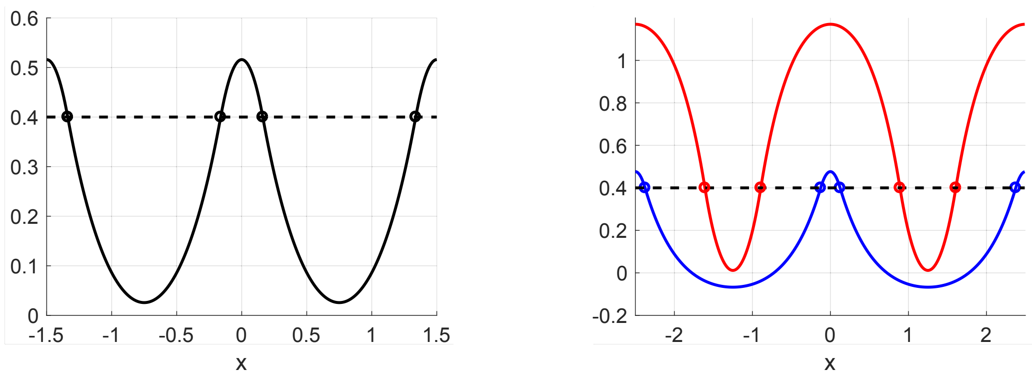
Picture 5. The function ω given by (0.4) with parameters $S_1 = 4$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$ and the corresponding ω_p and W_p, see (1.11)–(1.12) with $T = 3.5$.

The equation $W_p(2a;T) = h$, $h \in (0, h_0)$ has one, two, or three solutions depending on T. That is for the parameter values $S_1 = 4$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$ and $h = 0.4$, it has one solution for $T < T_1 := 2.4997$, two solutions for $T = T_1$ and three solutions for $T > T_1$, see

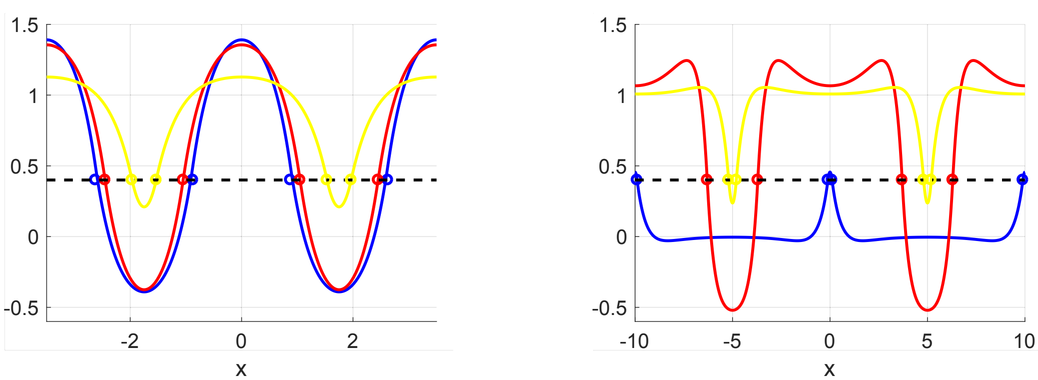
Pic. 6. The value $T_1 = 2.4997$ is obtained numerically and is rounded up to four decimals. It turns out that all of u_p correspond to 1-periodic bump solutions, see Pic. 7, Pic. 8.



Picture 6. The function W_p in (1.12) with parameters $S_1 = 4$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$ for different periods T and the fixed threshold value $h = 0.4$.



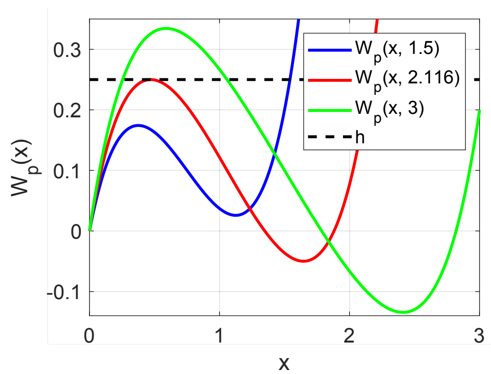
Picture 7. (a) 1-bump periodic solutions (1.5) with $T = 1.5$. The intersection point corresponds to $a = 0.1619$ and $h = 0.4$. (b) 1-bump periodic solutions (1.5) with $T = 2.4997$. The intersection points correspond to $a_1 = 0.1243$, $a_2 = 0.8919$ and $h = 0.4$. (All the approximated values are rounded up to 4 decimals.)



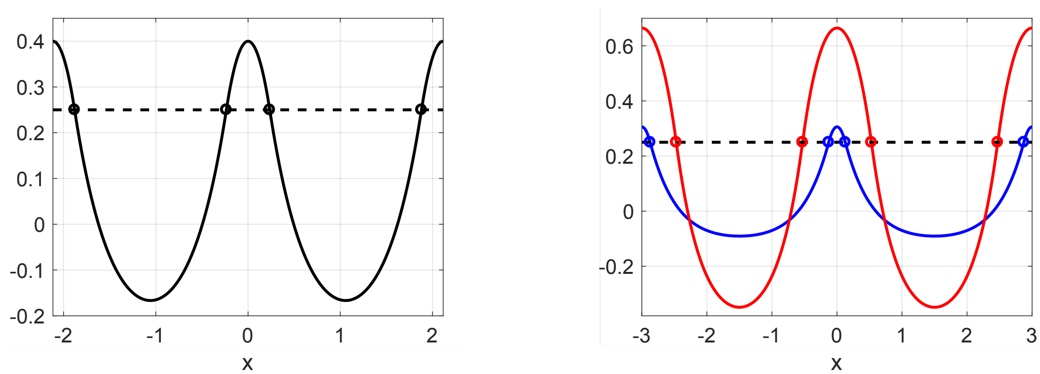
(a) (b)

Picture 8. (a) 1-bump periodic solutions (1.5) with $T = 3.5$. The intersection points correspond to $a_1 = 0.1113$, $a_2 = 1.0494$ and $a_3 = 1.5281$, and $h = 0.4$. (b) 1-bump periodic solutions (1.5) with $T = 7$. The intersection points correspond to $a_1 = 0.1046$, $a_2 = 2.2792$ and $a_3 = 3.3036$ and $h = 0.4$. (All the approximated values are rounded up to 4 decimals.)

There are parameters S_1, S_2, and s_1, s_2 that $W_p(2a;T) = h$ have two solutions for $h > h_0$ and some $T > 0$. For example, for $S_1 = 3$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.4$, $s_2 = 1$, and $h = 0.25$ this situation occurs when $T > 2.116$, see Pic. 9. These solutions correspond to the 1-bump periodic solutions, see Pic. 10. We however do not aim to study this particular case of the connectivity function in detail. Thus, we will further restrict our attention to the case $h < h_0$, see Pic. 6.



Picture 9. The function $W_p(x;T)$ in (1.12) with parameters $S_1 = 3$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.4$, $s_2 = 1$, for different periods T and the fixed threshold value $h = 0.25$.



(a) (b)

Picture 10. (a) 1− bump periodic solution (1.5) with $T = 2.116$. The point of tangency corresponds to $a = 0.2352$ and $h = 0.25$. (b) 1− bump periodic solutions (1.5) with $T = 3$. The intersection points correspond to $a_1 = 0.1272$, $a_2 = 0.5288$ and $h = 0.25$. (All the approximated values are rounded up to 4 decimals.)

2. Stability of 1-bump periodic solutions

In this section we study linear stability of regular 1-bump periodic solutions. We first obtain the Fréchet derivative of the Hammerstein operator defined in (0.2) and then study its spectrum.

Lemma 2.1. *Let $h, T > 0$ be fixed and u_p be a 1-bump periodic solution of (0.1). The Fréchet derivative of the operator $\mathcal{H} : C_b^{0,1}(\mathbb{R}) \to C_b^{0,1}(\mathbb{R})$ at u_p exists and is given as*

$$(\mathcal{H}'(u_p)v)(x) = \frac{1}{|u_p'(a)|}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\omega(x + a - kT)v(-a + kT) + \omega(x - a - kT)v(a + kT)).$$

P r o o f. Due to Lemma 1.1 and periodicity of u_p the proof in [10] for bumps can be easily adopted here. $\square$

We would like to emphasize that the regularity condition on u_p, that is $|u_p'(a)| > 0$, is necessary in order for the Fréchet derivative to exists.

Next we show how the spectrum of the operator $\mathcal{H}'(u_p)$ relates to the spectrum of a Laurent block operator, or in some literature, bi-infinite block Toeplitz operator, see e. g. [25] and [26,27].

Let $\ell_p^m(\mathbb{Z})$ be a Banach space of sequences with entries from $\mathbb{R}^m$, see Notations.

The block Laurent operator $L : \ell_p^m(\mathbb{Z}) \to \ell_p^m(\mathbb{Z})$ can be represented as an bi-infinite matrix with constant diagonal elements, that is, $L = (A_{i-j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ giving

$$L = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \\ & A_1 & A_0 & A_{-1} & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_k \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{2.1}$$

The representation (2.1) means that the action of L is given by

$$\left(L\,(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\,, \quad y_j = \sum_i A_{i-j}x_j.$$

For $p = 1, \infty$ we have

$$\|L\|_{op} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|A_k\|_{op}. \tag{2.2}$$

Theorem 2.1. *The nonzero spectrum of the operator* $\mathcal{H}'(u_p) : C_b^{0,1}(\mathbb{R}) \to C_b^{0,1}(\mathbb{R})$ *(see Lemma 2.1) agrees with that of the Laurent block operator* $L : \ell_\infty^2(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty^2(\mathbb{Z})$ *defined by*

$$A_k = \frac{1}{|u_p'(a)|}\begin{pmatrix} \omega(kT) & \omega(-2a+kT) \\ \omega(2a+kT) & \omega(kT) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Moreover, any eigenfunction $v(x)$ *of* $\mathcal{H}'(u_p)$ *(if exists) corresponds to the eigenfunction* $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *of* L *where*

$$\mathrm{v}_k = (v(-a+kT), v(a+kT))^T, \quad k \in \mathbb{Z},$$

and for a given eigenfunction v *of* L *that corresponds to a non-zero eigenvalue, we can calculate the eigenfunction of* $\mathcal{H}'(u_p)$ *as*

$$v(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{|u_p'(a)|}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\omega(x+a-kT)\mathrm{v}_k^{(1)} + \omega(x-a-kT)\mathrm{v}_k^{(2)}.$$

P r o o f. First of all we observe that L is a bounded operator on $\ell_\infty^2(\mathbb{Z})$ since

$$\|L\|_{op} = \frac{1}{|u_p'(a)|}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(|\omega(kT)| + \max\{|\omega(\pm 2a+kT)|\}) < \infty$$

due to Assumption A. A number $\lambda \in \mathbb{C}$ is in the resolvent set of the operator $\mathcal{H}'(u_p)$ if and only if the equation

$$\mathcal{H}'(u_p)\xi - \lambda\xi = w$$

has a solution ξ for any w, where ξ and w belong to the complexified $C_b^{0,1}(\mathbb{R})$. Thus, if $\lambda \in \mathbb{C}$ is in the resolvent set of the operator $\mathcal{H}'(u_p)$, then for any $k \in \mathbb{Z}$ the system of equations

$$(\mathcal{H}'(u_p)\xi)(a+kT) - \lambda\xi(a+kT)\xi = w(a+kT),$$

$$(\mathcal{H}'(u_p)\xi)(-a+kT) - \lambda\xi(-a+kT)\xi = w(-a+kT)$$

possesses a solution. Hence, λ is in the resolvent set of the operator L.

Conversely, assume that $\lambda \neq 0$ is in the resolvent set of the operator L. Then for any arbitrary w the values $\xi(a+kT)$ and $\xi(-a+kT)$ of the solution to $\mathcal{H}'(u_p)\xi - \lambda\xi = w$ are determined. For arbitrary $x \in \mathbb{R}$ we set

$$\xi(x) = \frac{1}{\lambda}((\mathcal{H}'(u_p)\xi)(x) - w(x)).$$

It is straightforward to verify that $\xi \in C_b^{0,1}$ and solves $\mathcal{H}'(u_p)\xi - \lambda\xi = w$. We have shown that the resolvent sets of $\mathcal{H}'(u_p)$ and L agree up to the point $\lambda = 0$. Thus, their spectra agree up to the point $\lambda = 0$ as well. The second part of the statement follows from above. □

The reader can find more information about Laurent operators and their properties in [25] and more recent studies [26, 27]. The results concerning in particular the spectrum of Laurent operators can be found in [28]. Finally, as the spectrum of Laurent operator on $\ell_2^m(\mathbb{Z})$ is given by the spectrum of the corresponding matrix valued multiplication operator we refer to [29] where the spectrum of the latter operator is studied. For the original paper on the Toeplitz and Laurent operators see [30].

Since the eigenvalue 0 does not have any impact on the stability of u_p, we now turn to the study of the Laurent operator in (2.1) with elements as in (2.3).

As $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_1^{2\times 2}(\mathbb{Z})$ we can define a matrix function $\Phi : S^1 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ as

$$\Phi(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k z^k, \quad z \in S^1, \tag{2.4}$$

where S^1 is the unit circle. The power series is uniformly convergent and thus the function Φ is continuous on S^1. The function Φ is called a symbol or a defining function of L. It is easily observed that Φ belongs to the Weiner algebra of all periodic functions with absolutely summable sequence of Fourier coefficients, that is $\Phi \in \mathcal{W}^{2\times 2}(S^1)$. Via the Fourier transform the Banach algebra of all block Laurent operators on $\ell_\infty^2(\mathbb{Z})$ is isomorphic to $\mathcal{W}^{2\times 2}(S^1)$.

We prove the following important result.

Theorem 2.2. *(i) The spectrum of the block Laurent operator $L : \ell_\infty^m(\mathbb{Z}) \to \ell_\infty^m(\mathbb{Z})$ is given as*

$$\sigma(L) = \bigcup_{z\in S^1} \sigma(\Phi(z)) \tag{2.5}$$

where $\Phi(z)$ is the symbol (2.4) of L.

(ii) The spectrum $\sigma(L)$ is pointwise, and the eigenvectors $\mathrm{v}_\lambda = (v_k(\lambda))_{k\in\mathbb{Z}}$ of L can be calculated as

$$\mathrm{v}_\lambda^{(k)} = \bar{z}^k w(z_\lambda) \tag{2.6}$$

where $z_\lambda \in S^1$ is such that $\lambda \in \sigma(\Phi(z_\lambda))$, and $w(z_\lambda)$ is the corresponding eigenvalue of the matrix $\Phi(z_\lambda)$.

P r o o f. To prove the first statement we recall that invertibility (and Fredholmness) of operators on the Wiener algebra is independent on underlying space, see [31, 32] and references therein. That is, the spectrum of $L : \ell_p^m(\mathbb{Z}) \to \ell_p^m(\mathbb{Z})$, does not depend on $1 \le p \le \infty$, and is given by all the values $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\det(\Phi(z) - \lambda I) = 0$ for some $z \in S^1$, see [25, 28] and [29].

To prove the second statement let $\lambda \in \sigma(L)$. From (2.5) there exists $z_\lambda = \exp(i\theta_\lambda)$, $\theta_\lambda \in [0, 2\pi)$ such that

$$\det(\Phi(z_\lambda) - \lambda I) = 0.$$

Thus, there exists an eigenvector $w(z_\lambda) \in \mathbb{C}^m$ such that

$$\Phi(z_\lambda) w(z_\lambda) = \lambda w(z_\lambda).$$

Let us define $v \in \ell_\infty^m(\mathbb{Z})$ as follows

$$v = \{v_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad v_k = e^{-\mathrm{i}k\theta_\lambda} w(z_\lambda).$$

It is easy to check that $v \in \ell_\infty^m(\mathbb{Z})$ and is the eigenfunction of the Laurent operator L corresponding to λ. Indeed, for the nth row we have

$$\begin{aligned}(Lv)_n &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_{k-n} e^{\mathrm{i}k\theta_\lambda} w(z_\lambda) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} A_l e^{\mathrm{i}(n+l)\theta_\lambda} w(z_\lambda) \\ &= e^{\mathrm{i}n\theta_\lambda} \sum_{l \in \mathbb{Z}} A_l e^{\mathrm{i}l\theta_\lambda} w(z_\lambda) = e^{\mathrm{i}n\theta_\lambda} \Phi(z_\lambda) = e^{\mathrm{i}n\theta_\lambda} \lambda w(z_\lambda) = \lambda v_n.\end{aligned}$$

□

Next, we describe some properties of the symbol Φ that corresponds to the Laurent operator (2.3).

Lemma 2.2. *The matrix* $\Phi(z)$ *in* (2.4) *with* A_k *given by* (2.3) *is self-adjoint and* $\overline{\Phi(z)} = \Phi(\overline{z})$, $z \in S^1$.

P r o o f. The second property follows directly from (2.4) and $\omega(x)$ being real. To show that $\Phi(z)$ is self-adjoint let $\theta \in [0, 2\pi)$. Then we have

$$\begin{aligned}\overline{\Phi(z)^T} &= \sum_{k \in Z} \begin{pmatrix} \omega(kT) & \omega(2a + kT) \\ \omega(-2a + kT) & \omega(2kT) \end{pmatrix} e^{-\mathrm{i}k\theta} \\ &= \sum_{m \in Z} \begin{pmatrix} \omega(-mT) & \omega(2a - mT) \\ \omega(-2a - mT) & \omega(-mT) \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}m\theta} = \Phi(z)\end{aligned}$$

as $\omega(x)$ is symmetric, see Assumption A(i). □

From Lemma 2.2 and Theorem 2.2(i) the spectrum of L, and consequently of $\mathcal{H}'(u_p)$, is real and

$$\sigma(L) = \bigcup_{z \in S^1} (\lambda_{1,2}(z)) \tag{2.7}$$

where

$$\lambda_1(z) = \Phi_{11}(z) - |\Phi_{12}(z)| \text{ and } \lambda_2(z) = \Phi_{11}(z) + |\Phi_{12}(z)| \tag{2.8}$$

and $\Phi_{ij}(z)$ are the entries of the symbol matrix $\Phi(z)$. Moreover, it is enough to consider only half of the circle, that is, $z = e^{i\theta}$ with $\theta \in [0, \pi]$.

Let now $z_\lambda = e^{i\theta}$ in Theorem 2.2(ii) with $\theta/(2\pi)$ being a rational number from $[0, 0.5]$, i. e. $\theta/(2\pi) = p/q$, $p \cup \{0\}$, $q \in \mathbb{N}$ where p and q are in the lowest terms. Then from (2.6) the corresponding eigenvector v is $(1+q)$-periodic. If $\lambda \neq 0$ then from Theorem 2.1, the eigenfunction v of $\mathcal{H}'(u_p)$ is $(1+q)T$-periodic. Thus, we can calculate the spectrum even without calculating the symbol Φ. We summarize it as a theorem.

Theorem 2.3. *The spectrum of the operator L is given as*

$$\sigma(L) = cl\left(\bigcup \sigma\left(L(1+q)\right)\right)$$

where $L(1+q)$, $q = 1, 2, ...,$ are $2(1+q) \times 2(1+q)$ matrices given as

$$L(1+q) = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & ... & B_q \\ B_q & B_0 & B_1 & ... & B_{q-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1 & B_2 & B_3 & ... & B_0 \end{pmatrix}$$

where

$$B_n = \frac{1}{|u_p'(a)|}\begin{pmatrix} \omega_p(nT;(1+q)T) & \omega_p(-2a+nT;(1+q)T) \\ \omega_p(2a+nT;(1+q)T) & \omega_p(nT;(1+q)T) \end{pmatrix}, n = 0, ..., q.$$

We illustrate Theorem 2.3 in Pic. 12(b) for ω as in (0.3).

When $q = 0$ we readily calculate $L(1) = B_0$ where

$$B_0 = \frac{1}{u_p'(a)}\begin{pmatrix} \omega_p(0;T) & \omega_p(2a;T) \\ \omega_p(2a;T) & \omega_p(0;T) \end{pmatrix},$$

has the eigenvalues

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega_p(0;T) \pm \omega_p(2a;T)}{\omega_p(0;T) - \omega_p(2a;T)} \tag{2.9}$$

or, equivalently, $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 1 + 2\omega_p(2a;T)/|\omega_p(0;T) - \omega_p(2a;T)|$.

These eigenvalues are similar to the ones obtained for bump solutions. Indeed, for a bump solution one can compute the corresponding eigenvalues of the Fréchet operator (at a bump solution) as $\mu_1 = 1$ and $\mu_2 = 1 + 2\omega(2a)/|\omega(0) - \omega(2a)|$, see e. g. [33]. The first eigenvalue $\lambda_1 = 1$ ($\mu_1 = 1$) corresponds to the translation of the solution, see [33]. Thus, for the bump solutions, the sign of $\omega(2a)$ will define the linear stability. In the case of 1-bump periodic solutions, $\omega_p(2a;T) > 0$ implies instability. Thereby, we immediately conclude that for excitatory connectivity functions ω 1-bump periodic solutions are always unstable.

If $\omega_p(2a;T) < 0$ the eigenvalues of $L(2)$, then $L(3)$ and etc., must be calculated. The structure of $L(1+q)$ could be useful in exploring spectrum if the analytic expression for Φ is not available.

As we aim at studying Lyapunov stability of 1-bump periodic solutions for (0.1) with smooth sigmoid like function f by deriving spectral asymptotic, the eigenvalue 1 ideally must be isolated and have multiplicity one. We believe that the second condition could be satisfied under some additional assumptions on ω_p, including $\omega_p(2a;T) \neq 0$. The first condition, however, is never satisfied. Thus one must employ more detailed analysis of spectral convergence than in the case of bump solutions [23]. However, this is out of the scope of this paper.

In the next step, we apply the theory above to study linear stability of the 1-bump periodic solutions from Example 1.1, Section 1.

E x a m p l e 2.1. Define the auxiliary functions

$$\alpha(\theta; s, T) = \frac{\sinh(sT)}{\cosh(sT) - \cos(\theta)} \tag{2.10}$$

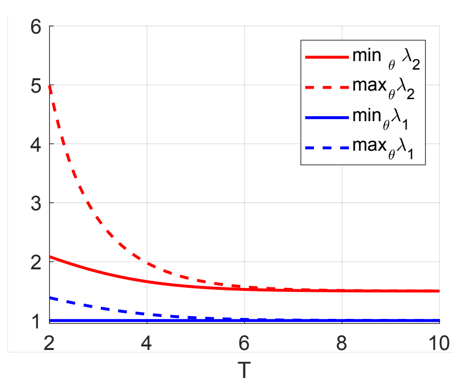
and

$$\beta(\theta; s, T) = \frac{\sinh(2as)e^{-\mathrm{i}\theta} + \sinh(s(T-2a))}{\cosh(sT) - \cos(\theta)}. \tag{2.11}$$

Then, for ω as in (0.3) we obtain

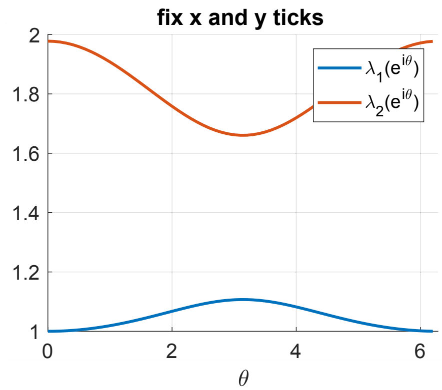
$$\Phi(e^{\mathrm{i}\theta}) = \frac{S}{|u_p'(a)|} \begin{pmatrix} \alpha(\theta; s) & \overline{\beta(\theta; s)} \\ \beta(\theta; s) & \alpha(\theta; s) \end{pmatrix}.$$

In Pic. 12(a) we plot $\lambda_1(e^{\mathrm{i}\theta})$ and $\lambda_2(e^{\mathrm{i}\theta})$ as functions of θ, $\theta \in [0, 2\pi)$ for $T = 4$ and the parameters as in Pic. 4. As $\lambda_i(z) - 1 < 0$ the 1-bump periodic solution is linearly unstable. It can be shown that this is always the case for all admissible parameters and any $T > 0$. Indeed, for $S = 0.5$ and $s = 1$, we obtain $a \to -0.5\log(|2h - 1|)$ as $T \to \infty$ and $\lambda_1 \to 1$ while $\lambda_2 \to 1/h - 1 > 1$. We notice that these values could be obtained by passing the limit in (2.9). In Pic. 11 we plot the minimum and maximum of $\lambda_2(e^{\mathrm{i}\theta})$ (red curves) and $\lambda_1(e^{\mathrm{i}\theta})$ (blue curves) for different T. As $T \to 0$, $\max_\theta \lambda_2(e^{\mathrm{i}\theta}) \to \infty$.

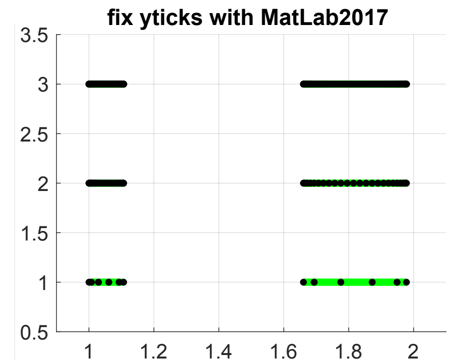


Picture 11. Bounds for $\sigma(L)$ in (2.7) depending on T when ω is given by (0.3) with $S = 0.5$, $s = 1$, and $h = 0.4$.

In order to illustrate Theorem 2.3, we plot the eigenvalues of the matrices $L(n)$ for $n=6$, $n=10$ and $n=50$ in Pic. 12(b).



(a)



(b)

Picture 12. (a) The eigenvalues $\lambda_{1,2}(e^{i\theta})$ as functions of θ when ω is given by (0.3) with parameters $S=0.5$, $s=1$, $h=0.4$ and $T=4$. (b) The eigenvalues of the matrices $L(n)$ for $n=6$, $n=20$ and $n=50$ (black dots) with the same parameters as in (a).

Let us consider ω in (0.4). We readily find

$$\Phi(e^{i\theta}) = \frac{1}{|u_p'(a)|}\begin{pmatrix} S_1\alpha(\theta,s_1,T)-S_2\alpha(\theta,s_2,T) & \overline{S_1\beta(\theta,s_1,T)-S_2\beta(\theta,s_2,T))} \\ S_1\beta(\theta,s_1,T)-S_2\beta(\theta,s_2,T) & S_1\alpha(\theta,s_1,T)-S_2\alpha(\theta,s_2,T) \end{pmatrix}$$

with $u_p'(a)$ given by (1.8).

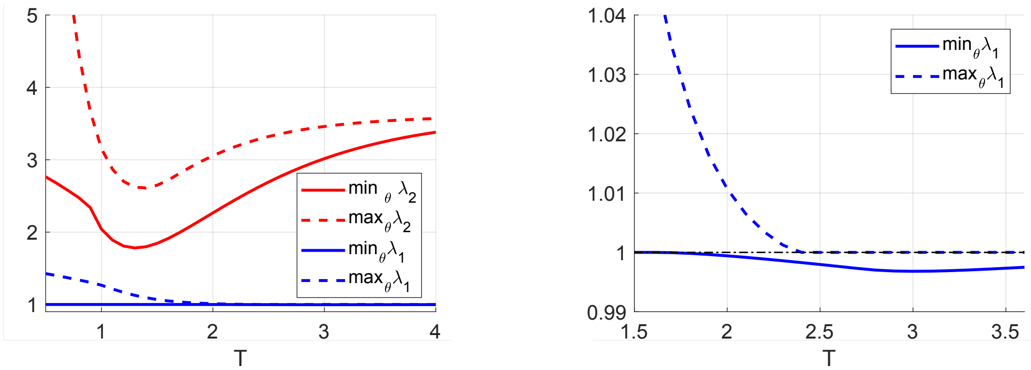
For this case we have different cases depending on T, see Table 1.

Table 1.

Parameters	Number of solutions	Stability
$0<T<T_1$	One solution $u_{p,1}$	Unstable
$T=T_1$	Two solutions $u_{p,1}$ and $u_{p,cr}$	Unstable
$T\in(T_1,T_2)$	Tree solutions $u_{p,i}$	Unstable
$T\geq T_2$	Tree solutions $u_{p,i}$	$u_{p,1}, u_{p,3}$ are unstable, $u_{p,2}$ is stable

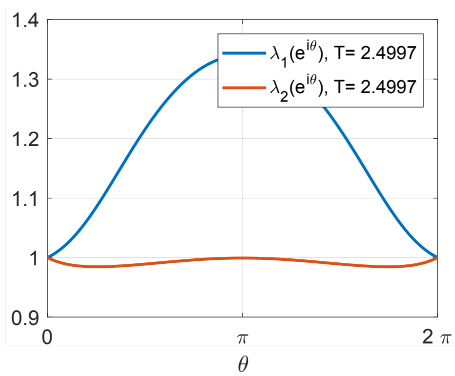
$u_{p,k}=u_p(x;a_i)$, $i=1,2,3$ are 1-bump periodic solutions for $a_1\leq\ a_2\leq a_3$.
For parameters $S_1=4$, $s_1=2$, $S_2=1.5$, $s_2=1$ and $h=0.4$ we have $T_1=2.4997$, $T_2=3.3320$ and examples of $u_{p,\cdot}$ given in Pic. 7–Pic. 8.

The solution $u_{p,1}$ is always unstable, see Table 1. Similarly to the previous examples, we plot spectral bounds in Pic. 13. In Pic. 13(b) we plot the boundaries of $\lambda_1(z)$ to illustrate that at $T=T_1$ the eigenvalue becomes less than 1, which in this case does not effect the stability of the solution.



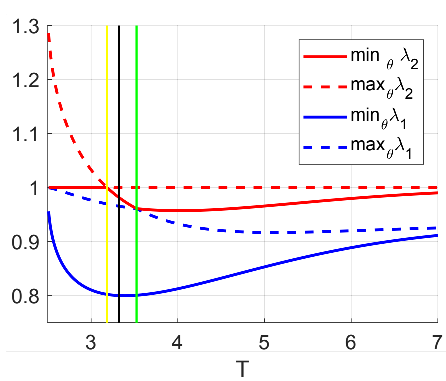
Picture 13. Bounds for $\sigma(L)$ when $u_p = u_{p,1}$, depending on T. Here ω is given by (0.4) with $S_1 = 4$, $s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$ and $h = 0.4$, see Table 1.

The period $T = T_1$ corresponds to the critical situation where the new linearly unstable solution $u_{p,cr}$ appears, and splits into two unstable solutions $u_{p,2}$ and $u_{p,3}$ for $T = T_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. The spectrum of L in this case has no spectral gap, see Pic. 14.



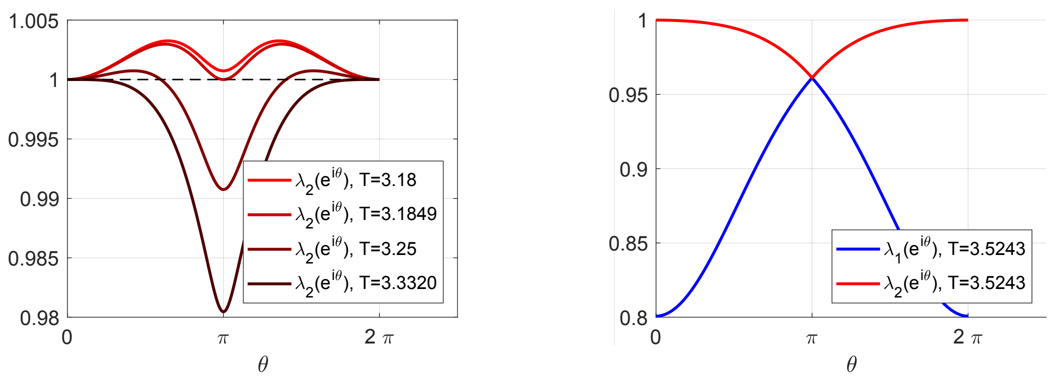
Picture 14. The eigenvalues $\lambda_1(e^{i\theta})$ and $\lambda_1(e^{i\theta})$ when $u_p = u_{p,cr}$. Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$, $h = 0.4$, the critical period value $T = T_1 = 2.4997$ giving $\sigma(L) = [9.8460, 1.3403]$ (all the approximated values are rounded up to 4 decimals).

For the solution $u_{p,2}$ we plot the bifurcation diagram in Pic. 15. The red curves corresponds to the minimum and maximum of λ_2 and blue to the minimum and maximum values of λ_1 for different T. From (2.8) the spectrum of $\mathcal{H}'(u_{p,2})$ lies in between of red and blue curves.



Picture 15. Bounds for $\sigma(L)$, when $u_p = u_{p,2}$, depending on T. The marked values corresponds to $T = 3.1849$ (yellow), $T = 3.3320$ (black) and $T = 3.5243$ (green) (all the values are rounded up to 4 decimals). Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2$, $S_2 = 1.5, s_2 = 1$, $h = 0.4$, see Table 1.

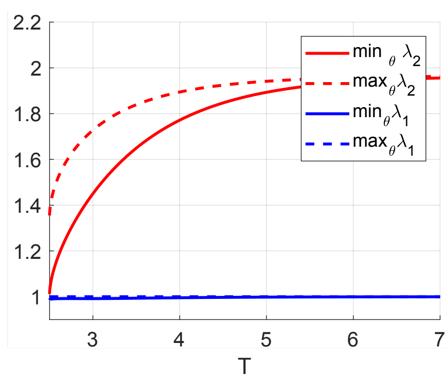
The point $T = 3.1849$ in Pic. 15 seemingly appears as a bifurcation point. This is however not the case and $T = 3.1849$ only corresponds to the situation when minimum of $\lambda_2(e^{i\theta})$ becomes negative. In order to clarify this point we plot $\lambda_2(e^{i\theta})$ for $T = 3.18$, $T = 3.1849$ in Pic. 16(a). We also plot $\lambda_2(e^{i\theta})$ for $T = 3.25$ and the bifurcation point $T = T_2 = 3.3320$ in Pic. 16(a). For $T = 3.5243$ the spectrum is again a connected set $\sigma(L) = [0.8007, 1]$, see Pic. 16(b).



(a) (b)

Picture 16. The eigenvalue $\lambda_2(e^{i\theta})$ in (a) and $\lambda_{1,2}(e^{i\theta})$ in (b) when $u_p = u_{p,2}$, see Table 1 for different T. Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2,\ \ S_2 = 1.5,\ \ s_2 = 1,\ \ h = 0.4$.

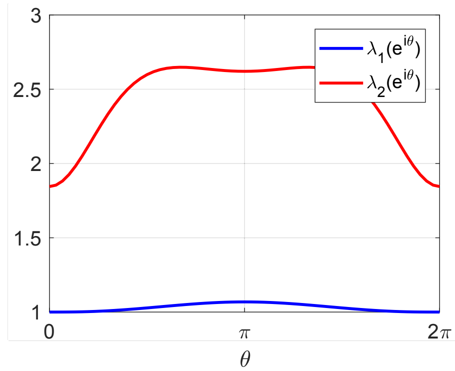
Similarly, we plot the spectral bounds for $u_{p,3}$ in Fig. 17.



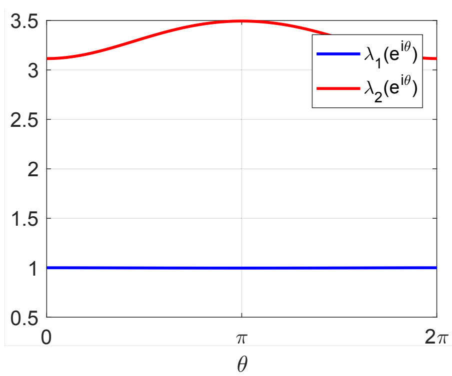
Picture 17. Bounds for $\sigma(L)$ when $u_p = u_{p,3}$, depending on T, see Table 1. Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2,\ \ S_2 = 1.5,\ \ s_2 = 1,\ \ h = 0.4$.

As $T \to \infty$ the limiting values could be calculated from (2.9) once the limiting expression for $a(T)$ is obtained. The calculations however are cumbersome and we omit them here. The numerical calculations however indicate, as illustrated in Pic. 13, 15 and 17, that there are no stability changes for larger period T.

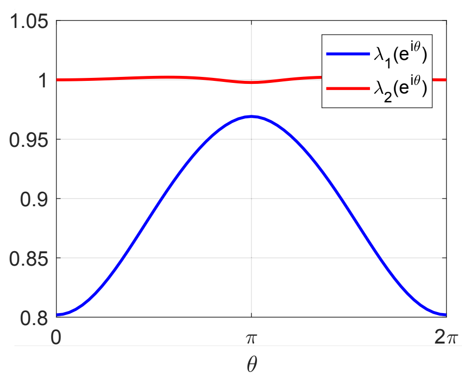
We plot examples of $\lambda_1(e^{i\theta})$ and $\lambda_2(e^{i\theta})$ as functions of θ for $T = 1.5$, $T = 3.2$ and $T = 3.5$ for every solution $u_{p,i}$, $i = 1, 2, 3$, in Pic. $18 - 20$.



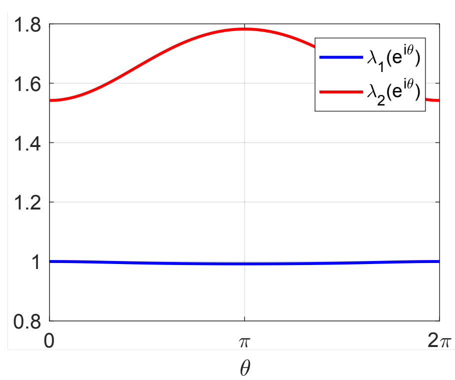
Picture 18. The eigenvalues $\lambda_{1,2}(e^{i\theta})$ when $u_p = u_{p,1}$. Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$, $h = 0.4$, and $T = 1.5$. The resulting spectrum $\sigma(L) = [1, 1.0684] \cup [1.8449, 2.6479]$.



(a)

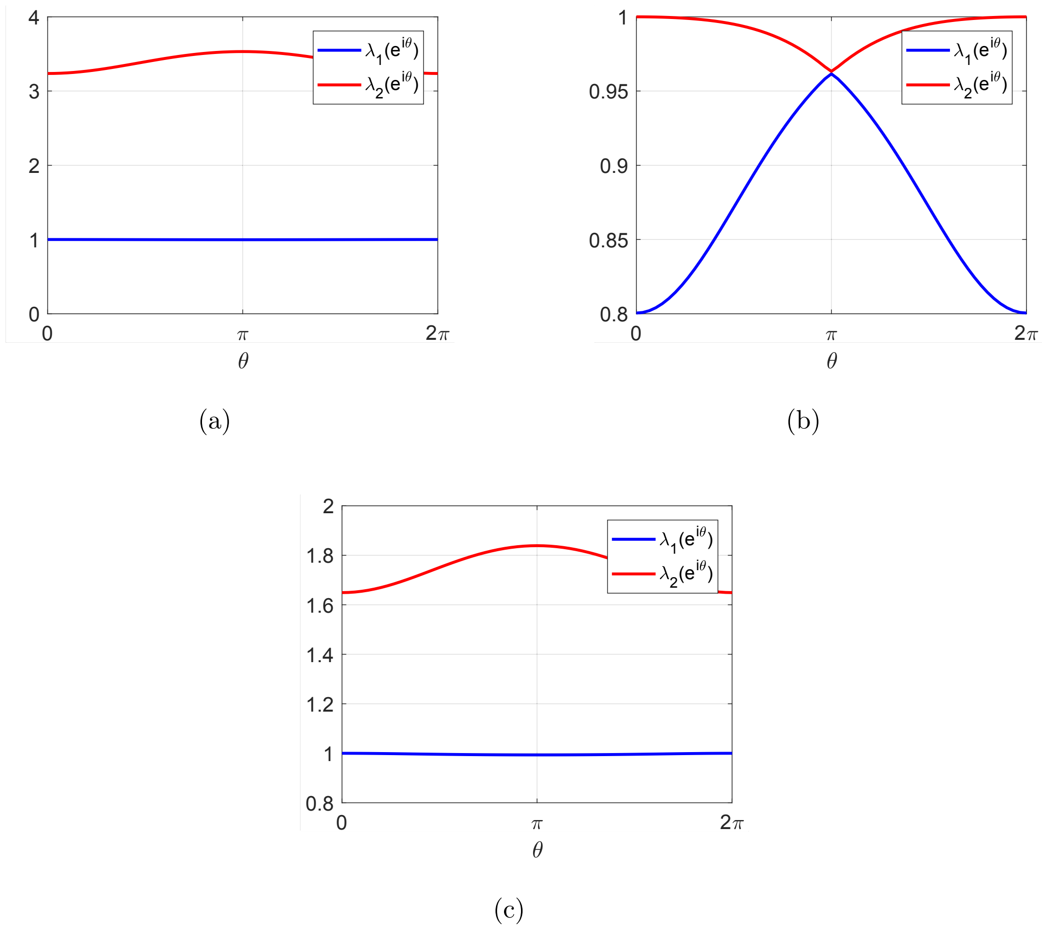


(b)



(c)

Picture 19. The eigenvalues $\lambda_{1,2}(e^{i\theta})$ for $u_p = u_{p,1}$ in (a), $u_p = u_{p,2}$ in (b) and $u_p = u_{p,3}$ in (c). Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2$, $S_2 = 1.5$, $s_2 = 1$, $h = 0.4$, and $T = 3.2$. The corresponding spectra are $\sigma(L) = [0.9969, 1] \cup [3.1147, 3.4945]$, $\sigma(L) = [0.8020, 0.9692] \cup [0.9978, 1.0022]$ and $\sigma(L) = [0.9921, 1] \cup [1.5419, 1.7825]$, respectively. (All the approximated values are rounded up to 4 decimals).



Picture 20. The eigenvalues $\lambda_{1,2}(e^{\mathrm{i}\theta})$ for $u_p = u_{p,1}$ in (a), $u_p = u_{p,2}$ in (b) and $u_p = u_{p,3}$ in (c). Here ω is given as in (0.4) with $S_1 = 4, s_1 = 2,$ $S_2 = 1.5,$ $s_2 = 1,$ $h = 0.4,$ and $T = 3.5.$ The corresponding spectra are $\sigma(L) = [0.9973, 1] \cup [3.2365, 3.5318],$ $\sigma(L) = [0.8005, 0.9616] \cup [0.9633, 1]$ and $\sigma(L) = [0.9934, 1] \cup [1.6494, 1.8390],$ respectively. (All the approximated values are rounded up to 4 decimals).

Conclusions and outlook

In the present paper we have studied the existence of stationary periodic solutions, the so-called 1-bump periodic solutions, of the Amari model, and their linear stability. We have restricted the choice of the firing rate function to the Heaviside function. This allowed us to obtain an almost explicit description of the solutions when the connectivity functions ω are sufficiently localized symmetric interactions with positive total mass. We have shown that the analysis of the existence then boils down to analysing the behaviour of the T-periodic function $\omega_p(x;T)$, obtained as the infinite sum of $\omega(x+kT)$, on the half period interval. Once ω_p is given, this analysis is in fact even simpler than the analysis of the existence for 1-bump solutions as in [1]. The main difficulty here is that, in most cases, ω_p has no analytic expression and has to be approximated. Despite that, the considered approach of constructing solutions is still simpler than the ODE-method proposed in [8]. In addition, it allows us to address the uniqueness of solutions and is not restricted to a particular type of ω. To illustrate the method we have constructed 1-bump periodic solutions for different types of ω.

The choice of the Heaviside function also enabled us to analyse the spectral stability of the solutions, which is the main contribution of this paper. This was done by analysing the spectrum of a Laurent block operator which, we have proved, possesses almost the same eigenvalues as the Fréchet derivative of the operator in consideration. We have shown that the model (0.1) can have both linearly stable and unstable periodic solutions for some connectivity functions. When ω is of the excitatory type, the periodic solutions are always unstable.

In order to draw the conclusions about Lyapunov stability of the solutions based on their linear stability, the firing rate function f must be smooth enough, which is not the case here. We conjecture that the existence and stability results would hold for steep sigmoid like functions f, see (0.6). To prove this conjecture one can proceed in the way similar to [10] and [23]. It is not possible to apply the results from the mentioned papers directly since the eigenvalue $\lambda = 1$ of the Fréchet derivative of the operator defined by (0.2) is not isolated. However, the stability analysis in Section 2. shows that the spectrum is pointwise and the eigenfunctions can be calculated, which gives a possibility of studying the dynamics of solutions on a central manifold. We plan to address this problem in our future work.

Another topic that we have not properly addressed in this paper, is the coexistence of the localized and periodic solutions with different stability properties. The combination of the ODE-methods [11, 15, 18] with the results obtained here could be used to investigate this interesting problem.

Finally, we would like to mention that the analysis presented here could be generalized to the case of N-bump periodic solutions and several dimensions.While the stability analysis could be extended without much changes, the major difficulty is to obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of regular solutions and to find their intersections with the threshold.

Acknowledgements: The authors are grateful to Professor Arcady Ponosov and John Wyller (Norwegian University of Life Sciences) for fruitful discussions during the preparation phase of this paper. We thank Professor Mårten Gulliksson (Örebro University) for constructive criticism of the manuscript.

References

[1] Shun-ichi Amari, "Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields", *Biological Cybernetics*, **27**:2 (1977), 77–87.

[2] S. Coombes, "Waves, bumps, and patterns in neural field theories", *Biological Cybernetics*, **93**:2 (2005), 91–108.

[3] B. Ermentrout, "Neural networks as spatio-temporal pattern-forming systems", *Reports on Progress in Physics*, **61**:4 (1998), 353–430.

[4] S. Coombes, P. Beim Graben, R. Potthast, J. Wright, *Neural Fields: Theory and Applications*, Springer, 2014.

[5] R. Potthast, P. Beim Graben, "Existence and properties of solutions for neural field equations", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **33**:8 (2010), 935–949.

[6] B. Ermentrout, "The analysis of synaptically generated traveling waves", *Journal of Computational Neuroscience*, **5**:2 (1998), 191–208.

[7] S. Coombes, H. Schmidt, "Neural fields with sigmoidal firing rates: approximate solutions", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **28**:4, Trends and Developments in DE/Dynamics (2010), 1369–1379.

[8] E. P. Krisner, “Periodic solutions of a one dimensional wilson-cowan type model”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **102** (2007), 1–22.

[9] C. R. Laing, W. C. Troy, B. Gutkin, B. Ermentrout, “Multiple bumps in a neuronal model of working memory”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63**:1 (2002), 62–97.

[10] A. Oleynik, A. Ponosov, V. Kostrykin, A. V. Sobolev, “Spatially localized solutions of the hammerstein equation with sigmoid type of nonlinearity”, *Journal of Differential Equations*, **261**:10 (2016), 5844–5874.

[11] A. J. Elvin, C. R. Laing, R. I. McLachlan, M. G. Roberts, “Exploiting the hamiltonian structure of a neural field model”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **239**:9 (2010), 537–546.

[12] L. P. Šil’Nikov, “A case of the existence of a denumerable set of periodic motions”, *Sov. Math. Dokl.*, **6** (1965), 163–166.

[13] L. P. Šil’Nikov, “A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **10**:1 (1970), 91.

[14] P. Glendinning, C. Sparrow, “Local and global behavior near homoclinic orbits”, *Journal of Statistical Physics*, **35**:5 (1984), 645–696.

[15] R. L. Devaney, “Homoclinic orbits in hamiltonian systems”, *Journal of Differential Equations*, **21**:2 (1976), 431–438.

[16] Paul C. Bressloff, “Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2011), 033001.

[17] J. Wyller, P. Blomquist, G. T. Einevoll, “Turing instability and pattern formation in a two-population neuronal network model”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **225**:1 (2007), 75–93.

[18] E. P. Krisner, “The link between integral equations and higher order odes”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **291**:1 (2004), 165–179.

[19] S. Coombes, M. R. Owen, “Evans functions for integral neural field equations with heaviside firing rate function”, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **3**:4 (2004), 574–600.

[20] P. Blomquist, J. Wyller, G. T. Einevoll, “Localized activity patterns in two-population neuronal networks”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **206**:3 (2005), 180–212.

[21] A. Oleynik, J. Wyller, T. Tetzlaff, G. T. Einevoll, “Stability of bumps in a two-population neural-field model with quasi-power temporal kernels”, *Nonlinear Analysis: Real World applications*, **12**:6 (2011), 3073–3094.

[22] E. Burlakov, A. Ponosov, J. Wyller, “Stationary solutions of continuous and discontinuous neural field equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**:1 (2016), 47–68.

[23] A. Oleynik, V. Kostrykin, A. Sobolev, “Lyapunov Stability of Bumps in of One-Population Neural Field Equation”, *Work in Progress*, 2015.

[24] A. Oleynik, A. Ponosov, J. Wyller, “On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **398**:1 (2013), 335–351.

[25] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators.* V. 63, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2013.

[26] A. Frazho, W. Bhosri, *An Operator Perspective on Signals and Systems.* V. 204: *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2010, 429 pp.

[27] C. V. M. van der Mee, S. Seatzu, G. Rodriguez, “Spectral factorization of bi-infinite multi-index block Toeplitz matrices”, *Linear Algebra and its Applications*, **343** (2002), 355–380.

[28] L. Reichel, L. N. Trefethen, “Eigenvalues and pseudo-eigenvalues of Toeplitz matrices”, *Linear Algebra and its Applications*, **162** (1992), 153–185.

[29] R. Denk, M. Möller, C. Tretter, “The Spectrum of the Multiplication Operator Associated with a Family of Operators in a Banach Space”, *Operator Theory in Krein Spaces and Nonlinear Eigenvalue Problems.* V. 162: *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2005, 103–116.

[30] O. Toeplitz, “Zur theorie der quadratischen und bilinearen formen vonunendlichvielen veränderlichen”, *Mathematische Annalen*, **70**:3 (1911), 351–376.

[31] M. Lindner, “Fredholmness and index of operators in the wiener algebra are independednt on the underlying space”, *Operators and Matrices*, **2**:2 (2008), 297–306.

[32] M. Seidel, “Fredholm theory for band-dominated and related operators: a survey”, *Linear Algebra and its Applications*, **445** (2014), 373–394.

[33] V. Kostrykin, A. Oleynik, “On the existence of unstable bumps in neural networks”, *Integral Equations and Operator Theory*, **75**:4 (2013), 445–458.

Information about the authors

Karina Kolodina, PhD in Applied Mathematics. Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway. E-mail: karina.a.kolodina@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0671-0391

Vadim Kostrykin, Doctor of Mathematics, Professor. Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, Germany.

Anna Oleynik, Doctor of Applied Mathematics. University of Bergen, Bergen, Norway. E-mail: Anna.Oleynik@uib.no
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8007-3036

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Karina Kolodina
E-mail: karina.a.kolodina@gmail.com

Received 23.06.2021
Reviewed 30.08.2021
Accepted for press 10.09.2021

Информация об авторах

Колодина Карина, кандидат физико-математических наук. Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия. E-mail: karina.a.kolodina@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0671-0391

Кострыкин Вадим, доктор физико-математических наук, профессор. Университет Гутенберга, г. Майнц, Германия.

Олейник Анна, кандидат физико-математических наук, доцент Департамента Математики. Университет г. Берген, г. Берген, Норвегия. E-mail: Anna.Oleynik@uib.no
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8007-3036

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Колодина Карина
E-mail: karina.a.kolodina@gmail.com

Поступила в редакцию 23.06.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304
УДК 517.9

Символы в квантовании Березина для операторов представления

Владимир Федорович МОЛЧАНОВ, Светлана Викторовна ЦЫКИНА
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В основе квантования по Березину на многообразии M лежит сопоставление, которое оператору A из некоторого класса соотносит пару функций F и $F^\natural$, определенных на M. Эти функции называются *ковариантным и контравариатным символами* оператора A. Мы интересуемся однородным пространством $M = G/H$ и классами операторов, связанными с теорией представлений. Самая алгебраическая версия квантования – мы называем ее *полиномиальным квантованием* — получается, когда операторы принадлежат алгебре операторов, отвечающих в данном представлении T группы G элементам X универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}\,\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. В этом случае символы оказываются *многочленами* на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

В настоящей статье мы предлагаем новую тему в квантовании Березина на G/H : в качестве исходного класса операторов мы берем операторы, отвечающие элементам *самой группы* G в представлении T этой группы.

В статье мы рассматриваем два примера, в них однородные пространства — это параэрмитовы пространства ранга 1 и 2:

a) $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, H — подгруппа диагональных матриц, G/H — однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$;

b) G — псевдоортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$, подгруппа H накрывает с конечной кратностью группу $\mathrm{SO}_0(p-1,q-1)\times\mathrm{SO}_0(1,1)$; пространство G/H (псевдо-грассманово многообразие) есть орбита в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.

Ключевые слова: группы Ли и алгебры Ли, псевдо-ортогональные группы, представления групп Ли, параэрмитовы симметрические пространства, квантование Березина, ковариантные и контравариантные символы

Для цитирования: *Молчанов В.Ф., Цыкина С.В.* Символы в квантовании Березина для операторов представления // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 296–304. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304

Symbols in Berezin quantization for representation operators

Vladimir F. MOLCHANOV, Svetlana V. TSYKINA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The basic notion of the Berezin quantization on a manifold M is a correspondence which to an operator A from a class assigns the pair of functions F and $F^\natural$ defined on M. These functions are called *covariant and contravariant symbols* of A. We are interested in homogeneous space $M = G/H$ and classes of operators related to the representation theory. The most algebraic version of quantization — we call it the *polynomial quantization* — is obtained when operators belong to the algebra of operators corresponding in a representation T of G to elements X of the universal enveloping algebra $\mathrm{Env}\,\mathfrak{g}$ of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G. In this case symbols turn out to be *polynomials* on the Lie algebra $\mathfrak{g}$.

In this paper we offer a new theme in the Berezin quantization on G/H : as an initial class of operators we take operators corresponding to elements *of the group* G *itself* in a representation T of this group. In the paper we consider two examples, here homogeneous spaces are para-Hermitian spaces of rank 1 and 2:

a) $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, H — the subgroup of diagonal matrices, G/H — a hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$;

b) G — the pseudoorthogonal group $\mathrm{SO}_0(p, q)$, the subgroup H covers with finite multiplicity the group $\mathrm{SO}_0(p-1, q-1) \times \mathrm{SO}_0(1, 1)$; the space G/H (a pseudo-Grassmann manifold) is an orbit in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group G.

Keywords: Lie groups and Lie algebras, pseudo-orthogonal groups, representations of Lie groups, para-Hermitian symmetric spaces, Berezin quantization, covariant and contravariant symbols

Mathematics Subject Classification: 22E46.

For citation: Molchanov V.F., Tsykina S.V. Simvoly v kvantovanii Berezina dlya operatorov predstavleniya [Symbols in Berezin quantization for representation operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 296–304. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-296-304. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В основе квантования по Березину на однородном пространстве G/H лежит сопоставление, которое оператору A из некоторого класса соотносит пару функций F и $F^\natural$, определенных на G/H. Эти функции называются *ковариантным и контравариатным символами* оператора A. Для параэрмитовых симметрических пространств G/H квантование было предложено в [3].

Рассматриваемые операторы A берутся из некоторого класса. Мы интересуемся классами, связанными с теорией представлений. Самая алгебраическая версия квантования — мы называем ее *полиномиальным квантованием* — получается, когда операторы принадлежат алгебре операторов, отвечающих в данном представлении T элементам X универсальной обертывающей алгебры $\mathrm{Env}\,\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G, см., например, [1, 2, 4].

В настоящей статье мы предлагаем новую тему в квантовании. В качестве исходного класса операторов надо взять операторы, отвечающие элементам g *самой группы* G в представлении T. Результаты, полученные здесь, могут помочь и в изучении полиномиального квантования.

Мы рассматриваем два примера, в них G — это группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и псевдоортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Однородные пространства здесь — это пара-эрмитовы пространства ранга 1 и 2.

1. Однополостный гиперболоид

Группа $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ состоит из вещественных матриц

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Введем обозначение:

$$t^{\lambda,\varepsilon}=|t|^\lambda(\mathrm{sgn} t)^\varepsilon,\quad \lambda\in\mathbb{C},\quad \varepsilon\in\{0,1\}.$$

Для $\sigma\in\mathbb{C}$, $\varepsilon=0,1$, обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ пространство функций f из $C^\infty(\mathbb{R})$ таких, что функция

$$\widehat{f}(t)=t^{2\sigma,\varepsilon}f\left(1/t\right)$$

тоже входит в $C^\infty(\mathbb{R})$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathbb{R})$ по формуле:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(t)=f\left(\frac{\alpha t+\gamma}{\beta t+\delta}\right)(\beta t+\delta)^{2\sigma,\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ «контраградиентное» представление $g\mapsto T_{\sigma,\varepsilon}(\widehat{g})$, где

$$\widehat{g}=\begin{pmatrix}\delta & \gamma\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},$$

так что

$$\left(\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(t)=f\left(\frac{\delta t+\beta}{\gamma t+\alpha}\right)(\gamma t+\alpha)^{2\sigma,\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ эквивалентны с помощью оператора $f\mapsto\widehat{f}$.

Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$, задаваемый формулой:

$$(A_{\sigma,\varepsilon}f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} N^{-2\sigma-2,\,\varepsilon} f(s)\,ds, \quad N = N(\xi,\eta) = 1-\xi\eta,$$

сплетает $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-1,\varepsilon}(g)A_{\sigma,\varepsilon} = A_{\sigma,\varepsilon}T_{\sigma,\varepsilon}(g)\,,$$

а также $\widehat{T}_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{-\sigma-1,\varepsilon}$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ билинейную форму

$$[x,y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Пусть $\mathcal{X}$ обозначает *однополостный гиперболоид* $[x,x]=1$. Реализуем $\mathcal{X}$ как множество матриц

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x_3 & x_2-x_1 \\ x_2+x_1 & 1+x_3 \end{pmatrix}$$

с определителем равным нулю. Группа G действует транзитивно на этих матрицах сопряжениями: $x \mapsto g^{-1}xg$.

Введем на $\mathcal{X}$ *орисферические координаты* ξ,η :

$$x = \frac{1}{N}\,(\xi+\eta,\, \xi-\eta,\, 1+\xi\eta),$$

отсюда

$$\frac{\xi}{N} = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{\eta}{N} = \frac{x_1-x_2}{2}, \quad \frac{\xi\eta}{N} = \frac{x_3-1}{2}, \quad \frac{1}{N} = \frac{x_3+1}{2}\,, \tag{1.3}$$

в матричном виде получим:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Свяжем с переменными ξ,η два вектора — вектор-строку и вектор-столбец:

$$u = u(\xi) = \begin{pmatrix} \xi & 1 \end{pmatrix}, \quad v = v(\eta) = \begin{pmatrix} -\eta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$x = \frac{vu}{uv}, \quad N = uv. \tag{1.4}$$

Фиксируем σ,ε. В качестве исходного класса операторов мы берем класс операторов $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$, $g\in G$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-1,\,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{2\sigma,\,\varepsilon} \tag{1.5}$$

от двух переменных ξ,η.

В соответствии с общей схемой (см. [3]) *ковариантным символом* и *контравариантным символом* оператора $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$ мы называем соответственно функции

$$F_g(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta)}\,(T_{\sigma,\varepsilon}(g)\otimes 1)\,\Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta), \tag{1.6}$$

$$F_g^\natural(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{-\sigma-1,\varepsilon}(\xi,\eta)}\,(1\otimes T_{-\sigma-1,\varepsilon}(\widehat{g}\,))\,\Phi_{-\sigma-1,\varepsilon}(\xi,\eta). \tag{1.7}$$

Рассмотрим ξ,η как орисферические координаты на $\mathcal{X}$. Тогда функции (1.6), (1.7) превратятся в функции на $\mathcal{X}$.

Теорема 1.1. *Ковариантный и контравариантный символы оператора* $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$, $g\in G$, *— это следующие функции на гиперболоиде* $\mathcal{X}$, *соответственно:*

$$F_g(x) = (\mathrm{tr}(xg))^{2\sigma,\varepsilon} \tag{1.8}$$

$$= \left(\frac{ugv}{uv}\right)^{2\sigma,\varepsilon} \tag{1.9}$$

$$F_g^\natural(x) = \mathrm{tr}(g^{-1}x)^{-2\sigma-2,\varepsilon} \tag{1.10}$$

$$= \left(\frac{ug^{-1}v}{uv}\right)^{-2\sigma-2,\varepsilon}. \tag{1.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем (1.8), (1.9). По (1.6), (1.5), (1.1) получаем:

$$F_g(\xi,\eta) = \frac{1}{N^{2\sigma,\varepsilon}}\left(1-\frac{\alpha\xi+\gamma}{\beta\xi+\delta}\,\eta\right)^{2\sigma,\varepsilon}(\beta\xi+\delta)^{2\sigma,\varepsilon}$$

$$= \left(\frac{\beta\xi+\delta-\alpha\xi\eta-\gamma\eta}{N}\right)^{2\sigma,\varepsilon}. \tag{1.12}$$

Как легко проверить, числитель в (1.12) есть в точности $u(\xi)gv(\eta)$, вместе с (1.4) это доказывает (1.9). Формула (1.8) следует из (1.12) и (1.3).

Теперь докажем (1.10), (1.11). По (1.7), (1.5), (1.2) получаем:

$$F_g^\natural(\xi,\eta) = \frac{1}{N^{-2\sigma-2,\varepsilon}}\left(1-\xi\,\frac{\delta\eta+\beta}{\gamma\eta+\alpha}\right)^{-2\sigma-2,\varepsilon}(\gamma\eta+\alpha)^{-2\sigma-2,\varepsilon}$$

$$= \left(\frac{\gamma\eta+\alpha-\delta\xi\eta-\beta\xi}{N}\right)^{-2\sigma-2,\varepsilon}. \tag{1.13}$$

Поскольку

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

то числитель в (1.12) есть в точности $u(\xi)g^{-1}v(\eta)$, вместе с (1.4) это доказывает (1.11). Формула (1.10) следует из (1.13) и (1.3). □

2. Псевдо-грассманово многообразие ранга 2

В этом параграфе мы рассматриваем пара-эрмитово симметрическое пространство G/H ранга 2 с псевдо-ортогональной группой $G=\mathrm{SO}_0(p,q)$. Связная компонента единицы группы H есть $H_e=\mathrm{SO}_0(p-1,q-1)\times\mathrm{SO}_0(1,1)$. Мы считаем, что G/H есть G-орбита в присоединенном представлении группы G. Размерность пространства G/H равна $2n-4$, где $n=p+q$.

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y] = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = xy^*,$$

где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 1$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, $y^* = Iy'$, штрих означает транспонирование, $I = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Пусть $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ — связная компонента единицы в группе линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем 1, сохраняющих форму $[x,y]$, так что для $g \in G$ выполняется

$$g' = Ig^{-1}I. \tag{2.1}$$

Мы будем считать, что G действует линейно в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p > 1$, $q > 1$.

Напомним представления группы G, связанные с конусом. Пусть $\mathcal{C}$ — конус $[x,x] = 0$, $x \neq 0$, в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе две точки

$$s^- = (1, 0, \ldots, 0, -1), \quad s^+ = (1, 0, \ldots, 0, 1).$$

Рассмотрим следующие сечения конуса (проходящие через эти точки соответственно):

$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\}, \quad \Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\}.$$

Они пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе порождает соответствующие дробно-линейные действия на сечениях:

$$x \longmapsto \widetilde{x} = -\frac{2}{[xg, s^+]} \cdot xg,\ x \in \Gamma^-, \tag{2.2}$$

$$x \longmapsto \widehat{x} = -\frac{2}{[xg, s^-]} \cdot xg,\ x \in \Gamma^+. \tag{2.3}$$

Введем на Γ^- и Γ^+ координаты с помощью векторов ξ и η из $\mathbb{R}^{n-2}$, а именно, для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$u = u(\xi) = (1 + \langle \xi, \xi \rangle,\ 2\xi,\ -1 + \langle \xi, \xi \rangle), \tag{2.4}$$

$$v = v(\eta) = (1 + \langle \eta, \eta \rangle,\ 2\eta,\ 1 - \langle \eta, \eta \rangle), \tag{2.5}$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle$ обозначает билинейную форму в $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей $I_1 = \mathrm{diag}\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}$.

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f класса C^∞ на конусе $\mathcal{C}$, однородных «степени σ, ε»:

$$f(tx) = t^{\sigma,\varepsilon} f(x),\ x \in \mathcal{C},\ t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в $\mathcal{D}_{\sigma,\varepsilon}(\mathcal{C})$ сдвигами:

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(x) = f(xg).$$

Реализуем его в функциях на сечениях $\Gamma^\pm$ конуса $\mathcal{C}$. В координатах ξ, η представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует по формулам

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(\xi) = f(\widetilde{\xi}) \left\{ -\frac{1}{2}[ug, s^+] \right\}^{\sigma,\varepsilon}, \tag{2.6}$$

$$\left(T_{\sigma,\varepsilon}(g)f\right)(\eta) = f(\widehat{\eta}) \left\{ -\frac{1}{2}[vg, s^-] \right\}^{\sigma,\varepsilon}, \tag{2.7}$$

где $u = u(\xi)$, $v = v(\eta)$ определены в (2.4), (2.5), действия $\xi \mapsto \widetilde{\xi}$ и $\eta \mapsto \widehat{\eta}$ порождаются действиями (2.2), (2.3).

Определим оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$:

$$(A_{\sigma,\varepsilon} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} N(\xi,\eta)^{2-n-\sigma,\varepsilon} f(\eta)\, d\eta,$$

где

$$N(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\,[u,v] = -\frac{1}{2}\,uv^* = 1 - 2\langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle.$$

Функция $N(\xi,\eta)$ есть многочлен от ξ,η. Оператор $A_{\sigma,\varepsilon}$ сплетает представления $T_{\sigma,\varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma,\varepsilon}$. Эти представления действуют в функциях на *разных* сечениях.

Реализуем пространство G/H как множество Ω матриц:

$$z = \frac{y^*x}{[x,y]} = \frac{y^*x}{xy^*}, \quad x, y \in \mathcal{C}.$$

Ранг и след этих матриц равны 1. Присоединенное действие $z \mapsto g^{-1}zg$ сохраняет Ω. Возьмем в качестве x, y векторы $u = u(\xi)$ и $v = v(\eta)$, (см. (2.4), (2.5)). Получаем вложение $\Gamma^- \times \Gamma^+ \to \Omega$, задаваемое формулой

$$z = z(\xi,\eta) = \frac{v^*u}{[u,v]} = \frac{v^*u}{uv^*}\,, \quad u = u(\xi),\ v = v(\eta) \tag{2.8}$$

(определенное почти всюду: $N(\xi,\eta) \neq 0$). Поэтому ξ,η являются локальными координатами на Ω. Присоединенное действие группы G на Ω сводится к ее действию на ξ и на η.

Фиксируем σ,ε. Как в п. 1.1, в качестве исходного класса операторов мы берем класс операторов $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$, $g \in G$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-1,\varepsilon}$, а именно, функцию

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma,\varepsilon}. \tag{2.9}$$

Ковариантный символ и *контравариантный символ* оператора $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$ определяются в точности формулами (1.6) и (1.7), но в (1.7) надо вместо $-\sigma-1$ взять $2-n-\sigma$. Будучи функциями от ξ,η, они являются функциями на Ω.

Теорема 2.1. *Ковариантный и контравариантный символы оператора $T_{\sigma,\varepsilon}(g)$, $g \in G$, — это следующие функции на пространстве Ω, соответственно:*

$$F_g(z) = (\mathrm{tr}(zg))^{\sigma,\varepsilon} \tag{2.10}$$

$$= \left(\frac{ugv^*}{uv^*}\right)^{\sigma,\varepsilon} \tag{2.11}$$

$$F_g^\natural(z) = \left(\mathrm{tr}(g^{-1}z)\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon} \tag{2.12}$$

$$= \left(\frac{ug^{-1}v^*}{uv^*}\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon}. \tag{2.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем (2.10), (2.11). По (1.6), (2.9), (2.6) получаем:

$$
\begin{aligned}
F_g(\xi,\eta) &= \frac{1}{N^{\sigma,\varepsilon}} \left(\frac{[ug,v]}{[ug,s^+]}\right)^{\sigma,\varepsilon} \left(-\frac{1}{2}[ug,s^+]\right)^{\sigma,\varepsilon} \\
&= \left(\frac{[ug,v]}{[u,v]}\right)^{\sigma,\varepsilon} \\
&= \left(\frac{ugv^*}{uv^*}\right)^{\sigma,\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Это доказывает (2.11). По (2.8) имеем

$$
\operatorname{tr}(zg) = \operatorname{tr}\frac{v^*ug}{uv^*} = \frac{ugv^*}{uv^*}, \tag{2.14}
$$

откуда следует (2.10).

Теперь докажем (2.12), (2.13). По (1.7), (2.9), (2.7) получаем:

$$
\begin{aligned}
F_g^\natural(\xi,\eta) &= \frac{1}{N^{2-n-\sigma,\varepsilon}} \left(\frac{[u,vg]}{[vg,s^-]}\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon} \left(-\frac{1}{2}[vg,s^-]\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon} \\
&= \left(\frac{[u,vg]}{[u,v]}\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon} \\
&= \left(\frac{u(vg)^*}{uv^*}\right)^{2-n-\sigma,\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

В силу (2.1) имеем $(vg)^* = g^{-1}v^*$. Это дает (2.13). Теперь по (2.14) получаем (2.12). □

References

[1] В. Ф. Молчанов, Н. Б. Волотова, С. В. Цыкина, О. В. Гришина, “Полиномиальное квантование”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:6-3 (2009), 1443–1474. [V. F. Molchanov, N. B. Volotova, S. V. Tsykina, O. V. Grishina, “Polynomial quantization”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:6-3 (2009), 1443–1474 (In Russian)].

[2] С. В. Цыкина, “Символы в полиномиальном квантовании: явные формулы”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 838–845. [S. V. Tsykina, “Symbols in polynomial quantization: explicit formulas”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 838–845 (In Russian)].

[3] V. F. Molchanov, “Quantization on para-Hermitian symmetric spaces”, *Contemporary Mathematical Physics*, American Mathematical Society. Translations: Series 2, **175**, eds. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik, 1996, 81–95.

[4] V. F. Molchanov, N. B. Volotova, “Finite-dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **3**:1 (1998), 65–78.

Информация об авторах

Молчанов Владимир Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2649

Information about the authors

Vladimir F. Molchanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail:v.molchanov@bk.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4065-2649

Цыкина Светлана Викторовна, старший преподаватель кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: tsykinasv@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4511-8710

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Молчанов Владимир Федорович
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Поступила в редакцию 30.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 28.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Svetlana V. Tsykina, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: tsykinasv@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4511-8710

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vladimir F. Molchanov
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Received 30.07.2021
Reviewed 28.08.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314
УДК 517.922, 517.927.4

Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори

Ирина Дмитриевна СЕРОВА
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
ФГАОУ ВО «Тюменкий государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

Аннотация. Для многозначного отображения $F:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ рассматривается задача о суперпозиционной измеримости и суперпозиционной селектируемости. Как известно, для суперпозиционной измеримости достаточно, чтобы отображение F удовлетворяло условиям Каратеодори, для суперпозиционной селектируемости — чтобы $F(\cdot,x)$ обладало измеримым сечением, а $F(t,\cdot)$ было полунепрерывным сверху. В работе предлагаются обобщения этих условий, основанные на замене в определении свойств непрерывности и полунепрерывности предела последовательности координат точек образов многозначных отображений на односторонний предел. В работе показано, что при таких ослабленных условиях многозначное отображение F обладает требуемыми свойствами суперпозиционной измеримости / суперпозиционной селектируемости. Приведены иллюстративные примеры, а также примеры существенности предлагаемых условий. Для однозначных отображений предлагаемые условия совпадают с обобщенными условиями Каратеодори, предложенными И. В. Шрагиным (см. [Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки, 2014, 19:2, 476–478]).

Ключевые слова: условие Каратеодори, многозначный оператор Немыцкого, суперпозиционная измеримость, суперпозиционная селектируемость

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Серова И.Д.* Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 305–314. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314

Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions

Irina D. SEROVA
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
University of Tyumen
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

Abstract. For a multivalued mapping $F:[a,b]\times\mathbb{R}^m\to\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, the problem of superpositional measurability and superpositional selectivity is considered. As it is known, for superpositional measurability it is sufficient that the mapping F satisfies the Caratheodory conditions, for superpositional selectivity it is sufficient that $F(\cdot,x)$ has a measurable section and $F(t,\cdot)$ is upper semicontinuous. In this paper, we propose generalizations of these conditions based on the replacement, in the definitions of continuity and semicontinuity, of the limit of the sequence of coordinates of points in the images of multivalued mappings to a one-sided limit. It is shown that under such weakened conditions the multivalued mapping F possesses the required properties of superpositional measurability / superpositional selectivity. Illustrative examples are given, as well as examples of the significance of the proposed conditions. For single-valued mappings, the proposed conditions coincide with the generalized Caratheodory conditions proposed by I.V. Shragin (see [Bulletin of the Tambov University. Series: natural and technical sciences, 2014, 19:2, 476–478]).

Keywords: the Caratheodory condition, the Nemytsky multivalued operator, superpositional measurability, superpositional selectivity

Mathematics Subject Classification: 47H04, 47H30, 26E25.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Science Foundation (projects no. 20-11-20131).

For citation: Serova I.D. Superpozitsionnaya izmerimost' mnogoznachnoy funktsii pri obobshchennykh usloviyakh Karateodori [Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 305–314.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-305-314. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В исследованиях дифференциальных и интегральных включений систематически используются предположения, обеспечивающие суперпозиционную измеримость или суперпозиционную селектируемость многозначных функций (см. [1–4]). Выполнение таких условий позволяет рассматривать соответствующий оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) в пространствах измеримых функций. Для «обычных однозначных» функций суперпозиционные измеримость и селектируемость равносильны, этими свойствами обладают функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори. Для многозначных функций используется аналог условий Каратеодори (см. [5–7]). В связи с исследованиями существенно нелинейных динамических систем, задач управления с переключающимися режимами и других импульсных систем (см. [8–11]) возникла необходимость исследования операторов суперпозиции, порождаемых разрывными по фазовой переменной функциями. В «однозначном» случае И. В. Шрагиным и др. авторами подробно исследованы обобщения условий Каратеодори, обеспечивающие необходимые свойства оператора Немыцкого (см. [12, 13], а также [14, с. 110]). Эти результаты позволили рассматривать дифференциальные и интегральные уравнения без традиционного предположения непрерывности порождающих эти уравнения функций (см., в частности, работы [14, 15]). В данной статье предлагаются аналогичные обобщения условий Каратеодори для многозначных функций.

Статья содержит три секции. В секции 1. приведены определения основных понятий и доказаны утверждения о многозначных отображениях, требуемые для исследования свойств суперпозиционной измеримости и селектируемости. В секции 2. получено утверждение о суперпозиционной измеримости многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори. В секции 3. получено утверждение о суперпозиционной селектируемости многозначной функции, которая по фазовой переменной удовлетворяет обобщенному условию полунепрерывности сверху.

1. Основные понятия

Приведем некоторые известные определения полунепрерывности, непрерывности и измеримости многозначного отображения (подробнее см. [5–7]), а также введем понятие односторонней полунепрерывности и односторонней непрерывности для случая, когда многозначное отображение задано на числовой прямой $\mathbb{R}$.

Пусть заданы метрические пространства $X := (X, \rho_X)$ и $Y := (Y, \rho_Y)$. Для заданных $y \in Y$, $Y_0 \subset Y$, $r \geq 0$ обозначим через $O_Y(y, r)$ открытый шар в Y с центром в точке y радиуса r, а через $O_Y(Y_0, r) := \bigcup_{y \in Y_0} O_Y(y, r)$ — r-раздутие множества Y_0 (при $r = 0$ полагаем $O_Y(y, 0) = \emptyset$ и $O_Y(Y_0, 0) = \emptyset$). Пусть $\operatorname{comp}(Y)$ — совокупность компактных подмножеств пространства Y. На множестве $\operatorname{comp}(Y)$ полагаем заданной метрику Хаусдорфа

$$h_Y : \operatorname{comp}(Y) \times \operatorname{comp}(Y) \to \mathbb{R}_+, \quad \forall\, U, V \in \operatorname{comp}(Y) \;\; h_Y(U, V) = \max\{h_Y^+(U, V), h_Y^+(V, U)\},$$

где $h_Y^+(U, V) = \sup_{u \in U} \inf_{v \in V} \rho_Y(u, v)$ — полуотклонение множества U от множества V.

Рассмотрим многозначное отображение $G : X \rightrightarrows Y$, имеющее непустые компактные образы: $\forall x \in X \;\; G(x) \in \operatorname{comp}(Y)$ (такое отображение многие авторы обозначают $G : X \to \operatorname{comp}(Y)$, но здесь это обозначение не используется, чтобы было удобно различать многозначное отображение и соответствующее однозначное отображение). Отображение G называется *h-полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in X$ из $\rho_X(x_0, x) < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x), G(x_0)\big) < \varepsilon$. Свойство h-полунепрерывности сверху в точке x_0 отображения равносильно свойству его секвенциальной полунепрерывности сверху в этой точке. Отображение G называют *секвенциально полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in X$, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$, при любом натуральном i и любом $y_i \in G(x_i)$ существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Так как свойства h-полунепрерывности сверху и секвенциальной полунепрерывности сверху в точке x_0 можно не различать, говорят просто о свойстве полунепрерывности сверху в точке x_0.

Отображение G называется: *h-полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in X$ из $\rho_X(x_0, x) < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$, и *секвенциально полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in X$, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ и для любого $y_0 \in G(x_0)$ при каждом i существует такое $y_i \in G(x_i)$, что $y_i \to y_0$. Вследствие предположения компактности множества $G(x_0)$ понятия h-полунепрерывным снизу и секвенциальной полунепрерывности снизу в точке x_0 равносильны, и в дальнейшем будем говорить просто о полунепрерывности снизу в точке x_0.

Если отображение G полунепрерывно и сверху и снизу в точке x_0, то оно называется непрерывным в этой точке. Это определение равносильно «обычной» непрерывности в точке x_0 отображения G, как однозначного, действующего из метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство $\big(\mathrm{comp}(Y), h_Y\big)$. Отображение, обладающее во всех точках свойством полунепрерывности сверху (снизу) или непрерывности, будем называть полунепрерывным сверху (снизу) или, соответственно, непрерывным.

Приведенные определения часто дают для более широких классов отображений (например, имеющих замкнутые образы), однако для целей данного исследования достаточно рассматривать только отображения с компактными образами. В случае, когда $X = \mathbb{R}$, для многозначного отображения можно определить следующие аналоги свойства односторонней непрерывности «обычных» функций.

Определение 1.1. Многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$ называем:

- *односторонне справа полунепрерывным сверху в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x), G(x_0)\big) < \varepsilon$.

- *односторонне справа полунепрерывным снизу в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y^+\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$.

- *непрерывным справа в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых $x \in \mathbb{R}$ из $0 < x - x_0 < \delta$ следует $h_Y\big(G(x_0), G(x)\big) < \varepsilon$.

Приведенные понятия можно также определить «на языке последовательностей». В частности отображение G односторонне справа полунепрерывно сверху в точке x_0 в том и только том случае, если для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \geq x_0$, при любом натуральном i и любом $y_i \in G(x_i)$ существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Отметим также, что непрерывность справа в точке x_0 многозначного отображения G равносильна непрерывности справа в этой точке соответствующего однозначного отображения.

Если отображение при всех $x_0 \in \mathbb{R}$ удовлетворяет одному из определений 1.1, то будем опускать в соответствующем термине словосочетание «в точке x_0».

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть многозначное отображение $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$, имеющее непустые компактные образы, является односторонне справа полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$. Тогда для любой сходящейся к этой точке последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \geq x_0$, $i = 1, 2, \ldots,$ множество $Y_0 := G(x_0) \cup \left(\bigcup_i G(x_i)\right)$ компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную последовательность $\{y_i\} \subset Y_0$ и покажем, что она содержит сходящуюся к точке из Y_0 подпоследовательность. Если в этой последовательности бесконечно много элементов, принадлежащих $G(x_{i_0})$ при некотором фиксированном $i_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, то доказываемое утверждение очевидно. Поэтому без ограничения общности полагаем, что $y_i \in G(x_i)$. Вследствие односторонней справа полунепрерывным сверху в точке $x_0 \in X$ отображения G существует $\bar{y}_i \in G(x_0)$ такой, что $\rho_Y(\bar{y}_i, y_i) \to 0$. Далее, вследствие компактности множества $G(x_0)$ существует подпоследовательность $\{\bar{y}_{i_k}\}$, сходящаяся к некоторому элементу $y_0 \in G(x_0)$. Таким образом, последовательность $\{y_{i_k}\}$ также сходится к элементу y_0. □

З а м е ч а н и е 1.1. Определения свойств односторонней полунепрерывности и непрерывности отображения $G : \mathbb{R} \rightrightarrows Y$ можно свести к классическим определениям полунепрерывности и непрерывности, если на $\mathbb{R}$ выбрать в качестве базы топологии семейство полуоткрытых интервалов $[\alpha, \beta)$ вместо совокупности «привычных» открытых интервалов (α, β). Однако, в такой топологии всякий отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ уже не будет компактным множеством, также станет невозможным применение результатов, в которых областью определения многозначных отображений являются метрические и нормированные пространства (эти результаты используются в следующем параграфе). Кроме того, с использованием такой топологии не удастся вывести предложение 1.1 из известного результата [7, теорема 1.2.35] о компактности образа компактного подмножества топологического пространства при полунепрерывном сверху отображении, поскольку в этой теореме требуется полунепрерыность во всех точках, а в предложении 1.1 — только в точке x_0.

Теперь рассмотрим многозначное отображение $G : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ такое, что $G(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ при п.в. $t \in [a, b]$. Это отображение называют *измеримым*, если для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ множество $G^{-1}(V) := \{t \in [a, b] : G(t) \subset V\}$ (называемое малым прообразом) измеримо. Для измеримости многозначного отображения G необходимо и достаточно, чтобы измеримым было соответствующее однозначное отображение из $[a, b]$ в метрическое пространство $(\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n), h_{\mathbb{R}^n})$.

Приведем утверждение о сохранении свойства измеримости при предельном переходе. Это утверждение мы сопроводим доказательством, поскольку соответствующий результат широко известен лишь для однозначных вещественных функций, а для действующих в метрическое пространство отображений (и соответственно, для многозначных функций) в ряде классических монографий не приводится (см, в частности, [1, 2, 5–7]).

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Пусть задана последовательность измеримых многозначных отображений $G_i : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots,$ для которых $G_i(t) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ при п. в. $t \in [a, b]$. Если при п. в. t имеет место сходимость $h_{\mathbb{R}^n}\big(G_i(t), G(t)\big) \to 0$, то «предельное отображение» $G : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ также имеет компактные образы и измеримо.*

Доказательство. Компактность множества $G(t)$ при п. в. t прямо следует из полноты метрического пространства $(\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n), h_{\mathbb{R}^n})$ (см. [6, теорема 2.2.3]).

Выберем в $\mathbb{R}^n$ произвольное непустое открытое множество V, отличное от всего $\mathbb{R}^n$. Также определим последовательность открытых множеств $V_k \subset V$, $k = 1, 2, \ldots,$ следующим образом. Для любого $v \in V$ найдем $r(v) := \sup\{r > 0 : O_{\mathbb{R}^n}(v, r) \subset V\}$ (заметим, что $r(v) < \infty$ при любом $v \in V$) и определим $r_k(v) := \begin{cases} 0, & \text{если } r(v) < k^{-1}, \\ r(v) - k^{-1}, & \text{если } r(v) \geq k^{-1}. \end{cases}$ Положим $V_k := \bigcup_{v \in V} O_{\mathbb{R}^n}\big(v, r_k(v)\big)$. Рассмотрим множество

$$T := \bigcup_k \bigcup_I \bigcap_{i > I} \big\{t \in [a, b] : G_i(t) \subset V_k\big\}.$$

Вследствие измеримости многозначных функций G_i, $i = 1, 2, \ldots,$ это множество измеримо. Покажем, что $T = \big\{t \in [a, b] : G(t) \subset V\big\}$, и тогда измеримость G будет установлена.

Пусть $t \in T$. Тогда существуют натуральные k, I такие, что при всех $i > I$ выполнено $G_i(t) \subset V_k$. Выберем номер i так, чтобы $h_{\mathbb{R}^n}(G_i(t), G(t)) < (2k)^{-1}$. Имеем

$$G(t) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(G_i(t), \frac{1}{2k}\Big) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(V_k, \frac{1}{2k}\Big) \subset V.$$

Таким образом, доказано вложение $T \subset \big\{t \in [a, b] : G(t) \subset V\big\}$.

Теперь зафиксируем такое $t \in [a, b]$, что $G(t) \subset V$. Для каждого $y \in G(t)$ определим $r(y) := \sup\big\{r > 0 : O_{\mathbb{R}^n}(y, r) \subset V\big\}$. Покажем, что значение $\mathfrak{r} := \inf_{y \in G(t)} r(y)$ положительно. В противном случае в силу компактности множества $G(t) \subset \mathbb{R}^n$ существует сходящаяся к некоторому $y \in G(t)$ последовательность $\{y_i\} \subset G(t)$, для которой $r(y_i) \to 0$. Но $r(y_i) \geq r(y) - \rho_{\mathbb{R}^n}(y_i, y)$. Поэтому при y_i, достаточно близких к y, выполнено $r(y_i) \geq 2^{-1} r(y)$, а это противоречит тому, что $r(y_i) \to 0$. Итак, $\mathfrak{r} > 0$.

При всех $k > \mathfrak{r}^{-1} 2$ имеет место вложение

$$O_{\mathbb{R}^n}\Big(G(t), \frac{\mathfrak{r}}{2}\Big) \subset V_k.$$

Выбрав номер i так, чтобы $h_{\mathbb{R}^n}\big(G_i(t), G(t)\big) < (2k)^{-1}$, получим

$$G_i(t) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(G(t), \frac{1}{2k}\Big) \subset O_{\mathbb{R}^n}\Big(V_k, \frac{1}{2k}\Big) \subset V.$$

Таким образом, доказано вложение $\big\{t \in [a, b] : G(t) \subset V\big\} \subset T$, поэтому справедливо равенство $\big\{t \in [a, b] : G(t) \subset V\big\} = T$. Измеримость отображения $G(\cdot)$ установлена. □

2. Условия суперпозиционной измеримости

Пусть задано многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, имеющее компактные значения. Это отображение называется *суперпозиционно измеримым*, если для любой измеримой функции $q : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ суперпозиция $F(\cdot, q(\cdot)) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ является измеримой многозначной функцией. Как известно (см., например, [7, § 1.5]), для суперпозиционной измеримости отображения F достаточно, чтобы это отображение удовлетворяло *условиям Каратеодори*: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(\cdot, x) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измеримо, а для п. в. $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ непрерывно. Сформулируем более общие условия суперпозиционной измеримости рассматриваемого отображения F (использующие специфику конечномерных пространств).

Теорема 2.1. *Пусть для любого* $x \in \mathbb{R}^n$ *отображение* $F(\cdot, x) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *измеримо, а для п. в.* $t \in [a, b]$ *любых* $i \in \overline{1, n}$ *и всех* $\bar{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ *отображение* $F(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_m) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ *непрерывно справа. Тогда* F *суперпозиционно измеримо.*

Доказательство. Пусть функция $q = (q_1, \dots, q_m) : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ измерима. Покажем измеримость суперпозиции $G(\cdot) := F(\cdot, q(\cdot)) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

Компактность значений $G(t)$ при п. в. $t \in [a, b]$ очевидна.

Для произвольных чисел $x_2, \dots, x_m$ определим многозначную функцию

$$G_1(\cdot, x_2, \dots, x_m) = F(\cdot, q_1(\cdot), x_2, \dots, x_m) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n.$$

Зафиксируем натуральное i. Для каждого целого числа j зададим множество E_{ij} таких $t \in [a, b]$, что $q_1(t) \in \big[i^{-1}(j-1), i^{-1}j\big)$. Это множество измеримо вследствие измеримости функции q_1. Определим ступенчатую функцию $q_{1i} : [a, b] \to \mathbb{R}$, имеющую значением $q_{1i}(t) = i^{-1}j$ при $t \in E_{ij}$. Вследствие измеримости $F(\cdot, x)$ многозначная функция $F(\cdot, q_{1i}(\cdot), x_2, \dots, x_m)$ измерима на каждом из множеств E_{ij}, и поэтому измерима на всем $[a, b]$.

В силу непрерывности справа отображения $F(t, \cdot, x_2, \dots, x_m) : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ при $i \to \infty$ для п. в. t имеет место сходимость $F(t, q_{1i}(t), x_2, \dots, x_m) \to G_1(t, x_2, \dots, x_m)$ (в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ по метрике Хаусдорфа). Согласно предложению 1.2, предельная многозначная функция $G_1(\cdot, x_2, \dots, x_m)$ также измерима.

Далее определим отображение $G_2(\cdot, x_3, \dots, x_m) = G_1(\cdot, q_2(\cdot), x_3, \dots, x_m)$ и, повторяя приведенные рассуждения, докажем его измеримость. Таким же образом устанавливается измеримость всех композиций, полученных последовательными подстановками в отображение $F(\cdot, x_1, x_2, \dots, x_m)$ измеримых функций $q_1(\cdot)$, $q_2(\cdot)$, ..., $q_m(\cdot)$ вместо $x_1, x_2, \dots, x_m$. После всех подстановок установим измеримость отображения $F\big(\cdot, q_1(\cdot), q_2(\cdot), \dots, q_m(\cdot)\big)$. □

Замечание 2.1. В литературе также рассматривается и более общее определение суперпозиционной измеримости отображения $F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, означающее, что для любой измеримой многозначной функции $Q : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, $Q(t) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, $t \in [a, b]$, суперпозиция $F(\cdot, Q(\cdot)) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ измерима. Однако, без предположения непрерывности отображения $F(t, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ множество $F(t, Q(t))$ не обязано быть компактным. Например, однозначное отображение $F : [-1, 0] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемое соотношениями $F(t, x) = x^{-1}$, $F(t, 0) = -1$, очевидно удовлетворяет условиям теоремы 2.1, однако даже для постоянного многозначного отображения $Q : [-1, 0] \rightrightarrows \mathbb{R}$, $Q(t) = [0, 1]$ при любом t множество $F(t, Q(t)) = (-\infty, -1]$ не является компактным. Здесь мы такие измеримые отображения не рассматриваем.

3. Условия суперпозиционной селектируемости

Пусть задано многозначное отображение $F : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, имеющее компактные значения. Это отображение называется *суперпозиционно селектируемым*, если для любой измеримой функции $q : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ суперпозиция $F(\cdot, q(\cdot)) : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ имеет *измеримый селектор*, то есть существует такая измеримая функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, что $y(t) \in F(t, q(t))$ при п. в. $t \in [a, b]$. Как известно (см., например, [7, § 1.5]), для суперпозиционной селектируемости отображения F достаточно, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}^n$

отображение $F(\cdot,x):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ обладало измеримым сечением, а для п. в. $t\in[a,b]$ отображение $F(t,\cdot):\mathbb{R}^m\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ было полунепрерывным сверху. Сформулируем более общие условия суперпозиционной селектируемости рассматриваемого отображения F (использующие специфику конечномерных пространств).

Теорема 3.1. *Пусть для любого фиксированного $x\in\mathbb{R}^n$ у отображения $F(\cdot,x):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ существует измеримый селектор, а для п. в. $t\in[a,b]$ любых $i\in\overline{1,n}$ и всех $\bar{x}_i=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^{m-1}$ отображение $F(t,x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_m):\mathbb{R}\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ односторонне справа полунепрерывно сверху. Тогда F суперпозиционно селектируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $q=(q_1,\ldots,q_m):[a,b]\to\mathbb{R}^m$ измерима. Покажем, что многозначное отображение $G(\cdot):=F(\cdot,q(\cdot)):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ обладает измеримым селектором. Вначале для любых $x_2,\ldots,x_m$ определим многозначное отображение

$$G_1(\cdot,x_2,\ldots,x_m):=F(\cdot,q_1(\cdot),x_2,\ldots,x_m):[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$$

и покажем, что оно обладает измеримым селектором.

Зафиксируем натуральное i. Для каждого целого числа j определим измеримое множество E_{ij} таких $t\in[a,b]$, что $q_1(t)\in\big[i^{-1}(j-1),i^{-1}j)\big)$. Затем определим, как и при доказательстве теоремы 2.1, ступенчатую функцию $q_{1i}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $q_{1i}(t)=i^{-1}j$ при $t\in E_{ij}$. Многозначная функция $F(\cdot,q_{1i}(\cdot),x_2,\ldots,x_m)$ имеет на каждом из множеств E_{ij} измеримый селектор y_{ij}, соответственно функция $y_i:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, определяемая формулой $y_i(t)=y_{ij}(t)$, $t\in E_{ij}$, есть измеримый селектор этой функции на всем $[a,b]$.

Теперь при любом $I=1,2,\ldots$ определим многозначное отображение $\Phi_I:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ формулой $\Phi_I(t):=\overline{\bigcup_{i>I}y_i(t)}$, $t\in[a,b]$ (черта над множеством означает его замыкание). Поскольку отображение $F(t,\cdot,x_2,\ldots,x_m)$ является односторонне справа полунепрерывным сверху, согласно предложению 1.1 замкнутое множество $\Phi_I(t)\subset\mathbb{R}^n$ вложено в компакт, и поэтому само является компактным. Последовательность этих компактных множеств убывает (по вложению). Поэтому при п. в. $t\in[a,b]$ множество $\Phi(t):=\bigcap_I\Phi_I$ не пусто и компактно. Кроме того, многозначное отображение $\Phi_I:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ измеримо (см. [7, теорема 1.5.6 (в)]). Следовательно, многозначное отображение $\Phi:[a,b]\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ также измеримо (см. [7, теорема 1.5.8 (а)]).

Оценим полуотклонение $h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)$ при $t\in[a,b]$. Так как отображение $F(t,\cdot,x_2,\ldots,x_m)$ является односторонне справа полунепрерывным сверху, для п. в. $t\in[a,b]$ имеем

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists I_\varepsilon\ \ \forall i>I_\varepsilon\ \ h^+_{\mathbb{R}^n}\big(F(t,q_{1i}(t),x_2,\ldots,x_m),F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\big)<\varepsilon.$$

Следовательно, выполнены неравенства:

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\Big(\bigcup_{i>I_\varepsilon}y_i(t),F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\Big)<\varepsilon\ \Rightarrow\ h^+_{\mathbb{R}^n}\Big(\overline{\bigcup_{i>I_\varepsilon}y_i(t)},F(t,q_1(t),x_2,\ldots,x_m)\Big)\le\varepsilon.$$

Итак, $h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi_{I_\varepsilon}(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)\le\varepsilon$, а поскольку $\Phi_{I_\varepsilon}(t)\supset\Phi(t)$, получаем

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)\le\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности положительного ε, будет выполнено равенство

$$h^+_{\mathbb{R}^n}\big(\Phi(t),G_1(t,x_2,\ldots,x_m)\big)=0.$$

Это равенство означает (см. [6, с. 112]), что $\Phi(t) \subset G_1(t, x_2, \ldots, x_m)$. Измеримый селектор измеримого многозначного отображения $\Phi(\cdot)$ является искомым измеримым селектором многозначного отображения $G_1(\cdot, x_2, \ldots, x_m)$.

Далее определим отображение $G_2(\cdot, x_3, \ldots, x_m) = G_1(\cdot, q_2(\cdot), x_3, \ldots, x_m)$ и, повторяя приведенные рассуждения, докажем, что оно имеет измеримый селектор. Таким же образом устанавливается измеримая селектируемость всех композиций, полученных последовательными подстановками в отображение $F(\cdot, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ измеримых функций $q_1(\cdot)$, $q_2(\cdot)$, ..., $q_m(\cdot)$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_m$. После всех подстановок установим измеримую селектируемость отображения $F\big(\cdot, q_1(\cdot), q_2(\cdot), \ldots, q_m(\cdot)\big)$. □

References

[1] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985. [A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].

[2] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic press, New York; London, 1972.

[3] А. И. Булгаков, Л. Н. Ляпин, “О связности множеств решений функциональных включений”, *Математический сборник*, **119(161)**:2(10) (1982), 295–300; англ. пер.:A. I. Bulgakov, L. N. Lyapin, “On the connectedness of the solution sets of functional inclusions”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:1 (1984), 287–292.

[4] А. И. Булгаков, “Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью”, *Дифференциальные уравнения*, **26**:11 (1990), 1872–1878; англ. пер.:A. I. Bulgakov, “Functional-differential inclusions with a nonconvex right-hand side conditions”, *Differential Equations*, **26**:11 (1990), 1385–1391.

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория эктремальных задач*, Наука, М., 1974. [A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[6] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2014. [A. V Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].

[7] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, ЛИБРОКОМ, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, LIBROKOM Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].

[8] А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Панасенко, “Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **1**:39 (2012), 17–20. [A. I. Bulgakov, A. A. Grigorenko, E. A. Panasenko, “Perturbation of Volterra inclusions by impulse operator”, *Izv. IMI UdGU*, **1**:39 (2012), 17–20 (In Russian)].

[9] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, “О корректности обобщенных уравнений нейрополей с импульсным управлением”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2016, № 5, 75–79; англ. пер.:E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, “On well-posedness of generalized neural field equations with impulsive control”, *Russian Mathematics*, **60**:5 (2016), 66–69.

[10] A. Ponosov, E. Zhukovskii, “Generalized functional differential equations: existence and uniqueness of solutions”, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2016, № 112, 1–19.

[11] Е. С. Жуковский, О. В. Скопинцева, “О корректности дифференциального уравнения, испытывающего импульсные воздействия на заданной линии”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17**:1 (2012), 45–48. [E. S. Zhukovskiy, O. V. Skopintseva, “On well-posedness of differential equation with impulses on the given line”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:1 (2012), 45–48 (In Russian)].

[12] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2

(2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized Caratheodory conditions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[13] И. В. Шрагин, “О некоторых σ-алгебрах, связанных с измеримостью суперпозиций”, *Математические заметки*, **80**:6 (2006), 926–933; англ. пер.:I. V. Shragin, “On σ-algebras related to the measurability of compositions”, *Mathematical Notes*, **80**:6 (2006), 868–874.

[14] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[15] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

Информация об авторе

Серова Ирина Дмитриевна, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; младший научный сотрудник института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Information about the author

Irina D. Serova, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; Junior Researcher, X-Bio Institute. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 26.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.

Received 02.07.2021
Reviewed 26.08.2021
Accepted for press 10.09.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 135 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-315-336

Homogeneous spaces yielding solutions of the $k[S]$-hierarchy and its strict version

Gerard F. HELMINCK[1] **, Jeffrey A. WEENINK**[2]

[1] Korteweg-de Vries Institute, University of Amsterdam
P.O. Box 94248, Amsterdam, 1090 GE, The Netherlands
[2] Bernoulli Institute, University of Groningen
9 Nijenborgh, Groningen, 9747 AG, The Netherlands

Abstract. The $k[S]$-hierarchy and its strict version are two deformations of the commutative algebra $k[S]$, $k = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, in the $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices, where S is the matrix of the shift operator. In this paper we show first of all that both deformations correspond to conjugating $k[S]$ with elements from an appropriate group. The dressing matrix of the deformation is unique in the case of the $k[S]$-hierarchy and it is determined up to a multiple of the identity in the strict case. This uniqueness enables one to prove directly the equivalence of the Lax form of the k[S]-hierarchy with a set of Sato–Wilson equations. The analogue of the Sato–Wilson equations for the strict $k[S]$-hierarchy always implies the Lax equations of this hierarchy. Both systems are equivalent if the setting one works in, is Cauchy solvable in dimension one. Finally we present a Banach Lie group $G(\mathcal{S}_2)$, two subgroups $P_+(H)$ and $U_+(H)$ of $G(\mathcal{S}_2)$, with $U_+(H) \subset P_+(H)$, such that one can construct from the homogeneous spaces $G(\mathcal{S}_2)/P_+(H)$ resp. $G(\mathcal{S}_2)/U_+(H)$ solutions of respectively the $k[S]$-hierarchy and its strict version.

Keywords: homogeneous spaces, integrable hierarchies, Lax equations, Sato–Wilson form, wave matrices

Mathematics Subject Classification: 22E65, 35Q58, 37K10, 58B25.

For citation: Helminck G.F., Weenink J.A. Odnorodnyye prostranstva, porozhdayushchiye resheniya iyerarkhii $k[S]$ i eye strogoy versii [Homogeneous spaces yielding solutions of the $k[S]$-hierarchy and its strict version]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 135, pp. 315–336. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-315-336.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-315-336
УДК 512.71, 512.56, 517.95

Однородные пространства, порождающие решения иерархии $k[S]$ и ее строгой версии

Герард Франциск ХЕЛЬМИНК[1] **, Джеффри А. ВИНИНК**[2]
[1] Математический институт Кортевега – де Фриза, Университет г. Амстердам
94248, Нидерланды, г. Амстердам, 1090 GE, ПО 94248
[2] Институт Бернулли, Университет Гронингена
9747 AG, Нидерланды, г. Гронинген, ул. Найенборх, 9

Аннотация. Иерархия $k[S]$ и ее строгая версия представляют собой две деформации коммутативной алгебры $k[S]$, с $k=\mathbb{R}$ или $k=\mathbb{C}$, в пространстве $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ матриц, где S — матрица оператора сдвига. В работе показано, что обе деформации соответствуют сопряжению $k[S]$ элементами подходящей группы. При этом одевающая матрица деформации единственна в случае иерархии $k[S]$ и определяется с точностью до умножения на единичную в случае строгой иерархии $k[S]$. Эта единственность позволяет непосредственно доказать, что форма Лакса иерархии $k[S]$ равносильна семейству уравнений Сато–Вильсона. Аналог уравнений Сато–Вильсона для строгой иерархии $k[S]$ всегда приводит к уравнениям Лакса этой иерархии. Эти системы эквивалентны, если окружение, в котором рассматривается иерархия, разрешимо по Коши в одномерном пространстве. В работе также представлена банахова группа Ли $G(\mathcal{S}_2)$ и две ее подгруппы $P_+(H)$ и $U_+(H)$, где $U_+(H)\subset P_+(H)$, такие, что однородные пространства $G(\mathcal{S}_2)/P_+(H)$ и $G(\mathcal{S}_2)/U_+(H)$ дают решения иерархии $k[S]$ и ее строгой версии, соответственно.

Ключевые слова: однородные пространства, интегрируемые иерархии, уравнения Лакса, форма Сато–Вильсона, волновые матрицы

Для цитирования: *Хельминк Г.Ф., Вининк Д.А.* Однородные пространства, порождающие решения иерархии $k[S]$ и ее строгой версии // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 135. С. 315–336. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-135-315-336. (In Engl., Abstr. in Russian)

Dedicated to Alexander Ivanovich Bulgakov at the anniversary of his 70-th birthday

Introduction

In [1] we introduced a wide collection of integrable hierarchies in the $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices corresponding to deformations of various commutative Lie subalgebras of the algebra $LT_{\mathbb{N}}(k)$ of all $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices with coefficients from k that possess only a finite number of nonzero diagonals above the central diagonal. In the present paper we focus on the subalgebra $k[S]=\{\sum_{i=0}^{N}a_iS^i \mid a_i\in k\}$ and prove some additional results for the $k[S]$-hierarchy and its strict version. We start by showing that $k[S]$ is a maximal commutative subalgebra of $LT_{\mathbb{N}}(k)$ and that each of the two deformations of S corresponds to conjugations with elements from its appropriate group, where the deforming group is larger for the strict version. In both cases the evolution equations of the deformed generator is a set of Lax equations for this generator and this deformed generator together with the set of Lax equations it satisfies forms an integrable hierarchy. The dressing matrix of the deformation turns out to be unique in the case of the $k[S]$-hierarchy and it is determined up to a multiple of the identity in the strict case. The uniqueness of the dressing matrix enables one to prove directly the equivalence of the Lax form of the k[S]-hierarchy with a set of Sato–Wilson equations. There exists an analogue of the Sato–Wilson equations for the strict $k[S]$-hierarchy. It always implies the Lax equations of this hierarchy. Both systems can be shown to be equivalent if the setting one works in, is Cauchy solvable in dimension one.

Solutions of both hierarchies are constructed by producing wave matrices in the linearization module of each hierarchy. Therefore we recall the essentials of this approach. We conclude by presenting a Banach Lie group $G(\mathcal{S}_2)$, the two subgroups $P_+(H)$ and $U_+(H)$ of $G(\mathcal{S}_2)$, $U_+(H)\subset P_+(H)$, and by giving the construction from the flag variety $G(\mathcal{S}_2)/P_+(H)$ of a wave matrix of the $k[S]$-hierarchy and from its cover $G(\mathcal{S}_2)/U_+(H)$ of a wave matrix of the strict $k[S]$-hierarchy.

The content of the various sections is as follows: Section 1. describes the scene of the deformations, the algebra $LT_{\mathbb{N}}(R)$, the maximality of $k[S]$ and the properties required later on. The next section is devoted to the description of the two deformations, it contains a discussion of the Lax equations they have to satisfy and we describe there the link with their Sato–Wilson form. The form of the relevant $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module, the equations of the linearization and a characterization of the special vectors, called wave matrices, can all be found in Section 3. In the last section we present the homogeneous spaces $G(\mathcal{S}_2)/P_+(H)$ and $G(\mathcal{S}_2)/U_+(H)$ and show how to construct wave matrices of the $k[S]$-hierarchy and its strict version from them.

1. The algebra $LT_{\mathbb{N}}(R)$

Let R be a commutative k-algebra over the field k. We write $M_n(R)$ for the $n\times n$-matrices with coefficients from R and similarly $M_{\mathbb{N}}(R)$ for the space of $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices with coefficients from R. The transpose A^T of any matrix $A\in M_{\mathbb{N}}(R)$ is defined as in the finite dimensional case. Let V be the R-module of all $1\times\mathbb{N}$-matrices with coefficients from R, i. e.

$$V=R^{\mathbb{N}}=\{\vec{x}=(x_j)=\begin{pmatrix}x_0 & x_1 & x_2 & \cdots\end{pmatrix}\mid x_j\in R \text{ for all } j\in\mathbb{N}\}.$$

Inside V we consider for each $i\in\mathbb{N}$ the R-submodules

$$V_{\leqslant i}=\{\vec{x}=(x_j)\mid x_j=0 \text{ for all } j>i\} \text{ and } V_{\text{fin}}=\cup_{i\in\mathbb{N}}V_{\leqslant i}.$$

The space V_{fin} is a free R-module with basis the $\{\vec{e}\,(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, where $\vec{e}\,(i)$ is the vector with the i-th coordinate equal to one and the remaining ones equal to zero. For each $\vec{x} \in V_{\text{fin}}$ and each $A \in M_{\mathbb{N}}(R)$ the product $\vec{x}A$ is well-defined and determines a vector in V. Hence, if we write

$$M_A(\vec{x}) := \vec{x}A,$$

then M_A is an R-linear map in $\operatorname{Hom}_R(V_{\text{fin}}, V)$. The subspace of $M_{\mathbb{N}}(R)$ that is central in this paper is the space $LT_{\mathbb{N}}(R)$ of all $A \in M_{\mathbb{N}}(R)$ that possess the property that there is an $m \in \mathbb{N}$ such that for all $i \in \mathbb{N}$ there holds

$$M_A(V_{\leqslant i}) \subset V_{\leqslant i+m}. \tag{1.1}$$

Property (1.1) implies that $LT_{\mathbb{N}}(R)$ is an algebra w.r.t. matrix multiplication. Inside $LT_{\mathbb{N}}(R)$ there are some classes of basic matrices with their own notation: first of all there are the basic matrices $E_{(i,j)}$, i and $j \in \mathbb{N}$, whose matrix entries, in Kronecker notation, are given by

$$(E_{(i,j)})_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}.$$

It is convenient to use the notation $A = \sum_{n,m} a_{(i,j)} E_{(i,j)}$ for an $A = (a_{(i,j)}) \in LT_{\mathbb{N}}(R)$. The second class of matrices for which we introduce a special notation are the diagonal matrices. Let $\{d(s) \mid s \in \mathbb{N}\}$ be a set of of elements in R. Then the diagonal matrix $\operatorname{diag}(\,d(s)\,)$ in $M_{\mathbb{N}}(R)$ is given by

$$\operatorname{diag}(d(s)) := \sum_{s \in \mathbb{N}} d(s) E_{(s,s)} = \begin{pmatrix} d(0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & d(1) & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & d(2) & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

The algebra of all diagonal matrices in $M_{\mathbb{N}}(R)$ is denoted by

$$\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R) = \{d = \operatorname{diag}(d(s)) |\, d(s) \in R \text{ for all } s \in \mathbb{N}\}.$$

One has a diagonal embedding i_1 from R into $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$ by taking all diagonal coefficients of $i_1(r)$ equal to r, i. e.

$$i_1(r) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & r & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

A central role in this paper is played by the shift matrix S, its transpose S^T and their powers, where S is the matrix corresponding to the operator $M_S : V \to V$ defined by

$$M_S(\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Note that we have

$$SS^T = \operatorname{Id} \text{ and } S^T S = \sum_{i \geqslant 1} E_{(i,i)}. \tag{1.2}$$

Besides the expression in the basic matrices it is also convenient to have at one's disposal the decomposition of a matrix $A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{N}}(R)$ in its diagonals. If $m \geqslant 0$, then the m-th diagonal of A is by definition the matrix

$$d_m(A)S^m = \operatorname{diag}(a_{(s,s+m)})S^m = \sum_{i \geqslant 0} a_{(i,i+m)} E_{(i,i+m)}$$

and those diagonals are called *positive*. Similarly, for $m \leqslant 0$, the m-th diagonal of A is defined as the matrix

$$(S^T)^{-m} d_m(A) = (S^T)^{-m} \operatorname{diag}(a_{(s-m,s)}) = \sum_{i \geqslant 0} a_{(i-m,i)} E_{(i-m,i)}$$

and they are called *negative*. So each matrix $A \in M_{\mathbb{N}}(R)$ decomposes uniquely as

$$A = \sum_{m \geqslant 0} d_m(A) S^m + \sum_{m < 0} (S^T)^{-m} d_m(A). \tag{1.3}$$

We use the decomposition (1.3) to assign a degree to elements of $LT_{\mathbb{N}}(R)$. For a nonzero $A \in LT_{\mathbb{N}}(R)$ the degree is equal to m if its highest nonzero diagonal is the m-th and the degree of the zero element is $-\infty$.

Lemma 1.1. *The centralizer in $LT_{\mathbb{N}}(R)$ of the matrix S consists of the*

$$\{\sum_{j \geqslant 0} i_1(r_j) S^j \mid r_j \in R\}.$$

P r o o f. Let $A = (a_{(i,j)})$ belong to $LT_{\mathbb{N}}(R)$. Then we have on one hand

$$AS = \begin{pmatrix} 0 & a_{(0,0)} & \cdots & a_{(0,n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & a_{(n,0)} & \cdots & a_{(n,n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

and on the other

$$SA = \begin{pmatrix} a_{(1,0)} & a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,n+1)} & \cdots \\ a_{(2,0)} & a_{(2,1)} & \cdots & a_{(2,n+1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{(n+1,0)} & a_{(n+1,1)} & \cdots & a_{(n+1,n+1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

If the expressions (1.4) and (1.5) are equal then induction w.r.t. i shows first of all that A is uppertriangular, i. e. for all $j < i$, $a_{(i,j)} = 0$. For the remaining coefficients the identity $AS = SA$ yields then that $a_{(i,j)} = a_{(i+1,j+1)}$ for all $i \leqslant j$. This proves the claim. □

A consequence of Lemma 1.1 is the following property of $k[S] = \{\sum_{i=0}^{N} k_i S^i \mid k_i \in k\}$:

Corollary 1.1. *The algebra $k[S]$ is a maximal commutative subalgebra of $LT_{\mathbb{N}}(k)$.*

As any associative algebra, $LT_{\mathbb{N}}(R)$ is a Lie algebra with the commutator as a bracket. We use two decompositions of $LT_{\mathbb{N}}(R)$ into the direct sum of two Lie subalgebras. The first splits elements of $LT_{\mathbb{N}}(R)$ as follows

$$A = \pi_{ut}(A) + \pi_{slt}(A) = \sum_{m \geqslant 0} d_m(A) S^m + \sum_{m<0} (S^T)^m d_m(A)$$

and the second as

$$A = \pi_{sut}(A) + \pi_{lt}(A) = \sum_{m>0} d_m(A) S^m + \sum_{m \leqslant 0} (S^T)^m d_m(A).$$

The first way to split elements of $LT_{\mathbb{N}}(R)$ yields the Lie algebra decomposition

$$\begin{aligned} &LT_{\mathbb{N}}(R) = \pi_{ut}(LT_{\mathbb{N}}(R)) \oplus \pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R)), \text{ where} \\ &\pi_{ut}(LT_{\mathbb{N}}(R)) = \{A \in LT_{\mathbb{N}}(R) \mid \pi_{ut}(A) = A\}, \\ &\pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R)) = \{A \in LT_{\mathbb{N}}(R) \mid \pi_{slt}(A) = A\}. \end{aligned}$$

The second leads to

$$\begin{aligned} &LT_{\mathbb{N}}(R) = \pi_{sut}(LT_{\mathbb{N}}(R)) \oplus \pi_{lt}(LT_{\mathbb{N}}(R)), \text{ where} \\ &\pi_{sut}(LT_{\mathbb{N}}(R)) = \{A \in LT_{\mathbb{N}}(R) \mid \pi_{sut}(A) = A\}, \\ &\pi_{lt}(LT_{\mathbb{N}}(R)) = \{A \in LT_{\mathbb{N}}(R) \mid \pi_{lt}(A) = A\}. \end{aligned}$$

Inside $LT_{\mathbb{N}}(R)$ we associate a group to each of the Lie subalgebras $\pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$ and $\pi_{lt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$. Note that on $\pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$ the exponential map is well-defined and yields elements in

$$\mathcal{U}_- = \mathcal{U}_-(R) = \{\mathrm{Id} + Y \mid Y \in \pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R))\}.$$

One easily verifies that $\mathcal{U}_-$ is a group w.r.t. multiplication. We see $\mathcal{U}_-$ as the group corresponding to $\pi_{slt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$. If the exponential map is well-defined on $\pi_{lt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$, then the resulting elements belong to the group

$$\mathcal{P}_- = \mathcal{P}_-(R) = \{A = \sum_{m \leqslant 0} (S^T)^m d_m(A) \mid d_0(A) = \mathrm{diag}(d(s)), \text{ all } d(s) \in R^*\}$$

and therefore we see $\mathcal{P}_-$ as the group associated with $\pi_{lt}(LT_{\mathbb{N}}(R))$.

2. The $k[S]$-hierarchy and its strict version

In this section we discuss the two deformations of $k[S]$ that we consider and the evolution equations we want the deformations of S to satisfy. At the first deformation each $\sum_{i \geqslant 0} k_i S^i$ in $k[S]$ is deformed into $\sum_{i \geqslant 0} k_i \mathcal{L}^i$, where $\mathcal{L} \in LT_{\mathbb{N}}(R)$ is an element of the form

$$\mathcal{L} = S + \sum_{i \leqslant 0} (S^T)^i \ell_i, \ell_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R). \tag{2.1}$$

One directly checks that any element USU^{-1}, with $U \in \mathcal{U}_-$, has this form and we call USU^{-1} a *$\mathcal{U}_-$-deformation* of S. We call U also the *dressing matrix* of USU^{-1}. At the second deformation we transform each matrix $\sum_{i\geqslant 0} k_i S^i \in k[S]$ into $\sum_{i\geqslant 0} k_i \mathcal{M}^i$, where $\mathcal{M} \in LT_{\mathbb{N}}(R)$ is an element of the form

$$\mathcal{M} = m_1 S + \sum_{i\leqslant 0} (S^T)^i m_i, m_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R), m_1 \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*. \tag{2.2}$$

Also in this case one easily verifies that any matrix PSP^{-1}, with $P \in \mathcal{P}_-$, possesses the form (2.2) and therefore it is called a $\mathcal{P}_-$*-deformation* of S. Likewise we call P also the *dressing matrix* of the deformation PSP^{-1}. Moreover, we have

Lemma 2.1. *Reversely there holds for the deformations* (2.1) *and* (2.2)

(a) Any $\mathcal{L}$ of the form (2.1) *can uniquely be written in the form $\mathcal{L} = USU^{-1}$ with $U \in \mathcal{U}_-$, i.e. $\mathcal{L}$ is a $\mathcal{U}_-$-deformation of S.*

(b) Any $\mathcal{M}$ of the form (2.2) *can be written in the form $\mathcal{M} = dUSU^{-1}d^{-1}$, where $U \in \mathcal{U}_-$ is unique and $d \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*$ is determined up to a factor from $i_1(R^*)$. In particular, $\mathcal{M}$ is a $\mathcal{P}_-$-deformation of S.*

P r o o f. We start with a proof of statement (a). So, given an $\mathcal{L}$ of the form (2.1), we have to find an $U = \mathrm{Id} + \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^j u_j, u_j \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$, such that $\mathcal{L}U = US$. For any $U \in \mathcal{U}_-$ the matrix $\mathcal{L}U - US$ has no strict positive diagonals. So, it suffices to show that for all $n \geqslant 0$ the equations

$$d_{-k}(\mathcal{L}U) = d_{-k}(US), 0 \leqslant k \leqslant n,$$

determine the $\{u_1, \cdots, u_{n+1}\}$ uniquely. Hereby we use the relations in (1.2) and the following two relations between S, S^T and the diagonal matrices:

$$S^T \mathrm{diag}(d(s)) S = S^T S \ \mathrm{diag}(1, d(0), d(1), \cdots) = \ \mathrm{diag}(0, d(0), d(1), \cdots), \tag{2.3}$$

$$\mathrm{diag}(d(s)) S^T = S^T \mathrm{diag}(d(s+1)). \tag{2.4}$$

By applying (2.3) one gets for US the expression

$$\begin{aligned} US &= S + \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^j u_j S = S + \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^j S \ \mathrm{diag}(1, u_j(0), u_j(1), \cdots) \\ &= S + \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^{j-1} \ \mathrm{diag}(0, u_j(0), u_j(1), \cdots). \end{aligned}$$

From this expression we conclude for each $n \geqslant 0$ that

$$d_{-n}(US) = \ \mathrm{diag}(0, u_{n+1}(0), u_{n+1}(1), \cdots). \tag{2.5}$$

Now we apply the first relation in (1.2) and repeatedly relation (2.4) to the product $\mathcal{L}U$ and get

$$\begin{aligned} \mathcal{L}U &= S + \sum_{i\geqslant 0} (S^T)^i \ell_i + S \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^j u_j + \sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ j \geqslant 1}} (S^T)^i \ell_i (S^T)^j u_j \\ &= S + \sum_{i\geqslant 0} (S^T)^i \ell_i + \sum_{j\geqslant 1} (S^T)^{j-1} u_j + \sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ j \geqslant 1}} (S^T)^{i+j} \ \mathrm{diag}(\ell_i(s+j)) u_j. \end{aligned}$$

Thus we get $d_0(\mathcal{L}U) = \ell_0 + u_1$ and for the remaining diagonal components of $\mathcal{L}U$

$$d_{-n}(\mathcal{L}U) = \ell_n + u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{diag}(\ell_{k-1}(s+n+1-k))u_{n+1-k}, n \geqslant 1. \tag{2.6}$$

The equality $d_0(\mathcal{L}U) = d_0(US)$ is in terms of the diagonal components of $\mathcal{L}$ and U the identity

$$\ell_0 + u_1 = \operatorname{diag}(0, u_1(0), u_1(1), \cdots).$$

The $(0,0)$-entry of this matrix identity yields $u_1(0) = -\ell_0(0)$, the $(1,1)$-entry gives $u_1(1) = u_1(0) - \ell_0(1)$ and continuing in this fashion, one gets that any $u_1(s)$ is a linear combination of the matrix coefficients of ℓ_0. By induction w.r.t. n we may assume that the equations

$$d_{-k}(\mathcal{L}U) = d_{-k}(US), 0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

determine the $\{u_1, \cdots, u_n\}$ and each $u_k(s), s \in \mathbb{N}$ and $, 0 \leqslant k \leqslant n-1$, is a polynomial expression in the matrix coefficients of the $\{\ell_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. By combining the expressions (2.5) and (2.6) we get for $n \geqslant 1$ from $d_{-n}(US) = d_{-n}(\mathcal{L}U)$ the relation

$$u_{n+1} = \operatorname{diag}(0, u_{n+1}(0), u_{n+1}(1), \cdots) - \ell_n - \sum_{k=1}^{n} \operatorname{diag}(\ell_{k-1}(s+n+1-k))u_{n+1-k}.$$

Again we look successively at the diagonal entries of this matrix identity, starting with the $(0,0)$-entry and recalling that all $u_{n+1-k}(s)$ are known. This yields us

$$u_{n+1}(0) = -\ell_n(0) - \sum_{k=1}^{n} \ell_{k-1}(n+1-k)u_{n+1-k}(0).$$

Next we consider the $(1,1)$-entry and that gives us

$$u_{n+1}(1) = u_{n+1}(0) - \ell_n(1) - \sum_{k=1}^{n} \ell_{k-1}(n+2-k)u_{n+1-k}(1).$$

Continuing in this fashion, one gets that any $u_{n+1}(s)$ is a polynomial expression in the matrix coefficients of $\ell_0, \cdots, \ell_n$. This proves the claim in item (a).

The proof of statement (b) can be reduced to that of (a) by the following observation: take an arbitrary element $k \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$ and an $d = \operatorname{diag}(d(s)) \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*$. Then there holds $d^{-1}kSd = \operatorname{diag}(\frac{d(s+1)}{d(s)})kS$. Given any $\mathcal{M}$ of the form (2.2), choose a $d \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*$ such that for all $s \in \mathbb{N}$ the element $\frac{d(s+1)}{d(s)}$ equals $m_1(s)^{-1}$. Then the matrix $d^{-1}\mathcal{M}d$ has the form (2.1) and, hence there is a unique $U \in \mathcal{U}_-$ such that $d^{-1}\mathcal{M}d = USU^{-1}$. Then $\mathcal{M}$ equals PSP^{-1} with $P = dU \in \mathcal{P}_-$. In this case d is not unique, because any element $i_1(a)$, with $a \in R^*$, is in the center of $LT_{\mathbb{N}}(R)$ and there also holds $\mathcal{M} = i_1(a)dUSU^{-1}d^{-1}i_1(a^{-1})$. $\square$

Next we discuss the evolution equations that an $\mathcal{U}_-$-deformation $\mathcal{L}$ of S has to satisfy and those for a $\mathcal{P}_-$-deformation $\mathcal{M}$ of S. Hereby each $S^i, i \geqslant 1$, is seen as an infinitesimal generator of a flow. In that light we assume in both cases that R is equipped with a set of commuting k-linear derivations $\{\partial_i : R \to R \mid i \geqslant 1\}$, where each ∂_i should be seen as an algebraic substitute for the derivative w.r.t. the flow parameter corresponding to the flow generated by each S^i. By letting each ∂_i act coefficient wise on matrices in $LT_{\mathbb{N}}(R)$, we get a set of derivations of $LT_{\mathbb{N}}(R)$, also denoted by $\{\partial_i\}$. The data $(R, \{\partial_i \mid i \geqslant 1\})$ we call a *setting* for both deformations.

For each $\mathcal{U}_-$-deformation $\mathcal{L}$ of S and all $i \geqslant 1$ we consider the cut-off's

$$\mathcal{B}_i(S) := \pi_{ut}(\mathcal{L}^i). \tag{2.7}$$

Note that, since all $\{\mathcal{L}^i\}$ commute, the $\{\mathcal{B}_i(S) \mid i \geqslant 1\}$ satisfy for all $m \geqslant 1$

$$[\mathcal{B}_i(S), \mathcal{L}^m] = -[\pi_{slt}(\mathcal{L}^i), \mathcal{L}^m],$$

where the right hand side is of degree $m-1$ or lower, like $\partial_i(\mathcal{L})$. This shows that it makes sense to unite the following set of Lax equations for the $\mathcal{L}^m$ in one combined system, the so-called $k[S]$-hierarchy:

$$\partial_i(\mathcal{L}^m) = [\mathcal{B}_i(S), \mathcal{L}^m] = -[\pi_{slt}(\mathcal{L}^i), \mathcal{L}^m]. \tag{2.8}$$

It suffices to prove the equations just for $m = 1$. For, since ∂_i and $\mathrm{ad}(\mathcal{B}_i(S))$ are both k-linear derivations of $LT_{\mathbb{N}}(R)$, all basis elements $\{\mathcal{L}^m \mid m \geqslant 1\}$ of the deformation $k[\mathcal{L}]$ of $k[S]$ satisfy the same Lax equations. The equations (2.8) itself are called the *Lax equations of the $k[S]$-hierarchy*. Note that the Lax equations (2.8) show that the action of each ∂_i on the coefficients of $\mathcal{L}$ expresses each of them in a polynomial expression of the coefficients of $\mathcal{L}$. Any $\mathcal{U}_-$-deformation $\mathcal{L}$ of S in $LT_{\mathbb{N}}(R)$ that satisfies all the equations (2.8), $i \geqslant 1$, is called a *solution* of the $k[S]$-hierarchy in the setting $(R, \{\partial_i\})$. Note that in each setting there is at least one solution of the $k[S]$-hierarchy, namely $\mathcal{L} = S$, the *trivial solution* of the $k[S]$-hierarchy. We can express the conditions when a $\mathcal{U}_-$-deformation $\mathcal{L} = USU^{-1}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy, in terms of U. For there holds

Lemma 2.2. *Any $\mathcal{L} = USU^{-1}$, with $U \in \mathcal{U}_-$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy, if and only if U satisfies the relations: for all $i \geqslant 1$*

$$\partial_i(U)U^{-1} = -\pi_{slt}(\mathcal{L}^i). \tag{2.9}$$

P r o o f. Since $\partial_i(U^{-1}) = -U^{-1}\partial_i(U)U^{-1}$, we get for $\mathcal{L} = USU^{-1}$ that

$$\partial_i(\mathcal{L}) = [\partial_i(U)U^{-1}, \mathcal{L}].$$

If U satisfies (2.9), then $[-\pi_{slt}(\mathcal{L}^i), \mathcal{L}] = [\mathcal{B}_i(S), \mathcal{L}]$ yields the Lax equations for $\mathcal{L}$. Reversely, if $\mathcal{L}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy, then $\partial_i(U)U^{-1} + \pi_{slt}(\mathcal{L}^i)$ commutes with $\mathcal{L}$ and thus $\hat{U} = U^{-1}(\partial_i(U)U^{-1} + \pi_{slt}(\mathcal{L}^i))U$ commutes with S. The element $\hat{U}$ only has strict negative diagonals and Lemma 1.1 implies that $\hat{U} = 0$ and this proves the claim. □

Since the relations (2.9) are the analogue of the Sato–Wilson equations for the KP hierarchy [3], we call them the *Sato–Wilson form of the $k[S]$-hierarchy*. Still another equivalent form of the $k[S]$-hierarchy was proven in [1]:

P r o p o s i t i o n 2.1. *Let $\mathcal{L}$ be a $\mathcal{U}_-$-deformation of S with the $\{\mathcal{B}_i(S)\}$ as in (2.7). If $\mathcal{L}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy, then they satisfy the zero curvature relations*

$$\partial_{i_1}(\mathcal{B}_{i_2}(S)) - \partial_{i_2}(\mathcal{B}_{i_1}(S)) - [\mathcal{B}_{i_1}(S), \mathcal{B}_{i_2}(S)] = 0. \tag{2.10}$$

Reversely, if the projections $\{\mathcal{B}_i(S)\}$ of a $\mathcal{U}_-$-deformation $\mathcal{L}$ satisfy the zero curvature relations (2.10), then $\mathcal{L}$ satisfies the Lax equations (2.8).

R e m a r k 2.1. By the equivalence in Proposition 2.1 the set of equations (2.10) is also called *the zero curvature form of the* $k[S]$ *-hierarchy*. Let $d_0(\mathcal{L}^i)$ the zero-th diagonal of $\mathcal{L}^i$, then the equations (2.10) imply that the commuting diagonal matrices $\{d_0(\mathcal{L}^i)\}$ satisfy the compatibility conditions

$$\partial_{i_1}(d_0(\mathcal{L}^{i_2})) = \partial_{i_2}(d_0(\mathcal{L}^{i_1})), \text{ for all } i_1 \geqslant 1, \text{ and } i_2 \geqslant 1.$$

Next we treat the evolution equations for the $\mathcal{P}_-$-deformations $\{\mathcal{M}^m \mid m \geqslant 1\}$. In that case we consider for each $i \geqslant 1$ the strict cut-off

$$\mathcal{C}_i(S) := \pi_{sut}(\mathcal{M}^i). \tag{2.11}$$

Since all the $\mathcal{M}^i$ commute, there holds

$$[\mathcal{C}_i(S), \mathcal{M}^m] = -[\pi_{lt}(\mathcal{M}^i), \mathcal{M}^m],$$

which shows that the $\{\mathcal{C}_i(S) \mid i \geqslant 1\}$ have the common property that the commutator with $\mathcal{M}^m$ has degree m or lower. The same holds for the matrix $\partial_i(\mathcal{M}^m)$, so it makes sense to unite the following set of Lax equations for the $\{\mathcal{M}^m\}$ in one combined system

$$\partial_i(\mathcal{M}^m) = [\mathcal{C}_i(S), \mathcal{M}^m] = -[\pi_{lt}(\mathcal{M}^i), \mathcal{M}^m]. \tag{2.12}$$

Because of the form of the $\{\mathcal{C}_i(S)\}$ and the similarity with the Lax equations (2.8) we call this system the *strict* $k[S]$ *-hierarchy*. The equations (2.12) itself are called the *Lax equations of the strict* $k[S]$ *-hierarchy*. Note that also in the strict case the Lax equations (2.12) show that the action of each ∂_i on the coefficients of $\mathcal{M}$ expresses each of them in a polynomial expression of the matrix coefficients of $\mathcal{M}$. Any $\mathcal{P}_-$-deformation $\mathcal{M}$ of S in $LT_{\mathbb{N}}(R)$ that satisfies all the equations (2.12) is called a *solution* of the strict $k[S]$-hierarchy in the setting $(R, \{\partial_i\})$. By the same argument as for the $k[S]$–case, it suffices to prove the equations (2.12) for $m = 1$, since all basis elements $\{\mathcal{M}^m \mid m \geqslant 1\}$ of the wider deformation $k[\mathcal{M}]$ of $k[S]$ satisfy the same Lax equations. Note that in each setting there is at least one solution of the strict $k[S]$-hierarchy, namely $\mathcal{M} = S$, the *trivial solution* of the strict $k[S]$-hierarchy. Also for the strict $k[S]$-hierarchy we found in [1] an equivalent zero curvature form

P r o p o s i t i o n 2.2. *Let* $\mathcal{M}$ *be a* $\mathcal{P}_-$ *-deformation of* S *with the* $\{\mathcal{C}_i(S)\}$ *as in* (2.11). *If* $\mathcal{M}$ *is a solution of the strict* $k[S]$ *-hierarchy, then the* $\{\mathcal{C}_i(S)\}$ *satisfy the zero curvature relations*

$$\partial_{i_1}(\mathcal{C}_{i_2}(S)) - \partial_{i_2}(\mathcal{C}_{i_1}(S)) - [\mathcal{C}_{i_1}(S), \mathcal{C}_{i_2}(S)] = 0. \tag{2.13}$$

On the other hand, if the projections $\{\mathcal{C}_i(S)\}$ *of a* $\mathcal{P}_-$ *-deformation* $\mathcal{M}$ *satisfy the zero curvature relations* (2.13)*, then* $\mathcal{M}$ *satisfies the Lax equations* (2.12).

To discuss a Sato–Wilson form of the strict $k[S]$-hierarchy, requires some care, for the dressing matrix of S is not unique as we saw in part (b) of Lemma 2.1, and therefore we need the following notion:

D e f i n i t i o n 2.1. Let $(R, \{\partial_i\})$ be a setting for both hierarchies. This setting is called *Cauchy solvable in dimension one*, if , given a collection of elements $\{a_i \mid i \geqslant 1\}$ in R satisfying the compatibility conditions

$$\partial_{i_1}(a_{i_2}) = \partial_{i_2}(a_{i_1}), \text{ for all } i_1 \geqslant 1 \text{ and } i_2 \geqslant 1,$$

there is an $\alpha \in R^*$ such that there holds for all $i \geqslant 1$, $\partial_i(\alpha) = a_i\alpha$.

E. g. the formal power series $k[[t_i]]$ with all the $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}$ is such a setting. Now there holds

P r o p o s i t i o n 2.3. *Let the setting $(R, \{\partial_i\})$ be Cauchy solvable in dimension one and let $\mathcal{M}$ be a $\mathcal{P}_-$-deformation that is a solution of the strict $k[S]$-hierarchy in this setting. Then there is a $P \in \mathcal{P}_-$ with $\mathcal{M} = PSP^{-1}$ such that*

$$\partial_i(P)P^{-1} = -\pi_{lt}(\mathcal{M}^i). \tag{2.14}$$

Reversely, any $\mathcal{M} = PSP^{-1}$ with P satisfying (2.14), is a solution of the strict $k[S]$-hierarchy

P r o o f. Since $\partial_i(P^{-1}) = -P^{-1}\partial_i(P)P^{-1}$, we get for $\mathcal{M} = PSP^{-1}$ that

$$\partial_i(\mathcal{M}) = [\partial_i(P)P^{-1}, \mathcal{M}].$$

If P satisfies (2.14), then $[-\pi_{lt}(\mathcal{M}^i), \mathcal{M}] = [\mathcal{C}_i(S), \mathcal{M}]$ yields the Lax equations for $\mathcal{M}$. Note that the proof of the sufficiency of equations (2.14) does not require R to be Cauchy solvable in dimension 1. This we need in the proof of the reverse statement. Assume $\mathcal{M} = PSP^{-1}$ is a solution of the strict $k[S]$-hierarchy, where $P = d^{-1}U$, with $d \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*$ and $U \in \mathcal{U}_-$ and we write . The first thing we notice is that $\partial_i(P)P^{-1} + \pi_{lt}(\mathcal{M}^i)$ commutes with $\mathcal{M}$ and thus $\hat{P} = P^{-1}(\partial_i(P)P^{-1} + \pi_{lt}(\mathcal{M}^i))P$ commutes with S. The element $\hat{P}$ only has negative diagonals and Lemma 1.1 implies that $\pi_{slt}(\hat{P}) = 0$ and the zero-th diagonal of $\hat{P}$ commutes with S. This last fact implies that the zero-th diagonal $d_0(\hat{P})$ belongs to $i_1(R)$ and that lies in the center of $LT_{\mathbb{N}}(R)$. So $P^{-1}d_0(\hat{P})P = d_0(\hat{P})$ and thus

$$P^{-1}(\pi_{slt}(\partial_i(P)P^{-1} + \pi_{lt}(\mathcal{M}^i)))P = \pi_{slt}(\hat{P}) = 0.$$

Hence $\tilde{P} = \pi_{slt}(\partial_i(P)P^{-1} + \pi_{lt}(\mathcal{M}^i)) = 0$. On the other hand we have

$$\tilde{P} = d^{-1}\partial_i(U)U^{-1}d + \pi_{slt}(\mathcal{M}^i) = d^{-1}\partial_i(U)U^{-1}d + d^{-1}\pi_{slt}(\mathcal{L}^i)d = 0,$$

so that according to Lemma 2.2 $\mathcal{L}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy. Let $d_0(\mathcal{L}^i)$ be the zero-th diagonal of $\mathcal{L}^i$. Then the $\{d_0(\mathcal{L}^i)\}$ satisfy the compatibility relations from Remark 2.1. A direct computation yields that

$$d_0(\hat{P}) = \partial_i(d^{-1})d + \ell_0(i) = \ell_0(i) - \partial_i(d)d^{-1} = i_1(a_i), \text{ with } a_i \in R.$$

Since there holds for all $i_1 \geqslant 1$ and $i_2 \geqslant 1$ that

$$\partial_{i_1}(\partial_{i_2}(d)d^{-1}) = \partial_{i_1}\partial_{i_2}(d)d^{-1} - \partial_{i_2}(d)\partial_{i_1}(d)d^{-2} = \partial_{i_2}(\partial_{i_1}(d)d^{-1}),$$

we get in total that the $\{a_i\}$ satisfy the compatibility conditions in Definition 2.1 and there is an $\alpha \in R^*$ such that for all $i \geqslant 1$, $\partial_i(\alpha)\alpha^{-1} = a_i$. Then conjugating S with $P_\alpha := i_1(\alpha^{-1})d^{-1}U$ also yields $\mathcal{M}$ and there holds $\partial_i(P_\alpha)P_\alpha^{-1} = -\pi_{lt}(\mathcal{M}^i)$ and this concludes the proof of the claims. □

We call the relations (2.14) the *Sato–Wilson equations of the strict $k[S]$-hierarchy.*

R e m a r k 2.2. From the proof of Proposition 2.3 follows that, if $P = d^{-1}U \in \mathcal{P}_-$, $\mathcal{M} = PSP^{-1}$ and $\mathcal{L} = USU^{-1}$, then P satisfies the equations (2.14), if and only if $\mathcal{L}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy and $\partial_i(d) = d_0(\mathcal{L}^i)d$, for all $i \geqslant 1$. This equivalence we meet again in the next section, but in a different form.

3. Wave matrices

Let $(R, \{\partial_i\})$ be a setting where one looks for solutions to both hierarchies. The construction from the homogeneous spaces of solutions of both hierarchies is done by producing special vectors, called wave matrices, in a suitable $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module that we briefly recall. We start with the upper triangular matrix

$$\psi_0 = \psi_0(t,S) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} t_i S^i) = \begin{pmatrix} 1 & p_1(t) & p_2(t) & \dots \\ 0 & 1 & p_1(t) & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

where t is the short hand notation for $\{t_i \mid i \geqslant 1\}$ and each $p_j(t)$ is a homogeneous polynomial of degree j in the $\{t_i \mid i \leqslant j\}$, where every t_i has degree i. Note that ψ_0 commutes with S and satisfies for all $i \geqslant 1$, $\frac{\partial}{\partial t_i}(\psi_0) = S^i \psi_0$. Recall that each ∂_i was the algebraic substitute on R for the partial derivative w.r.t. the flow parameter of S^i. Therefore we write $\partial_i(\psi_0) = \frac{\partial}{\partial t_i}(\psi_0)$. The $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module that we need consists of formal products of a perturbation factor from $LT_{\mathbb{N}}(R)$ and ψ_0. The products will be formal, for in order to make sense out of the product of a matrix from $LT_{\mathbb{N}}(R)$ and the matrix ψ_0 as a matrix requires convergence conditions and we want to give an algebraic description of the module. Consider therefore the space $\mathcal{O}(S)$ consisting of the formal products

$$\left\{ \{m(S)\}\psi_0 = \left\{ \sum_{i \geqslant 0} m_i S^i + \sum_{i<0} (S^T)^{-i} m_i \right\} \psi_0, m_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R) \right\}. \tag{3.1}$$

Addition resp. scalar multiplication are defined on $\mathcal{O}(S)$ by adding up the perturbation factors of two elements resp. by applying the scalar multiplication on the perturbation factor. Something similar is done with the $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module structure: for each $h(S) \in LT_{\mathbb{N}}(R)$ define

$$h(S).\{m(S)\}\psi_0 := \{h(S)m(S)\}\psi_0.$$

Clearly this makes $\mathcal{O}(S)$ into a free $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module with generator ψ_0. However, Besides the $LT_{\mathbb{N}}(R)$-action also each ∂_i acts on $\mathcal{O}(S)$ by the formula

$$\partial_i(\{m(S)\}\psi_0) := \left\{ \sum_{k=0}^{N} \partial_i(m_k) S^k + \sum_{k<0} (S^T)^{-k} \partial_i(m_k) + m(S) S^i \right\} \psi_0.$$

Here we impose a Leibnitz rule on the formal product. Finally there is a right hand action of S on $\mathcal{O}(S)$. Since S and ψ_0 commute, we can define it by

$$\{m(S)\}\psi_0 S := \{m(S)S\}\psi_0.$$

Analogous to the terminology in the function case, see e. g. [2], we call the elements of $\mathcal{O}(S)$ *oscillating* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-matrices*. Note that any $\psi = \hat{\psi}\psi_0 = h(S)\psi_0$ with $h(S)$ invertible is a generator of the free $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module $\mathcal{O}(S)$. Examples are the choices $h(S) \in \mathcal{P}_-$ resp. $h(S) \in \mathcal{U}_-$ in which case we call ψ an oscillating $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrix of type $\mathcal{P}_-$ resp. $\mathcal{U}_-$. With the three actions just defined we can introduce inside $LT_{\mathbb{N}}(R)$ two systems of equations leading to solutions of the two hierarchies.

For the $k[S]$-hierarchy, this system looks as follows: consider a $\mathcal{U}_-$*-deformation* $\mathcal{L}$ of S in $LT_{\mathbb{N}}(R)$ with the set of projections $\{\mathcal{B}_i(S) := \pi_{ut}(\mathcal{L}^i)\}$. The goal is now to find an oscillating $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-matrix $\psi = \{h(S)\}\psi_0$ of type $\mathcal{U}_-$ such that in $\mathcal{O}(S)$ the following set of equations holds

$$\mathcal{L}\psi = \psi S \text{ and } \partial_i(\psi) = \mathcal{B}_i(S)\psi, \text{ for all } i \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Since $\mathcal{O}(S)$ is a free $LT_{\mathbb{N}}(R)$-module with generator ψ, the first equation $\mathcal{L}\psi = \psi S$ implies $\mathcal{L}h(S) = h(S)S$ and thus $\mathcal{L} = h(S)Sh(S)^{-1}$. By Lemma 2.1 this determines $h(S)$ uniquely. The same argument allows you to translate each $\partial_i(\psi) = \mathcal{B}_i(S)\psi$ into an identity in $LT_{\mathbb{N}}(R)$:

$$\partial_i(\psi) = \{\partial_i(h(S)) + h(S)S^i\}\psi_0 = \{\partial_i(h(S))h(S)^{-1} + \mathcal{L}^i\}\psi = \mathcal{B}_i(S)\psi.$$

Thus we get that $h(S)$ satisfies the Sato–Wilson equations (2.9) and $\mathcal{L}$ is a solution of the $k[S]$-hierarchy. The system (3.2) is called the *linearization of the* $k[S]$*-hierarchy* and ψ a *wave matrix of the* $k[S]$*-hierarchy*. Note that ψ_0 is the wave matrix corresponding to the trivial solution of the $k[S]$-hierarchy, $\mathcal{L} = S$.

In the case of the strict $k[S]$-hierarchy we start with a $\mathcal{P}_-$*-deformation* $\mathcal{M}$ of S together with the projections $\{\mathcal{C}_i(S) := \pi_{sut}(\mathcal{M}^i)\}$. Now we look for an oscillating $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-matrix $\varphi = \{k(S)\}\psi_0$ of type $\mathcal{P}_-$ that satisfies in $\mathcal{O}(S)$ the following set of equations:

$$\mathcal{M}\varphi = \varphi S \text{ and } \partial_i(\varphi) = \mathcal{C}_i(S)\varphi, \text{ for all } i \geqslant 1. \tag{3.3}$$

Also φ is a generator of $\mathcal{O}(S)$ and again we can translate the equations (3.3) into identities in $LT_{\mathbb{N}}(R)$. Thus the first equation $\mathcal{M}\varphi = \varphi S$ becomes $\mathcal{M} = k(S)Sk(S)^{-1}$ and the second set of equations in (3.3) yields the Sato–Wilson equations (2.14) of the strict $k[S]$-hierarchy. In particular, $\mathcal{M}$ is a solution of that hierarchy. The system (3.3) is called the *linearization of the strict* $k[S]$*-hierarchy* and a φ satisfying this system a *wave matrix of the strict* $k[S]$*-hierarchy*. Because the second set of equations in (3.3) is a different form of those in (2.14), the conditions in Remark 2.2 translate directly to a link between wave matrices of the hierarchies under consideration.

For both hierarchies, we use in the sequel a milder property that oscillating $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices of a certain type have to satisfy, in order to become a wave matrix of that hierarchy. For a proof, see [1].

P r o p o s i t i o n 3.1. *Let* $\psi = \{h(S)\}\psi_0$ *be an oscillating* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*-matrix of type* $\mathcal{U}_-$ *in* $\mathcal{O}(S)$ *and* $\mathcal{L} = h(S)Sh(S)^{-1}$ *the corresponding potential solution of the* $k[S]$*-hierarchy. Similarly, let* $\varphi = \{k(S)\}\psi_0$ *be an oscillating* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$*-matrix of type* $\mathcal{P}_-$ *in* $\mathcal{O}(S)$ *with potential solution* $\mathcal{M} = k(S)Sk(S)^{-1}$ *of the strict version.*

(a) Assume there exists for each $i \geqslant 1$ *an element* $M_i \in \pi_{ut}(LT_{\mathbb{N}}(R))$ *such that*

$$\partial_i(\psi) = M_i\psi.$$

Then each $M_i = \pi_{ut}(\mathcal{L}^i)$ *and* ψ *is a wave matrix for the* $k[S]$*-hierarchy.*

(b) Suppose there exists for each $i \geqslant 1$ *an element* $N_i \in \pi_{sut}(LT_{\mathbb{N}}(R))$ *such that*

$$\partial_i(\varphi) = N_i\varphi.$$

Then each $N_i = \pi_{sut}(\mathcal{M}^i)$ *and* φ *is a wave matrix for the strict* $k[S]$*-hierarchy.*

R e m a r k 3.1. Since you do not meet formal products of lower triangular $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices and upper triangular $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices in real life, the only way to construct wave matrices of both hierarchies is to give an analytic framework, where you can produce well-defined products of such matrices. This is done in the next section.

4. The construction of solutions of both hierarchies

All the relevant $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices that will be produced in the sequel correspond to bounded operators acting on a separable real or complex Hilbert space. Since $k=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, we have on k a norm $|\cdot|: k\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$. The Hilbert space we will work with is a space of $1\times\mathbb{N}$ matrices. Thereto we denote, for each $n\in\mathbb{N}$, the row vector with a 1 on the n-th entry and all other entries equal to zero by $\vec{e}(n)^T$, i. e.

$$\vec{e}(n)^T=(\cdots,0,1,0,\cdots).$$

Consider now the k-linear space of $1\times\mathbb{N}$ matrices

$$H=\{\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\vec{e}(n)^T=(a_0,a_1,a_2,\cdots)\mid a_n\in k,\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2<\infty\},$$

which becomes a real or complex Hilbert space w.r.t. the inner product

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\vec{e}(n)^T\mid\sum_{n\in\mathbb{N}}b_n\vec{e}(n)^T):=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\overline{b_n},$$

depending of $k=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. The elements $\{\vec{e}(n)^T\mid n\in\mathbb{N}\}$ form by definition a Hilbert basis in H. In the sequel we need the subspaces $\{H_i, i\in\mathbb{N}\}$ of H and their orthogonal complements $H_i^{\perp}$ given by

$$H_i=\{\sum_{n\leqslant i}a_n\vec{e}(n)^T\in H\}\text{ and }H_i^{\perp}=\{\sum_{n>i}a_n\vec{e}(n)^T\in H\}.$$

Any $b\in B(H)$, the space of all bounded k-linear maps from H to itself, can be defined w.r.t. the $\{\vec{e}(n)^T\}$ by right multiplication $M_{[b]}$ with an $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrix $[b]=(b_{ij})$ i. e.

$$b(\vec{e}(j)^T)=M_{[b]}(\vec{e}(j)^T)=\vec{e}(j)^T[b]=\sum_{i\in\mathbb{N}}b_{ji}\vec{e}(i)^T.$$

This choice implies for all b_1 and $b_2\in B(H)$ that $[b_1\circ b_2]=[b_2][b_1]$. The invertible transformations in $B(H)$ are denoted by $\mathrm{GL(H)}$ and its group of matrices by $[\mathrm{GL(H)}]$.

Two decompositions of $B(H)$ play a role in the sequel. The first splits a $b\in B(H)$ as $b=u_-(b)+p_+(b)$, with the corresponding matrices

$$[u_-(b)]=\begin{pmatrix}0&0&0&\dots\\ b_{1\,0}&0&0&\dots\\ b_{2\,0}&b_{2\,1}&0&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\text{ and }[p_+(b)]=\begin{pmatrix}b_{0\,0}&b_{0\,1}&b_{0\,2}&\dots\\ 0&b_{1\,1}&b_{1\,2}&\dots\\ 0&0&b_{2\,2}&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

It gives rise to the decomposition of the Lie algebra $B(H)$ as $\mathcal{U}_-(H)\oplus\mathcal{P}_+(H)$, where

$$\mathcal{U}_-(H)=\{b\in B(H)\mid b=u_-(b)\}\text{ and }\mathcal{P}_+(H)=\{b\in B(H)\mid b=p_+(b)\}.\qquad(4.1)$$

The second decomposition consists of splitting a $b \in B(H)$ as $b = p_-(b) + u_+(b)$, where the matrices of both components are given by

$$[p_-(b)] = \begin{pmatrix} b_{0\,0} & 0 & 0 & \dots \\ b_{1\,0} & b_{1\,1} & 0 & \dots \\ b_{2\,0} & b_{2\,1} & b_{2\,2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ and } [u_+(b)] = \begin{pmatrix} 0 & b_{0\,1} & b_{0\,2} & \dots \\ 0 & 0 & b_{1\,2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

This leads to the decomposition $B(H) = \mathcal{P}_-(H) \oplus \mathcal{U}_+(H)$ of $B(H)$, where

$$\mathcal{P}_-(H) = \{b \in B(H) \mid b = p_-(b)\} \text{ and } \mathcal{U}_+(H) = \{b \in B(H) \mid b = u_+(b)\}. \tag{4.2}$$

Before we present the Lie algebra of the central group $G(\mathcal{S}_2)$ in this paper, we need some notations. We denote the space of Hilbert-Schmidt operators from H to H by $\mathcal{S}_2$. It is the two-sided ideal of compact operators in $B(H)$ such that for each $A \in \mathcal{S}_2$

$$||A||_2^2 := \text{trace}(A^* A) = \text{trace}(|A|^2) < \infty.$$

Here A^* denotes the adjoint of A. In terms of the matrix coefficients (a_{ij}) of $[A]$ the Hilbert-Schmidt condition is simply

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}|^2 < \infty. \tag{4.3}$$

The map $A \to ||A||_2$ defines the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{S}_2$, with respect to which it is complete. Consider now the subspace $B(\mathcal{S}_2)$ of $B(H)$ defined by

$$B(\mathcal{S}_2) = \{b \in B(H) \mid u_-(b) \in \mathcal{S}_2\}.$$

Consider two elements b_1 and b_2 in $B(\mathcal{S}_2)$. Since $\mathcal{S}_2$ is a two-sided ideal in $B(H)$, all $\mathcal{U}_-(H)$-components of $u_-(b_1)p_+(b_2)$, $p_+(b_1)u_-(b_2)$ and $u_-(b_1)u_-(b_2)$ belong to $\mathcal{S}_2$. Hence $b_1 b_2 \in B(\mathcal{S}_2)$ and thus $B(\mathcal{S}_2)$ is een algebra. We put on $B(\mathcal{S}_2)$ a different Banach structure than the one induced by the operator norm on $B(H)$, namely we take the Banach structure that is the direct sum of the Hilbert-Schmidt norm on $\mathcal{U}_-(\mathcal{S}_2)$ and the operator norm on $\mathcal{P}_+(H)$. The group $G(\mathcal{S}_2)$ will be the elements in $B(\mathcal{S}_2)$ that have an inverse in $B(\mathcal{S}_2)$ and is an open subset of $B(\mathcal{S}_2)$. Inside $B(\mathcal{S}_2)$ we have the two Lie subalgebras

$$\mathcal{U}_-(\mathcal{S}_2) = \{b \in B(\mathcal{S}_2) \mid b = u_-(b)\}$$

and $\mathcal{P}_+(H)$ and $B(\mathcal{S}_2)$ is equal to their direct sum. To both Lie subalgebras there corresponds a subgroup of $G(\mathcal{S}_2)$, respectively

$$U_-(\mathcal{S}_2) = \{b \in B(\mathcal{S}_2) \mid b = \text{Id} + u_-(b)\}$$

and

$$P_+(H) = \{p \in \mathcal{P}_+(H) \mid p \text{ invertible }, p^{-1} \in \mathcal{P}_+(H)\}.$$

The characterization (4.3) implies that, if we define for each $N \in \mathbb{N}$ the map $p_N : \mathcal{U}_-(\mathcal{S}_2) \to \mathcal{U}_-(\mathcal{S}_2)$ by taking the first $N+1$ rows of $p_N(u)$ equal to those of u and the remaining ones equal to zero, then we have for all $u \in \mathcal{U}_-(\mathcal{S}_2)$ that

$$\lim_{N \to \infty} p_N(u) = u. \tag{4.4}$$

The product $\Omega(\mathcal{S}_2) = U_-(\mathcal{S}_2)P_+(H)$ is called the *big cell* w.r.t. these subgroups and the splitting $\omega = \mathbf{u}_-(\omega)\mathbf{p}_+(\omega)$, with $\mathbf{u}_-(\omega) \in U_-(\mathcal{S}_2)$ and $\mathbf{p}_+(\omega) \in P_+(H)$, we call the $(\,U_-(\mathcal{S}_2),\, P_+(H)\,)$-splitting of $\Omega(\mathcal{S}_2)$ and $\mathbf{u}_-(\omega)$ is the unipotent component of this decomposition. The second decomposition of $B(H)$ induces also a different splitting of $B(\mathcal{S}_2)$ in two Lie subalgebras, namely as $\mathcal{P}_-(\mathcal{S}_2) \oplus \mathcal{U}_+(H)$, where

$$\mathcal{P}_-(\mathcal{S}_2) = \{b \in B(\mathcal{S}_2) \mid b = p_-(b)\}.$$

To each of these two Lie subalgebras we can associate subgroups of $G(\mathcal{S}_2)$. For $\mathcal{P}_-(\mathcal{S}_2)$ that will be

$$P_-(\mathcal{S}_2) = \{p \in \mathcal{P}_-(\mathcal{S}_2) \mid p \text{ invertible }, p^{-1} \in \mathcal{P}_-(\mathcal{S}_2)\}$$

and for $\mathcal{U}_+(H)$ that is $U_+(H) = \{p \in P_+(H), p = \mathrm{Id} + u_+(p)\}$. Let $D(H)$ denote the invertible diagonal transformations in $B(\mathcal{S}_2)$. Then $P_+(H) = D(H)U_+(H)$ and $P_-(\mathcal{S}_2) = U_-(\mathcal{S}_2)D(H)$ and thus $\Omega(\mathcal{S}_2)$ also equals $P_-(\mathcal{S}_2)U_+(H)$. We call the splitting $\omega = \mathbf{p}_-(\omega)\mathbf{u}_+(\omega)$, with $\mathbf{p}_-(\omega) \in P_-(\mathcal{S}_2)$ and $\mathbf{u}_+(\omega) \in U_+(H)$, the $(\,P_-(\mathcal{S}_2),\, U_+(H)\,)$-splitting of $\Omega(\mathcal{S}_2)$ and $\mathbf{p}_-(\omega)$ is called the parabolic component of this decomposition.

The next step will be the introduction of the group of commuting flows that is relevant to both hierarchies. This requires some notations. For $r > 0$, let $D_0(r)$ be the closed disc around the origin in the complex plane with radius r. As in [4], the space $\mathcal{O}(D_0(r))$ of holomorphic functions on $D_0(r)$, consists of the direct limit of the $\mathcal{O}(U)$ with U an open subset containing $D_0(r)$. On it we put the topology of uniform convergence and we consider the closed subspace $\mathcal{O}_0(D_0(r))$ of all $f \in \mathcal{O}(D_0(r))$ such that $f(0) = 0$. Now we can specify the group Γ of commuting flows in GL(H) we will work with. The matrices corresponding to the transformations in Γ are the image of the continuous map from $\mathcal{O}_0(D_0(1))$ to [GL(H)] built up from the substitution $z = S$ in an $f \in \mathcal{O}_0(D_0(1))$ and the exponential map. In concrete terms, the group of matrices of Γ can be described as follows:

$$[\Gamma] = \left\{ [\gamma] = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} t_i S^i) \mid \begin{matrix} \sum_{i=1}^{\infty} |t_i|(1+\varepsilon)^i < \infty \\ \text{for some } \varepsilon > 0 \end{matrix} \right\}. \tag{4.5}$$

Since the matrices in $[\Gamma]$ are upper triangular, Γ is a subgroup of $P_+(H)$ and hence of $G(\mathcal{S}_2)$. Therefore Γ acts by left translations on $G(\mathcal{S}_2)$. We need the following result w.r.t. this action:

P r o p o s i t i o n 4.1. *The action of Γ on $G(\mathcal{S}_2)$ satisfies: for each element $g \in G(\mathcal{S}_2)$ there exists $\gamma \in \Gamma$ such that $\gamma^{-1}g$ belongs to the big cell $\Omega(\mathcal{S}_2)$ w.r.t. $U_-(\mathcal{S}_2)$ and $P_+(H)$. The set $\mathcal{O}_0(D_0(1))(g)$ of all $f \in \mathcal{O}_0(D_0(1))$ such that $[\gamma] = \exp(f(S))$ satisfies this condition is a non-zero open part of $\mathcal{O}_0(D_0(1))$ and let $\Gamma(g)$ correspond to its image in Γ.*

P r o o f. Because of relation (4.4) it suffices to prove the statement for the elements of $G(\mathcal{S}_2)$ that decompose for some $N \in \mathbb{N}$ w.r.t the splitting $H = H_N \oplus H_N^{\perp}$ as

$$[g] = (g_{i,j}) = \begin{pmatrix} g(0,0) & g(0,1) \\ 0 & g(1,1) \end{pmatrix}, \text{ with } g(0,0) = \begin{pmatrix} g_{0,0} & \cdots & g_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,0} & \cdots & g_{N,N} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{N+1}(k)$$

$$\text{and } g(1,1) = \begin{pmatrix} g_{N+1,N+1} & \cdots & \cdots & g_{N,N+k} & \cdots \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{N+k,N+k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ invertible,}$$

since elements of this form are dense in $G(\mathcal{S}_2)$. The matrix of each element $\gamma \in \Gamma$ we split w.r.t. the same decomposition of H:

$$[\gamma] = \begin{pmatrix} \gamma_N(0,0) & \gamma(0,1) \\ 0 & \gamma(1,1) \end{pmatrix}, \text{ with } \gamma_N(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \cdots & p_N \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then the matrix of the operator $\gamma^{-1}g$ has the form

$$[g][\gamma]^{-1} = \begin{pmatrix} g(0,0)\gamma_N(0,0)^{-1} & x \\ 0 & g(1,1)\gamma(1,1)^{-1} \end{pmatrix},$$

where $x = -g(0,0)\gamma_N(0,0)^{-1}\gamma(0,1)\gamma(1,1)^{-1} + g(0,1)\gamma(1,1)^{-1}$. Hence, if we find a vector $\vec{t_N} = \{t_1, \cdots, t_N\}$ such that $g(0,0)\gamma_N(0,0)^{-1} = p_0(\vec{t_N})u_0(\vec{t_N})$ with $p_0(\vec{t_N})$ an invertible upper triangular $N+1 \times N+1$-matrix and $u_0(\vec{t_N})$ a unipotent lower triangular matrix of the same size, then we have

$$[g][\gamma]^{-1} = \begin{pmatrix} p_0(\vec{t_N}) & x \\ 0 & g(1,1)\gamma(1,1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(\vec{t_N}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_N \end{pmatrix}$$

and this is the decomposition we are looking for. Clearly, in order that we have the desired splitting of $[g][\gamma]^{-1}$ the condition

$$g(0,0)\gamma(0,0)^{-1} = p_0(\vec{t_N})u_0(\vec{t_N})$$

for the vector $\vec{t_N}$ is also necessary and by taking the inverse, one sees that it is equivalent to finding a $\vec{t_N}$ for $\gamma(0,0)h$, where $h = g(0,0)^{-1} = (h_{i,j})$, such that $\gamma(0,0)h = u(\vec{t_N})p(\vec{t_N})$ with $p(\vec{t_N})$ an invertible upper triangular $N+1 \times N+1$-matrix and $u(\vec{t_N})$ a unipotent lower triangular one. We will show by induction on N that there are N nonzero polynomials $\{q_1, \cdots, q_N\}$ such that for all $\vec{t_N}$ in the complement of the union of the zero-sets of all the $\{q_i\}$ one has the decomposition $\gamma_N(0,0)h = u(\vec{t_N})p(\vec{t_N})$. For $N = 0$, the matrix $[g]$ is upper triangular and the desired decomposition holds for all $\vec{t_N}$. Now we take $N \geqslant 1$, we split off the first row of $\gamma_N(0,0)$ as follows:

$$\gamma_N(0,0)h = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & \gamma_{N-1}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p_1 \cdots p_N \\ 0 & \mathrm{Id}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{0,0} & \cdots & h_{0,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,0} & \cdots & h_{N,N} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

and we focus for the moment on the product of the last two matrices. Since the first column of h is nonzero, the polynomial $q_N := h_{0,0} + \sum_{k=1}^{N} h_{k,0}p_k$ is nonzero. Now we work on the complement of the zero-set of q_N, so q_N is invertible. Define for all $i, 0 \leqslant i \leqslant N$, the polynomials

$\hat{h}_{0,i} = h_{0,i} + \sum_{k=1}^{N} h_{k,i} p_k$. Note that $\hat{h}_{0,0} = q_N$. Then the product of the last two matrices in (4.6) is equal to

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_{0,0} & \cdots & \cdots & \hat{h}_{0,N} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,0} & h_{N,1} & \cdots & h_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{h}_{1,0} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \tilde{h}_{N,0} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_{0,0} & \cdots & \cdots & \hat{h}_{0,N} \\ 0 & \hat{h}_{1,1} & \cdots & \hat{h}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{h}_{N,1} & \cdots & \hat{h}_{N,N} \end{pmatrix},$$

where each $\tilde{h}_{k,0} = h_{k,0} q_N^{-1}$ and all $\hat{h}_{ik}$ with $i \geqslant 1$ and $k \geqslant 1$ are defined by $\hat{h}_{ik} = h_{ik} - \tilde{h}_{i0}\hat{h}_{0k}$. Next we push the top row of the right matrix to the right

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_{0,0} & \cdots & \cdots & \hat{h}_{0,N} \\ 0 & \hat{h}_{1,1} & \cdots & \hat{h}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{h}_{N,1} & \cdots & \hat{h}_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{h}_{1,1} & \cdots & \hat{h}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{h}_{N,1} & \cdots & \hat{h}_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_{0,0} \cdots \hat{h}_{0,N} \\ 0 \quad \mathrm{Id}_N \end{pmatrix}.$$

The matrix $\begin{pmatrix} \hat{h}_{0,0} \cdots \hat{h}_{0,N} \\ 0 \quad \mathrm{Id}_N \end{pmatrix}$ at the right has determinant $\hat{h}_{0,0} = q_N \neq 0$ and will be part of $p(\vec{t}_N)$. Next we move the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \gamma_{N-1}(0,0) \end{pmatrix}$ in the product (4.6) to the right by using

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \gamma_{N-1}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \tilde{h}_{1,0} & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \tilde{h}_{N,0} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{z} & \mathrm{Id}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \gamma_{N-1}(0,0) \end{pmatrix},$$

where $\vec{z}$ is the column of length N equal to $\gamma_{N-1}(0,0)\vec{\tilde{h}}$ with $(\vec{\tilde{h}})^T = (\tilde{h}_{1,0}, \cdots, \tilde{h}_{N,0})$. The matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{z} & \mathrm{Id}_N \end{pmatrix}$ will be part of $u(\vec{t}_N)$. Thus we have reduced the case to the product

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \gamma_{N-1}(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{h}_{1,1} & \cdots & \hat{h}_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{h}_{N,1} & \cdots & \hat{h}_{N,N} \end{pmatrix},$$

where the matrix at the right has determinant $q_N^{-1} \neq 0$. The induction hypothesis gives us then the nonzero polynomials $\{q_1, \cdots, q_N\}$ so that on the complement of all their zeros we have the desired decomposition. This proves the claim in the proposition. □

Now we will construct for each $g \in G(\mathcal{S}_2)$ a solution of the $k[S]$-hierarchy and the strict $k[S]$-hierarchy. The appropriate setting in both cases is the algebra

$$R(g) = C^{\infty}(\mathcal{O}_0(D_0(1))(g), k), \tag{4.7}$$

with the derivations $\partial_i = \frac{\partial}{\partial t_i}, i \geqslant 1$. We start with the construction of the solutions of the $k[S]$-hierarchy. Then we have by definition for all $\gamma \in \Gamma(g)$ that

$$\gamma^{-1}g = \mathbf{u}_-(g,\gamma)\mathbf{p}_+(g,\gamma)^{-1} \tag{4.8}$$

and thus on the matrix level

$$[g][\gamma]^{-1} = [\mathbf{p}_+(g,\gamma)]^{-1}[\mathbf{u}_-(g,\gamma)].$$

Note that all matrix coefficients of $[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]$ and $[\mathbf{p}_+(g,\gamma)]$ belong to $R(g)$, since the map $(\mathbf{u}_-,\mathbf{p}_+) \to \mathbf{u}_-\mathbf{p}_+^{-1}$ is a diffeomorphism between $U_-(\mathcal{S}_2) \times P_+(H)$ and $\Omega(\mathcal{S}_2)$. The equation (4.8) leads to the following identity

$$\Psi(g) := [\mathbf{u}_-(g,\gamma])[\gamma] = [\mathbf{p}_+(g,\gamma)][g]. \tag{4.9}$$

Clearly $\Psi(g)$ is an oscillating matrix in $\mathcal{O}(S)$ for which the products between the different factors are real. To show that $\Psi(g)$ is a wave matrix for the $k[S]$ hierarchy it suffices to prove the property in Proposition 3.1. Thereto we compute for all $i \geqslant 1$, the matrix $\partial_i(\Psi(g))\Psi(g)^{-1}$ using both the left and the right hand side of expression (4.9). We start with the right hand side. Since for all $i \geqslant 1$, $\partial([g]) = 0$, we get

$$\partial_i(\Psi(g))\Psi(g)^{-1} = \partial_i([\mathbf{p}_+(g,\gamma)])[\mathbf{p}_+(g,\gamma)]^{-1}.$$

Now the matrix $\partial_i([\mathbf{p}_+(g,\gamma)])[\mathbf{p}_+(g,\gamma)]^{-1}$ is of the form $\sum_{r\geqslant 0} d_r S^r$ with all $d_r \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$. Next we use the left hand side of (4.9) to compute $\partial_i(\Psi(g))\Psi(g)^{-1}$. This yields

$$\begin{aligned}\partial_i(\Psi(g))\Psi(g)^{-1} &= \partial_i([\mathbf{u}_-(g,\gamma)])[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]^{-1} + [\mathbf{u}_-(g,\gamma)]\partial_i([\gamma])[\gamma]^{-1}[u_-(g,\gamma)]^{-1} \\ &= \partial_i([\mathbf{u}_-(g,\gamma)])[u_-(g,\gamma)]^{-1} + [\mathbf{u}_-(g,\gamma)]S^i[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]^{-1}.\end{aligned}$$

In this formula expression $\partial_i([\mathbf{u}_-(g,\gamma)])[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]^{-1}$ possesses only negative diagonals and $[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]S^i[\mathbf{u}_-(g,\gamma)]^{-1}$ has the form

$$\sum_{r=0}^{i} v_r S^r + \sum_{r<0}(S^T)^{-r}v_r,$$

with all $v_r \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$ and $v_i = \mathrm{Id}$. Combining this with the expression found for the right hand side gives for all $i \geqslant 1$

$$\partial_i(\Psi(g)) = (\sum_{r=0}^{i} v_r S^r)\Psi(g) = \mathcal{B}_{i,\Psi(g)}\Psi(g).$$

Thus $\Psi(g)$ satisfies the conditions in part (a) of Proposition 3.1 and hence it is a wave matrix of the $k[S]$-hierarchy. In other words, $\Psi(g)$ is a solution of the linearization of the $k[S]$-hierarchy. The corresponding solution $\mathcal{L}_g$ of the $k[S]$-hierarchy is

$$\mathcal{L}_g = [u_-(g,\gamma)]S[u_-(g,\gamma)]^{-1}. \tag{4.10}$$

Note that, since the factor $p_+(g,\gamma)^{-1}$ plays no role at the construction of $\mathcal{L}_g$, multiplying g from the right with an element of $P_+(H)$ does not affect the solution $\mathcal{L}_g$.

Secondly, we present for a $g \in G(\mathcal{S}_2)$ the construction of the solution of the strict $k[S]$-hierarchy. We proceed similarly, but now we use the $(\,P_-(\mathcal{S}_2), U_+(H)\,)$-splitting of $\Omega(\mathcal{S}_2)$. By definition we have for all $\gamma \in \Gamma(g)$ that

$$\gamma^{-1}g = \mathbf{p}_-(g,\gamma)\mathbf{u}_+(g,\gamma)^{-1} \tag{4.11}$$

and thus on the matrix level

$$[g][\gamma]^{-1} = [\mathbf{u}_+(g,\gamma)]^{-1}[\mathbf{p}_-(g,\gamma)].$$

Note that all matrix coefficients of $[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]$ and $[\mathbf{u}_+(g,\gamma)]$ belong to $R(g)$, since the map $(\mathbf{p}_-,\mathbf{u}_+) \to \mathbf{p}_-\mathbf{u}_+^{-1}$ is a diffeomorphism between $P_-(\mathcal{S}_2) \times U_+(H)$ and $\Omega(\mathcal{S}_2)$. The equation (4.11) leads to the following identity

$$\Phi(g) := [\mathbf{p}_-(g,\gamma][\gamma] = [\mathbf{u}_+(g,\gamma)][g]. \tag{4.12}$$

Clearly $\Phi(g)$ is an oscillating matrix in $\mathcal{O}(S)$ for which the products between the different factors are real. The idea is again to show that $\Phi(g)$ is a wave matrix for the strict $k[S]$-hierarchy and that is done by proving property (b) in Proposition 3.1. Thereto we compute for all $i \geqslant 1$, the matrix $\partial_i(\Phi(g))\Phi(g)^{-1}$ using both the left and the right hand side of expression (4.12). We start with the right hand side. Again all the $\partial_i([g])$ are zero, hence

$$\partial_i(\Phi(g))\Phi(g)^{-1} = \partial_i([\mathbf{u}_+(g,\gamma)])[\mathbf{u}_+(g,\gamma)]^{-1}.$$

The matrix $\partial_i([u_+(g,\gamma)])[u_+(g,\gamma)]^{-1}$ has only strict positive diagonals. Thus $\partial_i(\Phi(g))\Phi(g)^{-1}$ is equal to a matrix of the form $\sum_{r\geqslant 1} u_r S^r$ with all $u_r \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$. Next we use the left hand side of (4.12) to compute $\partial_i(\Phi(g))\Phi(g)^{-1}$ once more. This yields

$$\begin{aligned}\partial_i(\Phi(g))\Phi(g)^{-1} &= \partial_i([\mathbf{p}_-(g,\gamma)])[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1} + [\mathbf{p}_-(g,\gamma)]\partial_i([\gamma])[\gamma]^{-1}[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1}\\ &= \partial_i([\mathbf{p}_-(g,\gamma)])[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1} + [\mathbf{p}_-(g,\gamma)]S^i[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1}.\end{aligned}$$

In this formula expression $\partial_i([\mathbf{p}_-(g,\gamma)])[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1}$ does not possess any strict positive diagonals and the matrix $[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]S^i[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1}$ has the form

$$\sum_{r=0}^{i} v_r S^r + \sum_{r<0} (S^T)^{-r} v_r,$$

with all $v_r \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)$ and $v_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{N}}(R)^*$. Combining this with the first expression found yields for all $i \geqslant 1$

$$\partial_i(\Phi(g)) = (\sum_{r=1}^{i} v_r S^r)\Phi(g) = \mathcal{C}_{i,\Phi(g)}\Phi(g).$$

Thus $\Phi(g)$ satisfies the conditions in part (b) of Proposition 3.1 and hence is a wave matrix of the strict $k[S]$-hierarchy. The corresponding solution $\mathcal{M}_g$ of the strict $k[S]$-hierarchy is

$$\mathcal{M}_g = [\mathbf{p}_-(g,\gamma)]S[\mathbf{p}_-(g,\gamma)]^{-1}. \tag{4.13}$$

Also here the factor $\mathbf{u}_+(g,\gamma)^{-1}$ plays no role at the construction of $\mathcal{M}_g$. Hence, multiplying g from the right with an element of $U_+(H)$ does not affect the solution $\mathcal{M}_g$. For completeness we resume the foregoing results in a

Theorem 4.1. *Let g be an element in the group $G(\mathcal{S}_2)$.*

(a) For any γ in $\Gamma(g)$ let $\mathbf{u}_-(g,\gamma)$ be the unipotent component of $\gamma^{-1}g$ in the $(U_-(\mathcal{S}_2), P_+(H))$-splitting of $\Omega(\mathcal{S}_2)$. Let the oscillating matrix $\Psi(g) \in \mathcal{O}(S)$ be defined by formula (4.9). Then $\Psi(g)$ satisfies the linearization of the $k[S]$-hierarchy w.r.t. the matrix $\mathcal{L}_g$ defined by formula (4.10). The solution $\mathcal{L}_g$ of the $k[S]$-hierarchy satisfies for all $g \in G(\mathcal{S}_2)$ and all $p \in P_+(H)$ that $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_{gp}$.

(b) For any γ in $\Gamma(g)$ let $\mathbf{p}_-(g,\gamma)$ be the parabolic component of $\gamma^{-1}g$ in the $(P_-(\mathcal{S}_2), U_+(H))$-splitting of $\Omega(\mathcal{S}_2)$. Let the oscillating matrix $\Phi(g) \in \mathcal{O}(S)$ be defined by formula (4.12). Then $\Phi(g)$ satisfies the linearization of the $k[S]$-hierarchy w.r.t. the matrix $\mathcal{M}_g$ defined by formula (4.13). The solution $\mathcal{M}_g$ of the $k[S]$-hierarchy satisfies for all $g \in G(\mathcal{S}_2)$ and all $u \in U_+(H)$ that $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{gu}$.

R e m a r k 4.1. The manifolds $G(\mathcal{S}_2)/P_+(H)$ and $G(\mathcal{S}_2)/U_+(H)$ are the analogues for the $k[S]$-hierarchy and its strict version of the Grassmann manifold Gr(H) and its cover, the flag variety $\mathcal{F}_1$, used in [5] resp. [6] to construct solutions of KP resp. strict KP.

References

[1] G. F. Helminck, J. A. Weenink, “Integrable hierarchies in the $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-matrices related to powers of the shift matrix”, *Journal of Geometry and Physics*, **148** (2020), 103560.

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, “Transformation groups for soliton equations”, *Proceedings RIMS symposium on nonlinear integrable systems, World Scientific Publishers, ed. M. Jimbo, T. Miwa,*, 1983, 41–119.

[3] G. F. Helminck, J. W. van de Leur, “Darboux Transformations for the KP Hierarchy in the Segal-Wilson Setting”, *Canad. J. Math.*, **53**:2 (2001), 278–309.

[4] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press–Oxford, Oxford, 1988, 328 pp.

[5] G. Segal, G. Wilson, “Loop groups and equations of KdV type”, *Publ. Math. IHES*, **63** (1985), 1–64.

[6] Helminck G. F., Panasenko E. A.: *Geometric solutions of the strict KP hierarchy*, Theor. Math. Phys. **198** (1), 48-68 (2019).

Information about the authors

Gerard F. Helminck, Professor. Korteweg – de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, the Netherlands. E-mail: g.f.helminck@uva.nl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7022-5852

Информация об авторах

Хельминк Герард Франциск, профессор. Математический институт Кортевега – де Фриза, Университет г. Амстердам, Амстердам, Нидерланды. E-mail: g.f.helminck@uva.nl
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7022-5852

Jeffrey A. Weenink, Post-Graduate Student. Bernoulli Institute, University of Groningen, the Netherlands. E-mail: j.a.weenink@rug.nl

Вининк Джеффри А., аспирант. Институт Бернулли, Университет г. Гронинген, Гронинген, Нидерланды. E-mail: j.a.weenink@rug.nl

There is no conflict of interests.

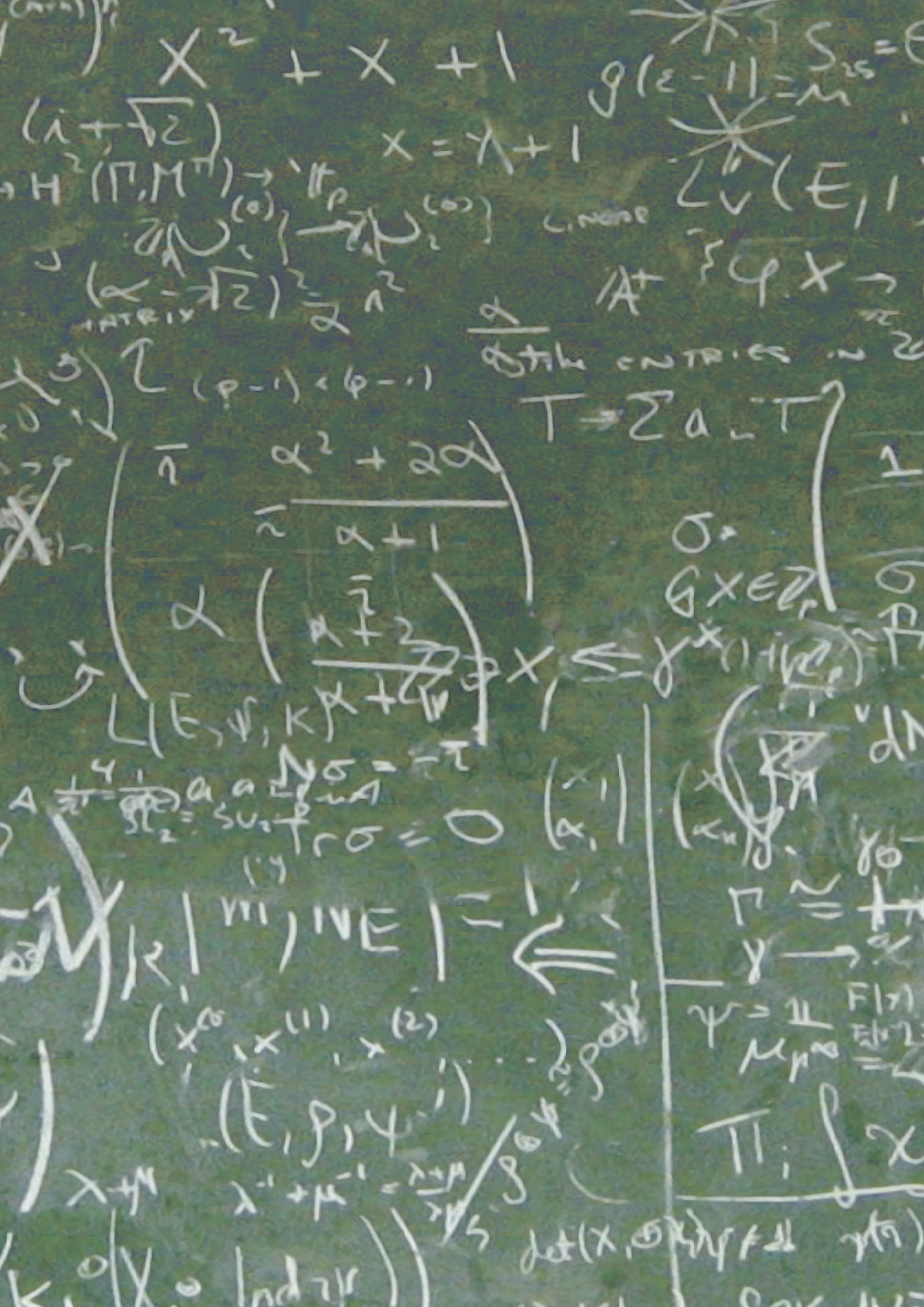
Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
Gerard F. Helminck
E-mail: g.f.helminck@uva.nl

Для контактов:
Хельминк Герард Франциск
E-mail: g.f.helminck@uva.nl

Received 17.06.2021
Reviewed 30.08.2021
Accepted for press 10.09.2021

Поступила в редакцию 17.06.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.08.2021 г.
Принята к публикации 10.09.2021 г.



X² + X + 1
x = λ + 1
ENTRIES IN
MATRIX
tr σ = 0