

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 27
№ 139
2022

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 27, № 139,
2022

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	203
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>А.В. Арутюнов, З.Т. Жуковская, С.Е. Жуковский</i>	Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения 205
<i>А.В. Богатов, А.В. Гилев, Л.С. Пулькина</i>	Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками 214
<i>И.Б. Гарипов, Р.М. Маевляев</i>	Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя 231
<i>Т.В. Жуковская, В. Мерцел</i>	Об устойчивости и непрерывной зависимости от параметра множеств точек совпадения двух отображений, действующих в пространстве с расстоянием 247
<i>Н.Д. Золотарева</i>	О новом способе получения гарантированной оценки погрешности метода Нумерова с помощью эллипсоидов 261
<i>А.С. Ланина, Е.А. Плужникова</i>	О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга 270
<i>Р.А. Хачатрян</i>	О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала 284

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Редакторы: М.И. Филатова, М.С. Жарихина
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Бударин
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 139. – 100 с. – <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139>

Подписано в печать 20.09.2022. Дата выхода в свет 07.10.2022

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 12,5. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 22458. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

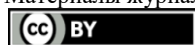
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Материалы журнала доступны по лицензии [Creative Commons Attribution \(«Атрибуция»\) 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) Всемирная



© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2022

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2022

При перепечатке, при цитировании материалов, в том числе в электронных СМИ, ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 27, no. 139,
2022**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences)"

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>A.V. Arutyunov, Z.T. Zhukovskaya, S.E. Zhukovskiy</i>	Antiperiodic boundary value problem for an implicit ordinary differential equation	205
<i>A.V. Bogatov, A.V. Gilev, L.S. Pulkina</i>	A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics	214
<i>I.B. Garipov, R.M. Mavlyaviev</i>	Non-local problem with an integral condition for a parabolic equation with a Bessel operator	231
<i>T.V. Zhukovskaia, W. Merchela</i>	On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance	247
<i>N.D. Zolotareva</i>	On a new method for obtaining a guaranteed error estimate for Numerov's method using ellipsoids	261
<i>A.S. Lanina, E.A. Pluzhnikova</i>	On properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain	270
<i>R.A. Khachatryan</i>	On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional	284

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Lobo Pereira, Fernando (Porto, Portuguese Republic), Dr., Prof. Ponosov, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372
Distribution territory: Russian Federation, foreign countries

Editors: M.I. Filatova, M.S. Zharikhina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

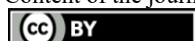
For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. – 2022. – Vol. 27, no. 139. – 100 p. – <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139>

Signed for printing 20.09.2022. Release date 07.10.2022
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 12,5. Conv. pr. sheet 11,6. Copies printed 1000. Order no. 22458. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

Content of the journal is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



© Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213

УДК 517.927.4



Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения

Арам Владимирович АРУТЮНОВ, Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ,
Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В статье исследуется антипериодическая краевая задача для неявного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) + x(\tau) = 0.$$

Предполагается, что отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, определяющее рассматриваемое уравнение, является гладким и удовлетворяет условию равномерной невырожденности первой производной

$$\inf \{ \text{cov} f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0.$$

Здесь $\text{cov} A$ — константа Банаха линейного оператора A . Предположение равномерной невырожденности выполняется, в частности, для отображения f , определяющего нормальное обыкновенное дифференциальное уравнение. Для неявных уравнений получены достаточные условия существования решения антипериодической краевой задачи и найдены оценки решений. Сформулированы следствия для нормальных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для доказательства основного результата исходное неявное уравнение сводится к нормальному дифференциальному уравнению за счет применения нелокальной теоремы о неявной функции. Затем в работе доказывается вспомогательное утверждение о разрешимости уравнения $x + \psi(x) = 0$, представляющее собой аналог теоремы Брауэра о неподвижной точке. Показывается, что отображение ψ , ставящее произвольной начальной точке x_0 значение решения задачи Коши в точке τ , корректно определено и удовлетворяет предположениям вспомогательного утверждения, что доказывает существование решения исходной краевой задачи.

Ключевые слова: антипериодическая краевая задача, неявное ОДУ, теорема о неявной функции

Благодарности: Результаты § 2 и 3 получены первым автором при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131). Результаты § 1 и 4 получены вторым и третьим авторами при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

Для цитирования: Арутюнов А.В., Жуковская З.Т., Жуковский С.Е. Антипериодическая краевая задача для неявного обыкновенного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 205–213. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213.

© A. V. Arutyunov, Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213



Antiperiodic boundary value problem for an implicit ordinary differential equation

Aram V. ARUTYUNOV, Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The paper is devoted to the investigation of the antiperiodic boundary value problem for an implicit nonlinear ordinary differential equation

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(0) + x(\tau) = 0.$$

We assume that the mapping $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ defining the equation under consideration is smooth and satisfies the condition of uniform nondegeneracy of the first derivative

$$\inf \{ \text{cov} f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0.$$

Here $\text{cov} A$ is the Banach constant of the linear operator A . The assumption of uniform nondegeneracy holds, in particular, for the mapping f defining an explicit ordinary differential equation. For implicit equations, sufficient conditions for the existence of a solution to an antiperiodic boundary value problem are obtained, and estimates for solutions are found. Corollaries for normal ordinary differential equations are formulated. To prove the main result, the original implicit equation is reduced to an explicit differential equation by applying a nonlocal implicit function theorem. Then we prove an auxiliary assertion on the solvability of the equation $x + \psi(x) = 0$, which is an analog of Brouwer's fixed point theorem. It is shown that the mapping ψ , that assigns the value of the solution of the Cauchy problem at the point τ to an arbitrary initial point x_0 , is well defined and satisfies the assumptions of the auxiliary statement. This reasoning completes the proof of the existence of a solution to the boundary value problem.

Keywords: antiperiodic boundary value problem, implicit ordinary differential equation, implicit function theorem

Acknowledgements: The results in Sections 2 and 3 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project no. 20-11-20131). The results in Sections 1 and 4 are due to the second and the third authors who were supported by the Russian Science Foundation (Project no. 22-11-00042, <https://rscf.ru/project/22-11-00042/>).

Mathematics Subject Classification: 34B15.

For citation: Arutyunov A.V., Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E., Antiperiodicheskaya krayevaya zadacha dlya neyavnogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya [Antiperiodic boundary value problem for an implicit ordinary differential equation]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 205–213. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-205-213. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса разрешимости антипериодической краевой задачи для неявного обыкновенного дифференциального уравнения. Один из подходов к исследованию задачи Коши для такого уравнения предполагает применение теории накрывающих отображений. Первой работой, посвященной применению накрывающих отображений к исследованию неявных дифференциальных уравнений, является статья [1]. В [2] исследованы свойства гладких накрывающих отображений и получены нелокальные теоремы о неявной функции. В настоящей работе мы применим нелокальную теорему о неявной функции из [2] для доказательства существования решения антипериодической краевой задачи для неявного обыкновенного дифференциального уравнения и получим априорные оценки решений. Основной результат работы остается содержательным и для нормальных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи и основной результат

Прежде чем перейти к постановке задачи, введем используемые обозначения.

Через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n -мерное арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Обозначим через $B^n(x, r)$ замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле радиуса $r \geq 0$, т.е.

$$B^n(x, r) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u - x| \leq r\}.$$

Для числа $t \in \mathbb{R}$ и определенной в окрестности этой точки дифференцируемой функции x через $\dot{x}(t)$ обозначим производную функции x в точке t . Для произвольного линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ положим

$$\text{cov} A := \max\{\alpha \geq 0 : B^k(0, \alpha) \subset AB^n(0, 1)\}.$$

Очевидно, что $\text{cov} A > 0$ тогда и только тогда, когда оператор A сюръективен. Известно (см., например, [2]), что функция cov непрерывна.

Пусть заданы непрерывное отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ и число $\tau > 0$. Рассмотрим антипериодическую краевую задачу для неявного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} f(t, x, \dot{x}) &= 0, \quad t \in [0, \tau], \\ x(0) + x(\tau) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Будем говорить, что непрерывно дифференцируемая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$, является решением задачи (1.1), если

$$[0, \tau] \subset I, \quad f(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau]$$

и

$$x(0) + x(\tau) = 0.$$

Цель настоящей работы состоит в получении достаточных условий существования решения задачи (1.1). Основной результат работы состоит в следующем.

Пусть заданы числа $R \geq 0$, $\varepsilon > 0$ и непрерывно дифференцируемая функция $y : (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

$$y(0) + y(\tau) = 0. \tag{1.2}$$

Положим

$$w(t) := \max_{x \in B^n(y(t), R)} |f(t, x, \dot{y}(t))|, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.3)$$

Очевидно, что функция w непрерывна.

Теорема 1.1. *Предположим, что*

- (i) *отображение f дважды непрерывно дифференцируемо;*
- (ii) $\alpha := \inf \{ \text{cov } f'_v(t, x, v) : (t, x, v) \in (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \} > 0;$
- (iii) *функция $y(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет соотношению (1.2).*

Тогда если выполняется соотношение

$$\frac{3}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \leq R, \quad (1.4)$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (1.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (1.5)$$

2. Обсуждение

Пусть задано непрерывное отображение $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим антипериодическую краевую задачу для нормального обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(t, x), \quad t \in [0, \tau], \\ x(0) + x(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Положим

$$w_0(t) := \max_{x \in B^n(y(t), R)} |\dot{y}(t) - g(t, x)|, \quad t \in [0, \tau]. \quad (2.2)$$

Очевидно, что функция w_0 непрерывна. Из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Предположим, что отображение g дважды непрерывно дифференцируемо, функция $y(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема. Тогда, если для определенной равенством (2.2) функции w_0 выполняется соотношение*

$$\frac{3}{2} \int_0^\tau w_0(t) dt \leq R,$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (2.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \int_0^\tau w_0(t) dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $k := n$, $f(t, x, v) := v - g(t, x)$. Очевидно, что для этого отображения $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполняются все предположения теоремы 1.1. В частности, $w(t) \equiv w_0(t)$ и $\alpha = 1$. Поэтому существование решения задачи (2.1) вытекает из теоремы 1.1. $\square$

Следствие 2.2. *Предположим, что отображение g дважды непрерывно дифференцируемо. Тогда если выполняется соотношение*

$$\frac{3}{2} \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt \leq R, \quad (2.3)$$

то существует решение $\bar{x}(\cdot)$ задачи (2.1) такое, что имеют место соотношения

$$|\bar{x}(t)| \leq R \quad \forall t \in [0, \tau] \quad \text{и} \quad |\bar{x}(0)| \leq \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для отображения g и функции $y(t) \equiv 0$ выполняются предположения следствия 2.1 при $w_0(t) \equiv \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)|$. Поэтому существование решения задачи (2.1) вытекает из следствия 2.1. $\square$

Отметим, что для произвольной гладкой функции g и произвольного фиксированного $R > 0$ неравенство (2.3) выполняется при любом достаточно малом $\tau > 0$, поскольку функция $\tau \mapsto \frac{3}{2} \int_0^\tau \max_{x \in B^n(0, R)} |g(t, x)| dt$ непрерывна и обращается в нуль при $\tau = 0$. Поэтому решение задачи (2.1) существует при любом достаточно малом $\tau > 0$. Отметим также, что из приводимого далее доказательства теоремы 1.1 следует, что предположение гладкости в следствии 2.2 можно ослабить, потребовав непрерывности отображения g и непрерывной дифференцируемости g по x .

3. Вспомогательные утверждения

Далее при доказательстве теоремы 1.1 наряду с классическими теоремами о свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений и теоремами о неподвижных точках будет использоваться глобальная теорема о неявной функции из [2]. Напомним её.

Теорема 3.1. (см. [2, теорема 5]) Пусть задано натуральное s , открытое непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^s$ и дважды непрерывно дифференцируемое отображение $F : \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$. Если

$$\alpha := \inf \{ \text{cov} F'_v(v, \sigma) > 0 : v \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma \in \Sigma \} > 0,$$

то существует непрерывно дифференцируемое отображение $G : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$F(G(\sigma), \sigma) = 0, \quad |G(\sigma)| \leq \frac{|F(0, \sigma)|}{\alpha} \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Наряду с нелокальной теоремой о неявной функции, ниже будет использоваться следующее утверждение о разрешимости нелинейных абстрактных уравнения, эквивалентное теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [3, §1.6]).

Теорема 3.2. Пусть заданы число $r \geq 0$ и непрерывное отображение $\psi: B^n(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$|\psi(x) - x| \leq 2r \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : |x| = r. \quad (3.1)$$

Тогда существует точка $\hat{x} \in B^n(0, r)$ такая, что $\psi(\hat{x}) = -\hat{x}$.

Доказательство. Положим

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}.$$

Если $\psi(\hat{x}) = -\hat{x}$ для некоторого $x \in S$, то предложение доказано. Рассмотрим теперь случай $\psi(x) \neq -x \quad \forall x \in S$.

Покажем, что для любого $x \in S$ векторы x и $-\psi(x) - x$ не являются сонаправленными, т.е., что $\lambda x \neq -\psi(x) - x$ для любого $\lambda > 0$. Для $x \in S$ и $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |\lambda x - (-\psi(x) - x)|^2 &= |(2 + \lambda)x + (\psi(x) - x)|^2 \\ &= (2 + \lambda)^2 |x|^2 + 2(2 + \lambda) \langle x, \psi(x) - x \rangle + |\psi(x) - x|^2 \\ &\geq (2 + \lambda)^2 |x|^2 - 2(1 + \lambda) |x| |\psi(x) - x| + |\psi(x) - x|^2 \\ &= (2|x| + \lambda|x| - |\psi(x) - x|)^2 = (2r + \lambda r - |\psi(x) - x|)^2 \geq (\lambda r)^2 > 0. \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства Коши–Буняковского, последнее равенство — из включения $x \in S$, а предпоследнее неравенство из предположения (3.1). Таким образом, доказано, что $\lambda x \neq -\psi(x) - x$ для любого $\lambda > 0$.

Поскольку для любого $x \in S$ векторы x и $-\psi(x) - x$ не являются сонаправленными, то из [3, §1.6] следует, что существует точка $\hat{x} \in B^n(0, r)$ такая, что $-\psi(\hat{x}) - \hat{x} = 0$. Очевидно, эта точка является искомой. $\square$

4. Доказательство теоремы 1.1

Положим

$$\begin{aligned} F(v, \sigma) &:= f(t, x + y(t), v + \dot{y}(t)), \\ v \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma &= (t, x) \in \Sigma := (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Поскольку для отображения f выполнено предположение (ii), отображение f дважды непрерывно дифференцируемо, а функция y трижды непрерывно дифференцируема, то для F выполнены предположения теоремы 3.1. Поэтому существует непрерывно дифференцируемая функция $G: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\begin{aligned} f(t, x + y(t), \dot{y}(t) + G(t, x)) &= 0, \\ |G(t, x)| &\leq \frac{|f(t, x + y(t), \dot{y}(t))|}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.1)$$

для любых $(t, x) \in (-\varepsilon, \tau + \varepsilon) \times \mathbb{R}^n$.

Положим

$$r := \frac{1}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (4.2)$$

В силу (1.4) имеем

$$0 \leq r < R, \quad \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \leq R - r. \quad (4.3)$$

Кроме того,

$$\int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.1)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |f(t, x + y(t), \dot{y}(t))| dt \stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt. \quad (4.4)$$

Для произвольного $x_0 \in B^n(0, r)$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = G(t, x), \quad t \in [0, \tau], \quad x(0) = x_0. \quad (4.5)$$

Поскольку

$$\int_0^\tau \max_{|x-x_0| \leq R-r} |G(t, x)| dt \leq \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.4)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt \stackrel{(4.3)}{\leq} R - r,$$

то в силу [4, теорема II.4.1] существует решение $\varphi(\cdot, x_0) : [0, \tau] \rightarrow B^n(0, R)$ задачи (4.5). Из [4, теорема II.4.5] следует, что это решение единственно. Из [4, теорема II.4.11] следует, что отображение $\varphi(\tau, \cdot) : B^n(0, r) \rightarrow B^n(0, R)$ непрерывно.

Зададим отображение $\psi : B^n(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\psi(x_0) := \varphi(\tau, x_0), \quad x_0 \in B^n(0, r).$$

Это отображение непрерывно, поскольку непрерывно отображение $\varphi(\tau, \cdot)$. Кроме того,

$$|\psi(x_0) - x_0| \leq 2r \quad \forall x_0 \in B^n(0, r) : |x_0| = r,$$

поскольку

$$\begin{aligned} |\psi(x_0) - x_0| &= \left| \int_0^\tau \dot{\varphi}(t, x_0) dt \right| = \left| \int_0^\tau G(t, \varphi(t, x_0)) dt \right| \\ &\stackrel{(4.4)}{\leq} \int_0^\tau \max_{x \in B_n(0, R)} |G(t, x)| dt \stackrel{(4.2)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau w(t) dt = 2r. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 3.2 следует, что существует точка $x_0 \in B_n(0, r)$ такая, что

$$\psi(x_0) = -x_0.$$

Положим $\bar{x}(t) := y(t) + \varphi(t, x_0)$, $t \in [0, \tau]$. Покажем, что $\bar{x}$ является искомым решением задачи (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) &= f(t, y(t) + \varphi(t, x_0), \dot{y}(t) + \dot{\varphi}(t, x_0)) \\ &= f\left(t, y(t) + \varphi(t, x_0), \dot{y}(t) + G(t, \varphi(t, x_0))\right) \stackrel{(4.1)}{=} 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\bar{x}(0) = y(0) + \varphi(0, x_0) = y(0) + x_0 = -y(\tau) - \psi(x_0) = -y(\tau) - \varphi(\tau, x_0) = -\bar{x}(\tau).$$

Следовательно, $\bar{x}$ является решением задачи (1.1). Кроме того,

$$|\bar{x}(0) - y(0)| = |\varphi(0, x_0)| \leq r \stackrel{(4.2)}{=} \frac{1}{2\alpha} \int_0^\tau w(t) dt;$$

$$|\bar{x}(t) - y(t)| = |\varphi(t, x_0)| \leq R.$$

Таким образом, функция $\bar{x}$ является искомой. □

References

- [1] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.: Е. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.
- [2] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:4 (2019), 452–463; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Application of methods of ordinary differential equations to global inverse function theorems”, *Differential Equations*, **55**:4 (2019), 437–448.
- [3] L. Nirenberg, *Topics in Nonlinear Functional Analysis*, American Mathematical Society, New York–London, 2001.
- [4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.: J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York–London, 1972.

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zuxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
 E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zuxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Жуковский Сергей Евгеньевич

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Corresponding author:

Sergey E. Zhukovskiy

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 28.06.2022 г.

Поступила после рецензирования 24.08.2022 г.

Принята к публикации 13.09.2022 г.

Received 28.06.2022

Reviewed 24.08.2022

Accepted for press 13.09.2022

© Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230

УДК 517.95



Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Андрей Владимирович БОГАТОВ, Антон Владимирович ГИЛЕВ,
Людмила Степановна ПУЛЬКИНА

ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»

443086, Российская Федерация, г. Самара, ул. Московское шоссе, 34

Аннотация. В статье рассмотрена нелокальная задача с интегральным условием для уравнения четвертого порядка. Доказана ее однозначная разрешимость. Доказательство единственности решения базируется на выведенных в работе априорных оценках. Для доказательства существования решения задача сведена к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка и доказана эквивалентность поставленной задачи и полученной системы задач Гурса. Одна из задач системы является классической задачей Гурса. Вторая задача представляет собой характеристическую задачу для интегро-дифференциального уравнения с нелокальным интегральным условием на одной из характеристик. К исследованию этой задачи невозможно применить известные методы обоснования разрешимости задач с условиями на характеристиках. Введение новой неизвестной функции позволило свести вторую задачу к уравнению с вполне непрерывным оператором, убедиться на основании теоремы единственности в его разрешимости и, в силу доказанной эквивалентности задач, в разрешимости поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, уравнение четвертого порядка, интегральные условия, задача Гурса, нагруженное уравнение

Для цитирования: Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 214–230. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230.

A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics

Andrei V. BOGATOV, Anton V. GILEV, Ludmila S. PULKINA

Samara National Research University

34 Moskovskoye shosse St., Samara 443086, Russian Federation

Abstract. In this article, we consider a non-local problem with an integral condition for a fourth-order equation. The unique solvability of the problem is proved. The proof of the uniqueness of a solution is based on the a priori estimates derived in the paper. To prove the existence of a solution, the problem is reduced to two Goursat problems for second-order equations, and the equivalence of the stated problem and the resulting system of Goursat problems is proved. One of the problems of the system is the classical Goursat problem. The second problem is a characteristic problem for an integro-differential equation with a non-local integral condition on one of the characteristics. It is impossible to apply the well-known methods of substantiating the solvability of problems with conditions on characteristics to the study of this problem. The introduction of a new unknown function made it possible to reduce the second problem to an equation with a completely continuous operator, to verify, on the basis of the uniqueness theorem, that it is solvable and, by virtue of the proven equivalence of the problems, that the problem posed is solvable.

Keywords: non-local problem, fourth-order equation, integral conditions, Goursat problem, loaded equation

Mathematics Subject Classification: 35G15, 45D05.

For citation: Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. Zadacha s nelokal'nym usloviyem dlya uravneniya chetvertogo poryadka s kratnymi kharakteristikami [A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В основе математических моделей многих процессов и явлений лежит уравнение четвертого порядка

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x, t),$$

которое можно интерпретировать как обобщение уравнения Буссинеска–Лява [1]. В частности, это уравнение описывает продольные колебания стержня с учетом инерции поперечных смещений элементов стержня [2]. Для этого уравнения рассматривались начально-краевые задачи [3, 4], обратные задачи [5, 6], а также нелокальные задачи [7–10] (статьи, посвященные смежным вопросам, см. в списках литературы цитируемых работ). В предлагаемой работе исследуется задача, одно из условий которой является нелокальным, что весьма затрудняет применение известных классических методов исследования разрешимости поставленной задачи. В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач обоснован необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [11]. Вскоре после выхода статей [12, 13], положивших начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [14, 15, 17], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [18–20].

В большинстве упомянутых выше работ изучены задачи для уравнений второго порядка. Предложенный в данной работе метод позволил доказать существование единственного решения задачи для уравнения четвертого порядка. Доказательство единственности решения базируется на полученных в работе априорных оценках. Для обоснования существования решения используется не совсем обычный прием, который подсказан самим уравнением: учитывая естественное условие $b(x, t) \neq 0$, рассматриваемое уравнение можно трактовать как уравнение с доминирующей производной четвертого порядка [21–23].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = f(x, t), \quad (1.1)$$

в области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, предполагая, что коэффициенты уравнения и его правая часть — достаточно гладкие функции, $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $b(x, t) \geq b_0 > 0$ в $\bar{Q}_T$, и поставим для него следующую задачу.

Задача 1. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad u_x(0, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0. \quad (1.3)$$

Под решением **задачи 1** будем понимать функцию $u \in C^2(\bar{Q}_T)$, $u_{xtt} \in C(Q_T)$, удовлетворяющую в области Q_T уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3). Будем также предполагать

выполненными условия согласования

$$\varphi(l) + \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \psi(l) + \int_0^l K(x)\psi(x)dx = 0, \quad \varphi'(0) = 0. \quad (1.4)$$

2. Эквивалентная форма задачи 1

Условие (1.3) относится к нелокальным интегральным условиям второго рода. Известно [24], что интегральные условия второго рода могут содержать в качестве внеинтегрального слагаемого как след самого искомого решения, так и его производную по направлению нормали к боковой поверхности. Для исследования нелокальных задач с интегральным условием, содержащим производную, разработан эффективный метод, позволяющий обосновать разрешимость задачи в пространстве Соболева [7, 24]. При его реализации удастся использовать многие стандартные приемы вывода априорных оценок, на которых в основном базируется доказательство как единственности, так и существования решения. Но этот метод неприменим, если внеинтегральное слагаемое не содержит производной по нормали, и исследование задач с условием такого типа, к которому принадлежит и (1.3), требует иного подхода. В [25] был предложен метод, который затем был развит в работах [26, 27]. Существенным ограничением при реализации этого метода является требование разрешимости интегрального уравнения, неизбежно порождаемого интегральным условием. Снятию этого ограничения посвящены работы [26, 27]. Заметим, что в частном случае, в случае одной пространственной переменной, эту трудность можно легко обойти с помощью приема, разработанного для уравнения второго порядка [24], позволяющего перейти от условия вида (1.3) к условию, содержащему производную по направлению нормали. Мы используем здесь этот прием для уравнения четвертого порядка (1.1), и суть его заключается в утверждении леммы, которая сейчас будет сформулирована и доказана.

Лемма 2.1. *Если $u(x, t)$ — решение задачи 1, выполняются условия согласования (1.4) и $K(l) \neq 0$, то условие (1.3) эквивалентно условию*

$$\begin{aligned} & K(l)[a(l, t)u_x(l, t) + b(l, t)u_{xtt}(l, t)] \\ &= (b(l, t)K'(l) - 1)u_{tt}(l, t) + b(l, t)K'(0)u_{tt}(0, t) - \int_0^l [(K'a)_x - Kc]udx \\ & - \int_0^l (K'b)_xu_{tt}dx + K'(l)a(l, t)u(l, t) - K'(0)a(0, t)u(0, t) - \int_0^l Kf dx. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи 1. Дифференцируя (1.3) по t и учитывая, что $u_{tt} = (au_x)_x + (b_{xtt})_x - cu + f$ в силу (1.1), получим равенство

$$u_{tt}(l, t) + \int_0^l K(x)u_{tt}(x, t)dx = u_{tt}(l, t) + \int_0^l K(x)[(au_x)_x + (b_{xtt})_x - cu + f]dx,$$

интегрируя правую часть которого, получим (2.1).

Пусть теперь $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и (2.1). Умножим равенство (1.1) на $K(x)$ и проинтегрируем по $(0, l)$, получим

$$\int_0^l K(x)u_{tt}dx - \int_0^l K(au_x)_xdx - \int_0^l K(x)(bu_{xt})_xdx + \int_0^l Kcudx = \int_0^l Kf dx.$$

Интегрируя по частям в правой части те слагаемые, которые содержат производные по пространственной переменной под знаком интеграла, и учитывая условие (2.1), получим

$$u_{tt}(l, t) + \int_0^l K(x)u_{tt}(x, t)dx = 0.$$

Представим это равенство следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx \right] = 0.$$

В силу начальных условий $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ и условий согласования (1.4) приходим к следующей задаче Коши относительно функции $u(l, t) + \int_0^l K(x)u_{tt}(x, t)dx$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left[u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx \right] &= 0, \\ u(l, 0) + \int_0^l K(x)u(x, 0)dx &= 0, \quad u_t(l, 0) + \int_0^l K(x)u_t(x, 0)dx = 0. \end{aligned}$$

Эта задача имеет единственное тривиальное решение $u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0$, а это и означает, что выполняется условие (1.3). $\square$

Утверждение доказанной леммы дает возможность вместо **задачи 1** с нелокальным условием (1.3) изучать задачу с условием (2.1), которое содержит выражение $a(l, t)u_x(l, t) + b(l, t)u_{xtt}(l, t)$. Именно присутствие этого выражения в нелокальном условии позволит получить оценку, с помощью которой в следующем разделе будет доказана единственность решения.

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и (2.1).

3. Основные результаты

Введем следующие обозначения.

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - b(l, t)K'(l), \quad k_0 = \int_0^l K^2(x)dx, \\ H(x, t) &= (K'a)_x - cK, \quad H_0 = \max_{[0, T]} \int_0^l H^2(x, t)dx. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Пусть $a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q}_T)$, $K \in C^2(0, l) \cap C^1[0, l]$. Если справедливы неравенства

$$\gamma K(l) > 0, \quad 1 - \frac{1}{K(l)} \int_0^l K^2(x) dx > 0$$

и выполняется хотя бы одно из двух условий:

$$K(x) = \text{const} > 0, \quad (3.1)$$

$$(K'b)_x = K(x), \quad K'(0) = 0, \quad (3.2)$$

то существует не более одного решения **задачи 2**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют два различных решения, $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, **задачи 2**. Пусть выполняется условие (3.1) теоремы 3.1: $K(x) = k$. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu = 0 \quad (3.3)$$

и однородным условиям

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad (3.4)$$

$$a(l, t)u_x(l, t) + b(l, t)u_{xtt}(l, t) = \int_0^l c(x, t)u(x, t)dx - \frac{1}{k}u_{tt}(l, t). \quad (3.5)$$

Умножим (3.3) на $u_t(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по прямоугольнику $Q_\tau = (0, l) \times (0, \tau)$, $\tau \in [0, T]$

$$\int_0^\tau \int_0^l [u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{xtt})_x + cu] u_t dx dt = 0.$$

Интегрируя три первых слагаемых по частям, учитывая условия (3.4), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau)] dx + \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l [a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2] dx dt + \int_0^\tau u_t(l, t) [au_x(l, t) + bu_{xtt}(l, t)] dt. \end{aligned}$$

Используя условие (3.5), преобразуем последнее слагаемое правой части:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + au_x^2(x, \tau) + bu_{xt}^2(x, \tau)] dx + \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l [a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2] dx dt - \frac{1}{k} \int_0^\tau u_t(l, t) u_{tt}(l, t) dx dt + \int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l cudx dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Поскольку $\int_0^\tau u_t(l, t)u_{tt}(l, t)dt = \frac{1}{2}u_t^2(l, \tau)$ и $k > 0$, из (3.6) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)]dx + \frac{1}{k}u_t^2(l, \tau) \\ & \leq 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt \right| + \left| \int_0^\tau \int_0^l [a_t u_x^2 + b_t u_{xt}^2] dx dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l c u dx dt \right|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для получения оценки правой части неравенства (3.7) используем неравенства Коши и Коши–Буняковского. Условия теоремы 3.1 гарантируют существование положительных чисел a_1, b_1, c_0, c_1 таких, что $|a_t| \leq a_1$, $|b_t| \leq b_1$, $|c| \leq c_0$, $\int_0^l c^2(x, t)dx \leq c_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l cuu_t dx dt \right| & \leq c_0 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2) dx dt; \\ 2 \left| \int_0^\tau u_t^2(l, t) \int_0^l c u dx dt \right| & \leq \int_0^\tau u_t^2(l, t) dt + c_1 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим интеграл, содержащий след производной, и оценим его с помощью следующего полученного в [24] неравенства

$$u^2(l, t) \leq 2l \int_0^l u_x^2(x, t)dx + \frac{2}{l} \int_0^l u^2(x, t)dx.$$

Имеем

$$\int_0^\tau u_t^2(l, t)dt \leq 2l \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u_t^2(x, t)dx dt.$$

В результате этих преобразований и оценок неравенство (3.7) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)]dx + \frac{1}{k}u_t^2(l, \tau) \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^l (a_1 u_x^2 + b_1 u_{xt}^2) dx dt + c_0 \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + u_t^2] dx dt \\ & + 2l \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u_t^2 dx dt + c_1 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из равенства $u(x, \tau) = u(x, 0) + \int_0^\tau u_t(x, t)dt = \int_0^\tau u_t(x, t)dt$ получаем

$$\int_0^l u^2(x, \tau)dx \leq \tau \int_0^\tau \int_0^l u_t^2 dx dt. \quad (3.9)$$

Обозначим $m = \min\{1, a_0, b_0\}$, $M = \max\{c_0 + c_1, c_0 + \frac{2}{l} + \tau, a_1, b_1 + 2l\}$. В силу неравенств (3.8), (3.9) имеем

$$\begin{aligned} m \int_0^l [u^2(x, \tau) + u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) + u_{xt}^2(x, \tau)] dx + \frac{1}{k} u_t^2(l, \tau) \\ \leq M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2) dx dt. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует

$$m \int_0^l [u^2(x, \tau) + u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) + u_{xt}^2(x, \tau)] dx \leq M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2) dx dt,$$

откуда в силу леммы Гронуолла (см. [28]) имеем $u(x, t) = 0$ в Q_τ . Так как $\tau \in [0, T]$ произвольно, $u(x, t) = 0$ всюду в Q_T .

Пусть теперь выполняется условие (3.2). Как и выше, предположим, что существует два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи 2. Тогда условие (2.1) для $u = u_1 - u_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} a(l, t)u_x(l, t) + b(l, t)u_{xtt}(l, t) \\ = \frac{K'(l)}{K(l)}a(l, t)u(l, t) - \frac{1}{K(l)}[\gamma u_{tt}(l, t) + \int_0^l H(x, t)u(x, t)dx + \int_0^l K u_{tt}dx]. \end{aligned}$$

Интегрирование равенства (3.3), умноженного на u_t , приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)]dx \\ + 2 \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt - \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt - \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx + \\ \frac{2}{K(l)} \int_0^\tau u_t(l, t) \left[\gamma u_{tt}(l, t) + \int_0^l H u dx + \int_0^l K u dx - K'(l)a(l, t)u(l, t) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Кроме вычислений, сделанных для случая (3.1), нам потребуются еще следующие. Учитывая условия (1.3) и (3.2), имеем

$$\int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l K u_{tt} dx dt = \int_0^\tau \int_0^l K u_t dx \int_0^l K u_{tt} dx dt.$$

Интегрирование по частям правой части этого равенства приводит к равенству

$$\int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l K u_{tt} dx dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^l K(x) u_t(x, \tau) dx \right)^2.$$

С учетом проделанных преобразований и условий теоремы перепишем (3.10) следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)] dx + \frac{\gamma}{K(l)} u_t^2(l, \tau) \\ &= \int_0^\tau \int_0^l a_t u_x^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l b_t u_{xt}^2 dx dt - \frac{2}{K(l)} \int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l H u dx dt \\ & - \frac{1}{K(l)} \left(\int_0^l K u_t(x, \tau) dx \right)^2 + \frac{K'(l)}{K(l)} \int_0^\tau a(l, t) u(l, t) u_t(l, t) dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^l [u_t^2(x, \tau) + a(x, \tau)u_x^2(x, \tau) + b(x, \tau)u_{xt}^2(x, \tau)] dx + \frac{\gamma}{K(l)} u_t^2(l, \tau) \\ & \leq \int_0^\tau \int_0^l |a_t| u_x^2 dx dt + \int_0^\tau \int_0^l |b_t| u_{xt}^2 dx dt + \left| \frac{2}{K(l)} \int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l H u dx dt \right| \\ & + \left| \frac{1}{K(l)} \left(\int_0^l K u_t(x, \tau) dx \right)^2 + \frac{K'(l)}{K(l)} \int_0^\tau a(l, t) u(l, t) u_t(l, t) dt \right| + 2 \left| \int_0^\tau \int_0^l c u u_t dx dt \right|. \end{aligned}$$

В полученном неравенстве оценим слагаемые правой части, отсутствовавшие при исследовании случая (3.1). Имеем

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_0^\tau u_t(l, t) \int_0^l H u dx dt \right| & \leq \int_0^\tau u_t^2(l, t) dt + \int_0^\tau \left(\int_0^l H u dx \right)^2 dt \\ & \leq 2l \int_0^\tau \int_0^l u_{xt}^2 dx dt + \frac{2}{l} \int_0^\tau \int_0^l u_t^2 dx dt + H_0 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dx dt; \\ \left(\int_0^l K u_t dx \right)^2 & \leq k_0 \int_0^l u_t^2(x, \tau) dx. \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы $\nu = 1 - \frac{k_0}{K(l)} > 0$, то, используя найденные оценки и неравенство (3.9), получаем

$$m \int_0^l [u^2(x, \tau) + u_t^2(x, \tau) + u_x^2(x, \tau) + u_{xt}^2(x, \tau)] dx \leq M \int_0^\tau \int_0^l [u^2 + u_t^2 + u_x^2 + u_{xt}^2] dx dt,$$

где $m = \min\{1, \nu, a_0, b_0\}$, $M = \max\{a_1, b_1, c_0 + H_0, c_0 + \tau + \frac{2}{lK(l)}\}$. Из этого неравенства, справедливого при любом $\tau \in [0, T]$, в силу леммы Гронуолла следует $u(x, t) = 0$ в Q_T , а это означает, что не может существовать более одного решения **задачи 2**. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $f \in C(Q)$, $\varphi \in C^1([0, l])$, $\psi \in C([0, l])$. Тогда при выполнении условий теоремы 3.1 решение **задачи 2** существует.

Доказательство. Доказательство существования решения начально-краевой **задачи 2** с нелокальным условием (2.1) проведем следующим образом.

1. Сведем начально-краевую **задачу 1** для уравнения четвертого порядка к двум задачам Гурса $G1, G2$ для уравнений второго порядка.
2. Покажем, что **задача 2** эквивалентна совокупности двух задач $G1$ и $G2$.
3. Докажем разрешимость задач $G1$ и $G2$.

4. Убедимся в существовании решения **задачи 2** и, в силу леммы 2.1, в существовании решения **задачи 1**.

Приступим к реализации данного плана.

1. Так как по предположению коэффициент $b(x, t)$ в $\bar{Q}_T$ не обращается в нуль, то уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$u_{xxtt} + \frac{1}{b} [(au_x)_x - u_{tt} + b_x u_{xtt} - cu] = -\frac{1}{b} f(x, t).$$

Не слишком ограничивая общность будем считать $b = \text{const}$. Тогда получим простой и удобный для дальнейших исследований вид уравнения

$$u_{xxtt} + (Au_x)_x + (Bu_t)_t + Cu = F(x, t), \quad (3.11)$$

где обозначено

$$A = \frac{a(x, t)}{b}, \quad B = -\frac{1}{b}, \quad C = -\frac{c(x, t)}{b}, \quad F(x, t) = -\frac{f(x, t)}{b}.$$

Уравнения вида (3.11) в последнее время стало принято называть уравнениями с доминирующей производной [21]. Запишем уравнение (3.11) следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[u_{xt} + \int_0^t Au_x d\tau + \int_0^x Bu_t d\xi + \int_0^t \int_0^x Cud\xi d\tau \right] = F(x, t). \quad (3.12)$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив

$$v(x, t) = u_{xt} + \int_0^t Au_x d\tau + \int_0^x Bu_t d\xi + \int_0^t \int_0^x Cud\xi d\tau.$$

Тогда, если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.11), а следовательно, и уравнению (3.12), с условиями $u_x(0, t) = 0$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, то $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению $v_{xt} = F(x, t)$ с условиями $v(0, t) = 0$, $v(x, 0) = \psi(x) + \int_0^x B\psi(\xi) d\xi = \Psi(x)$.

Таким образом, мы пришли к двум следующим задачам Гурса.

Задача G1. Найти в Q_T решение уравнения

$$v_{xt} = F(x, t),$$

удовлетворяющее условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(x, 0) = \Psi(x).$$

Задача G2. Найти в Q_T решение уравнения

$$u_{xt} + \int_0^t Au_x d\tau + \int_0^x Bu_t d\xi + \int_0^t \int_0^x Cud\xi d\tau = v(x, t), \quad (3.13)$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0. \quad (3.14)$$

2. Пусть $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению $v_{xt} = F(x, t)$ и условиям $v(0, t) = 0$, $v(x, 0) = \psi'(x) + \int_0^x B\psi(\xi)d\xi = \Psi(x)$, а $u(x, t)$ — решение уравнения (3.13). Если $u(x, t)$ удовлетворяет условиям $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(l, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0$, то $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.11) и, стало быть, уравнению (1.1), в котором учтены предположения о коэффициентах, сделанные выше. Так как мы предположили выполнение условий $v(0, t) = 0$, $v(x, 0) = \psi'(x) + \int_0^x B\psi(\xi)d\xi$, то, записав их в терминах $u(x, t)$, получим

$$\begin{aligned} u_{xt}(0, t) + \int_0^t Au_x(0, \tau)d\tau &= 0, \\ u_{xt}(x, 0) + \int_0^x Bu_t(\xi, 0)d\xi &= \psi'(x) + \int_0^x B\psi(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Интегрируя по t первое из этих соотношений, получим

$$u_x(0, t) - u_x(0, 0) + \int_0^t \int_0^\tau Au_x(0, \tau')d\tau'd\tau = 0.$$

Изменив порядок интегрирования и учтя $u_x(0, 0) = \varphi'(0) = 0$, получим равенство

$$u_x(0, t) + \int_0^t (t - \tau)A(0, \tau)u_x(0, \tau)d\tau = 0,$$

рассматривая которое как интегральное уравнение Вольтерры с ограниченным ядром $(t - \tau)A(0, \tau)$ убеждаемся в том, что оно имеет единственное решение. Таким образом, $u_x(0, t) = 0$, т. е. выполняется условие **задачи 2**.

Интегрируя по x второе из соотношений (3.15), изменив так же, как и выше порядок интегрирования и учитывая, что $u_t(0, 0) = \psi(0) = 0$, получим уравнение

$$u_t(x, 0) + \int_0^x (x - \xi)Bu_t(\xi, 0)d\xi = \psi(x) + \int_0^x (x - \xi)B\psi(\xi)d\xi. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) является уравнением Вольтерры с ограниченным ядром и поэтому имеет единственное решение, очевидно, это функция $u_t(x, 0) = \psi(x)$.

Итак, все условия **задачи 2** выполнены, и эквивалентность доказана.

3. Рассмотрим задачу G1. Общее решение уравнения $v_{xt} = F(x, t)$ имеет вид

$$v(x, t) = f(x) + g(t) + \int_0^t \int_0^x F(\xi, \tau)d\xi d\tau,$$

где $f(x)$, $g(t)$ — любые дифференцируемые функции. Учитывая условия $v(0, t) = 0$, $v(x, 0) = \Psi(x)$, получим, что решение задачи G1 единственно и определяется формулой

$$v(x, t) = \Psi(x) + \int_0^t \int_0^x F(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

Рассмотрим задачу $G2$. Она представляет собой нагруженное уравнение с нелокальным условием. Вначале преобразуем уравнение (3.13), введя новую функцию

$$V(x, t) = u_{xt}. \quad (3.17)$$

Полагаем выполненными условия согласования

$$\varphi(l) + \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Интегрируя (3.17) по соответствующей переменной и учитывая условия (3.14), чтобы выразить u_t и u_x через V , получим соотношения:

$$u_x(x, t) = \int_0^t V(x, \tau)d\tau + \varphi'(x),$$

$$u_t(x, t) + \int_0^l K(x)u_t(x, t)dx = - \int_x^l V(\xi, t)d\xi,$$

$$u(x, t) + \int_0^l K(x)u(x, t)dx = \varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi, \tau)d\xi d\tau.$$

В последнем интегральном уравнении ядро зависит лишь от одной переменной. Обозначим $\int_0^l K(x)u(x, t)dx = g(t)$. Если решение уравнения существует, то оно имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi, \tau)d\xi d\tau - g(t).$$

Найдем $g(t)$ из равенств

$$g(t) = \int_0^l K(x)u(x, t)dx = \int_0^l K(x)[\varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi, \tau)d\xi d\tau - g(t)]dx.$$

Обозначим

$$\int_0^l K(x)dx = k_0, \quad (1 + k_0)^{-1} = \kappa, \quad \int_0^x K(\xi)d\xi = \tilde{K}(x).$$

Если $k_0 \neq -1$, то

$$g(t) = \kappa \int_0^l K(x)[\varphi(x) - \varphi(l) - \int_0^t \int_x^l V(\xi, \tau)d\xi d\tau]dx.$$

Преобразовав последнее слагаемое, изменив порядок интегрирования и учтя условие согласования, получим

$$u(x, t) = \kappa \int_0^l \int_0^t \tilde{K}(x)V(x, \tau)d\tau dx - \int_x^l \int_0^t V(\xi, \tau)d\tau d\xi + \varphi(x). \quad (3.18)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что (3.18) действительно является единственным решением исследуемого интегрального уравнения.

Подставим функцию, найденную в виде (3.18), в уравнение (3.13) и получим

$$\begin{aligned} V(x, t) + \int_0^t A(x, \tau) \int_0^\tau V(x, \tau') d\tau' d\tau + \kappa \int_0^x B(\xi, t) \int_0^l \tilde{K}(\xi') V(\xi', t) d\xi' d\xi \\ - \int_0^x B(\xi, t) \int_\xi^l V(\xi', t) d\xi' d\xi - \int_0^t \int_0^x C(\xi, \tau) \int_\xi^l \int_0^\tau V(\xi', \tau') d\tau' d\xi' d\xi d\tau \\ + \kappa \int_0^t \int_0^x C(\xi, \tau) \int_0^l \int_0^\tau \tilde{K}(\xi') V(\xi', \tau') d\tau' d\xi' d\xi d\tau = \tilde{v}(x, t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где мы обозначили

$$\tilde{v}(x, t) = v(x, t) - \int_0^t A(x, \tau) \varphi'(x) d\tau - \int_0^t \int_0^x C(\xi, \tau) \varphi(\xi) d\xi d\tau.$$

Изменим во входящих в (3.19) интегралах порядок интегрирования и обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x, t, \tau) = \int_\tau^t A(x, \tau') d\tau', \quad \tilde{B}(\xi, x, t) = \tilde{K}(\xi) \int_0^x B(\xi, t) d\xi, \quad B_1(x, t) = \int_0^x B(\xi, t) d\xi, \\ C_1(x, t, \tau) = \int_\tau^t \int_0^x C(\xi, \tau') d\xi d\tau', \quad \tilde{C}(x, \xi, t, \tau) = \tilde{K}(\xi) C_1(x, t, \tau). \end{aligned}$$

После сделанных преобразований уравнение (3.19) принимает вид

$$\begin{aligned} V(x, t) + \int_0^t \tilde{A}(x, t, \tau) V(x, \tau) d\tau + \kappa \int_0^x \tilde{B}(x, \xi, t) V(\xi, t) d\xi \\ - \int_0^x B_1(\xi, t) V(\xi, t) d\xi - \int_x^l B_1(x, t) V(\xi, t) d\xi + \kappa \int_0^t \int_0^l \tilde{C}(x, \xi, t, \tau) V(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ - \int_0^t \int_0^x C_1(\xi, t, \tau) V(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_0^t \int_x^l C_1(x, t, \tau) V(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ = \tilde{v}(x, t) + \varphi(l) \int_0^t \int_0^x C(\xi, \tau) d\xi d\tau + \kappa \int_0^t \int_x^l C(\xi, \tau) \int_0^l K(\xi') \varphi(\xi') d\xi' d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Введем еще следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{B}_2(\xi, t) = \kappa \tilde{B}(\xi, t) - B_1(\xi, t), \quad \tilde{C}_2(x, \xi, t, \tau) = \kappa \tilde{C}(x, \xi, t, \tau) - \tilde{C}_1(x, \xi, t, \tau), \\ \tilde{C}_1(x, \xi, t, \tau) = \{C_1(\xi, t, \tau), \xi \leq x, C_1(x, t, \tau), x \leq \xi\}, \\ \bar{v}(x, t) = \tilde{v}(x, t) + \varphi(l) \int_0^t \int_0^x C(\xi, \tau) d\xi d\tau + \kappa \int_0^t \int_x^l C(\xi, \tau) \int_0^l K(\xi') \varphi(\xi') d\xi' d\xi d\tau, \end{aligned}$$

используя которые, представим уравнение (3.19) в виде

$$\begin{aligned} V(x, t) + \int_0^t \tilde{A}(x, t, \tau) V(x, \tau) d\tau + \int_0^x \tilde{B}_2(\xi, t) V(\xi, t) d\xi \\ - \int_x^l B_1(x, t) V(\xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \tilde{C}_2(x, \xi, t, \tau) V(\xi, \tau) d\xi d\tau = \bar{v}(x, t). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{T}V = \int_0^t \tilde{A}(x, t, \tau) V(x, \tau) d\tau + \int_0^x \tilde{B}_2(\xi, t) V(\xi, t) d\xi \\ - \int_x^l B_1(x, t) V(\xi, t) d\xi + \int_0^t \int_0^l \tilde{C}_2(x, \xi, t, \tau) V(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

и представим уравнение (3.20) в операторной форме

$$V + \mathcal{T}V = \bar{v}. \quad (3.21)$$

Это уравнение разрешимо, так как оператор $\mathcal{T}$, действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$, является вполне непрерывным (это легко проверить, учитывая условия на коэффициенты исходного уравнения и представления коэффициентов в (3.20)).

Так как однородная задача, соответствующая задаче 1, сводится описанным выше способом к однородному операторному уравнению (3.21), то из теоремы 3.1 следует, что однородное операторное уравнение имеет только тривиальные решения. Отсюда и следует разрешимость уравнения (3.19).

Итак, существует единственное решение уравнения (3.19). Так как $V(x, t) = u_{xt}$, то после преобразований с учетом введенных обозначений придем к уравнению (3.13) относительно функции $u(x, t)$. Следовательно, если $V(x, t)$ — решение (3.19), то $u(x, t)$ — решение (3.13). Покажем, что выполняются и условия (3.14). Для этого используем полученные выше соотношения между $V(x, t)$ и u . Положив в (3.18) $t = 0$, получим

$$u(x, 0) = \varphi(x) - \varphi(l) - \kappa \int_0^l K(x)\varphi(x)dx + \kappa k_0 \varphi(l).$$

Из этого соотношения, так как $\kappa = \frac{1}{1+k_0} = 1 - \frac{k_0}{1+k_0}$, в силу условий согласования следует

$$u(x, 0) = \varphi(x) - \kappa \varphi(l) - \kappa \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = \varphi(x).$$

Положив теперь в том же равенстве (3.18) $x = l$, получим

$$u(l, t) = \kappa \int_0^l \int_0^t \tilde{K}(x)V(x, \tau)dxd\tau + \varphi(l).$$

Заменим $V(x, t)$ на $u_{xt}(x, t)$, учтем обозначение $\tilde{K}(x) = \int_0^x K(\xi)d\xi$ и дважды проинтегрируем. Получим

$$u(l, t) = k_0 \kappa u(l, t) - k_0 \kappa u(l, 0) - \kappa \int_0^l K(x)u(x, t)dx + \kappa \int_0^l K(x)u(x, 0)dx + \varphi(l).$$

Так как справедливы равенства

$$1 - k_0 \kappa = \kappa, \quad u(l, 0) = \varphi(l)$$

и выполняются условия согласования

$$\varphi(l) + \int_0^l K(x)\varphi(x)dx = 0,$$

то

$$\kappa u(l, t) + \kappa \int_0^l K(x)u(x, t)dx = 0,$$

откуда сразу следует выполнение нелокального условия (1.3). $\square$

References

- [1] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, London, 1974.
- [2] J. S. Rao, *Advanced Theory of Vibration*, Wiley, New York, 1992.
- [3] A. Favini, S. A. Zagrebina, G. A. Sviridyuk, “Multipoint initial-final value problems for dynamical Sobolev-type equations in the space of noises”, *EJDE*, **2018**:128 (2018), 1–10.
- [4] А. А. Замышляева, А. В. Юзеева, “Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска-Лява”, *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование*, 2010, № 5, 23–31. [A. A. Zamyshlyayeva, A. V. Yuzeeva, “The initial-finish value problem for the Boussinesq–Löve equation”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2010, № 5, 23–31 (In Russian)].
- [5] Я. Т. Мегралиев, Ф. Х. Ализаде, “Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2017, № 2, 17–36. [Ya. T. Megraliev, F. H. Alizade, “An inverse problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-conjugate boundary and integral overdetermination conditions”, *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem. [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.]*, 2017, № 2, 17–36 (In Russian)].
- [6] Г. В. Намсараева, “Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска”, *Математические заметки СВФУ*, **21**:2 (2014), 47–59. [G. V. Namsaraeva, “Linear inverse problems for some analogues of the Boussinesq equation”, *Mathematical Notes of NEFU*, **21**:2 (2014), 47–59 (In Russian)].
- [7] L. Pulkina, “Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations”, *EJDE*, **2014**:116 (2014), 1–49.
- [8] L. S. Pulkina, A. B. Beylin, “Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar”, *EJDE*, **2019**:29 (2019), 1–9.
- [9] А. А. Алсыкова, “О разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач для некоторых аналогов уравнения Буссинеска”, *Математические заметки СВФУ*, **23**:1 (2016), 3–11. [A. A. Alsykova, “Nonlocal problems with integral conditions for Boussinesq equation”, *Mathematical Notes of NEFU*, **23**:1 (2016), 3–11 (In Russian)].
- [10] Н. С. Попов, “О разрешимости краевых задач для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида”, *Математические заметки СВФУ*, **21**:2 (2014), 69–80. [N. S. Popov, “On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudohyperbolic equations with a nonlocal integral boundary condition”, *Mathematical Notes of NEFU*, **21**:2 (2014), 69–80 (In Russian)].
- [11] Z. P. Bažant, M. Jirásek, “Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress”, *American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, **128**:11 (2002), 1119–1149.
- [12] J. R. Cannon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21**:2 (1963), 155–160.
- [13] Л. И. Камынин, “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:6 (1964), 1006–1024; англ. пер.: L. I. Kamynin, “A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **4**:6 (1964), 33–59.
- [14] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304. [N. I. Ionkin, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differ. Uravn.*, **13**:2 (1977), 294–304 (In Russian)].
- [15] А. А. Кереев, М. Х. Шхануков-Лафисhev, Р. С. Кулиев, “Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова”, *Неклассические уравнения математической физики*, Труды семинара, посвященного 60-летию проф. В. Н. Врагова (Новосибирск, 3–5 октября 2005), Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2005, 152–159. [A. A. Kerefov, M. Kh. Shkhanukov–Lafishev, R. S. Kuliev, “Boundary value problems for the loaded heat equation with nonlocal Steklov type conditions”, *Nonclassical Equations of Mathematical Physics*, Proceedings of the Seminar Dedicated to the 60th Birth Anniversary of Professor V. N. Vragov (Novosibirsk, October 3–5, 2005), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2005, 152–159 (In Russian)].

- [16] А. И. Кожанов, “Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера”, *Дифференц. уравнения*, **40**:6 (2004), 763–774; англ. пер.: A. I. Kozhanov, “On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation”, *Differ. Equ.*, **40**:6 (2004), 815–826.
- [17] Н. И. Иванчов, “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями”, *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547–564; англ. пер.: N. I. Ivanchov, “Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions”, *Differ. Equ.*, **40**:4 (2004), 591–609.
- [18] J. R. Cannon, J. van der Hoek, “The classical solution of the one-dimensional two-phase stefan problem with energy specification”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **130**:1 (1982), 385–398.
- [19] J. R. Cannon, Y. Lin, “Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations”, *Inverse Problems*, **4**:1 (1988), 35–45.
- [20] В. Л. Камынин, “Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения”, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 207–217; англ. пер.: V. L. Kamynin, “The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation”, *Math. Notes*, **94**:2 (2013), 205–213.
- [21] В. И. Жегалов, А. Н. Миронов, Е. А. Уткина, *Уравнения с доминирующей частной производной*, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, 2014, ISBN: 978-5-00019-305-1, 385 с. [V. I. Zhegalov, A. N. Mironov, E. A. Utkina, *Equations with Dominant Partial Derivative*, Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, 2014, ISBN: 978-5-00019-305-1 (In Russian), 385 pp.]
- [22] В. И. Жегалов, “Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска-Лява”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **23**:4 (2019), 771–776. [V. I. Zhegalov, “On a problem for generalized Boussinesq–Love equation”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **23**:4 (2019), 771–776 (In Russian)].
- [23] Е. А. Уткина, “О единственности решения задач с нормальными производными в граничных условиях для уравнения Буссинеска-Лява”, *Изв. вузов. Матем.*, 2017, № 7, 67–73; англ. пер.: E. A. Utkina, “On uniqueness of solution to a problems with normal derivatives in boundary conditions for the Boussinesq–Love equation”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **61**:7 (2017), 58–63.
- [24] Л. С. Пулькина, “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 4, 74–83; англ. пер.: L. S. Pul'kina, “Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:4 (2012), 62–69.
- [25] А. И. Кожанов, Л. С. Пулькина, “О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1166–1179; англ. пер.: A. I. Kozhanov, L. S. Pul'kina, “On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations”, *Differ. Equ.*, **42**:9 (2006), 1233–1246.
- [26] А. И. Кожанов, А. В. Дюжева, “Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **36** (2021), 14–28. [A. I. Kozhanov, A. V. Dyuzheva, “Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **36** (2021), 14–28 (In Russian)].
- [27] А. И. Кожанов, А. В. Дюжева, “Вторая начально-краевая задача с интегральным смещением для гиперболических и параболических уравнений второго порядка”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **25**:3 (2021), 423–434. [A. I. Kozhanov, A. V. Dyuzheva, “The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **25**:3 (2021), 423–434 (In Russian)].
- [28] Л. Гординг, *Задача Коши для гиперболических уравнений*, Издательство иностранной литературы, М., 1961. [L. Gording, *The Cauchy Problem for Hyperbolic Equations*, Foreign Literature Publishing House, Moscow, 1961 (In Russian)].

Информация об авторах

Богатов Андрей Владимирович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: andrebogato@mail.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

Гилев Антон Владимирович, аспирант, кафедра дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: toshqaaa@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6747-5826>

Пулькина Людмила Степановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева, г. Самара, Российская Федерация. E-mail: loulise@samdiff.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Пулькина Людмила Степановна
E-mail: ludmila.pulkina@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2022 г.

Поступила после рецензирования 23.08.2022 г.

Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Andrei V. Bogatov, Post-Graduate Student, Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: andrebogato@mail.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5797-1930>

Anton V. Gilev, Post-Graduate Student, Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: toshqaaa@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6747-5826>

Ludmila S. Pulkina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Differential Equations and Control Theory Department. Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: loulise@samdiff.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7947-6121>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Ludmila S. Pulkina
E-mail: ludmila.pulkina@gmail.com

Received 15.06.2022

Reviewed 23.08.2022

Accepted for press 13.09.2022

© Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246

УДК 517.956.4



Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя

Ильнур Бурханович ГАРИПОВ, Ринат Мизхатович МАВЛЯВИЕВ

ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18

Аннотация. Для параболического уравнения с оператором Бесселя

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

в прямоугольной области $0 < x < l$, $0 < t \leq T$ рассматривается краевая задача с нелокальным интегральным условием первого рода

$$\int_0^l u(x, t) x dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Эта задача сводится к эквивалентной краевой задаче со смешанными краевыми условиями первого и третьего рода. Показано, что однородная эквивалентная краевая задача имеет только тривиальное нулевое решение, а следовательно, исходная неоднородная задача не может иметь более одного решения. В этом доказательстве используется лемма Гронуолла. Затем методом спектрального анализа доказана теорема существования решения эквивалентной задачи. Это решение определяется явно в виде ряда Дини. Получены достаточные условия относительно начального условия, которые гарантируют сходимость построенного ряда в классе регулярных решений.

Ключевые слова: параболическое уравнение, оператор Бесселя, существование и единственность решения краевой задачи

Для цитирования: Гарипов И.Б., Мавлявиев Р.М. Нелокальная задача с интегральным условием для параболического уравнения с оператором Бесселя // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 231–246. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246.

© I. B. Garipov, R. M. Mavlyaviev, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246



Non-local problem with an integral condition for a parabolic equation with a Bessel operator

Ilnur B. GARIPOV, Rinat M. MAVLYAVIEV

Kazan (Volga Region) Federal University

18, Kremlyovskaya St., Kazan 420008, Russian Federation

Abstract. For the parabolic equation with the Bessel operator

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

in the rectangular domain $0 < x < l$, $0 < t \leq T$, we consider a boundary value problem with the non-local integral condition of the first kind

$$\int_0^l u(x, t) x dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

This problem is reduced to an equivalent boundary value problem with mixed boundary conditions of the first and third kind. It is shown that the homogeneous equivalent boundary value problem has only a trivial zero solution, and hence the original inhomogeneous problem cannot have more than one solution. This proof uses Gronwall's lemma. Then, by the method of spectral analysis, the existence theorem for a solution to an equivalent problem is proved. This solution is defined explicitly in the form of a Dini series. Sufficient conditions with respect to the initial condition are obtained. These conditions guarantee the convergence of the constructed series in the class of regular solutions.

Keywords: parabolic equation, Bessel operator, existence and uniqueness of a solution to a boundary value problem

Mathematics Subject Classification: 35K10, 35K20.

For citation: Garipov I.B., Mavlyaviev R.M. Nelokal'naya zadacha s integral'nym usloviyem dlya parabolicheskogo uravneniya s operatorom Besselya [Non-local problem with an integral condition for a parabolic equation with a Bessel operator]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 231–246. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-231-246. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями используют для описания различных физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения. Такие задачи возникают, например, при исследовании процессов распространения тепла [1, 2], диффузии частиц в турбулентной плазме [3], влагопереноса в капиллярно-пористых средах [4].

Одними из первых работ, посвященных исследованию задач с интегральными условиями для уравнений в частных производных параболического типа, были работы Дж. Кэннона (J.R. Cannon) [1] и Л. И. Камынина [5]. Исследования параболических задач с интегральными условиями были продолжены в работах Н. И. Ионкина [2], Н. И. Юрчука [6, 7], Л. А. Муравья и А. В. Филиновского [8, 9], А. И. Кожанова [10], А. Bouziani и S. Mesloub [11–13]. Исследования смешанных задач с интегральными условиями для уравнений гиперболического типа проводились в работах Л. С. Пулькиной [14–16], С. А. Бейлина [17], Н. В. Зайцевой [18]. В работах К. Б. Сабитова [19, 20] исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольной области с нелокальным интегральным условием.

В настоящей работе рассматривается параболическое уравнение

$$L_B u \equiv u_t - B_x u = 0,$$

с оператором Бесселя

$$B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} (x^k \frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad 0 < k < 1,$$

в прямоугольной области $G_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ координатной плоскости Oxt .

1. Постановка задачи

Обозначим $\overline{G}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$, $G_{lT} = \{(x, t) : 0 < x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ и рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{G}_T) \cap C_x^1(G_{lT}) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_T), \quad (1.1)$$

$$L_B u = 0, \quad (x, t) \in G_T, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$\int_0^l u(x, t) x dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

где $\varphi(x)$ – заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\int_0^l \varphi(x) x dx = 0. \quad (1.6)$$

Следующее утверждение позволяет заменить в рассматриваемой задаче интегральное условие (1.5) граничным условием

$$lu_x(l, t) + (k - 1)u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.7)$$

Лемма 1.1. *Если выполняется условие согласования (1.6), то задачи (1.1)–(1.5) и (1.1)–(1.4), (1.7) эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.1)–(1.5). Дифференцируя уравнение (1.5) один раз по t , получаем

$$\int_0^l u_t(x, t) x dx = 0. \quad (1.8)$$

Умножим уравнение (1.2) на x и проинтегрируем при фиксированном $t \in (0, T)$ по переменной x на промежутке от ε до $l - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. В результате получаем

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_t(x, t) x dx = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} B_x u(x, t) x dx. \quad (1.9)$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} B_x u(x, t) x dx &= \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \left(u_{xx}(x, t) + \frac{k}{x} u_x(x, t) \right) x dx = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} (xu_{xx}(x, t) + ku_x(x, t)) dx \\ &= \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} (xu_x(x, t) + (k - 1)u(x, t)) dx = \left(xu_x(x, t) + (k - 1)u(x, t) \right) \Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon}, \end{aligned}$$

из (1.9) следует

$$\int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u_t(x, t) x dx = (l - \varepsilon)u_x(l - \varepsilon, t) + (k - 1)u(l - \varepsilon, t) - \varepsilon u_x(\varepsilon, t) + (k - 1)u(\varepsilon, t).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_0^l u_t(x, t) x dx = lu_x(l, t) + (k - 1)u(l, t). \quad (1.10)$$

Таким образом, на основании (1.8),

$$lu_x(l, t) + (k - 1)u(l, t) = 0.$$

Пусть теперь $u(x, t)$ — решение задачи (1.1)–(1.4), (1.7). Из равенства (1.10) и из условия (1.7) следует, что

$$\int_0^l u_t(x, t) x dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.11)$$

Интегрируя равенство (1.11) по t , получаем

$$\int_0^l u(x, t) x dx = \text{const}(t) = c.$$

Полагая здесь $t = 0$, с учетом условия (1.3) и условия согласования (1.6), получаем $c = 0$. Следовательно, выполняется условие (1.5). $\square$

2. Единственность решения

Теорема 2.1. *Задача (1.1)–(1.6) не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (1.1)–(1.6). Тогда их разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ будет являться решением следующей однородной краевой задачи

$$v(x, t) \in C(\overline{G}_T) \cap C_x^1(G_{lT}) \cap C_{x,t}^{2,1}(G_T),$$

$$L_B v = 0, \quad (x, t) \in G_T, \quad (2.1)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.2)$$

$$v(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$\int_0^l v(x, t) x dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

Будем использовать следующее тождество

$$2xv(x, t)L_B v(x, t) = (xv^2(x, t))'_t - \left(2xv(x, t)v_x(x, t) + (k-1)v^2(x, t)\right)'_x + 2xv_x^2(x, t),$$

справедливость которого можно проверить непосредственным дифференцированием.

Поскольку функция v удовлетворяет уравнению (2.1), имеем

$$(xv^2(x, t))'_t - \left(2xv(x, t)v_x(x, t) + (k-1)v^2(x, t)\right)'_x + 2xv_x^2(x, t) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^t (xv^2(x, \tau))'_\tau d\tau dx - \int_0^l \int_0^t \left(2xv(x, \tau)v_x(x, \tau) + (k-1)v^2(x, \tau)\right)'_x d\tau dx \\ + 2 \int_0^l \int_0^t xv_x^2(x, \tau) d\tau dx = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из начального условия (2.2) следует, что

$$\int_0^l \int_0^t (xv^2(x, \tau))'_\tau d\tau dx = \int_0^l xv^2(x, t) dx.$$

Из краевых условий (2.3), (2.4) и на основании леммы 1.1 получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_0^t \left(2xv(x, \tau)v_x(x, \tau) + (k-1)v^2(x, \tau) \right)'_x d\tau dx &= \int_0^l \int_0^t \left(2xv(x, \tau)v_x(x, \tau) + (k-1)v^2(x, \tau) \right)'_x dx d\tau \\ &= \int_0^t \left(2lv(l, \tau)v_x(l, \tau) + (k-1)v^2(l, \tau) \right) d\tau = \int_0^t \left(-2(k-1)v^2(l, \tau) + (k-1)v^2(l, \tau) \right) d\tau \\ &= (1-k) \int_0^t v^2(l, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.5) принимает вид

$$\int_0^l xv^2(x, t) dx + 2 \int_0^t \int_0^l xv_x^2(x, \tau) dx = (1-k) \int_0^t v^2(l, \tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Имеем очевидные равенства

$$\begin{aligned} v^2(l, \tau) &= \frac{1}{l^2} \int_0^l \left(x^2 v^2(x, \tau) \right)'_x dx = \frac{1}{l^2} \int_0^l \left(2xv^2(x, \tau) + 2x^2 v(x, \tau)v_x(x, \tau) \right) dx \\ &= \frac{2}{l^2} \int_0^l xv^2(x, \tau) dx + \frac{2}{l^2} \int_0^l x^{\frac{3}{2}} v(x, \tau) x^{\frac{1}{2}} v_x(x, \tau) dx, \end{aligned}$$

из которых для любого $\varepsilon > 0$ следует

$$\begin{aligned} v^2(l, \tau) &\leq \frac{2}{l^2} \int_0^l xv^2(x, \tau) dx + \frac{2}{l^2} \int_0^l \left(\varepsilon xv_x^2(x, \tau) + \frac{1}{4\varepsilon} x^3 v^2(x, \tau) \right) dx \\ &= \frac{2}{l^2} \int_0^l xv^2(x, \tau) dx + \frac{2\varepsilon}{l^2} \int_0^l xv_x^2(x, \tau) dx + \frac{1}{2l^2\varepsilon} \int_0^l x^3 v^2(x, \tau) dx \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{l^2} \int_0^l xv_x^2(x, \tau) dx + \frac{2}{l^2} \int_0^l xv^2(x, \tau) dx + \frac{1}{2l^2\varepsilon} l^2 \int_0^l xv^2(x, \tau) dx \\ &= \frac{2\varepsilon}{l^2} \int_0^l xv_x^2(x, \tau) dx + \left(\frac{2}{l^2} + \frac{1}{2\varepsilon} \right) \int_0^l xv^2(x, \tau) dx \end{aligned}$$

(здесь использовалось неравенство $|pq| \leq \varepsilon p^2 + \frac{1}{4\varepsilon} q^2$, очевидно справедливое при любых действительных числах p, q). Следовательно, при $\varepsilon = \frac{l^2}{1-k}$ из (2.6) получаем

$$\int_0^l xv^2(x, t) dx \leq \frac{(1-k)(5-k)}{2l^2} \int_0^t \int_0^l xv^2(x, \tau) dx d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла для функции $z(t) = \int_0^l x v^2(x, t) dx$, получаем

$$\int_0^l x v^2(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

А так как как функция $v(x, t)$ непрерывна, то

$$v(x, t) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. □

3. Существование решения

Для доказательства существования решения задачи (1.1)–(1.5) достаточно доказать существование решения задачи (1.1)–(1.4), (1.7).

Согласно методу Фурье, частные решения уравнения (1.2) ищем в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.1)$$

где $X(x)$ и $T(t)$ — пока неопределенные функции. Подставляя функцию (3.1) в уравнение (1.2), получаем

$$T' + \lambda^2 T = 0, \quad (3.2)$$

$$X'' + \frac{k}{x} X' + \lambda^2 X = 0. \quad (3.3)$$

Чтобы частное решение (3.1), отличное от тождественного нуля, удовлетворяло граничным условиям (1.4) и (1.7), необходимо потребовать выполнение условий

$$X(0) = 0, \quad lX'(l) + (k-1)X(l) = 0. \quad (3.4)$$

Известно (см. [21, гл. IV]), что уравнение (3.3) с помощью замены переменных по формулам

$$X = \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{1-k}{2}} Z, \quad x = \frac{z}{\lambda}, \quad (3.5)$$

приводится к уравнению Бесселя

$$z^2 Z'' + z Z' + \left(z^2 - \frac{(k-1)^2}{4}\right) Z = 0,$$

общим решением которого является функция

$$Z(z) = C_1 J_{\frac{k-1}{2}}(z) + C_2 J_{-\frac{k-1}{2}}(z), \quad (3.6)$$

где $J_{\frac{k-1}{2}}(z)$, $J_{-\frac{k-1}{2}}(z)$ — бесселевы функции первого рода порядка $\frac{k-1}{2}$ и $-\frac{k-1}{2}$ соответственно. Возвращаясь к старым переменным в функции (3.6), с учетом формул (3.5), получаем

$$X(x) = C_1 X_1(x) + C_2 X_2(x), \quad X_1(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \quad X_2(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda x), \quad (3.7)$$

где C_1, C_2 и λ — произвольные постоянные. Их найдем из требования, чтобы общее решение (3.7) удовлетворяло условиям (3.4).

Подставим $X(t)$ в (3.4). Имеем

$$X'(x) = -C_1 \lambda x^{-\frac{k-1}{2}} J_{\frac{k+1}{2}}(\lambda x) + C_2 \lambda x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda x).$$

Из представления функций Бесселя в виде ряда видно, что для $0 < k < 1$ при $x \rightarrow 0$ функция $X_1(x)$ остается ограниченной, тогда как значение $X_2(0) = 0$. Поэтому положим $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. В результате получаем частное решение

$$X(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda x). \quad (3.8)$$

Подставляя функцию (3.8) во второе граничное условие (3.4), получаем уравнение

$$\lambda l J_{-\frac{k+1}{2}}(\lambda l) + (k-1) J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) = 0. \quad (3.9)$$

Используя формулу

$$J_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) + J'_{\nu}(z),$$

запишем уравнение (3.9) в виде

$$\lambda l J'_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\lambda l) = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) имеет бесчисленное множество вещественных корней (см. [22, гл. IV, §4]). Обозначим через μ_n , $n = 1, 2, \dots$, корни уравнения

$$\mu J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) = 0.$$

Тогда получаем собственные значения $\lambda_n = \frac{\mu_n}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, задачи (3.3), (3.4).

Согласно формуле

$$J_{\nu+1}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J'_{\nu}(z),$$

имеет место равенство

$$\mu J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) + \frac{k-1}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}(\mu) = J_{-\frac{k-3}{2}}(\mu).$$

Следовательно, для решений уравнения (3.10) для больших n справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n l = \pi n - \frac{\pi}{4} k + \frac{\pi}{2} + O(n^{-1}).$$

Заметим, что при $\lambda_0 = 0$ спектральная задача (3.3), (3.4) имеет собственную функцию $X_0 = x^{1-k}$. Таким образом, получены следующие собственные функции задачи (3.3)–(3.4):

$$X_0(x) = x^{1-k}, \quad X_n(x) = x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Лемма 3.1. *Функции (3.11) попарно ортогональны с весом x^k и образуют полную систему.*

Доказательство. Покажем ортогональность с весом (определение см. в [23, с. 166]) функций (3.11). Обозначим $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$ (символ Кронекера). Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^l X_n(x) X_m(x) x^k dx \\ &= \int_0^l x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_m}{l} x \right) x^k dx = \int_0^l J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_m}{l} x \right) x dx \\ &= \delta_{nm} \frac{l^2}{2} \left((J'_{-\frac{k-1}{2}}(\mu_n))^2 + \left(1 - \frac{(k-1)^2}{4\mu_n^2} \right) J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n) \right) = \delta_{nm} \frac{l^2}{2} J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n), \quad n, m \neq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l X_0(x) X_n(x) x^k dx &= \begin{cases} \int_0^l x^{1-k} x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) x^k dx, & n \neq 0; \\ \int_0^l x^{1-k} x^{1-k} x^k dx, & n = 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^l x^{-\frac{k-1}{2}+1} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) dx, & n \neq 0; \\ \int_0^l x^{2-k} dx, & n = 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ \frac{l^{3-k}}{3-k}, & n = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Докажем полноту системы (3.11). Предположим, что существует функция $\nu(x)$, отличная от тождественного нуля и ортогональная всем функциям (3.11), т. е.

$$\int_0^l x^{1-k} \nu(x) dx = 0, \quad \int_0^l x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) \nu(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Эти равенства запишем в виде

$$\int_0^l x^{-\frac{k-1}{2}} x^{-\frac{k-1}{2}} \nu(x) dx = 0, \quad \int_0^l J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) x^{-\frac{k-1}{2}} \nu(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как система

$$x^{-\frac{k-1}{2}}, \quad J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_1}{l} x \right), \quad J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_2}{l} x \right), \quad \dots, \quad J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right), \quad \dots,$$

полна в $L_2(0, l)$ (см. [21, гл. VIII]), получаем

$$x^{-\frac{k-1}{2}} \nu(x) = 0,$$

что выполнимо лишь для функции $\nu(x)$, равной нулю почти всюду на $(0, l)$. Это и доказывает полноту системы (3.11). $\square$

Отметим, что аналогично [24, гл. VIII, §14] для функций (3.11) можно доказать существование при любых k, l чисел $M(k, l)$ и $N(k, l)$ таких, что справедливы следующие неравенства

$$\frac{M(k, l)}{\mu_n} \leq \int_0^l X_n^2(x) x^k dx \leq \frac{N(k, l)}{\mu_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, соответствуют следующие решения уравнения (3.2)

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2 t},$$

где A_n — произвольные постоянные. Итак, все функции

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= X_0(x) T_0(t) = A_0 x^{1-k}, \\ u_n(x, t) &= X_n(x) T_n(t) = A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнению (1.2) и граничным условиям (1.4) и (1.7) при любых постоянных A_n , $n = 0, 1, 2, \dots$

Определим ряд

$$u(x, t) = A_0 x^{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t}. \quad (3.14)$$

Требуя выполнения начального условия (1.3), получаем

$$u(x, 0) = \varphi(x) = A_0 x^{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right). \quad (3.15)$$

Умножая равенство (3.14) на x , затем на $x^{\frac{k+1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right)$, и каждый раз интегрируя по отрезку $[0, l]$, с учетом формул (3.12), (3.13), получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3-k}{l^{3-k}} \int_0^l \varphi(x) x dx, \\ A_n &= \frac{1}{l^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(x) x^{\frac{k+1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\mu_n}{l} x \right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Соотношение (3.15) представляет собою разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Дини (см. [24]) по функциям (3.11) на отрезке $[0, l]$. Коэффициенты данного ряда вычисляются по формулам (3.16).

Теорема 3.1. Если функция $\varphi(x) \in C^4[0, l]$ удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$, $l\varphi'(l) + (k-1)\varphi(l) = 0$, $l\varphi''(l) + k\varphi'(l) = 0$, $l\varphi'''(l) + (k+1)\varphi''(l) = 0$, то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), и оно определяется как сумма ряда (3.14), коэффициенты которого вычисляются по формулам (3.16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что ряд Дини (3.15) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0, l]$ к функции $\varphi(x)$. При $0 < k < 1$ функции (3.11) ограничены в окрестности точки $x = 0$. В силу асимптотической формулы

$$J_\nu(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

функция $x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(x)$ ограничена для больших x . Поэтому функция $x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}(x)$ ограничена для всех x . Следовательно, при некотором L для всех n выполнено

$$|X_n(x)| \leq L.$$

Коэффициенты ряда (3.15) вычисляются по формулам (3.16). Дважды применяя в них формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3-k}{l^{3-k}} \int_0^l \varphi(x) x dx = \frac{3-k}{l^{3-k}} \int_0^l \varphi(x) x^k X_0(x) dx = \frac{3-k}{l^{3-k} 2(1-k)} \int_0^l \varphi(x) \frac{d}{dx} (x^{k+2} X_0'(x)) dx \\ &= \frac{3-k}{l^{3-k} (1-k)} \left(\varphi(x) x^{k+2} X_0'(x) \Big|_0^l - \int_0^l \varphi'(x) x^{k+2} X_0'(x) dx \right) \\ &= \frac{3-k}{l^{3-k} (1-k)} \left(\varphi(x) x^{k+2} X_0'(x) \Big|_0^l - \varphi'(x) x^{k+2} X_0(x) \Big|_0^l + \int_0^l ((k+2)x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x)) x^k X_0(x) dx \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(x) x^{\frac{k+1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) dx = \frac{1}{l^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x) dx \\ &= -\frac{2}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(x) x^k (X_n''(x) + \frac{k}{x} X_n'(x)) dx = -\frac{2}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(x) \frac{d}{dx} (x^k X_n'(x)) dx \\ &= -\frac{2}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \left(\varphi(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^l - \varphi'(x) x^k X_n(x) \Big|_0^l + \int_0^l (\varphi''(x) + \frac{k}{x} \varphi'(x)) x^k X_n(x) dx \right), \\ &\quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из условий теоремы на основании (3.4) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x) x^{k+2} X_0'(x) \Big|_0^l - \varphi'(x) x^{k+2} X_0(x) \Big|_0^l &= \varphi(l) l^{k+1} l X_0'(l) - \varphi'(l) l^{k+2} X_0(l) \\ &= -\varphi(l) l^{k+1} (k-1) X_n(l) - \varphi'(l) l^{k+2} X_0(l) = -l^{k+1} X_0(l) (l\varphi'(l) + (k-1)\varphi(l)) = 0, \\ \varphi(x) x^k X_n'(x) \Big|_0^l - \varphi'(x) x^k X_n(x) \Big|_0^l &= \varphi(l) l^{k-1} l X_n'(l) - \varphi'(l) l^k X_n(l) = \\ &= -\varphi(l) l^{k-1} (k-1) X_n(l) - \varphi'(l) l^k X_n(l) = -l^{k-1} X_n(l) (l\varphi'(l) + (k-1)\varphi(l)) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3-k}{l^{3-k}(1-k)} \int_0^l ((k+2)x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x))x^k X_0(x) dx, \\ A_n &= -\frac{2}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l (\varphi''(x) + \frac{k}{x}\varphi'(x))x^k X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из условий теоремы следует ограниченность функции $\frac{\varphi'(x)}{x}$. Следовательно,

$$|A_0| \leq \frac{(3-k)M_0}{l^{3-k}(1-k)} \int_0^l x^k X_0(x) dx, \quad |A_n| \leq \frac{2M}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)} \int_0^l x^k X_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и отсюда, применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} |A_0| &\leq \frac{(3-k)M_0 l^{\frac{k+1}{2}}}{l^{3-k}(1-k)\sqrt{k+1}} \left(\int_0^l x^k X_0^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_0, \\ |A_n| &\leq \frac{2M l^{\frac{k+1}{2}}}{\mu_n^2 J_{-\frac{k-1}{2}}^2(\mu_n)\sqrt{k+1}} \left(\int_0^l x^k X_n^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\mu_n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как функции (3.11) при $0 < k < 1$ ограничены на отрезке $0 \leq x \leq l$, то по теореме Вейерштрасса ряд (3.15) сходится абсолютно и равномерно на данном отрезке. А так как

$$0 < e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t} \leq 1, \quad \text{при } t \geq 0, \quad (3.18)$$

то ряд (3.14) при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x, t)$ определяемая рядом (3.14) непрерывна в области $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям.

Теперь покажем, что ряд, полученный из (3.14) почленным дифференцированием по x , также абсолютно и равномерно сходится в области $0 < x \leq l$, $t \geq 0$. Формально будем сопоставлять такой ряд функции $u_x(x, t)$, т. е.

$$u_x(x, t) \leftrightarrow A_0 X_0'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n'(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 t}. \quad (3.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} X_0'(x) &= (x^{1-k})' = (1-k)x^{-k}, \\ X_n'(x) &= \left(x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k-1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) \right)' = \frac{\mu_n}{l} x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right). \end{aligned}$$

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |X_0'(x)| &= (1-k)x^{-k} \leq N_0 x^{-k}, \\ |X_n'(x)| &= \left| \frac{\mu_n}{l} x^{-\frac{k-1}{2}} J_{-\frac{k+1}{2}}\left(\frac{\mu_n}{l}x\right) \right| \leq \frac{N \mu_n x^{-\frac{k-1}{2}}}{(\mu_n x)^{\frac{1}{2}}} = N \mu_n^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Применяя дважды формулу интегрирования по частям к интегралу (3.17) и учитывая условия теоремы, получаем

$$|A_n| \leq \frac{C_1}{\mu_n^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{C_1}{n^{\frac{5}{2}}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

На основании неравенства (3.18) отсюда следует, что ряд (3.19) абсолютно и равномерно сходится в области $0 < x \leq l$, $t \geq 0$ к функции $u_x(x, t)$.

Остается показать, что в области $0 < x < l$, $t > 0$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (3.14) почленным дифференцированием по t один раз и по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 < x < l$, $t > 0$. Рассмотрим эти ряды

$$u_t(x, t) \leftrightarrow - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t}, \quad (3.20)$$

$$u_{xx}(x, t) \leftrightarrow A_0 X_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n''(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t}. \quad (3.21)$$

Так как функции $X_0(x)$, $X_n(x)$ являются решениями уравнения (3.4), имеем

$$|X_0''(x)| = \left| -\frac{k}{x} X_0'(x) \right| = \frac{k}{x} |X_0'(x)| \leq N_0 x^{-k-1}.$$

$$|X_n''(x)| = \left| -\frac{k}{x} X_n'(x) - \lambda_n^2 X_n(x) \right| \leq \frac{k}{x} |X_n'(x)| + \lambda_n^2 |X_n(x)| \leq N \mu_n^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{k+2}{2}} + \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 L.$$

При $t \in [t_0, T]$, где $t_0 > 0$ — любое малое число, получаем

$$\begin{aligned} \left| - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t} \right| &\leq L \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t_0} \leq L \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|, \\ \left| A_0 X_0''(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n''(x) e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t} \right| &\leq N_{01} + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t_0} \leq N_{01} + L_1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|. \end{aligned}$$

Здесь использовались неравенства

$$0 < \left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 e^{-\left(\frac{\mu_n}{l} \right)^2 t_0} < 1,$$

которые выполняются при всех достаточно больших n .

Из сходимостью ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ на основании признака Вейерштрасса следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (3.20), (3.21) при $t \geq t_0 > 0$. Поэтому ряд (3.15) можно дифференцировать почленно один раз по t и два раза по x при $t \geq t_0$. В силу произвольности $t_0 > 0$ это имеет место в области $0 < x < l$, $t > 0$. Подставляя (3.20) и (3.21) в уравнение (1.2), убеждаемся, что функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.14), является в области $0 < x < l$, $t > 0$ его решением. $\square$

References

- [1] J.R. Cannon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21** (1963), 155–160.
- [2] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304. [N. I. Ionkin, “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differ. Uravn.*, **13**:2 (1977), 294–304 (In Russian)].
- [3] А. А. Самарский, “О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **16**:11 (1980), 1925–1935. [A. A. Samarskii, “Some problems of the theory of differential equations”, *Differ. Uravn.*, **16**:11 (1980), 1925–1935 (In Russian)].
- [4] А. М. Нахушев, “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81. [A. M. Nakhushiev, “An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its application to the dynamics of ground moisture and ground water”, *Differ. Uravn.*, **18**:1 (1982), 72–81 (In Russian)].
- [5] Л. И. Камынин, “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **4**:6 (1964), 1006–1024; англ. пер.: L. I. Kamynin, “A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **4**:6 (1964), 33–59.
- [6] Н. И. Юрчук, “Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **22**:12 (1986), 2117–2126. [N. J. Yurchuk, “A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations”, *Differ. Uravn.*, **22**:12 (1986), 2117–2126 (In Russian)].
- [7] Бенуар Нур-Эддин, Н. И. Юрчук, “Смешанная задача с интегральным условием для параболических уравнений с оператором Бесселя”, *Дифференц. уравнения*, **27**:12 (1991), 2094–2098; англ. пер.: N. E. Benuar, N. J. Yurchuk, “A mixed problem with an integral condition for parabolic equations with a Bessel operator”, *Differ. Equ.*, **27**:12 (1991), 1482–1487.
- [8] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, “Об одной параболической краевой задаче”, *Докл. АН СССР*, **317**:1 (1991), 39–43; англ. пер.: L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, “A parabolic boundary value problem”, *Dokl. Math.*, **43**:2 (1991), 334–338.
- [9] Л. А. Муравей, А. В. Филиновский, “Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **182**:10 (1991), 1479–1512; англ. пер.: L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, “On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation”, *Sb. Math.*, **74**:1 (1993), 219–249.
- [10] А. И. Кожанов, “О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **30** (2004), 63–69. [A. I. Kozhanov, “On the solvability of a boundary-value problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **30** (2004), 63–69 (In Russian)].
- [11] A. Bouziani, “Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation”, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **9**:3 (1996), 323–330.
- [12] S. Mesloub, A. Bouziani, “Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator”, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, **15**:3 (2002), 277–286.
- [13] A. Bouziani, T. E. Oussaeif, L. Ben Aoua, “A mixed problem with an integral two-space-variables condition for parabolic equation with the Bessel operator”, *Journal of Mathematics*, **2013** (2013), 1–8.
- [14] Л. С. Пулькина, “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445; англ. пер.: L. S. Pul'kina, “A mixed problem with integral condition for the hyperbolic equation”, *Math. Notes*, **74**:3 (2003), 411–421.
- [15] Л. С. Пулькина, “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, №4, 74–83; англ. пер.: L. S. Pul'kina, “Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:4 (2012), 62–69.

- [16] Л. С. Пулькина, “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 10, 32–44; англ. пер.: L. S. Pul’kina, “A nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:10 (2012), 26–37.
- [17] С. А. Бейлин, “Об одной нелокальной задаче с интегральным условием”, *Матем. заметки ЯГУ*, **11**:2 (2004), 22–29. [S. A. Beilin, “On a nonlocal problem with an integral condition”, *Mat. Zamet. YAGU*, **11**:2 (2004), 22–29 (In Russian)].
- [18] Н. В. Зайцева, *Смешанные задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений с оператором Бесселя*, Издательство Московского университета, М., 2021, 120 с. [N. V. Zaitseva, *Mixed Problems with Integral Conditions for Hyperbolic Equations with the Bessel Operator*, Moscow University Press, Moscow, 2021 (In Russian), 120 pp.]
- [19] К. Б. Сабитов, “Краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **46**:10 (2010), 1468–1478; англ. пер.: K. B. Sabitov, “Boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlocal integral condition”, *Differential Equations*, **46**:10 (2010), 1472–1481.
- [20] К. Б. Сабитов, “Нелокальная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области”, *Матем. заметки*, **89**:4 (2011), 596–602; англ. пер.: K. B. Sabitov, “Nonlocal problem for a parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain”, *Math. Notes*, **89**:4 (2011), 562–567.
- [21] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций. Часть первая*, И.Л., М., 1949, 799 с.; англ. пер.: G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, New York, 1944, 799 pp.
- [22] В. Я. Арсенин, *Методы математической физики и специальные функции*, Наука, М., 1984, 384 с. [V. Y. Arsenin, *Methods of Mathematical Physics and Special Functions*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russian), 384 pp.]
- [23] Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов, *Уравнения в частных производных математической физики*, Высшая школа, М., 1970, 712 с. [N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 712 pp.]
- [24] Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, Наука, М., 1980, 384 с.; англ. пер.: G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover, New York, 1976, 352 pp.

Информация об авторах

Гарипов Ильнур Бурханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования. Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: ilnur_garipov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6463-3099>

Мавлявиев Ринат Мизхатович, старший преподаватель кафедры высшей математики и математического моделирования. Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: mavly72@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7493-3183>

Information about the authors

Ilnur B. Garipov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics and Mathematical Modeling Department. Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation. E-mail: ilnur_garipov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6463-3099>

Rinat M. Mavlyaviev, Senior Lecturer of the High Mathematics and Mathematical Modeling Department. Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation. E-mail: mavly72@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7493-3183>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Гарипов Ильнур Бурханович

E-mail: ilnur_garipov@mail.ru

Corresponding author:

Ilnur B. Garipov

E-mail: ilnur_garipov@mail.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.

Поступила после рецензирования 29.08.2022 г.

Принята к публикации 13.09.2022 г.

Received 24.06.2022

Reviewed 29.08.2022

Accepted for press 13.09.2022

© Жуковская Т.В., Мерчела В., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260

УДК 515.126.4+515.124.2



Об устойчивости и непрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения двух отображений, действующих в пространство с расстоянием

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ¹, Вассим МЕРЧЕЛА²

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается задача о точках совпадения двух отображений ψ, φ , действующих из метрического пространства (X, ρ) в пространство (Y, d) , в котором расстояние d обладает лишь одним из свойств метрики: $d(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, и не предполагается ни симметричным, ни удовлетворяющим неравенству треугольника. Исследуется вопрос о корректности уравнения

$$\psi(x) = \varphi(x),$$

определяющего точку совпадения. Показано, что если $x = \xi$ — решение этого уравнения, то для любой последовательности α_i -накрывающих отображений $\psi_i : X \rightarrow Y$ и любой последовательности β_i -липшицевых отображений $\varphi_i : X \rightarrow Y$, $\alpha_i > \beta_i \geq 0$, в случае сходимости $d(\varphi_i(\xi), \psi_i(\xi)) \rightarrow 0$ уравнение $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$ при любом i обладает решением $x = \xi_i$ таким, что $\rho(\xi_i, \xi) \rightarrow 0$.

Далее в статье исследуется зависимость от параметра t — элемента топологического пространства T множества $\text{Coin}(t)$ точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t), \varphi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$. В предположении, что первое из этих отображений является α -накрывающим, второе — β -липшицевым, получено утверждение о полунепрерывности сверху, полунепрерывности снизу и непрерывности многозначного отображения $\text{Coin} : T \rightrightarrows X$.

Ключевые слова: корректность уравнения, непрерывная зависимость от параметра, точка совпадения двух отображений, расстояние, накрывающее отображение

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00772, <https://rscf.ru/project/22-21-00772/>).

Для цитирования: Жуковская Т.В., Мерчела В. Об устойчивости и непрерывной зависимости от параметра множества точек совпадения двух отображений, действующих в пространство с расстоянием // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 247–260. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260.

On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA¹, Wassim MERCHELA²

¹ Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. We consider the problem of coincidence points of two mappings ψ, φ acting from a metric space (X, ρ) into a space (Y, d) in which a distance d has only one of the properties of the metric: $d(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2$, and is assumed to be neither symmetric nor satisfying the triangle inequality. The question of well-posedness of the equation

$$\psi(x) = \varphi(x)$$

which determines the coincidence point, is investigated. It is shown that if $x = \xi$ is a solution to this equation, then for any sequence of α_i -covering mappings $\psi_i : X \rightarrow Y$ and any sequence of β_i -Lipschitz mappings $\varphi_i : X \rightarrow Y$, $\alpha_i > \beta_i \geq 0$, in the case of convergence $d(\varphi_i(\xi), \psi_i(\xi)) \rightarrow 0$, equation $\psi_i(x) = \varphi_i(x)$ has, for any i , a solution $x = \xi_i$ such that $\rho(\xi_i, \xi) \rightarrow 0$.

Further in the article, the dependence of the set $\text{Coin}(t)$ of coincidence points of mappings $\psi(\cdot, t), \varphi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ on a parameter t , an element of the topological space T , is investigated. Assuming that the first of these mappings is α -covering and the second one is β -Lipschitz, we obtain an assertion on upper semicontinuity, lower semicontinuity, and continuity of the set-valued mapping $\text{Coin} : T \rightrightarrows X$.

Keywords: well-posedness of equation, continuous dependence on parameter, coincidence point of two mappings, distance, covering mapping

Acknowledgements: The work was supported by Russian Science Foundation (project no. 22-21-00772, <https://rscf.ru/project/22-21-00772/>).

Mathematics Subject Classification: 54H25, 47H14.

For citation: Zhukovskaia T.V., Merchela W. Ob ustoychivosti i nepreryvnoy zavisimosti ot parametra mnozhestva tochek sovpadeniya dvukh otobrazheniy, deystvuyushchikh v prostanstvo s rasstoyaniyem [On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 247–260. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-247-260. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Одним из важнейших требований к математическому описанию различных процессов является корректность модельных уравнений. Поскольку параметры таких процессов могут быть найдены лишь с некоторой точностью (например, в результате измерений или приближенных расчетов), то необходимо, чтобы погрешность определения параметров не приводила к большим отклонениям решений модельных уравнений. Понятие корректности введено Ж. Адамаром для краевых задач математической физики в 1923 г. За прошедший век проблеме корректности различных интегральных, дифференциальных, функционально-дифференциальных уравнений, а также общих операторных уравнений в различных классах пространств были посвящены многие работы (см., например, обзор Г. М. Вайникко [1]). Общие подходы к получению условий корректности операторных уравнений, по-видимому, впервые были предложены в работе Ц. Артштейна [2]. Корректность наиболее важного для приложений класса операторных уравнений Вольтерры исследована Е. С. Жуковским в [3].

Корректность уравнения по Адамару означает, что уравнение разрешимо, решение единственно и мало изменяется при малых изменениях уравнений. Однако, такое определение не пригодно для описания процессов, развитие которых может происходить различно при одних и тех же условиях. Для моделирования таких процессов используют стохастические уравнения либо обычные детерминированные уравнения (а также неравенства, включения и др.), имеющие более одного решения. Для подобных уравнений естественным является вопрос о малом изменении множества решений при малых изменениях уравнений. Этот вопрос обычно формализуется «секвенциально» или «топологически». Первый тип формализации означает, что для любой последовательности уравнений (или отображений, их порождающих), сходящейся (согласно некоторому «разумному» определению) к исходному уравнению, множество их решений сходится (также согласно некоторому «разумному» определению) к множеству решений исходного уравнения. При второй формализации вопроса о корректности рассматривают уравнение с параметром t — элементом топологического пространства T , которое совпадает с исходным уравнением при некотором значении параметра t_0 . Уравнение считается корректным, если его множество решений, как многозначное отображение параметра t , является непрерывным (или полунепрерывным) в точке t_0 . Вопрос о корректности в такой постановке тесно связан с классической задачей о неявной функции (см. [4, 5]).

В настоящей работе рассматриваются обе формализации вопроса о корректности уравнения, определяющего точку совпадения двух заданных отображений. Для многозначных отображений (а следовательно, и для «обычных однозначных» отображений), действующих из метрического пространства в метрическое, условия корректности задачи о точках совпадения в секвенциальной постановке получены в [6, 7]. Мы исследуем корректность задачи о точках совпадения отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расширенным расстоянием, которое удовлетворяет лишь одной метрической аксиоме тождества, но не обязано быть симметричным и для него может не выполняться неравенство треугольника. Рассмотрение отображений в таких пространствах мотивировано исследованиями краевых задач и задач управления для сингулярных дифференциальных уравнений, для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, и для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений (подробнее см. [8, 9]).

Статья разделена на три секции. В секции 1. приводятся необходимые сведения о пространствах с расширенным расстоянием, даются определения свойств замкнутости, липшицевости и накрывания отображений, действующих из метрического пространства X в пространство Y с расширенным расстоянием. В секции 2. решается вопрос о корректности в секвенциальной постановке уравнения, определяющего точку совпадения накрывающего и липшицева отображений $X \rightarrow Y$. Заключительная секция 3. посвящена исследованию зависимости множества точек совпадения от параметра.

1. Основные понятия

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$.

Пусть $X \neq \emptyset$, (X, ρ) — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим через $B_X(x_0, r)$ замкнутый шар в этом метрическом пространстве с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, т. е. $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq r\}$ при $r \in \mathbb{R}_+$ и $B_X(x_0, +\infty) = X$.

Пусть также задано множество $Y \neq \emptyset$. *Расширенным расстоянием (расстоянием)* в Y называют отображение $d : Y \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2.$$

В отличие от метрики ρ расстояние d может быть несимметричным и не обязано удовлетворять неравенству треугольника. Отметим, что расстояния, не являющиеся симметричными, используются, например, в различных транспортных задачах (учитывающих разную протяженность дорог, разную стоимость перевозок из x в y и из y в x). Расстояния, не удовлетворяющие «обычному» неравенству треугольника, используются в информатике, например, при моделировании времени задержки сигнала при его возвращении в исходную точку Интернета (см. [10]). Часто используются расстояния, удовлетворяющие ослабленному неравенству треугольника. А именно, рассматривается функция $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, непрерывная в точке $(0, 0)$ и такая, что $f(0, 0) = 0$. Говорят, что расстояние $d : Y \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ удовлетворяет *f -неравенству треугольника*, если выполнено соотношение

$$\exists \sigma > 0 \quad \forall x, y, z \in Y \quad (d(x, y) < \sigma, d(y, z) < \sigma) \Rightarrow d(x, z) \leq f(d(x, y), d(y, z)). \quad (1.1)$$

При выполнении соотношения (1.1) расстояние d называют *f -квазиметрикой*, а пару (Y, d) — *f -квазиметрическим пространством*. Такие пространства и действующие в них отображения исследовались в [11–15].

Для элемента $y_0 \in Y$ и числа $\delta > 0$ определим в пространстве (Y, d) шар $B_Y(y_0, \delta) = \{y \in Y : d(y_0, y) \leq \delta\}$. Отметим, что в отличие шара в метрическом пространстве это множество не обязательно является замкнутым в «естественной топологии» (см. [11, 13, 14]) пространства с расстоянием, даже при выполнении обобщенного неравенства треугольника (1.1).

На отображения, действующие в пространство (Y, d) с расстоянием d общего вида, естественным образом распространяются многие понятия анализа отображений метрических пространств (см. [8, 16, 17]), формулирующиеся через сходимость последовательностей.

Говорят, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$, и пишут $y_i \rightarrow y$, если $d(y, y_i) \rightarrow 0$. Отметим, что при такой сходимости последовательность расстояний $\{d(y_i, y)\}$ может не сходиться к нулю, а предел y может быть не единственным. Для произвольной последовательности $\{y_i\} \subset Y$ обозначим через $\text{Lim } y_i = \{y \mid y_i \rightarrow y\}$ множество всех ее пределов.

Отображение $g : X \rightarrow Y$ называют *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $\rho(x, x_i) \rightarrow 0$, выполнено $d(g(x), g(x_i)) \rightarrow 0$. Отображение $g : X \rightarrow Y$ называют *замкнутым в точке* $x \in X$, если из сходимости к x последовательности $\{x_i\} \subset X$ и существования $y \in Y$ такого, что $d(y, g(x_i)) \rightarrow 0$ следует равенство $g(x) = y$. Отображение, непрерывное (замкнутое) во всех точках множества $V \subset X$, называют *непрерывным (замкнутым) на множестве* V , а в случае $V = X$ такое отображение называют *непрерывным (замкнутым)*. Отметим, что если расстояние в Y не является метрикой, замкнутость отображения не следует из его непрерывности. Кроме того, если для последовательности $x_i \rightarrow x$ во множестве $\text{Lim } g(x_i)$ содержится более одного элемента, отображение $g : X \rightarrow Y$, очевидно, не может быть замкнутым в точке x (при этом отображение $g : X \rightarrow Y$ может быть непрерывным в этой точке). Приведем соответствующий пример.

Пример 1.1. Пусть $X = \mathbb{R}$ — вещественная прямая с «обычной» метрикой $\rho(x, u) = |x - u|$, $x, u \in X$, а $Y = \mathbb{R} \cup \{\vartheta\}$ — прямая Зоргенфрея (определение см., например, [18]), дополненная одной точкой ϑ . Порядок на прямой $\mathbb{R} \subset Y$ дополним неравенствами $y < \vartheta < z$, которые будем считать выполненными для любых чисел $y < 0 < z$ (элементы ϑ и 0 полагаем несравнимыми). Расстояние в Y зададим соотношениями

$$\forall y, z \in Y \quad d(y, z) = \begin{cases} z - y, & \text{если } z \geq y, \\ 1, & \text{если } z < y, \end{cases} \quad d(\vartheta, 0) = d(0, \vartheta) = 1.$$

Такое расстояние удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника, но не является симметричным. Рассмотрим последовательность $\{i^{-1}\} \subset Y$. Множеством ее пределов, очевидно, является двухточечное множество $\text{Lim } i^{-1} = \{0, \vartheta\}$.

Определим $g : X \rightarrow Y$ как отображение вложения, т. е. $g(x) = x$ при любом $x \in X$. Это отображение непрерывно, однако не является замкнутым в точке $x = 0$. Действительно, для числовой последовательности $\{i^{-1}\} \subset X$ имеем $i^{-1} \rightarrow 0$, и как отмечено выше, последовательность тех же чисел в пространстве Y сходится к двум пределам: 0 и ϑ . Следовательно, $g(x_i) \rightarrow \vartheta$, но $g(x) = 0 \neq \vartheta$.

Сформулируем определение свойства «ослабленной» замкнутости, которым обладают все непрерывные отображения из X в Y .

Определение 1.1. Отображение $g : X \rightarrow Y$ называем *d-замкнутым в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \rightarrow x$ и $\text{Lim } g(x_i) \neq \emptyset$, выполнено включение $g(x) \in \text{Lim } g(x_i)$. Отображение, *d-замкнутое* во всех точках множества $V \subset X$, называем *d-замкнутым на множестве* V , а при $V = X$ такое отображение называем *d-замкнутым*.

Приведем предложенные в [16] определения свойств накрывания и липшицевости отображений, действующих из X в Y . Эти формулировки распространяют известные определения (см. [19, 20]) соответствующих свойств отображений, действующих в метрических пространствах.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть $\beta \geq 0$. Отображение $g : X \rightarrow Y$ называется β -липшицевым, если выполнено соотношение

$$\forall x, u \in X \quad d(g(x), g(u)) \leq \beta \rho(x, u).$$

Если отображение β -липшицево, то оно, очевидно, непрерывно и, следовательно, d -замкнуто, но при этом может не быть замкнутым.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $g : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если выполнено соотношение

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad g(x) = y \quad \text{и} \quad \rho(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d(g(x), g(x_0)).$$

Отметим, что накрывающее отображение сюръективно.

В работе [16] установлено существование точки совпадения α -накрывающего и β -липшицева отображений при $\alpha > \beta$. Это утверждение распространяет теорему Арутюнова о точках совпадения, на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Мы приведем полученное в [17] аналогичное утверждение для отображений, удовлетворяющих несколько менее обременительным предположениям, чем накрывание и липшицевость. С использованием этого утверждения мы получим теоремы об устойчивости множества точек совпадения двух отображений и исследуем множество точек совпадения, если отображения зависят от параметров.

2. Устойчивость множества точек совпадения

Сформулируем предложенные в работе [21] обобщения определений 1.2 и 1.3.

Пусть задано множество $U \subset X$. Для отображения $g : X \rightarrow Y$ определим следующие два множества:

$$\begin{aligned} \text{Cov}_\alpha[g; U] &:= \{(x, y) \in X \times Y : d(y, g(x)) < +\infty \Rightarrow \exists u \in U \quad g(u) = y, \quad \rho(u, x) \leq \frac{1}{\alpha} d(y, g(x))\}; \\ \text{Lip}_\beta[g; U] &:= \{(x, y) \in X \times Y : \forall u \in U \quad g(u) = y \Rightarrow d(y, g(x)) \leq \beta \rho(u, x)\}; \end{aligned}$$

первое из которых назовем *множеством α -накрывания отображения g относительно множества U* , а второе — *множеством β -липшицевости отображения g относительно U* . Очевидно, соотношение $\text{Cov}_\alpha[g; X] = X \times Y$ означает, что отображение g является α -накрывающим, а соотношение $\text{Lip}_\beta[g; X] = X \times Y$, что отображение g является β -липшицевым. Отметим, что множества накрывания и липшицевости отображения g монотонно по вложению зависят от множества $U \subset X$, а именно имеют место соотношения:

$$U \subset \bar{U} \subset X \Rightarrow \text{Cov}_\alpha[g; U] \subset \text{Cov}_\alpha[g; \bar{U}], \quad \text{Lip}_\beta[g; U] \supset \text{Lip}_\beta[g; \bar{U}].$$

Приведем пример действительной функции, не обладающей свойствами накрывания, когда на множестве ее значений задана обычная евклидова метрика, и покажем, что введением на этом множестве другого расширенного расстояния можно добиться того, что функция станет накрывающей.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим функцию $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 0]$, $g(x) = -x^2$. Эта функция сюръективна. При стандартном определении евклидовой метрики на множествах

$X = [-1, 1]$ и $Y = [-1, 0]$ отображение $g : X \rightarrow Y$ не является α -накрывающим ни при каком значении $\alpha > 0$. Более того, при любом $x \in X$ пара $(x, 0)$ не принадлежит множеству $\text{Cov}_\alpha[g; X]$ α -накрывания этого отображения относительно всего X . Но если на множестве Y задать расстояние как на прямой Зоргенфрея, т. е.

$$\forall y, z \in Y \quad d(y, z) = \begin{cases} z - y, & \text{если } z \geq y, \\ 1, & \text{если } z < y, \end{cases}$$

то для $\alpha = 1$ будет выполнено вложение $X \times \{0\} \subset \text{Cov}_\alpha[g; X]$.

В терминах множеств накрывания и липшицевости сформулируем без доказательства следующее утверждение о существовании точки совпадения отображений $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$, полученное в работе [17]. Напомним, что точкой совпадения этих отображений называют элемент $x \in X$, удовлетворяющий уравнению

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

Теорема 2.1. Пусть метрическое пространство X полное, заданы вещественные числа $\alpha > \beta \geq 0$, и элемент $x_0 \in X$ такие, что $d(\varphi(x_0), \psi(x_0)) < +\infty$. Положим

$$R = (\alpha - \beta)^{-1} d(\varphi(x_0), \psi(x_0)), \quad U = B_X(x_0, R).$$

Предположим, что для любого $x \in U$ выполнены включения

$$(x, \psi(x)) \in \text{Lip}_\beta[\varphi; U], \quad (x, \varphi(x)) \in \text{Cov}_\alpha[\psi; X];$$

на шаре U отображение ψ является замкнутым, а отображение φ — непрерывным. Тогда в шаре U существует точка совпадения отображений ψ, φ .

З а м е ч а н и е 2.1. Как было продемонстрировано в примере 1.1, условие замкнутости отображения $\psi : X \rightarrow Y$ является обременительным и не выполняется в точках $x \in X$, для которых найдется последовательность $x_i \rightarrow x$ такая, что предел последовательности $\{\psi(x_i)\} \subset Y$ не единственный. Вместо условия замкнутости отображения $\psi : X \rightarrow Y$ в теореме 2.1 можно потребовать, чтобы это отображение было d -замкнутым, и выполнялось соотношение

$$\forall \{x_i\} \subset U \quad \forall x \in U \quad (x_i \rightarrow x \text{ и } \varphi(x) \in \text{Lim } \psi(x_i)) \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x).$$

Используем теорему 2.1 для исследования задачи об устойчивости множества точек совпадения отображений $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$ к малым изменениям данных отображений.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображения $\psi_n, \varphi_n : X \rightarrow Y$, и пусть имеется некоторая сходимости $\psi_n \rightarrow \psi$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Получим условия, обеспечивающие существование для любых $n \in \mathbb{N}$ точек совпадения отображений ψ_n, φ_n и их сходимости при $n \rightarrow +\infty$ (в метрическом пространстве X) к точке совпадения отображений ψ, φ .

Теорема 2.2. Предположим, что отображения $\psi, \varphi : X \rightarrow Y$ имеют точку совпадения $x = \xi$. Пусть метрическое пространство X является полным, и пусть заданы вещественные числа $\alpha_n > \beta_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Определим шар

$$U_n = B_X(\xi, r_n), \quad \text{где } r_n = \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d(\varphi_n(\xi), \psi_n(\xi)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Будем предполагать, что для каждого n при всех $x \in U_n$ выполнены включения

$$(x, \psi_n(x)) \in \text{Lip}_{\beta_n}[\varphi_n; U_n], \quad (x, \varphi_n(x)) \in \text{Cov}_{\alpha_n}[\psi_n; X],$$

отображение ψ_n является замкнутым на шаре U_n , отображение φ_n — непрерывным на шаре U_n , и числовая последовательность $\{r_n\}$ сходится к 0. Тогда при любом n существует точка совпадения ξ_n отображений ψ_n, φ_n такая, что при $n \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость $\xi_n \rightarrow \xi$ в пространстве X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любом n для отображений ψ_n, φ_n выполнены условия теоремы 2.1, если положить $x_0 = \xi$. Согласно этой теореме при любом n существует точка совпадения ξ_n этих отображений такая, что $\rho(\xi, \xi_n) \leq r_n$. А поскольку $r_n \rightarrow 0$, из этого неравенства, очевидно, следует сходимость $\xi_n \rightarrow \xi$ при $n \rightarrow +\infty$. $\square$

К теореме 2.2 можно сделать следующее замечание, аналогичное замечанию 2.1.

З а м е ч а н и е 2.2. В теореме 2.2 предположение замкнутости на шаре U_n отображения $\psi_n : X \rightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, может быть ослаблено и заменено предположением его d -замкнутости на U_n в совокупности с соотношением

$$\forall \{x_i\} \subset U_n \quad \forall x \in U_n \quad (x_i \rightarrow x \text{ и } \varphi_n(x) \in \text{Lim } \psi_n(x_i)) \Rightarrow \varphi_n(x) = \psi_n(x).$$

Из теоремы 2.2 получим утверждение об устойчивости множества решений уравнения

$$\psi(x) = y_0 \tag{2.1}$$

к малым изменениям правой части $y_0 \in Y$.

Следствие 2.1. Предположим, что уравнение (2.1) разрешимо и $x = \xi$ — его решение. Пусть метрическое пространство X является полным, и пусть существуют такие положительные α, r, δ , что при всех $x \in B_X(\xi, r)$ и $y \in B_Y(y_0, \delta)$ выполнено включение $(x, y) \in \text{Cov}_{\alpha}[\psi; X]$ и, кроме того, отображение ψ является замкнутым на шаре $B_X(\xi, r)$. Тогда для любой последовательности $\{y_n\} \subset Y$ такой, что $d(y_n, y_0) \rightarrow 0$, при любом n , начиная с некоторого номера, существует решение $x = \xi_n$ уравнения

$$\psi(x) = y_n,$$

и при $n \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость $\xi_n \rightarrow \xi$ в пространстве X .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\psi_n = \psi$ и постоянное отображение $\varphi_n \equiv y_n$. Положим $r_n = \alpha^{-1}d(y_n, y_0)$. Очевидно, отображение $\varphi_n : X \rightarrow Y$ является 0-липшицевым, и поэтому $\text{Lip}_{\beta_n}[\varphi_n; U_n] = X \times Y$, где $\beta_n = 0$, а $U_n = B_X(\xi, r_n)$. Вследствие сходимости $r_n \rightarrow 0$ существует такое натуральное N , что при всех $n > N$ справедливо неравенство $r_n < r$. Это означает, что шар U_n вложен в шар $B_X(\xi, r)$. Таким образом, для всех $n > N$ выполнены все условия теоремы 2.2, из которой следует доказываемое утверждение. $\square$

3. Непрерывная зависимость от параметра множества точек совпадения

Приведем определения некоторых понятий многозначного анализа, которые будут использоваться в исследовании зависимости от параметров точек совпадения (подробнее об этих понятиях см. [22, § 2.3], [23, § 1.2]).

Для произвольного подмножества M метрического пространства (X, ρ) и любого числа $r > 0$ обозначим $O(M, r) := \{x \in X : \exists x_0 \in M \rho(x, x_0) < r\}$.

Рассмотрим топологическое пространство T . Зафиксируем $t_0 \in T$ и обозначим через $\mathcal{T}(t_0)$ совокупность окрестностей этой точки (совокупность всех открытых множеств, содержащих t_0). Пусть задано многозначное отображение $\Phi : T \rightrightarrows X$ такое, что множество $\Phi(t) \subset X$ не пусто и замкнуто при любом $t \in T$. Напомним, что многозначное отображение Φ называют *полунепрерывным снизу в точке t_0* , если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \cap V \neq \emptyset$, существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют соотношению $\Phi(t) \cap V \neq \emptyset$. Для полунепрерывности снизу в точке t_0 многозначного отображения Φ необходимо и достаточно, чтобы для любых $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in \Phi(t_0)$ существовала окрестность точки t_0 такая, что при всех t из этой окрестности во множестве $\Phi(t)$ найдется элемент x , удовлетворяющий неравенству $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. Многозначное отображение Φ называют *полунепрерывным сверху в точке t_0* , если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $\Phi(t_0) \subset V$, существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, для которого $\Phi(W(t_0)) \subset V$. Если отображение Φ полунепрерывно сверху и снизу в точке t_0 , то говорят, что оно *непрерывно в точке t_0* . Многозначное отображение называется *полунепрерывным снизу (полунепрерывным сверху, непрерывным)*, если оно полунепрерывно снизу (полунепрерывно сверху, непрерывно) в каждой точке $t_0 \in T$.

Будем также использовать близкие определенным выше свойствам полунепрерывности и непрерывности многозначного отображения $\Phi : T \rightrightarrows X$ свойства его h -полунепрерывности и h -непрерывности. Отображение Φ называют *h -полунепрерывным снизу (h -полунепрерывным сверху) в точке $t_0 \in T$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют соотношению $\Phi(t_0) \subset O(\Phi(t), \varepsilon)$ (соотношению $\Phi(t) \subset O(\Phi(t_0), \varepsilon)$, соответственно). Отметим, что из h -полунепрерывности снизу многозначного отображения Φ следует его полунепрерывность снизу, из полунепрерывности сверху многозначного отображения Φ следует его h -полунепрерывность сверху (см. [23, п. 1.2.3]). Многозначное отображение, h -полунепрерывное сверху и снизу в точке t_0 , называется *h -непрерывным в этой точке*. Многозначное отображение, h -полунепрерывное снизу (h -полунепрерывное сверху, h -непрерывное) в любой точке $t_0 \in T$, называется *h -полунепрерывным снизу (h -полунепрерывным сверху, h -непрерывным)*.

Теперь рассмотрим задачу о непрерывной зависимости от параметра $t \in T$ множества точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ и $\varphi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$. Обозначим через $\text{Coin}(t)$ множество точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t)$ и $\varphi(\cdot, t)$, т. е. множество решений уравнения

$$\psi(x, t) = \varphi(x, t). \quad (3.1)$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$d(\varphi(x, t), \psi(x, t)) = 0.$$

Для его исследования определим функционал

$$\eta_x : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \eta_x(t) = d(\varphi(x, t), \psi(x, t)). \quad (3.2)$$

Пусть задана точка $t_0 \in T$. В предлагаемом ниже утверждении о свойствах многозначного отображения $\text{Coin} : T \rightrightarrows X$ будут использоваться следующие условия:

- (C₋) для любого $x \in X$ такого, что $\eta_x(t_0) = 0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, все точки которого $t \in W(t_0)$ удовлетворяют неравенству $\eta_x(t) < \varepsilon$;
- ($\widehat{C}_-$) для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего равенству $\eta_x(t_0) = 0$, при всех $t \in W(t_0)$ справедливо неравенство $\eta_x(t) < \varepsilon$;
- ($\widehat{C}_+$) для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$ такое, что если для некоторых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ достигается равенство $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon$.

Очевидно, условие (C₋) выполнено тогда и только тогда, когда при x таком, что $\eta_x(t_0) = 0$, функционал η_x непрерывен в точке t_0 . Для непрерывности η_x в t_0 достаточно, чтобы в этой точке непрерывными были оба отображения $\psi(x, \cdot)$ и $\varphi(x, \cdot)$, а расстояние d было бы симметричным и удовлетворяло бы f -неравенству треугольника (1.1). Для выполнения условий ($\widehat{C}_-$) и ($\widehat{C}_+$) достаточно равностепенной непрерывности в точке t_0 семейства функционалов $\eta_X := \{\eta_x : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+, x \in X\}$. А семейство η_X равностепенно непрерывно в t_0 , если равностепенно непрерывным в этой точке будет совокупность отображений $\{\psi(x, \cdot), \varphi(x, \cdot) : T \rightarrow Y, x \in X\}$ и расстояние d будет симметричным и будет удовлетворять f -неравенству треугольника (1.1).

Теорема 3.1. Пусть метрическое пространство X является полным, заданы вещественные числа $\alpha > \beta \geq 0$ и элемент $t_0 \in T$. Пусть существует такое множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что выполнены условия: при любом $t \in W(t_0)$ справедливо $\inf_{x \in X} d(\varphi(x, t), \psi(x, t)) < +\infty$; при любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ имеют место включения

$$(x, \psi(x, t)) \in \text{Lip}_\beta[\varphi(\cdot, t), X], \quad (x, \varphi(x, t)) \in \text{Cov}_\alpha[\psi(\cdot, t), X];$$

отображение $\psi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ является замкнутым, а отображение $\varphi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ — непрерывным. Тогда при любом $t \in W(t_0)$ множество $\text{Coin}(t)$ точек совпадения отображений $\psi(\cdot, t)$ и $\varphi(\cdot, t)$ не пусто и замкнуто в X . Кроме того, многозначное отображение $\text{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$, при выполнении для семейства функционалов (3.2) условия (C₋), является полунепрерывным снизу в точке t_0 , при выполнении условия ($\widehat{C}_-$) — h -полунепрерывным снизу в точке t_0 , а при выполнении условия ($\widehat{C}_+$) — h -полунепрерывным сверху в точке t_0 .

Доказательство. При любом фиксированном $t \in W(t_0)$ для отображений $\psi(\cdot, t)$ и $\varphi(\cdot, t)$ выполнены все условия теоремы 2.1. Согласно этой теореме, при любом $t \in W(t_0)$ множество $\text{Coin}(t)$ не пусто. Докажем замкнутость этого множества. Выберем произвольную последовательность $\{\xi_i\} \subset \text{Coin}(t)$, сходящуюся к некоторому элементу $\xi \in X$. Из непрерывности отображения $\varphi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ следует сходимость $\varphi(\xi_i, t) \rightarrow \varphi(\xi, t)$. А так как $\varphi(\xi_i, t) = \psi(\xi_i, t)$ $i = 1, 2, \dots$, получаем $\psi(\xi_i, t) \rightarrow \varphi(\xi, t)$.

Из этого соотношения вследствие замкнутости отображения $\psi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ получаем равенство $\psi(\xi, t) = \varphi(\xi, t)$, т. е. $\xi \in \text{Coin}(t)$. Итак, замкнутость в X множества $\text{Coin}(t)$ доказана.

Пусть выполнено условия (C_-) . Докажем, что в этом случае многозначное отображение $\text{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$ полунепрерывно снизу в точке t_0 . Пусть $\xi_0 \in \text{Coin}(t_0)$, т. е. $\varphi(\xi_0, t_0) = \psi(\xi_0, t_0)$. Тогда $\eta_{\xi_0}(t_0) = 0$. В силу условия (C_-) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что при всех $t \in \mathcal{W}(t_0)$ имеет место соотношение

$$\eta_{\xi_0}(t) := d(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)) < (\alpha - \beta)\varepsilon.$$

Согласно теореме 2.1 при любом $t \in W(t_0) \cap \mathcal{W}(t_0)$ существует решение $\xi \in \text{Coin}(t)$ уравнения (3.1) такое, что

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)) < \varepsilon.$$

Таким образом, многозначное отображение Coin полунепрерывно снизу в точке t_0 .

Теперь предположим, что выполнено условие $(\widehat{C}_-)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ определим такое множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что для любого $x \in X$, если $\eta_x(t_0) = 0$, то $\eta_x(t) < \varepsilon(\alpha - \beta)$ при всех $t \in \mathcal{W}(t_0)$. Для любого $t \in W(t) \cap \mathcal{W}(t)$ и для любого $\xi_0 \in \text{Coin}(t_0)$ согласно теореме 2.1 существует $\xi \in \text{Coin}(t)$ такой, что

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d(\varphi(\xi_0, t), \psi(\xi_0, t)) = \frac{1}{\alpha - \beta} \eta_{\xi_0}(t) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\text{Coin}(t_0) \subset O_X(\text{Coin}(t), \varepsilon)$, т. е. многозначное отображение Coin является h -полунепрерывным снизу в точке t_0 .

В заключение предположим, что выполнено условие $(\widehat{C}_+)$. Покажем, что в этом случае многозначное отображение $\text{Coin} : W(t_0) \rightrightarrows X$ является h -полунепрерывным сверху в точке t_0 . Для любого $\varepsilon > 0$ определим множество $\mathcal{W}(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$ такое, что если для некоторых $x \in X$, $t \in \mathcal{W}(t_0)$ выполнено $\eta_x(t) = 0$, то $\eta_x(t_0) < \varepsilon(\alpha - \beta)$. Тогда для любого $t \in W(t) \cap \mathcal{W}(t)$ и для любого $\xi \in \text{Coin}(t)$ согласно теореме 2.1 существует $\xi_0 \in \text{Coin}(t_0)$ такой, что имеют место соотношения

$$\rho(\xi, \xi_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} d(\varphi(\xi, t_0), \psi(\xi, t_0)) = \frac{1}{\alpha - \beta} \eta_{\xi}(t_0) < \varepsilon.$$

Итак, доказано вложение $\text{Coin}(t) \subset O_X(\text{Coin}(t_0), \varepsilon)$, означающее, что многозначное отображение Coin является h -полунепрерывным сверху в точке t_0 . $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Утверждение теоремы 3.1 остается верным, если предположение замкнутости отображения $\psi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ при любом $t \in W(t_0)$ заменить менее обременительным условием его d -замкнутости в совокупности с соотношением

$$\forall \{x_i\} \subset X \quad \forall x \in X \quad (x_i \rightarrow x \text{ и } \varphi(x, t) \in \text{Lim } \psi(x_i, t)) \Rightarrow \varphi(x, t) = \psi(x, t).$$

Из теоремы 3.1 получим утверждение о зависимости от параметра $t \in T$ множества $\text{Sol}(t)$ решений уравнения

$$\psi(x, t) = y_0(t), \tag{3.3}$$

где $y_0 : T \rightarrow Y$. Уравнение (3.3) — это уравнение (3.1) с отображением $\varphi : X \times T \rightarrow Y$, постоянным по первому аргументу, т. е. $\varphi(\cdot, t) = y_0(t)$, $t \in T$.

Определим функционал $\eta_x : T \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением (3.2), которое для рассматриваемого здесь уравнения принимает вид

$$\eta_x(t) = d(y_0(t), \psi(x, t)). \quad (3.4)$$

Применяя к уравнению (3.3) теорему 3.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. Пусть метрическое пространство X является полным, заданы $\alpha > 0$ и $t_0 \in T$. Пусть существует такое множество $W(t_0) \in \mathcal{T}(t_0)$, что выполнены условия: при любом $t \in W(t_0)$ справедливо $\inf_{x \in X} d(y_0(t), \psi(x, t)) < +\infty$; при любых $x \in X$, $t \in W(t_0)$ имеет место включение

$$(x, y_0(t)) \in \text{Cov}_\alpha[\psi(\cdot, t), X];$$

отображение $\psi(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ является замкнутым. Тогда при любом $t \in W(t_0)$ множество $\text{Sol}(t)$ решений уравнения (3.3) не пусто и замкнуто в X . Кроме того, многозначное отображение $\text{Sol} : W(t_0) \rightrightarrows X$, при выполнении для семейства функционалов (3.4) условия (C_-) , является полунепрерывным снизу в точке t_0 , при выполнении условия $(\hat{C}_-)$ — h -полунепрерывным снизу в точке t_0 , а при выполнении условия $(\hat{C}_+)$ — h -полунепрерывным сверху в точке t_0 .

Близкий следствию 3.1 результат был получен в [24].

References

- [1] Г. М. Вайникко, “Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, **16**, ВИНТИ, М., 1979, 5–53; англ. пер.: G. M. Vainikko, “Regular convergence of operators and approximate solution of equations”, *Journal of Soviet Mathematics*, **15**:6 (1981), 675–705.
- [2] Z. Artstein, “Continuous dependence of solutions of operator equations. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **231**:1 (1977), 143–166.
- [3] Е. С. Жуковский, “Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.: E. S. Zhukovskii, “Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra’s equations”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.
- [4] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “О глобальной разрешимости нелинейных уравнений с параметрами”, *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.*, **496** (2021), 68–72; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “On global solvability of nonlinear equations with parameters”, *Doklady Mathematics*, **103**:1 (2021), 57–60.
- [5] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Глобальная и полулокальная теоремы о неявной и об обратной функции в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **213**:1 (2022), 3–45; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Global and semilocal theorems on implicit and inverse functions in Banach spaces”, *Sb. Math.*, **213**:1 (2022), 1–41.
- [6] А. В. Арутюнов, “Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений”, *Математические заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Stability of coincidence points and properties of covering mappings”, *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.
- [7] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the stability of fixed points and coincidence points of mappings in the generalized Kantorovich’s theorem”, *Topology and its Applications*, **275** (2020).

- [8] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений”, *Уфимский математический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Ufa Math. J.*, **12**:4 (2020), 41–54.
- [9] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:1 (2022), 93–104; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions”, *Differential Equations*, **58**:1 (2022), 92–103.
- [10] L. Narici, E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, **296**, 2nd ed., Taylor & Francis Group, New York, 2011, 628 pp.
- [11] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.
- [13] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f -квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.
- [14] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokoutsievskii, K. V. Storozhuk, “Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics”, *Topology and its Applications*, **221** (2017), 178–194.
- [15] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, Р. Сенгупта, “О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:125 (2019), 33–38. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, R. Sengupta, “On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:125 (2019), 33–38 (In Russian)].
- [16] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].
- [17] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:4 (2020), 52–63. [T. V. Zhukovskaya, A. I. Shindiapin, W. Merchela, “On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:4 (2020), 52–63 (In Russian)].
- [18] D. Doitchinov, “On completeness in quasi-metric spaces”, *Topology and its Applications*, **30**:2 (1988), 127–148.
- [19] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.
- [20] А. В. Арутюнов, “Точки совпадения двух отображений”, *Функц. анализ и его прил.*, **48**:1 (2014), 89–93; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Coincidence points of two maps”, *Funct. Anal. Appl.*, **48**:1 (2014), 72–75.
- [21] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].

- [22] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].
- [23] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, Либроком, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, Librokom Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].
- [24] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О непрерывной зависимости от параметра множества решений операторного уравнения”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 27–37. [E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On the continuous dependence on the parameter of the set of solutions of the operator equation”, *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 27–37 (In Russian)].

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Мерчела Вассим, кандидат физико-математических наук, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковская Татьяна Владимировна
 E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 26.05.2022 г.
 Поступила после рецензирования 18.08.2022 г.
 Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Wassim Merchela, Candidate of Physics and Mathematics, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
 E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Tatiana V. Zhukovskaia
 E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 26.05.2022
 Reviewed 18.08.2022
 Accepted for press 13.09.2022

© Золотарева Н.Д., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-261-269

УДК 519.622



О новом способе получения гарантированной оценки погрешности метода Нумерова с помощью эллипсоидов

Наталья Дмитриевна ЗОЛОТАРЕВА

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»

119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. В настоящей работе рассматривается численное решение задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка, вычисляемое с помощью метода Нумерова. Предложен новый способ получения гарантированной оценки погрешности с помощью эллипсоидов. Численное решение заключается в эллипсоид, содержащий и точное, и численное решение задачи, который пересчитывается на каждом шаге. В отличие от ранее предложенного метода пересчета эллипсоидов, предлагается более точная оценка малых слагаемых в разностном уравнении для погрешности. Это приводит к более точной оценке погрешности численного решения и применимости предложенного метода оценки погрешности на интервалах большей длины. Приведены результаты оценки погрешности метода Нумерова при решении задачи двух тел на большом интервале. Этот численный эксперимент демонстрирует эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: метод эллипсоидов, оценка погрешности, метод Нумерова, численное решение задачи Коши для ОДУ второго порядка

Для цитирования: Золотарева Н.Д. О новом способе получения гарантированной оценки погрешности метода Нумерова с помощью эллипсоидов // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 261–269. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-261-269.

On a new method for obtaining a guaranteed error estimate for Numerov's method using ellipsoids

Natalia D. ZOLOTAREVA

Lomonosov Moscow State University

1 Leninskie gory St., Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. In this article, we consider a numerical solution of the Cauchy problem for a second-order differential equation calculated by the means of the Numerov method. A new method for obtaining a guaranteed error estimate using ellipsoids is proposed. The numerical solution is enclosed in an ellipsoid containing both the exact and the numerical solutions of the problem, which is recalculated at each step. In contrast to the previously proposed method for recalculating ellipsoids, a more accurate estimate of small terms in the difference equation for the error is proposed. This leads to a more accurate estimate of the error of the numerical solution and the applicability of the proposed method to estimating the error on longer intervals. The results of estimating the error of Numerov's method in solving the two-body problem over a large interval are presented. This numerical experiment demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Keywords: ellipsoid method, error estimation, Numerov's method, numerical solution of the Cauchy problem for second-order ODEs

Mathematics Subject Classification: 65L70, 65L05.

For citation: Zolotareva N.D. O novom sposobe polucheniya garantirovannoy otsenki pogreshnosti metoda Numerova s pomoshch'yu ellipsoidov [On a new method for obtaining a guaranteed error estimate for Numerov's method using ellipsoids]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 261–269. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-261-269. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Если решение дифференциального уравнения второго порядка колеблется, то при по-координатном оценивании погрешности численного решения возникает эффект раскрутки (эффект Мура [1, с. 155]), когда оценка погрешности растет экспоненциально с ростом длины отрезка, в то время как сама погрешность растет значительно медленнее.

В работе [2] для получения гарантированной оценки погрешности метода Штермера было предложено заключать численное решение в движущийся эллипсоид, содержащий и точное, и численное решение задачи. Предложенный способ оценки погрешности использовал дискретное преобразование эллипсоидов и позволял избежать эффекта раскрутки. Этот способ был применим и к явному, и к неявному методу Штермера.

В статьях [3] и [4] предлагалось использовать непрерывное преобразование эллипсоидов, что приводило к более точной оценке погрешности. Минусом использования непрерывного преобразования эллипсоидов является громоздкость формул для пересчета эллипсоидов на каждом шаге.

В работе [5] был предложен способ получения гарантированной оценки погрешности явного метода Штермера, основанный на дискретном преобразовании эллипсоидов, который приводит к точности оценки того же порядка, что и способы, основанные на непрерывном преобразовании эллипсоидов. Повышение точности оценки погрешности при дискретном преобразовании эллипсоидов было достигнуто за счет более точного оценивания малых слагаемых в разностном уравнении для погрешности.

В данной работе предлагается обобщить результат работы [5], полученный для явного метода Штермера, на неявный численный метод решения дифференциальных уравнений второго порядка, а именно, на метод Нумерова.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad 0 \leq x \leq X_0, \quad y, f \in \mathbb{R}^n.$$

Численное решение y_m , являющееся приближенным к точному решению $y(x_m)$ в точке $x_m = hm$, где h — постоянный шаг, будем вычислять по неявной 2-шаговой формуле метода Нумерова (см., например, в [6, с. 399])

$$\nabla^2 y_m = h^2 f(x_{m-1}, y_{m-1}) + \frac{h^2}{12} \nabla^2 f(x_m, y_m) + w_m, \quad m \geq 2, \quad (1.1)$$

где ∇ — конечная разность назад ($\nabla a_i = a_i - a_{i-1}$); ∇^2 — конечная разность второго порядка ($\nabla^2 a_i = \nabla(\nabla a_i) = a_i - 2a_{i-1} + a_{i-2}$); w_m — ошибка, получаемая из-за округлений и обрыва итераций.

Целью работы является получение гарантированной оценки погрешности численного решения $z_m = y(x_m) - y_m$, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \nabla^2 z_m &= h^2 (f(x_{m-1}, y(x_{m-1})) - f(x_{m-1}, y_{m-1})) \\ &+ \frac{h^2}{12} \nabla^2 (f(x_m, y(x_m)) - f(x_m, y_m)) + N_m - w_m, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где N_m — ошибка метода Нумерова на m -м шаге:

$$N_m^p = -\frac{1}{240} h^6 (y^{(6)})^{(6)}(\xi), \quad x_{m-2} \leq \xi \leq x_m,$$

ξ зависит от номера координаты p .

2. Оценивание погрешности с помощью эллипсоидов

В работе [2] был предложен способ оценивания погрешности z_m , позволяющий избежать эффекта раскрутки. Численное решение заключалось в движущийся эллипсоид, содержащий и точное, и численное решение. Для пересчета эллипсоида на каждом шаге использовались формулы дискретного преобразования эллипсоидов, полученные с помощью разностного уравнения для погрешности. В данной работе предлагается улучшенная (по сравнению с полученной в [2]) оценка погрешности, полученная благодаря более точному оцениванию малых слагаемых в разностном уравнении для z_m .

Произведя линеаризацию, уравнение (1.2) можно записать в виде разностного уравнения

$$\nabla^2 z_m = h^2 A_{m-1} z_{m-1} + \frac{h^2}{12} \nabla^2 (A_m z_m) + N_m - w_m + R_m, \quad (2.1)$$

$$\text{где } A_l = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \end{array} \right) \bigg|_{(x_l, y_l)}, \quad R_m^p = \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^2 \alpha_i \left(\sum_{q,j=1}^n \frac{\partial^2 f^p}{\partial y^q \partial y^j} (x_{m-i}, \tilde{y}_{m-i}) z_{m-i}^q z_{m-i}^j \right).$$

Здесь верхний индекс обозначает номер координаты вектора, $\tilde{y}_l$ зависит от p и лежит в окрестности, содержащей и точное, и численное решения. Константы α_i — это коэффициенты перед $h^2 f(x_{m-i}, y_{m-i})$, которые возникнут в (1.1), если расписать все разности. В случае метода Нумерова это

$$\alpha_0 = \frac{1}{12}, \quad \alpha_1 = \frac{10}{12}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{12}.$$

В дальнейшем будет использоваться оценка

$$\|R_m\| \leq R_m^B = \frac{1}{2} h^2 M_2 \max_{0 \leq l \leq m} \|z_l\|^2,$$

где $M_2 \geq \max_{p=1, \dots, n} \sum_{q,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f^p}{\partial y^q \partial y^j} \right|$, максимум берется в окрестности, содержащей и точное, и численное решения при $x \in [0, mh]$, за норму вектора принимается максимум модулей координат. Пусть при всех рассматриваемых значениях m справедливы оценки $\|N_m\| \leq N$ и $\|w_m\| \leq w$.

Так же, как и в [2] введем вспомогательную переменную v_m и представим (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} v_m = v_{m-1} + h A_{m-1} z_{m-1} + h^{-1} Q_m, & (m \geq 2) \\ z_m = z_{m-1} + h v_m + \frac{h^2}{12} \nabla (A_m z_m), & (m \geq 1), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $Q_m = N_m - w_m + R_m$. Начальные значения:

$$v_0 = 0, \quad v_1 = \frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{h}{12} \nabla (A_1 z_1).$$

Подставим v_m из первого уравнения системы (2.2) во второе и перейдем к матрично-векторной записи:

$$\begin{pmatrix} v_m \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & h A_{m-1} \\ h I & I + h^2 A_{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m-1} \\ z_{m-1} \end{pmatrix} + \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla (A_m z_m) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^{-1} Q_m \\ Q_m \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где I — единичная матрица.

В статье [2] предлагалось в уравнении для вектора погрешности $\vec{Z}_m = (v_m, z_m)^T$ (T — знак транспонирования) расписать все разности и записать само уравнение в виде:

$$\vec{Z}_m = \sum_{i=0}^{k-1} C_i \vec{Z}_{m-i} + \vec{Q}_m, \quad m \geq k.$$

В этом случае задача сводилась к последовательному нахождению оценок векторов погрешностей $\vec{Z}_m$ с помощью соответствующих оценок, полученных на предыдущих шагах, и оценки вектора неоднородности $\vec{Q}_m = (h^{-1}Q_m, Q_m)^T$.

Для метода Нумерова уравнения для погрешности (2.3) запишется в виде линейной неявной одношаговой формулы

$$\vec{Z}_m = C_0 \vec{Z}_m + C_1 \vec{Z}_{m-1} + \vec{Q}_m, \quad m \geq 2, \quad (2.4)$$

$$\text{где } C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} A_m \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} I & hA_{m-1} \\ hI & I + \frac{11h^2}{12} A_{m-1} \end{pmatrix}.$$

В статье [2] предлагалось каждое из слагаемых правой части заключать в эллипсоид [7] в R^{2n} и на каждом шаге пересчитывать эллипсоид, содержащий вектор погрешностей $\vec{Z}_m$.

Эллипсоид $E(c, B)$ с центром в c определялся как $B^{\frac{1}{2}}S_1 + c$, где $S_1 = E(0, I)$ — единичный шар с центром начале координат, B — симметрическая положительно определенная матрица $(2n \times 2n)$.

Так как правая часть в случае метода Нумерова зависит от самого вычисляемого значения, то нужна какая-то (возможно более грубая) предварительная оценка погрешности. На небольших отрезках в этом качестве можно использовать довольно грубую оценку, полученную из (1.2):

$$\|z_m\| \leq \frac{1}{1 - h^2|\alpha_0|L} (\|2z_{m-1}\| + \|z_{m-2}\| + h^2L \sum_{i=1}^2 |\alpha_i| \cdot \|z_{m-i}\| + N + w),$$

где $L = n \max_{i,j=1,\dots,n} |\frac{\partial f^i}{\partial y^j}|$. Также в качестве предварительной можно использовать покомпонентную оценку погрешности. При выборе шага таким, чтобы выполнялось $|\alpha_0|h^2L < 1$, для метода Нумерова можно находить предварительную оценку погрешности z_m^b следующим образом:

$$\begin{cases} v_m^b = v_{m-1}^b + \frac{hL}{1 - |\alpha_0|h^2L} (z_{m-1}^*(2|\alpha_0| + |\alpha_1|) + z_{m-2}^*(|\alpha_0| + |\alpha_2|)) \\ \quad + (N + w) \left(h^{-1} + \frac{hL|\alpha_0|}{1 - |\alpha_0|h^2L} \right), \\ z_m^b = z_{m-1}^* + hv_m^b, \quad m \geq 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь z_i^* — улучшенная оценка погрешности, полученная на предыдущих шагах.

В результате, общая последовательность действий выглядит следующим образом.

1. Определяем начальные значения: $z_0^* = z_1^* = \delta$, $v_1^b = \frac{2\delta}{h}$. Положим $m = 2$.

2. С помощью (2.5) вычисляется предварительная оценка погрешности $(v_m^b, z_m^b)^T$ и строится предварительный эллипсоид, содержащий вектор $\vec{Z}_m = (v_m, z_m)^T$ погрешности.
3. Каждое из трех слагаемых (2.4) заключается в свой эллипсоид и вычисляется эллипсоид, содержащий сумму этих трех эллипсоидов. Таким образом, на каждом шаге по предварительной оценке z_m^b из (2.5) находится эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m)$, который содержит вектор $\vec{Z}_m = (v_m, z_m)^T$ из (2.4), и с помощью этого эллипсоида вычисляется улучшенная оценка погрешности

$$z_m^* = \sqrt{\max_{i=n+1, \dots, 2n} \mathbf{Z}_m^{i,i}}.$$

Здесь эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m) = \mathbf{Z}_m^{\frac{1}{2}} S_1$, где $S_1 = E(0, I)$ – единичный шар, $\mathbf{Z}_m$ – симметрическая положительно-определенная матрица $(2n \times 2n)$.

Затем m увеличивается на 1 и происходит переход к пункту 2.

В статье [5] для явного метода Штермера предлагалось увеличить точность оценки погрешности, используя не оценки величин $A_{m-i}z_{m-i}$, а оценки их первых разностей. В этой статье проведем подобное улучшение для метода Нумерова.

Предлагается последовательно находить оценки векторов погрешностей не из представления

$$\vec{Z}_m = C_0 \vec{Z}_m + C_1 \vec{Z}_{m-1} + \vec{Q}_m, \quad m \geq 2,$$

а из представления

$$\vec{Z}_m = D_0 \vec{Z}_m + \frac{h^2}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla(A_m z_m) \end{pmatrix} + \vec{Q}_m, \quad m \geq 2, \quad \text{где} \quad D_0 = \begin{pmatrix} I & hA_{m-1} \\ hI & I + h^2 A_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы каждое из трех слагаемых заключить в эллипсоид, нам надо получить оценку разности $\nabla(A_m z_m)$. Найдем оценку первых разностей P_l^1 такую, что $\max_{0 \leq i \leq l} \|\nabla(A_i z_i)\| \leq P_l^1$ через оценки

$$L \geq \|A_i\|, \quad L' \geq \|\nabla A_i\|/h, \quad z_l^B \geq \max_{0 \leq i \leq l} \|z_i\|, \quad v_l^B \geq \max_{0 \leq i \leq l} \|v_i\|.$$

Отметим, что в качестве L и L' можно взять оценки функций $A(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*(x))$ и $A'(x)$, где $y^*(x)$ лежит в окрестности, содержащей и точное, и численное решения.

Из второй строчки (2.2) следует, что

$$\nabla z_m = h v_m + \frac{h^2}{12} \nabla(A_m z_m). \quad (2.6)$$

Из неравенства $\|\nabla(A_i z_i)\| \leq \|\nabla A_i\| z_l^B + L \|\nabla z_i\|$, используя оценку, полученную из (2.6), имеем

$$\|\nabla(A_i z_i)\| \leq h L' z_l^B + L(h v_l^B + \frac{h^2}{12} P_l).$$

Откуда следует, что

$$P_l^1 \leq \frac{h}{1 - \frac{h^2}{12} L} (L' z_l^B + L v_l^B),$$

причем знаменатель дроби должен быть положительным.

Пусть $\|z_i\| \leq \delta$ при $i = 0; 1$. Предлагается, начиная со значений $\mathbf{Z}_0 = n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 I \end{pmatrix}$ и $\mathbf{Z}_1 = 2n \begin{pmatrix} (v_1^B)^2 I & 0 \\ 0 & \delta^2 I \end{pmatrix}$, где $\|v_1\| \leq v_1^B = \frac{2\delta}{h} + \frac{h}{6}\delta L$, на каждом шаге пересчитывать эллипсоид $E(0, \mathbf{Z}_m)$, содержащий вектор погрешностей $(v_m, z_m)^T$.

При сложении эллипсоидов надо использовать вложение

$$E(0, B_1) + E(0, B_2) \subset E(0, (1+p)B_1 + (1+1/p)B_2),$$

где значение параметра p можно выбрать таким образом, чтобы сумма квадратов полуосей была минимальна [8]: $p = \sqrt{\text{Tr} B_2 / \text{Tr} B_1}$. Если же брать эллипсоид с минимальным объемом, то в качестве p надо использовать $p = \sqrt{n^{-1} \text{Tr}(B_1^{-1} B_2)}$. При умножении матрицы D на эллипсоид $E(0, B)$ надо использовать (см., например, в [7, с. 74]) равенство

$$D \cdot E(0, B) = E(0, DBD^T).$$

В качестве эллипсоидов, содержащих второе и третье слагаемые (2.3), удобно взять соответственно эллипсоиды

$$E\left(0, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\frac{h^2}{12} P_m^1)^2 I \end{pmatrix}\right) \quad \text{и} \quad E\left(0, \begin{pmatrix} \frac{(Q_m^B)^2}{h^2} I & \frac{(Q_m^B)^2}{h} I \\ \frac{(Q_m^B)^2}{h} I & (Q_m^B)^2 I \end{pmatrix}\right).$$

Здесь используется то, что

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in E\left(0, \begin{pmatrix} (a, a)I & (a, b)I \\ (a, b)I & (b, b)I \end{pmatrix}\right) \quad \text{при} \quad a \parallel b.$$

Оценка неоднородности $Q_m^B = N + w + R_m^B \geq \|Q_m\|$ пересчитывается на каждом шаге.

3. Численный эксперимент

Продemonстрируем работу предложенного метода оценки погрешности на конкретном примере. Вычисления будем проводить с точностью до 56-го двоичного знака, то есть с $\delta = \frac{1}{2}2^{-56}$.

Рассмотрим задачу двух тел

$$\begin{cases} x'' = -\frac{Kx}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \\ y'' = -\frac{Ky}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \end{cases}$$

с начальными значениями

$$\begin{cases} x(0) = 2/3, & x'(0) = 0 \\ y(0) = 0, & y'(0) = \sqrt{2K}. \end{cases}$$

Положим $K = \pi^2/9$. В этом случае одно тело движется вокруг другого по эллипсу с периодом $T = 6$.

Численное решение будем считать методом Нумерова с шагом $h = 1/512$. Применение метода более высокого порядка не приведет к значительному улучшению точности оценки погрешности из-за влияния ошибки округлений w .

В качестве оценок шестых производных возьмем оценки, полученные для этой задачи в [2]:

$$|x^{(6)}| < 2509, \quad |y^{(6)}| < 1912;$$

откуда $N^1 = 5,9 \cdot 10^{-16}$, $N^2 = 4,5 \cdot 10^{-16}$.

Матрица из частных производных будет иметь вид

$$A(x, y) = \frac{K}{r^5} \begin{pmatrix} 2x^2 - y^2 & 3xy \\ 3xy & 2y^2 - x^2 \end{pmatrix},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ошибка округления w_m по абсолютной величине не будет превосходить $w = 8\delta$.

В статье [2] были приведены результаты подсчета оценки погрешности численного решения, полученного методом Нумерова, в моменты времени $t = 51$ и $t = 99$:

$$|z(51)| < 5,7 \cdot 10^{-6}, \quad |z(99)| < 4,1 \cdot 10^{-5}.$$

При дальнейшем увеличении времени происходит сильное увеличение роста оценки погрешности, что делает ее неприемлемой. Если же при пересчете эллипсоидов использовать более точную оценку малых слагаемых, предложенную в данной статье, то будут получены следующие оценки погрешности численного решения:

$$|z(51)| < 1,4 \cdot 10^{-6}, \quad |z(99)| < 2,6 \cdot 10^{-6}, \quad |z(150)| < 1,6 \cdot 10^{-5}, \quad |z(198)| < 3,8 \cdot 10^{-5}.$$

Результаты численных экспериментов демонстрируют более точную оценку погрешности численного решения, полученного методом Нумерова, по сравнению с ранее предложенными методами, а также применимость предложенного способа оценивания погрешности на интервалах большой длины.

References

- [1] R. E. Moore, R. B. Kearfott, M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, 1st ed., SIAM, Philadelphia, 2009, 184 с.
- [2] Н. Д. Золотарева, “Метод эллипсоидов для оценки глобальной ошибки метода Штермера”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2002, №1, 18–23; англ. пер.: N. D. Zolotareva, “Ellipsoid method for estimating the global error of the Stormer method”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2002, №1, 20–26.
- [3] А. Ф. Филиппов, Н. Д. Золотарёва, “Оценка локальной и глобальной ошибок метода Штермера для системы уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:1 (2004), 111–122; англ. пер.: A. F. Philippov, N. D. Zolotareva, “Estimates of local and global errors of the Stormer method for systems of equations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **44**:1 (2004), 100–111.
- [4] Н. Д. Золотарева, “Оценка локальной и глобальной ошибок неявного метода Штермера для системы уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:2 (2005), 267–271; англ. пер.: N. D. Zolotareva, “Estimates of local and global errors of the implicit Stormer method for systems of equations”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **45**:2 (2005), 256–260.
- [5] Н. Д. Золотарева, “О новом способе получения гарантированной оценки ошибки метода Штермера с помощью эллипсоидов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн.*, 2002, №3, 3–9. [N. D. Zolotareva, “New approach to Shtermer’s method guaranteed error assessment using ellipsoids”, *Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics*, 2002, №3, 3–9 (In Russian)].

- [6] Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987. [N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *Numerical Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].
- [7] Ф. Л. Черноусько, *Оценивание фазового состояния динамических систем*, Наука, М., 1988. [F. L. Chernousko, *Estimation of the Phase State of Dynamical Systems*, Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russian)].
- [8] Ю. Н. Решетняк, “Суммирование эллипсоидов в задаче гарантированного оценивания”, *Прикл. матем. и механ.*, **53**:2 (1989), 249–254. [Yu. N. Reshetnyak, “Summation of ellipsoids in the guaranteed estimation problem”, *Applied. Math. and Mech.*, **53**:2 (1989), 249–254 (In Russian)].

Информация об авторе

Золотарева Наталья Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета Вычислительной математики и кибернетики. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zolotareva-vmk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1490-2091>

Поступила в редакцию 21.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 05.09.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the author

Natalia D. Zolotareva, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher, Computational Mathematics and Cybernetics Faculty. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: zolotareva-vmk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1490-2091>

Received 21.06.2022
Reviewed 05.09.2022
Accepted for press 13.09.2022

© Ланина А.С., Плужникова Е.А., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283

УДК 517.911, 517.988, 512.562, 51-7



О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга

Анастасия Сергеевна ЛАНИНА¹, Елена Александровна ПЛУЖНИКОВА^{1,2}

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

² ФГБУН «Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова» Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Исследуется модель типа Хопфилда динамики электрической активности головного мозга, представляющая собой систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0.$$

Параметры модели считаются заданными: $\alpha > 0$, $w_{ji} > 0$ при $i \neq j$ и $w_{ii} = 0$, $I_i(t) \geq 0$. Функция активации f_{δ} (δ — время перехода нейрона в состояние активности) рассмотрена двух типов:

$$\delta = 0 \Rightarrow f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \quad \delta > 0 \Rightarrow f_{\delta}(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v - \theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta. \end{cases}$$

В случае $\delta > 0$ (функция f_{δ} непрерывна) решение задачи Коши для рассматриваемой системы существует, единственно и является неотрицательным при неотрицательных начальных значениях. В случае $\delta = 0$ (функция f_0 разрывна в точке θ) показано, что во множестве решений задачи Коши есть наибольшее и наименьшее решения, получены оценки решений и приведен пример системы, для которой задача Коши имеет бесконечное множество решений. В этом исследовании используются методы анализа отображений частично упорядоченных пространств.

Также исследуется уточненная модель Хопфилда, в которой учитывается время движения электрического импульса от одного нейрона к другому, и поэтому модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием. Для такой системы и в случае непрерывной, и в случае разрывной функции активации показано, что задача Коши однозначно разрешима, получены оценки решения и описан алгоритм аналитического нахождения решения.

Ключевые слова: нейронная сеть, дифференциальное уравнение с разрывной правой частью, запаздывание, задача Коши, существование решения, верхнее и нижнее решения, отображения частично упорядоченных пространств

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00863, <https://rscf.ru/project/22-21-00863/>).

Для цитирования: Ланина А.С., Плужникова Е.А. О свойствах решений дифференциальных систем, моделирующих электрическую активность головного мозга // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 270–283. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283.

© A. S. Lanina, E. A. Pluzhnikova, 2022
DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283



On properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain

Anastasia S. LANINA¹, Elena A. PLUZHNIKOVA^{1,2}

¹ Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The Hopfield-type model of the dynamics of the electrical activity of the brain, which is a system of differential equations of the form

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0,$$

is investigated. The model parameters are assumed to be given: $\alpha > 0$, $w_{ji} > 0$ for $i \neq j$ and $w_{ii} = 0$, $I_i(t) \geq 0$. The activation function f_{δ} (δ is the time of the neuron transition to the state of activity) of two types is considered:

$$\delta = 0 \Rightarrow f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta; \end{cases} \quad \delta > 0 \Rightarrow f_{\delta}(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v - \theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta. \end{cases}$$

In the case of $\delta > 0$ (the function f_{δ} is continuous), the solution of the Cauchy problem for the system under consideration exists, is unique, and is non-negative for non-negative initial values. In the case of $\delta = 0$ (the function f_0 is discontinuous at the point θ), it is shown that the set of solutions of the Cauchy problem has the largest and the smallest solutions, estimates for the solutions are obtained, and an example of a system for which the Cauchy problem has an infinite number of solutions is given. In this study, methods of analysis of mappings acting in partially ordered spaces are used.

An improved Hopfield model is also investigated. It takes into account the time of movement of an electrical impulse from one neuron to another, and therefore such a model is represented by a system of differential equations with delay. For such a system, both in the case of continuous and in the case of discontinuous activation function, it is shown that the Cauchy problem is uniquely solvable, estimates for the solution are obtained, and an algorithm for analytical finding of solution is described.

Keywords: neural network, differential equation with discontinuous right-hand side, delay, Cauchy problem, existence of solution, upper and lower solutions, mappings of partially ordered spaces

Acknowledgements: The study was supported by the Russian Science Foundation grant (no. 22-21-00863, <https://rscf.ru/en/project/22-21-00863/>).

Mathematics Subject Classification: 92B20, 34A12, 34A36, 47J99.

For citation: Lanina A.S., Pluzhnikova E.A. O svoystvakh resheniy differentsial'nykh sistem, modeliruyushchikh elektricheskuyu aktivnost' golovnogo mozga [On properties of solutions to differential systems modeling the electrical activity of the brain]. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 270–283. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-270-283. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изучение структуры и функционирования головного мозга, оставаясь одной из важнейших медицинских проблем, в последние десятилетия стало актуальным для ряда технических наук, для создания новых технологий. Расширяется инструментарий исследований, широко используются математические методы, большое количество работ посвящается математическим моделям работы мозга, описывающим динамику его электрической активности. Наиболее адекватно отражающими такие процессы считаются модели на основе нейронных полей и нейронных сетей. Одной из базовых сетевых моделей, идеи построения которой используются в более точных и, соответственно, более сложных современных моделях, является модель Дж. Дж. Хопфилда (J. J. Hopfield, 1982, [1]). Рассмотрим ее.

Структурно-функциональной единицей головного мозга является нейрон — электрически возбудимая клетка, осуществляющая прием, обработку, хранение и передачу электрических импульсов. Нейрон состоит из сомы, дендритов и аксона. Дендриты проводят к телу нейрона электрические импульсы, сома служит для формирования и распространения электрического потенциала, который впоследствии по аксону передается другим нейронам (см., например, [2, с. 222–224]).

Будем использовать следующие обозначения: n — количество нейронов в сети, $v_i(t)$ — значение электрической активности i -го нейрона в момент времени $t \in [0, \infty)$, $I_i(t)$ — внешнее воздействие, оказываемое на i -й нейрон в момент времени t , w_{ji} — сила связи j -го нейрона с i -м нейроном. Для введенных величин выполнены соотношения: $v_i(t) \geq 0$ и $I_i(t) \geq 0$ на $[0, \infty)$, $w_{ii} = 0$ и $w_{ji} = w_{ij} > 0$ при всех $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$. Предположим, что для любого «одиночного нейрона» скорость изменения уровня электрической активности пропорциональна с некоторым отрицательным коэффициентом $-\alpha$, $\alpha > 0$, уровню его электрической активности. Связь активации нейрона с уровнем его электрической активности определяет «функция активации» $f_\delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$, которая в модели Хопфилда задается формулой

$$f_\delta(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ \delta^{-1}(v - \theta), & \theta < v \leq \theta + \delta, \\ 1, & v > \theta + \delta, \end{cases} \quad (0.1)$$

где $\theta > 0$ — некоторое пороговое значение, начиная с которого за время $\delta > 0$ нейрон переходит из состояния покоя в состояние активности. В перечисленных предположениях моделью электрической активности головного мозга является следующая система дифференциальных уравнений (см. [1, 3])

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (0.2)$$

Функции $I_i(\cdot)$ будем предполагать измеримыми и суммируемыми на каждом конечном отрезке из $[0, \infty)$. Соответственно, решением системы (0.2) будет набор $(v_1, \dots, v_n)$ абсолютно непрерывных на произвольном конечном отрезке $[0, T]$ функций, удовлетворяющий этому уравнению при п. в. t .

Задача Коши для системы (0.2) с начальными условиями

$$v_i(0) = v_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (0.3)$$

очевидно, однозначно разрешима. Приведем соответствующее утверждение, сформулированное в тезисах [4].

Теорема 0.1. Для любого $T > 0$ система дифференциальных уравнений (0.2) с начальными условиями (0.3) имеет единственное определенное на отрезке $[0, T]$ решение $(v_1, \dots, v_n)$, причем, если $v_i^0 \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, то $v_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, при всех $t \in [0, T]$.

Доказательство однозначной разрешимости задачи (0.2), (0.3) следует из того, что функция $f_\delta(v_j)$ удовлетворяет условию Липшица с константой δ^{-1} , и поэтому функции

$$F_i(v_1, \dots, v_n) = -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ji} f(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

определяющие правые части системы (0.2), являются липшицевыми по каждой переменной $v_1, \dots, v_n$.

Чтобы показать, что все компоненты решения — функции $v_i(\cdot)$ неотрицательные, достаточно, записав задачу (0.2), (0.3) в виде эквивалентной системы интегральных уравнений Вольтерры

$$v_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \left(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta(v_j(s)) + I_i(s) \right) ds, \quad i = \overline{1, n},$$

заметить, что ее правая часть неотрицательна.

Так как время δ активации нейрона мало и его практически невозможно точно измерить, некоторые авторы заменяют непрерывную функцию f_δ разрывной в точке θ функцией Хевисайда

$$f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq \theta, \\ 1, & v > \theta, \end{cases}$$

Отметим, что для каждого v при $\delta \rightarrow 0$ имеет место сходимость $f_\delta(v) \rightarrow f_0(v)$. Замена непрерывной «функции активации» функцией Хевисайда упрощает численное исследование модели, позволяет получить для некоторых классов внешних воздействий решения в явном виде (см., например, [5–7]). Однако, в цитируемых и ряде других работ, использующих такую функцию активации, не рассматривалась зависимость решения задачи (0.2), (0.3) от δ при $\delta \rightarrow 0$, и более того, даже не устанавливалась разрешимость «предельной задачи» со значением $\delta = 0$. Этот «пробел» в обосновании использования в модели нейросети разрывной функции активации — следствие неприменимости результатов классической теории дифференциальных уравнений. В работах [8–11] уравнение нейронного поля в случае $\delta = 0$ сводится к включению заменой функции f_0 многозначным отображением таким, что $f_0(\theta) = [0, 1]$. В такой трактовке модели была установлена непрерывная зависимость множества решений задачи Коши при переходе от непрерывной функции активации к разрывной. Безусловно, замена уравнения (0.2) включением приводит к появлению дополнительных решений, которые могут не соответствовать исследуемым процессам активности мозга.

В данной работе мы рассмотрим систему (0.2) дифференциальных уравнений с разрывной функцией f_0 , не сводя уравнения к включениям. Вместо результатов анализа отображений в метрических пространствах, большинство из которых использует непрерывность, мы применим методы анализа отображений частично упорядоченных пространств. Это оказывается возможным, так задача Коши для этой системы приводится к уравнению неподвижной точки монотонного интегрального оператора в пространстве суммиру-

емых функций. Близкие подходы к исследованию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью применялись Е. С. Жуковским в [12, с. 16,17], а в недавних работах [13–15] такие подходы были распространены на неявные дифференциальные и интегральные уравнения.

Также мы исследуем уточненную модель Хопфилда, в которой учитывается время $\tau_{ji} > 0$ движения электрического импульса от j -го нейрона к i -му, и поэтому такая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием. Мы рассматриваем эту систему и в случае непрерывной, и в случае разрывной функции активации, т. е. для времени активации $\delta \geq 0$.

Статья состоит из трех параграфов. Сначала в параграфе 1. приводятся необходимые понятия и результаты анализа отображений в частично упорядоченных пространствах. Параграф 2. посвящен модели электрической активности мозга типа модели Хопфилда (0.2) в предположении, что активация нейрона происходит мгновенно, $\delta = 0$. Здесь доказывается теорема о разрешимости задачи Коши. Показано, что единственности решения задачи Коши нет даже для простейших систем двух уравнений, но в множестве решений гарантируется существование нижнего и верхнего решений. Также установлено, что для нижнего (верхнего) решения v значение дифференциального оператора $\dot{v} + \alpha v$ является наименьшим (наибольшим) элементом в множестве значений данного оператора на решениях рассматриваемой задачи. В параграфе 3. рассмотрена модель электрической активности мозга без ограничений на время активации нейрона и с учетом того, что электрический импульс от одного нейрона к другому распространяется за положительное время. Показано, что задача Коши для соответствующей системы дифференциальных уравнений с запаздыванием однозначно разрешима. Также описан алгоритм аналитического нахождения решения этой задачи.

1. Отображения частично упорядоченных пространств

Приведем некоторые сведения о частично упорядоченных пространствах, используемые в работе (подробнее см., например, [16, гл. I, § 4] и [17, § 1]).

Пусть на множестве $X \neq \emptyset$ задано отношение нестрогого порядка $\leq$ (т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение). Эту алгебраическую систему называют *частично упорядоченным пространством* и обозначают $(X, \leq)$. Вместо $x \leq u$ можем писать $u \geq x$, а в случае $x \leq u$ и $x \neq u$ можем писать $x < u$ или $u > x$. Для любых $\underline{x}, \bar{x} \in X$ определим *отрезок* — множество $[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in X : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ (если $\bar{x} \not\leq \underline{x}$ будем считать, что $[\underline{x}, \bar{x}] = \emptyset$). Подмножество $S \subset X$ называют *цепью* (или линейно упорядоченным), если для любых его двух элементов $x, u \in S$ выполнено $x \leq u$ или $u \leq x$. Цепь называют *максимальной*, если она не является собственным подмножеством никакой другой цепи в этом пространстве. *Нижней границей* множества $U \subset X$ называют элемент $v \in X$ такой, что $v \leq u$ для любого $u \in U$, а *точной нижней границей* — наибольшую из нижних границ — элемент $w \in X$, для которого, во-первых,

$$\forall u \in U \quad w \leq u,$$

и во-вторых,

$$\forall u \in U \quad \forall v \in X \quad v \leq u \Rightarrow v \leq w.$$

Пространство $(X, \leq)$ называем *s-полным (снизу)*, если любая цепь, принадлежащая этому пространству, имеет точную нижнюю границу. Если точная нижняя граница есть у

произвольного множества из X , то пространство называют *полным* (снизу). Пространство $(X, \leq)$ называется (*нижней*) *полурешеткой*, если для множества из любых двух его элементов существует точная нижняя граница. Далее, употребляя эти термины, будем опускать слова «снизу», «нижняя», если это не вызовет разночтений.

Приведем примеры частично упорядоченных пространств, используемых далее в исследовании системы (0.2) с разрывной функцией f_0 .

Пример 1.1. На множестве $\mathbb{R}^n$ векторов с вещественными компонентами определим покоординатный порядок, т. е. для $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ неравенство $x \leq u$ означает, что $x_i \leq u_i$ $i = \overline{1, n}$. Частично упорядоченное пространство $(\mathbb{R}^n, \leq)$ является полурешеткой (и даже *решеткой*: любое его двухэлементное подмножество обладает и инфимумом и супремумом), но не является s -полным (и конечно, полным). А при этом полнотой обладает его подпространство $(\mathbb{R}_+^n, \leq)$, содержащее векторы с неотрицательными компонентами. Действительно, для любого множества $U \subset \mathbb{R}_+^n$ числовое множество $U_i \subset \mathbb{R}_+$ i -х компонент векторов из U является полным, существует $u_i = \inf U_i$, $i = \overline{1, n}$, а вектор $u = (u_1, \dots, u_n)$ является точной нижней границей множества U .

Пример 1.2. Пусть $T > 0$. Рассмотрим пространство L^n измеримых и суммируемых (по Лебегу) функций $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с «естественным» порядком: для функций $y = (y_1, \dots, y_n) \in L^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in L^n$ полагаем выполненным неравенство $y \leq z$, если $y_i(t) \leq z_i(t)$ при п.в. $t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Это частично упорядоченное пространство — полурешетка (и решетка), но не является s -полным. Свойством полноты будет обладать подпространство $L_+^n \subset L^n$ неотрицательных функций $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+^n$. Покажем это. Для произвольного множества $U \subset L_+^n$ определим множество $U_i \subset L_+$ функций, являющихся i -ми компонентами функций из U . Так как конус неотрицательных функций в L_+ является сильно миниедральным (см., например, [18, с. 257]), существует $u_i = \inf U_i$, $i = \overline{1, n}$. Теперь несложно проверить, что функция $u = (u_1, \dots, u_n)$ является точной нижней границей множества U . Аналогично легко проверяется, что любых $\underline{z}, \bar{z} \in L^n$, $\underline{z} \leq \bar{z}$, отрезок $[\underline{z}, \bar{z}]$ является полным пространством.

Пример 1.3. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с отношением делимости является полным частично упорядоченным пространством: точной нижней границей любого множества $U \subset \mathbb{N}$ является наибольший общий делитель всех чисел из U . Подпространство $\mathbb{N}_{10} = \{10, 11, \dots\}$ полного частично упорядоченного пространства $(\mathbb{N}, :)$ уже не является полным, и даже не является полурешеткой: двухэлементное множество $\{10, 12\}$ не имеет в $\mathbb{N}_{10}$ нижней границы. В то же время пространство $(\mathbb{N}_{10}, :)$ является s -полным.

Пусть задан оператор $\Psi: X \rightarrow X$. Сформулируем условия существования у этого оператора *неподвижной точки* — элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению

$$x = \Psi(x).$$

Напомним, что оператор Ψ называется *монотонным* (*изотонным*), если для любых элементов $x, u \in X$ таких, что $x \leq u$, выполнено отношение $\Psi(x) \leq \Psi(u)$.

Следующее утверждение, обычно формулируемое при несколько более обременительном предположении полноты пространства $(X, \leq)$, называют *теоремой Биркгофа–Тарского* (см. [19, с. 266]).

Теорема 1.1. Пусть существуют элементы $\underline{x}, \bar{x} \in X$ такие, что

$$\underline{x} \leq \Psi(\underline{x}), \quad \bar{x} \geq \Psi(\bar{x}). \quad (1.1)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) пространство $U = [\underline{x}, \bar{x}]$ является s -полным (относительно индуцированного порядка $\leq$),

2) сужение оператора Ψ на пространство $(U, \leq)$ является монотонным.

Тогда существует неподвижная точка $x \in U$ оператора Ψ .

З а м е ч а н и е 1.1. Поскольку в теореме 1.1 вместо условия полноты пространства $(U, \leq)$ используется условие s -полноты, для доказательства этого утверждения приходится использовать теорему Хаусдорфа о максимальной цепи (см., например, [16, с. 40]). Соответственно, доказательство теоремы 1.1 отличается от [19, с. 266] и поэтому приводится ниже.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого элемента $x \in U$ вследствие монотонности сужения оператора Ψ на $(U, \leq)$ из неравенств (1.1) получаем

$$\underline{x} \leq \Psi(\underline{x}) \leq \Psi(x) \leq \Psi(\bar{x}) \leq \bar{x},$$

т. е. $\Psi(U) \subset U$. Определим подмножество $U_0 \subset U$ соотношением

$$U_0 = \{x \in U : x \geq \Psi(x)\} \quad (1.2)$$

(с индуцированным отношением порядка $\leq$). Очевидно, $\bar{x} \in U_0$, таким образом, $U_0 \neq \emptyset$.

Согласно теореме Хаусдорфа о максимальной цепи, в частично упорядоченном множестве U_0 существует максимальная цепь S (и очевидно, эта цепь содержит элемент $\bar{x}$). Из условия 1) следует, что существует точная нижняя граница цепи S , обозначим ее через $\xi = \inf S$. Имеем $\underline{x} \leq \xi \leq \bar{x}$, $\xi \in U$. Для любого $x \in S$ выполнено $\Psi(\xi) \leq \Psi(x) \leq x$, т. е. $\Psi(\xi)$ — нижняя граница цепи S . Согласно определению точной нижней границы имеем

$$\Psi(\xi) \leq \xi. \quad (1.3)$$

Это неравенство, согласно определению (1.2), множества U_0 означает, что $\xi \in U_0$, и таким образом $\xi \in S$. Но $\inf S = \xi$, поэтому

$$\Psi(\xi) \geq \xi. \quad (1.4)$$

Теперь из неравенств (1.3) и (1.4) следует, что $\xi = \Psi(\xi)$. □

Определенная в доказательстве теоремы 1.1 неподвижная точка ξ оператора Ψ является минимальным элементом в множестве всех $\text{Fix}(\Psi, U)$ неподвижных точек, принадлежащих отрезку U . Но этот элемент без дополнительных предположений не обязательно наименьший в этом множестве. Сформулируем условия существования наименьшего элемента в множестве $\text{Fix}(\Psi, U)$.

П р е д л о ж е н и е 1.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и, кроме того, отрезок $(U, \leq)$ является нижней полурешеткой. Тогда в множестве $\text{Fix}(\Psi, U)$ существует наименьший элемент.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что требуемым наименьшим элементом является неподвижная точка ξ оператора Ψ , определенная при доказательстве теоремы 1.1. Этот элемент — точная нижняя граница максимальной в $(U, \leq)$ цепи S .

Если элемент ξ не является наименьшим в множестве $\text{Fix}(\Psi, U)$ неподвижных точек, то для некоторого элемента $\eta \in \text{Fix}(\Psi, U)$ выполнено $\xi \not\leq \eta$. В нижней полурешетке U существует $z = \inf\{\xi, \eta\} \in U$, и для этого элемента выполнены неравенства $z \leq \eta$, $z \leq \xi$ и $z \neq \xi$. Вследствие монотонности оператора Ψ получим

$$\Psi(z) \leq \Psi(\xi) = \xi, \quad \Psi(z) \leq \Psi(\eta) = \eta.$$

Из этих неравенств получим $\Psi(z) \leq \inf\{\xi, \eta\} = z < \xi$. Итак, $z \in U$, а множество $\{z\} \cup S$ является цепью, что противоречит максимальной цепи $S \subset U$. Таким образом, ξ — наименьший в $\text{Fix}(\Psi, U)$ элемент. $\square$

2. Модель нейронного поля с разрывной функцией активации

Рассмотрим модель электрической активности головного мозга типа модели Хопфилда в предположении, что активация нейрона происходит мгновенно, $\delta = 0$. Эта модель записывается в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{v}_i = -\alpha v_i + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_0(v_j) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Нас будут интересовать условия разрешимости задачи Коши для уравнения (2.1) и структура множества решений. Единственности решения задачи Коши даже для простейших уравнений вида (2.1) нет, что показывает следующий пример.

П р и м е р 2.1. Пусть в модели (2.1) $n = 2$, $\alpha = 1$, $\theta = 1$, $w_{12} = w_{21} = 1$, $I_i(t) \equiv 1$. Тогда (2.1) представляет собой систему

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -v_1 + f_0(v_2) + 1, \\ \dot{v}_2 = -v_2 + f_0(v_1) + 1, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad \text{где } f_0(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 1, \\ 1, & v > 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Решения этой системы определяются следующим образом:

$$v_1(t) = \begin{cases} Ce^{-t} + 1, & \text{при } t \text{ таких, что } v_2(t) \leq 1, \\ Ce^{-t} + 2, & \text{при } t \text{ таких, что } v_2(t) > 1, \end{cases} \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Задача Коши (2.2), (0.3) с начальными значениями $v_1^0 = v_2^0 = 1$ имеет бесконечное множество абсолютно непрерывных решений, определяемых формулой

$$v_1(t) = v_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in [0, t_0], \\ 2 - e^{t_0-t}, & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Как отмечалось во введении, отсутствие непрерывности функции f_0 не позволяет применять к системе (2.1) результаты анализа отображений метрических пространств. Запишем задачу Коши (2.1), (0.3) в виде такого эквивалентного интегрального уравнения в полном частично упорядоченном пространстве L_+^n , к которому применимы теорема 1.1 и предложение 1.1.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\dot{v}_i + \alpha v_i = z_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

с начальным условием (0.3). Для любой функции $z = (z_1, \dots, z_n) \in L^n$ задача (2.3), (0.3) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \dots, v_n)$, определяемое формулой

$$v_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Используя определенную этой формулой подстановку, запишем задачу (2.1), (0.3) в виде системы интегральных уравнений

$$z_i(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_0 \left(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s) ds \right) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

относительно неизвестной функции $z = (z_1, \dots, z_n) \in L^n$. Если эта система разрешима, то по ее решению z формулой (2.4) определяется решение задачи (2.1), (0.3).

Заметим, что для любой измеримой функции v композиция $y = f_0(v)$ измерима. Действительно, функция y принимает только два значения 0 и 1, а множество Лебега $\{t : y(t) = 0\} = \{t : v(t) \leq 1\}$ является измеримым. Таким образом, для любого $z = (z_1, \dots, z_n) \in L^n$ правая часть уравнения (2.5) представляет собой сумму ограниченной измеримой неотрицательной функции $\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0 \left(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s) ds \right)$ и суммируемой на каждом конечном отрезке неотрицательной функции $I_i(t)$. Поэтому в уравнении (2.5), рассматриваемом на произвольном отрезке «времени» $[0, T]$, правая часть — это суммируемая неотрицательная функция. Итак, задача Коши (2.1), (0.3) представлена в виде уравнения неподвижной точки оператора $\Psi : L_+^n \rightarrow L_+^n$, $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_n)$, определяемого соотношением

$$\forall z \in L_+^n \quad \Psi_i(z)(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_0 \left(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_j(s) ds \right) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.6)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Из соотношения (2.4), устанавливающего равносильность задачи (2.1), (0.3) и уравнения (2.5), прямо следует, что в случае неотрицательных начальных значений $v^0 = (v_1^0, \dots, v_n^0) \in \mathbb{R}_+^n$, если решение задачи Коши существует, то его компоненты — неотрицательные функции. Действительно, в соотношении (2.4) функция z_i — решение уравнения (2.5), и поэтому $z_i \in L_+^n$.

Теорема 2.1. *Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (2.1) с начальными условиями (0.3) при любом $T > 0$ имеет определенное на отрезке $[0, T]$ абсолютно непрерывное решение. Компоненты любого решения $v = (v_1, \dots, v_n) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ при любом $i = \overline{1, n}$ удовлетворяют на $[0, T]$ неравенствам*

$$I_i(t) \leq \dot{v}_i(t) + \alpha v_i(t) \leq \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad (2.7)$$

а следовательно, и неравенствам

$$v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I(s) ds \leq v_i(t) \leq v_i(t) e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I(s) ds + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \sum_{j=1}^n w_{ji}. \quad (2.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим оператор $\Psi : L_+^n \rightarrow L_+^n$, соотношением (2.6). Для любого $z \in L_+^n$ при всех $i = \overline{1, n}$ имеем

$$I_i(t) \leq \Psi_i(z)(t) \leq \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0, T].$$

Поэтому, в случае существования решения v задачи (2.1), (0.3), оно должно удовлетворять неравенствам (2.7).

Проверим условия теоремы 1.1 для оператора $\Psi : L_+^n \rightarrow L_+^n$. Прежде всего отметим, что любой отрезок в пространстве $(L_+^n, \leq)$ является полным и, тем более s -полным (см. пример 1.2). Далее, оператор $\Psi : L_+^n \rightarrow L_+^n$, очевидно, монотонный. И наконец, для функций $\underline{z}(t) = (I_i(t))_{i=\overline{1, n}}$, $\bar{z}(t) = (\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t))_{i=\overline{1, n}}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{z})(t) &= \left(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} I_j(s) ds) + I_i(t) \right)_{i=\overline{1, n}} \geq (I_i(t))_{i=\overline{1, n}} = \underline{z}(t), \\ \Psi(\bar{z})(t) &= \left(\sum_{j=1}^n w_{ji} f_0(v_j^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \bar{z}_j(s) ds) + I_i(t) \right)_{i=\overline{1, n}} \leq \left(\sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t) \right)_{i=\overline{1, n}} = \bar{z}(t). \end{aligned}$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, и согласно этой теореме система интегральных уравнений (2.5) имеет решение $z \in L^n$, удовлетворяющее неравенствам

$$\underline{z} \leq z \leq \bar{z}. \quad (2.9)$$

Следовательно, задача Коши (2.1), (0.3) также разрешима. А из неравенств (2.9) в силу соотношений (2.3), (2.4) следуют требуемые оценки (2.7), (2.8) ее решения v . $\square$

Обозначим через SCP_T — множество определенных на $[0, T]$ абсолютно непрерывных решений задачи Коши (2.1), (0.3) (согласно теореме 2.1, $\text{SCP}_T \neq \emptyset$), и определим на нем дифференциальный оператор $\mathfrak{D}$ следующим соотношением

$$v = (v_i)_{i=\overline{1, n}} \in \text{SCP}_T \mapsto \mathfrak{D}v = (\dot{v}_i + \alpha v_i)_{i=\overline{1, n}} \in L_+^n.$$

Для этого оператора полный образ $\mathfrak{D}(\text{SCP}_T) \subset L_+^n$ совпадает с множеством определенных на $[0, T]$ решений системы (2.5) интегральных уравнений. Полное частично упорядоченное пространство $(L_+^n, \leq)$ является полурешеткой, что позволяет применить предложение 1.1 к исследованию свойств множества $\mathfrak{D}(\text{SCP}_T)$. Таким образом получаем следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. Для любого $T > 0$ в множестве $\mathfrak{D}(\text{SCP}_T) \subset L_+^n$ существует наименьший элемент. Соответственно, в множестве SCP_T абсолютно непрерывных решений задачи Коши (2.1), (0.3) существует нижнее решение $\tilde{v} \in \text{SCP}_T$, т. е. $\tilde{v}(t) \leq v(t) \quad \forall t \in [0, T]$ для любого решения $v \in \text{SCP}_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предложения 1.1 прямо вытекает существование наименьшего элемента $\tilde{z}$ в множестве $\mathfrak{D}(\text{SCP}_T) \subset L_+^n$. Соответствующее решение $\tilde{v} \in \text{SCP}_T$ задачи Коши (2.1), (0.3), определяемое формулой

$$\tilde{v}_i(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \tilde{z}_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n},$$

очевидно, будет нижним. $\square$

З а м е ч а н и е 2.2. Имеет место аналогичное предложению 2.1 утверждение о существовании в множестве $\mathfrak{D}(\text{SCP}_T) \subset L_+^n$ наибольшего элемента. Для его доказательства следует заметить, что для любых функций $\underline{z}, \bar{z} \in L^n$, $\underline{z} \leq \bar{z}$ отрезок $[\underline{z}, \bar{z}]$ является еще полным сверху частично упорядоченным пространством, следовательно, и верхней полурешеткой.

3. Модель нейронного поля с запаздыванием

Рассмотрим модель электрической активности головного мозга типа модели Хопфилда, в которой учитывается, что электрический импульс от j -го нейрона к i -му распространяется не мгновенно, а за некоторое положительное время τ_{ji} . Для описания такого процесса будем использовать систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) &= -\alpha v_i(t) + \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta(v_j(t - \tau_{ji})) + I_i(t), \quad t \geq 0, \\ v_i(t) &= \vartheta_i(t), \quad \text{если } t < 0, \end{aligned} \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.1)$$

где «предыстория» — набор функций $\vartheta_i : [-\tilde{\tau}_i, 0) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\tilde{\tau}_i = \max_{k=\overline{1, n}} \tau_{ik}$, $i = \overline{1, n}$, считается заданным. Подчеркнем, что в формулируемых ниже утверждениях о системе (3.1) не предполагаются какие-либо ограничения на время активации нейрона, т. е. возможны обе ситуации: и $\delta > 0$ (что соответствует непрерывной функции f_δ), и $\delta = 0$ (что соответствует разрывной функции f_0).

Теорема 3.1. Для любого значения параметра $\delta \geq 0$ при любом $T > 0$ задача Коши для системы (3.1) с начальными условиями (0.3) имеет единственное определенное на отрезке $[0, T]$ абсолютно непрерывное решение $v = (v_1, \dots, v_n)$, и это решение удовлетворяет неравенствам (2.7) и (2.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение Δ_{ik} , $i, k \in \overline{1, n}$, сопоставляющее любой скалярной функции $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ функцию

$$\Delta_{ik}(u)(t) = \begin{cases} \vartheta_i(t - \tau_{ik}), & t \in [0, \tau_{ik}), \\ u(t - \tau_{ik}), & t \in [\tau_{ik}, T]. \end{cases}$$

Используя замену (2.3), (2.4) неизвестной абсолютно непрерывной функции v суммируемой функцией z , сведем задачу (3.1), (0.3) к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} z_i(t) &= \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(z_j)(t)) + I_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \\ \text{где } \mathcal{J}_i(z_i)(t) &= v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_i(s) ds, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Исследуемая задача Коши (3.1), (0.3) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима система (3.2), а по решению $z = (z_1, \dots, z_n)$ этой системы формулой (2.4) определяется решение задачи (3.1), (0.3).

Определим оператор $\Psi : L_+^n \rightarrow L_+^n$, сопоставляющий функции $z \in L_+^n$ функцию $\Psi(z) = (\Psi_1(z), \dots, \Psi_n(z))$ такую, что

$$\Psi_i(z) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_\delta(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(z_j)) + I_i, \quad \text{где } \mathcal{J}_i(z_i)(t) = v_i^0 e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} z_i(s) ds, \quad i = \overline{1, n}.$$

Этот оператор является монотонным. Таким образом, существование решения системы (3.2) можно установить рассуждениями, аналогичными использовавшимся в доказательстве теоремы 2.1, и основанными на теореме 1.1 Биркгофа–Тарского о неподвижной точке монотонного оператора в частично упорядоченном пространстве. Однако, такой подход не позволяет установить единственность решения. Поэтому здесь мы применим иной метод доказательства, лишенный этого недостатка и, более того, являющийся конструктивным, т. е. решение системы (3.2) будет найдено в явном виде.

Обозначим

$$\tau = \min_{i,j} \{\tau_{ij}\}.$$

Предлагаемый итерационный алгоритм нахождения решения системы (3.2) использует следующее свойство τ -вольтерровости оператора Ψ : значения функции $\Psi(z)(t)$ при $t \in [0, \tau]$ известны и не зависят от z , а если $t \in (\tau, T]$, то значения функции $\Psi(z)(t)$ определяются значениями $z(t)$ на $[0, t - \tau]$ (подробнее об уравнениях с τ -вольтерровыми операторами, свойствах решений и примененном здесь алгоритме их нахождения см., например, в [20, § 4]).

При $t \in [0, \tau]$ правая часть системы (3.2) равна известной функции

$$\sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(\vartheta_j(t - \tau_{ji})) + I_i(t),$$

и поэтому единственным решением системы (3.2) на отрезке $[0, \tau]$ является

$$z_i^1(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(\vartheta_j(t - \tau_{ji})) + I_i(t), \quad t \in [0, \tau], \quad i = \overline{1, n}.$$

Доопределим функцию z_i^1 на весь отрезок $[0, T]$, сохраняя ее суммируемость (например, значением 0 при $t \in (\tau, T]$), и обозначим полученную функцию через $\tilde{z}_i^1$. Далее, используя эту функцию, получим, что на промежутке $(\tau, 2\tau]$ решением является

$$z_i^2(t) = \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(\tilde{z}_j^1)(t)) + I_i(t), \quad t \in (\tau, 2\tau], \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначим

$$\tilde{z}_i^2(t) = \begin{cases} z_i^1(t), & t \in [0, \tau], \\ z_i^2(t), & t \in (\tau, 2\tau], \\ 0, & t \in (2\tau, T], \end{cases}$$

и используя эту функцию, аналогично найдем решение на промежутке $(2\tau, 3\tau]$. Продолжая описанные построения, за конечное число шагов m (равное целой части числа T/τ) будет получено определенное на всем отрезке $[0, T]$ единственное решение системы (3.2).

Для построенного решения имеют место оценки (2.7) и (2.8), так как правая часть системы (3.2) удовлетворяет неравенствам

$$I_i(t) \leq \sum_{j=1}^n w_{ji} f_{\delta}(\Delta_{ji} \mathcal{J}_j(z_j)(t)) + I_i(t) \leq \sum_{j=1}^n w_{ji} + I_i(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n},$$

при любом $z = (z_1, \dots, z_n) \in L^n$. □

References

- [1] J. J. Hopfield, “Neural networks and physical systems with emergent collective computational properties”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **79** (1982), 2554–2558.
- [2] В. Л. Быков, *Цитология и общая гистология*, Сотис, Санкт-Петербург, 2018. [V. L. Bykov, *Cytology and General Histology*, Sothis, St. Petersburg, 2018 (In Russian)].
- [3] P. Van den Driesche, X. Zou, “Global attractivity in delayed Hopfield neural network models”, *SIAM J. Appl. Math.*, **58** (1998), 1878–1890.
- [4] А. С. Ланина, Е. А. Плужникова, “Об одной модели электрической активности головного мозга”, *Моделирование и оптимизация сложных систем МОС-2022*, Тезисы докладов Международной школы молодых ученых (Суздаль, 30 июня – 5 июля), Аркаим, Владимир, 2022, 31–32. [A. S. Lanina, E. A. Pluzhnikova, “On one model of electrical activity of the brain”, *Modeling and Optimization of Complex Systems MOCS-2022*, Abstracts of the International School of Young Scientists (Suzdal, June 30 – July 5), Arkaim Publ., Vladimir, 2022, 31–32 (In Russian)].
- [5] C. R. Laing, W. Troy, “Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation”, *Physica D.*, **178** (2003), 190–218.
- [6] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, “Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities”, *New J. Phys.*, **9** (2007), 378.
- [7] P. Blomquist, J. Wyller, G. T. Einevoll, “Localized activity patterns in two-population neuronal networks”, *Physica D.*, **206** (2005), 180–212.
- [8] A. Oleynik, A. Ponosov, J. Wyller, “On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models”, *J. Math. Anal. Appl.*, **398** (2013), 335–351.
- [9] S. Coombes, M. R. Owen, “Evans functions for integral neural field equations with Heaviside firing rate function”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **4** (2004), 574–600.
- [10] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, “On the connection of continuous and discontinuous models of neural fields with microstructure: I. General theory”, *Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].
- [11] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, “On connection of continuous and discontinuous models of neuron fields with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D (“bumps”)”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].
- [12] Е. С. Жуковский, “Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах”, *Матем. сб.*, **195**:9 (2004), 3–18; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Volterra inequalities in function spaces”, *Sb. Math.*, **195**:9 (2004), 1235–1251.
- [13] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “On Ordered-covering mappings and implicit differential inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.
- [14] Е. О. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, “On absrtact Volterra equations in partially ordered spaces and their applications”, *Mathematical Analysis With Applications*, International Conference in Honor of the 90th Birthday of Constantin Corduneanu. CONCORD-90 (Ekaterinburg, Russia, July 2018), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **318**, eds. S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov, Springer, Switzerland, 2020, 3–11.
- [15] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:11 (2020), 1471–1482; англ. пер.: S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2020), 1440–1451.
- [16] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Физматлит, М., 2019. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, 5th ed., Fizmatlit Publ., Moscow, 2019 (In Russian)].

- [17] A. V. Arutyunov., E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [18] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel’skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].
- [19] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982. [L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, *Short Course in Functional Analysis*, High School, Moscow, 1982 (In Russian)].
- [20] Е. С. Жуковский, “Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra’s equations”, *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.

Информация об авторах

Ланина Анастасия Сергеевна, магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-5745>

Плужникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Плужникова Елена Александровна
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Поступила в редакцию 14.06.2022 г.
Поступила после рецензирования 24.08.2022 г.
Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the authors

Anastasia S. Lanina, Master’s Degree Student in “Mathematics” Programm. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: lanina.anastasiia5@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-5745>

Elena A. Pluzhnikova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Elena A. Pluzhnikova
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Received 14.06.2022
Reviewed 24.08.2022
Accepted for press 13.09.2022

© Хачатрян Р.А., 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299

УДК 519.6



О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

Аннотация. Рассматривается параметрическая задача вида

$$f(x, y) \rightarrow \inf, \quad x \in M,$$

где M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова или равномерно выпуклого пространства X , а y — параметр, принадлежащий топологическому пространству Y . Для этой задачи определено множество ϵ -оптимальных точек:

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x, y) \leq \inf_{x \in M} f(x, y) + \epsilon\},$$

где $\epsilon > 0$. Обсуждаются условия полунепрерывности и непрерывности многозначного отображения a_ϵ . С использованием методов проекции градиентов и линеаризации получены теоремы о существовании непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ . Одними из основных предположений этих теорем являются выпуклость функционала $f(x, y)$ по переменной x на множестве M и непрерывность производной $f'_x(x, y)$ на множестве $M \times Y$. Приводятся примеры, подтверждающие существенность принятых предположений, а также примеры, иллюстрирующие применение полученных утверждений к оптимизационным задачам.

Ключевые слова: строго выпуклые функции, оператор проектирования, неподвижные точки отображения, многозначное отображение, непрерывные селекции, множество ϵ -оптимальных точек

Для цитирования: Хачатрян Р.А. О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 139. С. 284–299. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299.

© R. A. Khachatryan, 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299



On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional

Rafik A. KHACHATRYAN

Yerevan State University

1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Abstract. The article considers a parametric problem of the form

$$f(x, y) \rightarrow \inf, \quad x \in M,$$

where M is a convex closed subset of a Hilbert or uniformly convex space X , y is a parameter belonging to a topological space Y . For this problem, the set of ϵ -optimal points is given by

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x, y) \leq \inf_{x \in M} f(x, y) + \epsilon\},$$

where $\epsilon > 0$. Conditions for the semicontinuity and continuity of the multivalued mapping a_ϵ are discussed. Using gradient projection and linearization methods, we obtain theorems on the existence of continuous selections of the multivalued mapping a_ϵ . One of the main assumptions of these theorems is the convexity of the functional $f(x, y)$ with respect to the variable x on the set M and continuity of the derivative $f'_x(x, y)$ on the set $M \times Y$. Examples that confirm the significance of the assumptions made are given, as well as examples illustrating the application of the obtained statements to optimization problems.

Keywords: strictly convex functions, projection operator, fixed points of a mapping, multivalued mapping, continuous selections, set of ϵ -optimal points

Mathematics Subject Classification: 54C60, 52A40.

For citation: Khachatryan R.A. O sushchestvovanii nepreryvnykh selektsiy mnogoznachnogo otobrazheniya, svyazannogo s zadachey minimizatsii funktsionala [On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 284–299. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-139-284-299. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследование зависимости экстремальных значений функционала и множеств соответствующих аргументов от параметра — одна из основных задач математической теории чувствительности (см., например, [1]). В прикладных оптимизационных задачах целевой функционал, как правило, бывает известен с некоторой погрешностью. Погрешность также возникает при численном решении задач оптимизации. Таким образом, естественно возникает вопрос о нахождении «почти оптимального» элемента, т. е. элемента, в котором значение минимизируемого функционала мало отличается от экстремального. Соответственно, при рассмотрении вопросов чувствительности следует исследовать зависимость от параметра множеств «почти оптимальных» аргументов. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

1. Вспомогательные сведения

Напомним вначале некоторые известные понятия многозначного анализа (подробнее см., например, [2]), используемые в работе.

Пусть X, Y — топологические пространства, $a : X \rightarrow 2^Y$ многозначное отображение с замкнутыми значениями. Это отображение называют полунепрерывным сверху в $x_0 \in X$, если для любой окрестности $N(a(x_0))$ множества $a(x_0)$ существует окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$a(x) \subset N(a(x_0)) \quad \forall x \in N(x_0).$$

Отображение a называют полунепрерывным снизу в x_0 , если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой окрестности $N(y_0)$ точки y_0 существует окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$a(x) \cap N(y_0) \neq \emptyset \quad \forall x \in N(x_0).$$

Если отображение полунепрерывно сверху и снизу в x_0 , то его называют непрерывным в этой точке. Отображение, полунепрерывное сверху (полунепрерывное снизу, непрерывное), во всех точках $x_0 \in X$ называют полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным).

Селекцией многозначного отображения $a : X \rightarrow 2^Y$ называется такая однозначная функция $y(x)$, что $y(x) \in a(x)$ при всех $x \in X$. Условия существования непрерывной селекции дает следующая классическая теорема Э. Майкла [3].

Теорема 1.1. Пусть X — паракомпактное пространство, Y — банахово пространство, $a : X \rightarrow 2^Y$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение с выпуклыми замкнутыми значениями. Тогда для любых $x_0 \in X$, $y_0 \in a(x_0)$ существует непрерывная селекция $y(x)$ отображения a такая, что $y(x_0) = y_0$.

В дальнейшем нам потребуется еще следующий известный результат о непрерывной зависимости от параметра неподвижной точки сжимающего однозначного отображения (см. [4, Теорема II. 3.7, с. 203]).

Теорема 1.2. Пусть X — полное метрическое пространство, Y — топологическое пространство, и отображение $v : X \times Y \rightarrow X$ непрерывно. Если при некотором $k \in [0, 1)$ выполнено

$$\rho(v(x_1, y), v(x_2, y)) \leq k\rho(x_1, x_2) \quad \forall y \in Y \quad \forall x_1, x_2 \in X,$$

то существует такая непрерывная функция $u : Y \rightarrow X$, что

$$u(y) = v(u(y), y) \quad \forall y \in Y.$$

2. Условия непрерывности многозначного отображения a_ϵ

Пусть X и Y — топологические пространства, M — некоторое подмножество из X . Пусть $f(x, y)$ — вещественный функционал на произведении $X \times Y$. При фиксированном $y \in Y$ рассмотрим задачу минимизации функционала f на множестве M :

$$f(x, y) \rightarrow \inf, \quad x \in M \subseteq X. \quad (2.1)$$

Положим

$$a_0(y) = \{x \in X \mid f(x, y) = V(y) \equiv \inf_{x \in M} f(x, y)\}.$$

В литературе обычно рассматриваются вопрос непрерывности функции V или многозначного отображения a_0 , зависящих от параметра y . В [5] подробно исследована непрерывность функционала $V(y)$, $y \in Y$, когда X и Y — локально выпуклые топологические пространства, а функционал $f(x, y)$ является выпуклым на произведении $X \times Y$.

Приведем пример, показывающий, что условие выпуклости функционала f существенно для непрерывности V .

Пример 2.1. Пусть $M = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, а функционал f задан формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что f не является выпуклым по совокупности переменных. Для рассматриваемой задачи функционал V определяется формулой

$$V(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} < y \leq 1, \end{cases}$$

и терпит разрыв в точке $y = \frac{1}{2}$.

Следующая теорема описывает поведение множества точек минимумов $a_0(y)$ (см. [6, Предложение 23, с. 125]).

Теорема 2.1. Пусть X — хаусдорфово компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство, и функционал f является непрерывным на $X \times Y$. Тогда функционал V непрерывен, а многозначное отображение a_0 полунепрерывно сверху.

В условиях теоремы 2.1, если множество $a_0(x)$ одноточечно, то однозначное отображение a_0 непрерывно.

При рассмотрении задач вида (2.1), возникающих на практике, необходимо учитывать, что минимизирующий функционал f бывает известен (вообще говоря) с погрешностью. Таким образом, на практике приходится иметь дело с «возмущенной задачей» вида (2.1), состоящей в отыскании «почти оптимального» элемента, т. е. элемента, в котором значение

минимизируемого функционала мало отличается от его точной нижней грани. Поэтому для элемента y и числа $\epsilon > 0$ естественно определить множество

$$a_\epsilon(y) = \{x \in M \mid f(x, y) \leq \inf_{x \in M} f(x, y) + \epsilon\}. \quad (2.2)$$

Если $M \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, а функционал $f(x, y)$ непрерывен по совокупности переменных и является выпуклым по x , то, согласно [7, пример 5.10, с. 156], многозначное отображение a_ϵ непрерывно. При таких предположениях в [8] методом проекции градиентов построены непрерывные селекции отображения a_ϵ .

В работе [9] даны условия липшицевости многозначного отображения вида (2.2), когда $f(x, y)$ — выпуклый полунепрерывный снизу функционал на $X \times Y$, где X и Y — нормированные пространства.

Как показано в следующем примере, выпуклость по x функционала $f(x, y)$ является существенным условием для непрерывности многозначного отображения a_ϵ ,

Пример 2.2. Пусть

$$f(x, y) = 1 + \cos(x + y), \quad x \in [0, 2\pi], \quad y \in \mathbb{R}.$$

Этот функционал не является выпуклым по x . Нетрудно проверить, что отображение

$$a_\epsilon(y) = \{x \in [0, 2\pi] \mid \cos(x + y) \leq \epsilon - 1\} \quad (\epsilon \in (0, 1))$$

не является полунепрерывным снизу в точке $y = \arccos(\epsilon - 1)$.

3. Непрерывные селекции отображения a_ϵ (случай гильбертова пространства X)

В некоторых из предлагаемых ниже утверждений мы отказываемся от условия непрерывности функционала f по совокупности переменных (x, y) и компактности пространства X . Вместо этого будем предполагать, что M — выпуклое замкнутое подмножество некоторого гильбертова или строго нормированного пространства, и потребуем выпуклость функционала f по переменной x . При таких предположениях мы построим непрерывные селекции многозначного отображения a_ϵ , проходящие через точку (x_0, y_0) , где $x_0 \in a_0(y_0)$.

Приведем пример непрерывного многозначного отображения a_ϵ такого, что через любую точку его графика проходят непрерывные селекции, несмотря на то, что пространство Y не является паракомпактным.

Пример 3.1. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ зафиксируем сходящуюся к a последовательность $\{r_n(a)\}$, $n \in \mathbb{N}$ рациональных чисел, причем если a рационально, то положим $r_n(a) = a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Множества $O_k(a) = \{r_n(a), n \geq k\}$, где $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ составляют базу некоторой топологии Υ на $\mathbb{R}$. В [10, пример 5, с. 18] доказано, что пространство $(\mathbb{R}, \Upsilon)$ не является паракомпактом.

Теперь рассмотрим задачу (2.1), где $X = [0, 1]$, $Y = (\mathbb{R}, \Upsilon)$, а $f(x, y) = xy$. Для этой задачи отображение a_ϵ определяется формулой

$$a_\epsilon(y) = \begin{cases} [0, 1], & \text{если } y = 0, \\ [0, \frac{\epsilon}{y}] \cap [0, 1], & \text{если } y > 0, \\ [0, 1] \cap [1 + \frac{\epsilon}{y}, +\infty), & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что отображение a_ϵ непрерывно в смысле топологии Υ , и через любую точку (x_0, y_0) , $x_0 \in a_\epsilon(y_0)$ проходят непрерывные селекции.

Если пространство X гильбертово, а Y — **произвольное** топологическое пространство для построения непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ , проходящих через любую точку его графика, ниже в этом параграфе (см. теорему 3.3) мы будем пользоваться методом проекции градиентов. В методе проекции градиентов функциональная последовательность $x_k(y)$ генерируется по правилу

$$x_{k+1}(y) = \Pi_M(x_k(y) - \alpha_k f'_x(x_k(y), y)), \quad x_0(y) \equiv x_0 \in M \quad \forall y \in Y, \quad (3.1)$$

где параметр шага α_k выбирается определенным образом. Когда пространство X равномерно выпукло, для построения непрерывных селекций отображения a_ϵ применяется метод линеаризации (см. [11]).

Итак, в этом параграфе мы рассмотрим вопрос существования непрерывных селекций многозначного отображения a_ϵ в случае, когда M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства X , а Y — топологическое пространство (возможно непаракompактное). Мы покажем, что метод градиентного спуска вида (3.1) является удобным аппаратом построения таких селекций.

Обозначим через (a, b) скалярное произведение векторов a и b в гильбертовом пространстве X . Предположим, что при фиксированном параметре $y \in Y$ функция $f(\cdot, y)$ определена на открытом множестве $\Omega \subseteq X$, содержащем заданное выпуклое замкнутое множество M .

Теорема 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) M — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства X , а Y — топологическое пространство;
- 2) $f : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, производная $f'_x(x, y)$ по Фреше которой непрерывна по совокупности переменных (x, y) ;
- 3) $f'_x(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной x , т. е. существует число $L > 0$ такое, что

$$\|f'_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y)\| \leq L \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \forall y \in Y;$$

- 4) функция $f(x, y)$ сильно равномерно выпукла по x на множестве M , т. е. существует число $\alpha > 0$, такое, что

$$f(x_1, y) \geq f(x_2, y) + (f'_x(x_2, y), x_1 - x_2) + \frac{\alpha}{2} \|x_1 - x_2\|^2 \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \forall y \in Y.$$

Тогда задача (2.1) для произвольного $y \in Y$ имеет единственное решение $x^*(y)$ и отображение $x^* : Y \rightarrow M$ непрерывно.

Доказательство. Определим отображение $v : M \times Y \rightarrow M$ соотношением

$$v(x, y) = \Pi_M(x - \frac{\alpha}{L^2} f'_x(x, y)).$$

Покажем, что оно удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Так как оператор проектирования Π_M является сжимающим с константой, равной единице, имеем

$$\begin{aligned} \|v(x_1, y) - x(x_2, y)\|^2 &= \|\Pi_M(x_1 - \frac{\alpha}{L^2} f'_x(x_1, y)) - \Pi_M(x_2 - \frac{\alpha}{L^2} f'_x(x_2, y))\|^2 \\ &\leq \|(x_1 - x_2) - \frac{\alpha}{L^2} (f'_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y))\|^2 = \\ &\|x_1 - x_2\|^2 + (\frac{\alpha}{L^2})^2 \|f'_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y)\|^2 - 2\frac{\alpha}{L^2} (f'_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y), x_1 - x_2) \\ &\leq (1 + (\frac{\alpha}{L^2})^2 L^2 - 2\frac{\alpha^2}{L^2}) \|x_1 - x_2\|^2 = (1 - \frac{\alpha^2}{L^2}) \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что отображение $V : M \times Y \rightarrow M$ сжимающее и непрерывное. Поэтому, согласно теореме 1.1, существует непрерывное отображение $x^*(y)$, такое, что $x^*(y) = v(x^*(y), y) \quad \forall y \in Y$. Согласно [12, Лемма 2.2, с. 225] точка $x^*(y)$ является решением задачи 2.1. $\square$

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 1.2.

Пример 3.2. Пусть $X = [0, 1]$, $Y = [-1, 0]$, функция f задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & \text{если } y = 0, \\ x^2 + xy + 1, & \text{если } y \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет условиям (2)–(4) теоремы 3.1. Задача (2.1) в этом случае для произвольного $y \in Y$ имеет единственное непрерывное решение $x^*(y) = -\frac{y}{2}$, $y \in Y$. Заметим, что функция f разрывна в точках $(x, 0)$, $x \in [0, 1]$.

Следствие 3.1. Пусть множество $M \subset X$ выпукло, замкнуто и ограничено, а $f(x, y)$ — выпуклая по x функция, причем ее производная $f'_x(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $(x, y) \in \Omega \times Y$. Пусть $x_0 \in a_0(y_0)$. Тогда существует непрерывное отображение $x : Y \rightarrow M$, такое, что

$$x(y) \in a_\epsilon(y) \quad \forall y \in Y, \quad x(y_0) = x_0.$$

Доказательство. Положим

$$g(x, y) = f(x, y) + \delta \|x - x_0\|^2,$$

где δ — некоторое положительное число. Рассмотрим следующую задачу минимизации по x при фиксированном параметре y :

$$g(x, y) \rightarrow \min, \quad x \in M.$$

Ясно, что функция g удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.1. Поэтому существует непрерывное отображение $x_\delta(y)$ такое, что

$$g(x, y) \geq g(x_\delta(y), y) \quad \forall x \in M \quad \forall y \in Y. \quad (3.2)$$

Пусть $z \in M$. Для произвольного $\lambda \in (0, 1)$ положим

$$x_\lambda = (1 - \lambda)x_\delta(y) + \lambda z.$$

Подставляя x_λ вместо x в неравенство (3.2), получим

$$\begin{aligned} f(x_\delta(y), y) + \delta \|x_\delta(y) - x_0\|^2 &\leq f(x_\lambda, y) + \delta \|x_\delta(y) - x_0\|^2 \\ &= f((1 - \lambda)x_\delta(y) + \lambda z, y) + \delta \|x_\delta(y) - x_0 + \lambda(z - x_\delta(y))\|^2 \leq (1 - \lambda)f(x_\delta(y), y) + \lambda f(z, y) \\ &\quad + \delta (\|x_\delta(y) - x_0\|^2 + 2\lambda(x_\delta(y) - x_0, z - x_\delta(y)) + \lambda^2 \|z - x_\delta(y)\|^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$f(z, y) - f(x_\delta(y), y) \geq 2\delta(x_0 - x_\delta(y), z - x_\delta(y)) - \lambda \|z - x_\delta(y)\|^2.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем неравенство

$$f(z, y) - f(x_\delta(y), y) \geq 2\delta(x_0 - x_\delta(y), z - x_\delta(y)) \quad \forall z \in M \quad \forall y \in Y.$$

Отсюда

$$f(x_\delta(y), y) \leq \min_{z \in M} f(z, y) + 2\delta D^2,$$

где D — диаметр множества M . Теперь, если $\delta < \frac{\epsilon}{2D^2}$, то

$$f(x_\delta(y), y) \leq \min_{z \in M} f(z, y) + \epsilon.$$

Покажем, что $x_\delta(y_0) = x_0$. Так как $x_\delta(y)$ — решение вышеуказанной задачи, имеем

$$f(x, y) + \delta \|x - x_0\|^2 \geq f(x_\delta(y), y) + \delta \|x_\delta(y) - x_0\|^2 \quad \forall x \in M \quad \forall y \in Y.$$

Полагая здесь $x = x_0$, $y = y_0$, получим

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_\delta(y_0), y_0) + \delta \|x_\delta(y_0) - x_0\|^2.$$

Отсюда, если $x_\delta(y_0) \neq x_0$, то $f(x_0, y_0) > f(x_\delta(y_0), y_0)$, но это противоречит тому, что x_0 — точка минимума функции f при параметре y_0 . $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) функция $f(x, y)$ выпукла по x на выпуклом замкнутом и ограниченном подмножестве M гильбертова пространства X ;
- 2) производная $f'_x(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) и ограничена на множестве $M \times Y$, т. е. существует число $G > 0$, такое, что

$$\|f'_x(x, y)\| \leq G \quad \forall (x, y) \in M \times Y.$$

Тогда для $x_0 \in a_0(y_0)$, $\epsilon > 0$ существует непрерывное отображение $x(y)$ такое, что

$$f(x(y), y) < V(y) + \epsilon \quad \forall y \in Y, \quad x(y_0) = x_0.$$

Доказательство. Пусть $x^*(y)$ — решение задачи (2.1). Для построения непрерывного отображения $x(y)$ применим метод проекции градиентов (3.1), причем параметр шага α_k выберем следующим образом

$$\alpha_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < +\infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(y) - x^*(y)\|^2 &\leq \|x_k(y) - \alpha_k f'_x(x_k(y), y) - x^*(y)\|^2 \\ &= \|x_k(y) - x^*(y)\|^2 - 2\alpha_k (f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)) + \alpha_k^2 \|f'_x(x_k(y), y)\|^2. \end{aligned}$$

Просуммируем это неравенство по всем k от 0 до n , где n фиксировано. Получим

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1}(y) - x^*(y)\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*(y)\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k (f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)) + \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \|f'_x(x_k(y), y)\|^2. \end{aligned}$$

Так как функция $f(x, y)$ выпукла по x , справедливо неравенство

$$f(x, y) - f(x_k(y), y) \geq (f'_x(x_k(y), y), x - x_k(y)) \quad \forall x \in M.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k (f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)) &\leq \sum_{k=0}^n \alpha_k (f'_x(x_k(y), y), x_k(y) - x^*(y)) \\ &\leq \frac{1}{2} \|x_0 - x^*(y)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \|f'_x(x_k(y), y)\|^2, \end{aligned}$$

и из этого неравенства следует, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \sum_{k=1}^n \alpha_k (f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)) \\ &\leq \frac{1}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \left(\frac{1}{2} \|x_0 - x^*(y)\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \|f'_x(x_k(y), y)\|^2 \right). \quad (3.3) \end{aligned}$$

Положим

$$\bar{x}_n(y) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k(y).$$

Так как функция f выпукла по x , то из (3.3) получим

$$f(\bar{x}_n(y), y) - f(x^*(y), y) \leq \frac{1}{\sum_{k=0}^n \alpha_k} \left(\frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{2} G \sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \right), \quad (3.4)$$

где D — диаметр множества M . Правая часть неравенства (3.4) для достаточно больших n становится меньше ϵ , поэтому из этого неравенства следует, что

$$f(\bar{x}_n(y), y) < \min_{x \in M} f(x, y) + \epsilon.$$

Поскольку $x_0 \in a_0(y_0)$, справедливы равенства

$$x_1(y_0) = \Pi_M(x_0 - \alpha_1 f'_x(x_0, y_0)) = x_0.$$

По индукции легко можно установить, что $x_k(y_0) = x_0$ для любого k . Следовательно, $\bar{x}_n(y_0) = x_0$. $\square$

Теорема 3.3. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) M — выпуклое компактное подмножество гильбертова пространства X , а Y — топологическое пространство;
- 2) функция $f(x, y)$ — выпукла по x на множестве M и непрерывна по совокупности переменных (x, y) на множестве $M \times Y$;
- 3) производная $f'_x(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) на $M \times Y$.

Тогда через любую точку (x_0, y_0) , $x_0 \in a_\epsilon(y_0)$, проходит непрерывная селекция отображения a_ϵ , т. е. существует непрерывная функция $x : Y \rightarrow M$ такая, что

$$x(y) \in a_\epsilon(y) \quad \forall y \in Y, \quad x(y_0) = x_0.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1 функция V непрерывна. Поэтому многозначное отображение a_ϵ непрерывно. Если пространство Y паракомпактно, то утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы Майкла. Рассмотрим общий случай, когда Y — произвольное топологическое пространство.

Из теоремы 3.2 следует, что существует непрерывная функция $D(y)$ такая, что

$$f(D(y), y) < V(y) + \epsilon, \quad D(y) \in M \quad \forall y \in Y. \quad (3.5)$$

Положим

$$T(y) = \{t \in [0, 1] \mid tx_0 + (1 - t)D(y) \in a_\epsilon(y)\}.$$

Обозначим через $t(y)$ максимальное число множества $T(y)$. Очевидно, что $t(y_0) = 1$, и поэтому

$$t(y_0)x_0 + (1 - t(y_0))D(y_0) = x_0.$$

Докажем, что функция $t(y)$ непрерывна, и это будет означать, что искомой селекцией многозначного отображения a_ϵ является отображение $t(y)x_0 + (1 - t(y))D(y)$. Допустим противное. Пусть $y_k \rightarrow \bar{y}$ и $\bar{t}$ — предельная точка последовательности $\{t(y_k)\}$ (т. е. $t(y_{k_n}) \rightarrow \bar{t}$) такая, что $\bar{t} < t(\bar{y})$. Так как

$$f(t(\bar{y})x_0 + (1 - t(\bar{y}))D(\bar{y}), \bar{y}) - V(\bar{y}) - \epsilon \leq 0,$$

то отсюда и из (3.5), используя также выпуклость функции $f(x, y)$ по x , получим

$$f(\bar{t}x_0 + (1 - \bar{t})D(\bar{y}), \bar{y}) - V(\bar{y}) < \epsilon.$$

Из этого неравенства вследствие непрерывности функции f для достаточно больших n имеем

$$f(t(y_{k_n})x_0 + (1 - t(y_{k_n}))D(y_{k_n}), y_{k_n}) - V(y_{k_n}) < \epsilon.$$

Зафиксируем n . Используя непрерывность функции $f(x, y)$ по x , можем найти число $\delta > 0$ настолько малым, что

$$f(t(y_{k_n}) + \delta)x_0 + (1 - (t(y_{k_n}) + \delta))D(y_{k_n}), y_{k_n}) - V(y_{k_n}) < \epsilon,$$

а это неравенство противоречит определению $t(y_{k_n})$. Таким образом, доказано, что все предельные точки последовательности $\{t(y_k)\}$ совпадают с точкой $t(\bar{y})$. Следовательно, функция $t(y)$ непрерывна. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Рассмотрим отображение

$$b(y) = \{y \in M \mid f(x, y) \leq V(y) + \epsilon(y)\},$$

где $\epsilon(y)$ — некоторая положительная функция, зависящая от параметра y . Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 3.3 для такого отображения, вообще говоря, неверно.

П р и м е р 3.3. Пусть $X = [0, 2]$, $Y = [0, 1]$, $\epsilon(y) = y$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ xy + 1, & \text{если } y \in (0, 1]. \end{cases}$$

В этом случае

$$b(y) = \begin{cases} [0, 2], & \text{если } y = 0, \\ [0, 1], & \text{если } y \in (0, 1], \end{cases}$$

$a_0(0) = [0, 2]$. Очевидно, что многозначное отображение b не является полунепрерывным снизу в точке 0 и через точку $(0, 2)$ не проходит непрерывная селекция отображения b .

4. Непрерывные селекции отображения a_ϵ (случай равномерно выпуклого пространства X)

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (2.1) в ситуации, когда пространство X равномерно выпукло. Напомним, что пространство X называется равномерно выпуклым, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta(\epsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ и $\|u - v\| \geq \epsilon > 0$ следует

$$\|u + v\| \leq 2(1 - \delta(\epsilon)).$$

Приведем некоторые свойства равномерно выпуклых пространств, которые нам понадобятся в дальнейшем (подробнее см. [13]).

В равномерно выпуклом пространстве X , если $x_n \rightarrow x_0$ слабо и $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$, то $x_n \rightarrow x_0$ сильно. Всякое равномерно выпуклое пространство является рефлексивным. Пространства L_p ($1 < p < \infty$) являются равномерно выпуклыми.

Лемма 4.1. Пусть X — равномерно выпуклое банахово пространство и $p(x) = \|x\|^2$. Тогда p является строго выпуклым функционалом, т. е. если $x_1 \neq x_2$, то

$$p(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)p(x_2) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что для некоторых $x_1 \neq x_2$ имеет место равенство

$$p\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}p(x_1) + \frac{1}{2}p(x_2). \quad (4.1)$$

Запишем это равенство в виде

$$\|x_1 + x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2. \quad (4.2)$$

Используя (4.2), получим

$$2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 \leq (\|x_1\| + \|x_2\|)^2 = \|x_1\|^2 + 2\|x_1\|\|x_2\| + \|x_2\|^2,$$

откуда $(\|x_1\| - \|x_2\|)^2 \leq 0$, т. е. $\|x_1\| = \|x_2\|$. Отсюда и из (4.2) следует, что

$$\|x_1 + x_2\| = 2\|x_1\|. \quad (4.3)$$

Но поскольку пространство X строго нормировано, имеет место неравенство

$$\left\| \frac{x_1}{\|x_1\|} + \frac{x_2}{\|x_2\|} \right\| < 2,$$

т. е.

$$\|x_1 + x_2\| < 2\|x_1\|,$$

которое противоречит (4.3).

Итак, доказано, что ни при каких $x_1 \neq x_2$ равенство (4.1) не выполняется. Поэтому, согласно [14, Теорема 3, с. 3], для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеет место строгое неравенство

$$p(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)p(x_2),$$

означающее, что p — строго выпуклый функционал. $\square$

Будем обозначать значение линейного непрерывного функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$ через $\langle x^*, x \rangle$.

Лемма 4.2. Пусть выполнены следующие условия

1) M — выпуклое замкнутое ограниченное множество равномерно выпуклого банахова пространства X , Y — топологическое пространство и $z : Y \rightarrow M$ — непрерывное отображение;

2) для функции $f : X \times Y \rightarrow R$ производная $f'_x(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных (x, y) .

Тогда функция

$$F(x, y) = \langle f'_x(z(y), y), x - z(y) \rangle + \delta \|z(y) - x\|^2, \quad (\delta > 0)$$

при каждом фиксированном $y \in Y$ имеет единственный минимум $x^*(y)$ на M и отображение $x^* : Y \rightarrow M$ непрерывно.

Доказательство. Сначала покажем, что функция минимума

$$W(y) = \min_{x \in M} F(x, y)$$

непрерывна.

Пусть $y_0 \in Y$, $\epsilon > 0$. Поскольку F полунепрерывно сверху по совокупности переменных (x, y) , каждой точке $x \in M$ можно сопоставить открытые окрестности $N(x)$ и $N(y_0)$ точек x и y_0 такие, что

$$F(x', y) \leq F(x, y_0) + \epsilon \quad \forall x' \in N(x) \cap M, \quad y \in N(y_0).$$

Следовательно,

$$W(y) = \min_{u \in M} F(u, y) \leq F(x', y) \leq F(x, y_0) + \epsilon \quad \forall x \in M,$$

т. е.

$$W(y) \leq W(y_0) + \epsilon \quad \forall y \in N(y_0).$$

Покажем теперь, что W полунепрерывно снизу в y_0 . Пусть $y_n \rightarrow y_0$ сильно, а $x_n \rightarrow x$ слабо. Тогда

$$\begin{aligned} F(x_n, y_n) &\geq \langle f'_x(z(y_n), y_n) - f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0 \rangle \\ &\quad + \langle f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0 \rangle + \delta \|z(y_n) - x_n\|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку функционал $J(u) = \|u\|^2$ слабо полунепрерывен снизу и

$$\langle f'_x(z(y_n), y_n) - f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0 \rangle \rightarrow 0, \quad \langle f'_x(z(y_0), y_0), y_n - y_0 \rangle \rightarrow 0,$$

то из (4.4) получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n) \geq F(x, y_0). \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что каждой точке $x \in M$ можно сопоставить слабо открытую окрестность $N(x)$ точки x и окрестность $N_x(y_0)$ точки y_0 такие, что

$$F(x', y) \geq F(x, y_0) - \epsilon \quad \forall x' \in N(x) \cap M, \quad \forall y \in N_x(y_0). \quad (4.6)$$

Поскольку M — выпукло и замкнуто, то оно слабо компактно в равномерно выпуклом банаховом пространстве X . Следовательно, множество M может быть покрыто m окрестностями $N(x_i)$ и, таким образом, множество $N = \bigcup_{i=1}^m N(x_i)$ является окрестностью множества M . Положим

$$N(y_0) = \bigcap_{i=1}^m N_{x_i}(y_0).$$

Если $y \in N(y_0)$ и $x \in M$, то $x \in N$ и, следовательно, x принадлежит некоторому $N(x_i)$. Так как $y \in N_{x_i}(y_0)$, то из (4.6) следует, что

$$F(x, y) \geq F(x_i, y_0) - \epsilon \geq W(y_0) - \epsilon.$$

Отсюда

$$W(y) \geq W(y_0) - \epsilon.$$

Теперь покажем, что отображение $x^* : Y \rightarrow M$ непрерывно. Пусть $y_n \rightarrow y_0$. Тогда $W(y_n) \rightarrow W(y_0)$. Из этого соотношения, поскольку $x^*(y_n) \rightarrow x^*(y_0)$ слабо и поэтому

$$\langle f'_x(z(y_n), y_n), x^*(y_n) - z(y_n) \rangle \rightarrow \langle f'_x(z(y_0), y_0), x^*(y_0) - z(y_0) \rangle,$$

получаем

$$\delta \|z(y_n) - x^*(y_n)\|^2 \rightarrow \delta \|z(y_0) - x^*(y_0)\|^2. \quad (4.7)$$

Так как $z(y_n) - x^*(y_n) \rightarrow z(y_0) - x^*(y_0)$ слабо, то из (4.7) следует, что $z(y_n) - x^*(y_n) \rightarrow z(y_0) - x^*(y_0)$ сильно, т. е. $x^*(y_n) \rightarrow x^*(y_0)$ сильно. $\square$

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) M — выпуклое замкнутое и ограниченное множество равномерно выпуклого банахова пространства X , а Y — топологический компакт;

- 2) функция $f(x, y)$ выпукла по x ;
- 3) производная $f'_x(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по переменной x , т. е. существует число $L > 0$, такое, что

$$\|f_x(x_1, y) - f'_x(x_2, y)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \forall y \in Y.$$

Тогда для $x_0 \in a_0(y_0)$, $\epsilon > 0$ существует непрерывное отображение $x : Y \rightarrow M$, такое, что

$$x(y) \in a_\epsilon(y) \quad \forall y \in Y, \quad x(y_0) = x_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отображение $f'_x(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по первому аргументу, имеем

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y) - f(x_2, y) - \langle f'_x(x_2, y), x_1 - x_2 \rangle| \\ &= \left| \int_0^1 \langle f'_x(x_2 + \theta(x_1 - x_2), y) - f'_x(x_2, y), x_1 - x_2 \rangle d\theta \right| \leq \frac{L}{2} \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Построим функциональную последовательность $\{x_k(y)\}$ по следующему рекуррентному правилу

$$x_0(y) = y_0, \quad x_{k+1}(y) = \arg \min_{x \in M} \{ \langle f'_x(x_k(y), y), x - x_k(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x - x_k(y)\|^2 \}.$$

Согласно лемме 4.2 для любого k отображение $x_k : Y \rightarrow M$ непрерывно и, нетрудно заметить, что $x_k(y_0) = y_0$. Пусть $x^*(y) \in a_0(y) \quad \forall y \in Y$. Из (4.8) следует, что

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}(y), y) - f(x_k(y), y) &\leq \langle f'_x(x_k(y), y), x - x_k(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1}(y) - x_k(y)\|^2 \\ &\leq \min_{x \in M} \{ \langle f'_x(x_k(y), y), x - x_k(y) \rangle + \frac{L}{2} \|x - x_k(y)\|^2 \} \\ &\leq \min_{x \in M} \{ f(x, y) - f(x_k(y), y) + \frac{L}{2} \|x - x_k(y)\|^2 \}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Так как множество M выпуклое, то

$$[x_k(y), x^*(y)] = \{ (1 - \alpha)x_k(y) + \alpha x^*(y), \quad \alpha \in [0, 1] \} \subseteq M.$$

Учитывая это равенство, из (4.9) получаем

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}(y), y) - f(x_k(y), y) &\leq \min_{x \in [x_k(y), x^*(y)]} \{ f(x, y) - f(x_k(y), y) + \frac{L}{2} \|x - x_k(y)\|^2 \} \\ &= f((1 - \alpha)x_k(y) + \alpha x^*(y), y) - f(x_k(y), y) + \frac{L}{2} \alpha^2 \|x^*(y) - x_k(y)\|^2 \\ &\leq -\alpha(f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)) + \frac{L}{2} \alpha^2 \|x^*(y) - x_k(y)\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя в это неравенство вместо α значение α_k , определенное в теореме 3.2, и затем просуммируем полученные неравенства по всем k от 0 до n , получим

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (f(x_k(y), y) - f(x^*(y), y)) \leq f(x_0, y) - f(x_{n+1}(y), y) + \frac{L}{2} D \sum_{k=0}^n \alpha_k^2, \quad (4.10)$$

где D — диаметр множества M . Из неравенства (4.10) следует, что

$$\begin{aligned} |f(x_{n+1}(y), y) - f(x_0, y)| &\leq \|f'_x(x_0, y)\| \|x_0 - x_{n+1}(y)\| + \frac{L}{2} \|x_0 - x_{n+1}(y)\|^2 \\ &\leq GD + \frac{L}{2} D \equiv C_1, \end{aligned}$$

где число G такое, что

$$\|f'_x(x_0, y)\| \leq G \quad \forall y \in Y.$$

Такое число существует, поскольку производная $f'_x(x_0, y)$ непрерывна по y , а Y — компакт.

Таким образом, правая часть неравенства (4.10) ограничена некоторым числом C_2 . Положим

$$\bar{x}_n(y) = \frac{1}{A_n} \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k(y),$$

где $A_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k$. Тогда из (4.10) следует, что

$$f(\bar{x}_n(y), y) - f(x^*(y), y) \leq \frac{C_2}{A_n}.$$

Так как $\frac{C_2}{A_n} \rightarrow 0$, для достаточно больших n имеем

$$f(\bar{x}_n(y), y) - f(x^*(y), y) \leq \epsilon.$$

И в заключение заметим, что $\bar{x}_n(y_0) = x_0$. □

References

- [1] F. Bonnans, A. Shapiro, “Optimization problems with perturbations: a guided tour”, *SIAM Rev.*, **40**:2 (1998), 228–264.
- [2] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Multivalued Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2014 (In Russian)].
- [3] E. Michael, “Continuous selections 1”, *Annals of Mathematics*, **63**:2 (1956), 361–382.
- [4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].
- [5] П.-Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, М., 1975, 496 с. [P.-J. Laurent, *Approximation and Optimization*, Mir Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 496 pp.]
- [6] Ж.-П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988, 512 с. [J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Mir Publ., Moscow, 1988 (In Russian), 512 pp.]
- [7] R. T. Rockafellar, Roger J. B. Wets, *Variational Analysis*, Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, 2009.
- [8] Р. А. Хачатрян, “Метод проекции градиентов и непрерывные селекции многозначных отображений”, *Вестник евразийского национального университета имени Л. Н. Гумилева. Серия математика, информатика, механика*, 2018, № (3)124, 95–100. [R. A. Khachatryan, “The gradient projection method and continuous selections of multivalued mappings”, *Bulletin of the Eurasian National University named after L. N. Gumilyev. Series Mathematics, Informatics, Mechanics*, 2018, № (3)124, 95–100 (In Russian)].

- [9] В. И. Бердышев, “Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 483–509; англ. пер.: V. I. Berdyshev, “Continuity of a multivalued mapping connected with the problem of minimizing a functional”, *Izv. Math.*, **16**:3 (1981), 431–456.
- [10] А. В. Архангельский, “Паракомпактность и метризация. Метод покрытий в классификации пространств”, *Общая топология – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **51**, ВИНТИ, М., 1989, 5–80. [A. V. Arkhangel'skii, “Paracompactness and metrization. The covering method in classification of spaces”, *General topology – 3*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **51**, VINITI, Moscow, 1989, 5–80 (In Russian)].
- [11] Б. Н. Пшеничный, *Метод линеаризации*, Наука, М., 1983, 136 с. [B. N. Pshenichny, *Linearization Method*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian), 136 pp.]
- [12] А. Г. Сухарев, А. Г. Тимохов, В. В. Федоров, *Курс методов оптимизации*, Наука, М., 1986. [A. G. Sukharev, A. G. Timokhov, V. V. Fedorov, *Course of Optimization Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].
- [13] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].
- [14] В. Н. Малоземов, “Удивительное свойство выпуклых функций”, *Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы*, Избранные доклады Международной конференции «Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В. Ф. Демьянова (Санкт-Петербург, 22–27 мая 2017), Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург, 2017. [V. N. Malozemov, “An amazing property of convex functions”, *Constructive Non-Smooth Analysis and Related Questions*, Selected Papers of the International Conference “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Issues” Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov (St. Petersburg, May 22–27, 2017), International Mathematical Institute. Leonhard Euler, St. Petersburg, 2017 (In Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры численного анализа и математического моделирования. Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7908-0562>

Поступила в редакцию 21.06.2022 г.
 Поступила после рецензирования 29.08.2022 г.
 Принята к публикации 13.09.2022 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department. Yerevan State University, Yerevan, Armenia.
 E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7908-0562>

Received 21.06.2022
 Reviewed 29.08.2022
 Accepted for press 13.09.2022

С глубоким прискорбием извещаем о том, что ушел из жизни
Фернандо Мануэль Феррейра Лобо Перейра



20.10.1956–17.06.2022

известный португальский математик, специалист в области управления и робототехники, блестящий педагог, лектор, организатор, руководитель.

Ф. Л. Перейра получил ряд выдающихся математических результатов по общей теории управления, теории импульсных управляемых систем, динамической оптимизации. Эти исследования нашли многочисленные важные приложения в робототехнике, энергетических и производственных системах. Он являлся автором более 400 научных статей, нескольких монографий, обзоров и глав книг, участвовал в более чем 50 научно-исследовательских проектах, выполнявшихся при поддержке португальских, европейских фондов. Был экспертом исследовательских программ ЕС, членом редакционных коллегий международных научных журналов, программных и организационных комитетов международных конференций и семинаров.

Тесные научные и дружеские отношения связывали Ф. Л. Перейру с российскими математиками. Он много раз посещал Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, участвовал во всех конференциях «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» (начиная с первой конференции в 1999 году), был редактором, автором статей, рецензентом, членом редакционной коллегии журнала «Вестник российских университетов. Математика». Многие из нас участвовали в научных мероприятиях в Университете Порту, организованных Ф. Л. Перейрой, бывали у него в гостях и сохранили в памяти его гостеприимство, теплую дружескую атмосферу его дома. Ф. Л. Перейра был очень разносторонним человеком, интересным собеседником и внимательным слушателем, он увлекался спортом, был великолепным автогонщиком. Ученики, коллеги, друзья и все, кому посчастливилось знать этого очень доброго обаятельного человека и выдающегося ученого, организатора науки, навсегда сохранят о нем самые теплые и светлые воспоминания.

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \dots$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow \dots$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\{ \dots \} \rightarrow \{ \dots \}$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow \dots$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

$$\dots$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \dots$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \bar{\alpha} + 2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$x \leq \gamma^x(1 + \dots)$$

$$L(E, \varphi, K) \dots$$

$$A \frac{4}{\pi} \dots$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\dots$$

$$| \dots | \dots$$

$$\dots$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$(E, \rho, \varphi)$$

$$\psi = \frac{1}{\mu} \dots$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$K, 0/X, 0 \text{ Ind } 2/\dots$$

$$\det(X, \dots)$$