ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

ISSN 2686-9667

20129 >

9 772686 966000

Том 25
№ 129
2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 25, № 129, 2020

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам (распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html;
http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-76133 от 03 июля 2019 г.
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: М.А. Сенина, М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: Н.А. Евсюкова, В.В. Клочихин
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2020. – Т. 25, № 129. – 104 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129

Подписано в печать 23.03.2020. Дата выхода в свет 02.07.2020
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 13,0. Усл. печ. л. 12,61. Тираж 1000 экз. Заказ № 20090. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

16+

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 25, no. 129, 2020

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”.

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html;
http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИ no. ФС77-76133 of July 3, 2019
Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

Editors: M.A. Senina, M.I. Filatova
English texts editors: N.A. Evsyukova, V.V. Klochikhin
Technical editor M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2020. – Vol. 25, no. 129. – 104 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129

Podpisano v pechat' 23.03.2020. Data vykhoda v svet 02.07.2020
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat’ na rizografe.
Pech. list 13,0. Usl. pech. list 12,61. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 20090. Tsena svobodnaya

Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,
FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy”
of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

Уважаемые читатели, коллеги, дорогие друзья!

В этом году 9 апреля профессору Александру Ивановичу Булгакову исполнилось бы 70 лет. Памяти Александра Ивановича посвящается очередная Международная конференция «Колмогоровские чтения IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020)», которую оргкомитет совместно с редакцией журнала планирует провести в Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина 12–16 октября.

Мы, конечно, очень обеспокоены пандемией коронавируса. Желаем всем здоровья и надеемся, что COVID–19 будет побежден, что конференция состоится в запланированные сроки.

Во всех выпусках журнала этого года будут публиковаться статьи, представленные участниками конференции. Перед вами первый выпуск журнала, содержащий материалы предстоящей конференции. В этом журнале мы также размещаем небольшую заметку об Александре Ивановиче Булгакове и информацию о конференции ОПУ–2020. Оргкомитет конференции и редакция журнала приглашает всех наших читателей, коллег к участию в конференции, к публикации материалов докладов в журнале.

Обращаем ваше внимание, что в прошлом 2019 году наш журнал изменил название. Новое название «Вестник российских университетов. Математика» соответствует тематике и направлениям деятельности журнала. Журнал стремится не только оперативно представлять новые математические результаты, но и давать обзоры современных исследований, информировать о конференциях и семинарах, о математической жизни академических и научных организаций, публиковать очерки о математиках. В журнале теперь есть следующие рубрики:

ОБЗОРНЫЕ СТАТЬИ
СТАТЬИ
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ
В МАТЕМАТИЧЕСКОМ СООБЩЕСТВЕ

Более полную информацию и архив всех выпусков начиная с 1996 года можно найти на сайте журнала http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html. На сайте также можно скачать стилевые файлы для оформления статей.

Редакция журнала надеется на сотрудничество с коллегами, научными коллективами. Мы приглашаем вас, дорогие друзья, присылать материалы для всех рубрик журнала, участвовать в рецензировании поступающих рукописей. Надеемся, что вместе мы сможем сделать интересный и полезный журнал.

Гл. редактор *Е. С. Жуковский*

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17

УДК 51-76, 517.988

О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1], **Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")

Evgenii O. BURLAKOV[1], **Ivan N. MALKOV**[2]

[1] Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

[2] University of Tyumen

6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

Аннотация. Предложен метод, позволяющий исследовать существование и близость между стационарными решениями непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей с микроструктурой. Данная часть содержит результаты о близости стационарных решений конкретных усредненных уравнений нейронных полей с непрерывной и разрывной функциями активации. Проведено численное исследование стационарных радиально симметричных решений (бампов) уравнения нейронного поля с разрывной функцией активации нейронов и заданной микроструктурой.

Ключевые слова: математическая нейробиология; уравнения нейронных полей с микроструктурой; разрешимость; непрерывная зависимость решений от параметров

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-511-23001 РЯИК_а).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы») // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 6–17. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17.

Abstract. We suggest a method allowing to investigate existence and the measure of proximity between the stationary solutions to continuous and discontinuous neural fields with microstructure. The present part involves results on proximity of the stationary solutions to specific homogenized neural field equations with continuous and discontinuous activation functions. The results of numerical investigation of radially symmetric stationary solutions (bumps) to the neural field with a discontinuous activation function and a given microstructure are presented.

Keywords: mathematical neuroscience; neural field models with microstructure; solvability; continuous dependence on parameters

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 20-511-23001 РЯИК_а).

For citation: Burlakov E.O., Malkov I.N. O svyazi nepreryvnykh i razryvnykh modeley neyronnykh poley s mikrostrukturoy: II. Radial'no simmetrichnyye statsionarnyye resheniya v 2D («bampy») [On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 6–17. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-6-17. (In Russian, Abstr. in Engl.)

3. Стационарные радиально симметричные решения двумерных усредненных уравнений нейронных полей («бампы»)

В первой части данной работы (см. [1]) были сформулированы и доказаны теоремы о разрешимости непрерывных и разрывных уравнений нейронных полей с микроструктурой и о непрерывной зависимости решений при переходе от непрерывной функции активации к разрывной. Здесь мы применим результаты [1] к исследованию стационарных радиально симметричных локализованных решений усредненной модели двумерного нейронного поля (так назваемых «бампов»). Рассмотрим следующее уравнение (всюду ниже используются обозначениями статьи [1]):

$$\begin{gathered}\partial_t u(t,x,x_{\mathrm f}) = -u(t,x,x_{\mathrm f})+\int\limits_{\Xi}\int\limits_{\mathcal Y}\omega(x-y,x_{\mathrm f}-y_{\mathrm f})f_\lambda(u(t,y,y_{\mathrm f}))dy_{\mathrm f}dy,\\ t>0,\ x\in\Xi\subseteq R^2,\ x_{\mathrm f}\in\mathcal Y,\ \lambda\geq 0.\end{gathered}\tag{3.1}$$

Здесь $\mathcal Y$ — двумерный тор, семейство функций $f_\lambda : R\to[0,1]$ удовлетворяет условиям $(\mathbf{A3})$, $(\mathbf{A4})$ работы [1], функция связи $\omega : R^2\times\mathcal Y\to R$ может быть представлена в виде следующей композиции

$$\omega(x,x_{\mathrm f}) = \frac{1}{\sigma(x_{\mathrm f})}\chi\Big(\frac{|x|}{\sigma(x_{\mathrm f})}\Big),\tag{3.2}$$

где $\sigma\in C(\mathcal Y,(0,\infty))$ $\mathcal Y$-периодична, $\chi\in C^2([0,\infty),R)\bigcap L([0,\infty),\mu,R)$. Таким образом, условия $(\mathbf{A1})$ и $(\mathbf{A2})$ работы [1] также выполнены.

О п р е д е л е н и е 3.1. Зафиксируем $\theta>0$, $a>0$. *Решением типа «бамп»* (далее, «бампом») радиуса $a>0$ уравнения (3.1) назовем стационарное решение $U\in C^1(\Xi\times\mathcal Y,R)$ уравнения (3.1), обладающее следующими свойствами:

- $U(x,x_{\mathrm f})\equiv U(|x|)$, где $x\in\Xi$, $x_{\mathrm f}\in\mathcal Y$, $x=|x|\exp(i\alpha)$, $\alpha\in[0,2\pi)$;
- $U(x)=\theta$ при $x\in\{x\in\Xi,\ |x|=a\}$;
- $U(x)>\theta$ для всех $x\in B_\Xi(0,a)$ и $U(x)<\theta$ при всех $x\in\Xi\setminus\overline{B_\Xi(0,a)}$.

Далее рассмотрим случай, когда функция активации представлена функцией Хевисайда с выбранным пороговым значением θ, то есть $f_0(u) = H(u-\theta)$, $u \in R$.

В полярных координатах бамп радиуса a будет удовлетворять следующему уравнению:

$$U(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \langle\omega\rangle(|x-y|)rdrd\alpha, \qquad y = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha)), \tag{3.3}$$

где $\langle\omega\rangle$ — среднее значение функции связи на периоде переменного x_{f}, то есть

$$\langle\omega\rangle(x) = \int_{\mathcal{Y}} \omega(x, x_{\mathrm{f}})dx_{\mathrm{f}}.$$

Вычислим двойной интеграл в (3.3) при помощи двумерного преобразования Фурье радиально симметричной функции $\langle\omega\rangle(|x|)$, имеющего следующее выражение в полярных координатах:

$$\langle\omega\rangle(|x|) = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho J_0(|x|\rho)d\rho,$$

где $\widehat{\langle\omega\rangle}$ — преобразование Ханкеля функции $\langle\omega\rangle$, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν ($\nu = 0, 1, \dots$). Подставляя последнее выражение в (3.3), получаем

$$U(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \Big(\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho J_0(|x-y|\rho)d\rho\Big)rdrd\alpha.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$U(x) = \int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)\rho\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0(|x-y|\rho)rdrd\alpha\Big)d\rho.$$

В полярных координатах $|x-y| = \sqrt{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r\cos(\beta-\alpha)}$, $x = (\varrho\cos(\beta), \varrho\sin(\beta))$,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^a J_0(|xy|\rho)rdrd\alpha &= \int_0^{2\pi}\int_0^a J_0\Big(\rho\sqrt{\varrho^2+r^2-2\varrho r\cos(\beta-\alpha)}\Big)rdrd\alpha \\ &= \frac{1}{\rho^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a\rho} J_0(\rho\sqrt{\tilde\varrho^2+\tilde r^2-2\tilde\varrho\tilde r\cos(\alpha)})\tilde r d\tilde r d\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, бамп радиуса a уравнения (3.1) в случае $\lambda = 0$ задается следующим выражением:

$$U(x) = 2\pi a\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho)J_0(|x|\rho)J_1(a\rho)d\rho. \tag{3.4}$$

Предположим, что выполнено следующее условие:

$$\int\limits_0^\infty |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)|r^2dr < \infty. \tag{3.5}$$

Для любого $\gamma > 0$, используя свойства J_ν (см., например, [2]), получаем

$$|U(x)| \leq 2\pi a \int\limits_0^\gamma |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)|dr + 2\pi a \Big| \int\limits_\gamma^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|x|r) J_1(ar) dr \Big|.$$

В силу сделанных предположений на функции $\chi \in C^2([0,\infty), R) \bigcap L([0,\infty), \mu, R)$ и $\sigma \in C(\mathcal{Y}, (0,\infty))$ и соответствующих свойств функции связи ω, определенной (3.2), для любого $\epsilon > 0$ имеем

$$2\pi a \int\limits_0^{\gamma(\epsilon)} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)|dr < \epsilon/2$$

при некотором $\gamma(\epsilon) > 0$. Учитывая свойства функции Бесселя J_0, при любом $\gamma > 0$ имеем $J_0(sr) \to 0$ равномерно по $r \in [\gamma, \infty)$ при $s \to \infty$. Используя данные свойства и оценку (3.5), получаем

$$|U(x)| \leq 2\pi a \int\limits_0^{\gamma(\epsilon)} |\widehat{\langle\omega\rangle}(r)|dr + 2\pi a \Big| \int\limits_{\gamma(\epsilon)}^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_1(ar) dr \Big| \Big| J_0(|x|r) \Big| < \epsilon$$

при некоторых $\gamma(\epsilon) > 0$ и достаточно большом $|x| \in R$. Таким образом, соотношение

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0 \tag{3.6}$$

гарантирует, что радиально симметричный бамп U удовлетворяет θ-условию (см. [1]).

З а м е ч а н и е 3.1. Для справедливости (3.6) вместо выполнения неравенства (3.5) достаточно сделать следующее, более мягкое, предположение:

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_1(ar) dr < \infty.$$

Однако, условие (3.5) нам потребуется в дальнейших доказательствах. Заметим также, что условие (3.5) выполнено для всех типичных функций межнейронной связи, используемых в нейромоделировании (см, например, [3]).

Определим следующее пространство

$$C^1_{rs}(\Xi, R) = \{u \in C^1(\Xi, R),\ u(x) = u(|x|) \text{ для всех } x \in \Xi\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)\Big(J_0(ar)J_1(ar)+\frac{ar}{2}\big(J_0^2(ar)-2J_1^2(ar)-J_0(ar)J_2(ar)\big)\Big)dr\neq 0. \tag{3.7}$$

Тогда для некоторого достаточно большого $r>0$ *и соответствующего ему множества* $\Omega_r=\Omega\cap B_{R^2}(0,r)\subset R^2$ *найдется такое* $\varepsilon>0$, *что симметричный бамп* U, *заданный* (3.4), *будет единственным решением* (3.1) *в* $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ *при* $\lambda=0$.

Доказательство. Из определения 3.1 следует, что

$$2\pi a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(ar)J_1(ar)dr=\theta.$$

Таким образом, выполнение соотношения (3.7) гарантирует единственность решения U в шаре $B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)$ для некоторых $\varepsilon>0$ и $r>0$. □

Выразим (3.4) в терминах операторного уравнения (как это было сделано в параграфе 2 работы [1])

$$U=F_0U.$$

Для того, чтобы применить теорему 2.2 статьи [1] вычислим топологическую степень $\deg(I-F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon),0)$. По определению вращения векторного поля (см., например, [4]), получаем

$$\deg(I-F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon),0)=\operatorname{ind}(F_0,B_{C^1_{rs}(\Omega,R)}(U,\varepsilon)).$$

Без ограничения общности рассуждений предполагаем, что неподвижная точка U оператора F_0 единственна в замкнутом шаре $\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$. Таким образом, F_0 отображает $\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$ в некоторое многообразие $\mathcal{M}\subset C^1(\Omega_r,R)$,

$$\mathcal{M}=\{v=2\pi c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(\cdot\, r)J_1(cr)dr,\ c\in \mathrm{M}\subset R\},$$

где множество M выбрано так, что оно содержит c_u для всех $u\in\overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$ (в качестве такого множества M можно выбрать, например, отрезок). Определим отображение $\phi:\mathrm{M}\to\mathcal{M}$:

$$\phi(c)=v(x),\ v(x)=2\pi c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(|x|r)J_1(cr)dr,\ x\in\Omega. \tag{3.8}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнено следующее условие:*

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r)J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(ar)+\frac{ar}{2}\big(J_0(ar)-J_2(ar)\big)\Big)dr\not\equiv 0. \tag{3.9}$$

Тогда отображение $\phi:\mathrm{M}\to\mathcal{M}$, *заданное* (3.8), *является гомеоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим, что $\phi : \mathrm{M} \to \mathcal{M}$ является сюръекцией по определению. Инъективность отображения $\phi : \mathrm{M} \to \mathcal{M}$ следует из выражения для его производной Фреше, вычисленной в точке $c \in \mathrm{M}$:

$$\phi'(c) = 2\pi \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(cr) + \frac{cr}{2}\big(J_0(cr) - J_2(cr)\big)\Big) dr$$

и условия (3.9). □

Для произвольного оператора $\Phi : \overline{D} \to \mathfrak{B}$ обозначим через $\mathrm{ind}(\Phi, D)$ вращение его векторного поля. Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3. *(см. [4]) Пусть D — открытое подмножество компактного выпуклого множества $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}'$ — выпуклое подмножество некоторого банахова пространства $\mathfrak{B}'$. Пусть также отображение $\psi : D \to \mathfrak{D}$ вполне непрерывно, и множество его неподвижных точек компактно в $\mathfrak{B}$. Если отображение $\phi : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ является гомеоморфизмом, то композиция $\phi\circ\psi\circ\phi^{-1} : \phi(D) \to \mathfrak{D}'$ вполне непрерывна, множество ее неподвижных точек компактно, и справедливо равенство*

$$\mathrm{ind}(\psi, D) = \mathrm{ind}(\phi\circ\psi\circ\phi^{-1}, \phi(D)).$$

Определим теперь сужение $\mathcal{F}$ отображения F_0 на множество $\mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}$, то есть

$$\mathcal{F} = F_0|_{\mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)}},$$
$$\mathcal{F} : \mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)} \to \mathcal{M}.$$

Ввиду данного определения, отображение $\psi = \mathcal{F} : \mathcal{M} \bigcap \overline{B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)} \to \mathcal{M}$ удовлетворяет условиям леммы 3.3. Используя свойства вращения векторного поля, получаем

$$\mathrm{ind}(F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)) = \mathrm{ind}(\mathcal{F}, \mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)).$$

По лемме 3.3 имеем

$$\mathrm{ind}(\mathcal{F}, \mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)) = \mathrm{ind}(\phi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\phi, \phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))).$$

Лемма 3.4. *Пусть выполнено условие (3.5). Тогда существует такое $\delta > 0$, что оператор $\Psi = \phi^{-1}\circ\mathcal{F}\circ\phi$ отображает $\overline{B_R(a,\delta)}$ в* M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u(x) = 2\pi c \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|x|r) J_1(cr) dr, \ c \in \mathrm{M}.$$

Используя теорему о среднем и свойства функции Бесселя J_1, оценим

$$\|u - U\|_{C^1(\Omega_r,R)} \le$$
$$2\pi\Big\| c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r) J_1(cr) dr - a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r) J_1(ar) dr\Big\|_{C(\Omega_r,R)} +$$
$$2\pi\Big\| -c\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) r J_1(|\cdot|r) J_1(cr) dr + a\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) r J_1(|\cdot|r) J_1(ar) dr\Big\|_{C(\Omega_r,R)} \le$$

$$2\pi\Big\| \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r)\big(c\frac{r}{2}(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)) + aJ_1(ar)\big)dr(a-c)\Big\|_{C(\Omega_r,R)} +$$
$$2\pi\Big\| \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) rJ_1(|\cdot|r)\big(c\frac{r}{2}(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)) + aJ_1(ar)\big)dr(a-c)\Big\|_{C(\Omega_r,R)},$$

где $\xi \in B_R(a,|a-c|)$. Из выполнения условия (3.5) следует, что

$$\|u-U\|_{C^1(\Omega_r,R)} \le \mathfrak{N}|c-a| < \varepsilon$$

для некоторого $\mathfrak{N} \in R$ и всех $c \in \overline{B_R(a,\delta)}$, где $\delta < \varepsilon/\mathfrak{N}$. Из последней оценки получаем

$$\overline{B_R(a,\delta)} \subset \phi^{-1}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon)),$$

что, в свою очередь, влечет

$$\mathcal{M}_\delta \subset \mathcal{F}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))$$
$$\mathcal{M}_\delta = \Big\{ v = 2\pi c \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(|\cdot|r) J_1(cr) dr,\ c \in \overline{B_R(a,\delta)} \Big\}.$$

Итак,

$$\phi^{-1}(\mathcal{M}_\delta) = \overline{B_R(a,\delta)} \subset \phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))).$$

□

З а м е ч а н и е 3.2. Условие (3.5) избыточно для доказательства леммы 3.4. Однако то условие, до которого оно может быть ослаблено, является более громоздким и сложным для проверки.

Легко видеть, что a является неподвижной точкой оператора $\Psi : \overline{B_R(a,\delta)} \to$ M. Более того, a — изолированная неподвижная точка Ψ ввиду того, что U — изолированная неподвижная точка отображения $\mathcal{F}$ и ввиду топологической инвариантности вращения векторного поля. Вращение векторного поля отображения в конечномерном пространстве может быть вычислено по формуле

$$\mathrm{ind}(\Psi, \phi^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{M} \bigcap B_{C^1_{rs}(\Omega_r,R)}(U,\varepsilon))) = \mathrm{sgn}(1 - \Psi'(a)).$$

Из задания оператора $\Psi = \phi^{-1} \circ \mathcal{F} \circ \phi$ следует, что

$$2\pi c \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(\Psi(c)r) J_1(cr) dr = \theta \quad \text{для всех} \quad c \in \overline{B_R(a,\delta)}.$$

Используя теорему о неявной функции и цепное правило дифференцирования, получаем

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(ar) J_1(ar) + ar\Big(J'_{0a}(ar) J_1(ar) \Psi'(a) + J_0(ar) J'_{1a}(ar)\Big) dr = 0.$$

Последнее выражение дает следующее достаточное условие для выполнения неравенства $\Psi'(a) \neq 1$:

$$\int_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(r) J_0(ar) J_1(ar) + a\Big(J_0(ar)J_1(ar)\Big)'_a dr \neq 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, $\deg(I - F_0, B_{C^1_{rs}(\Omega_r, R)}(U, \varepsilon), 0) \neq 0$ в случае, если выполнено неравенство (3.10).

Учитывая теоремы 2.1 и 2.2 работы [1], мы получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть функции семейства $f_\lambda : R \to [0,1]$, $\lambda \in [0,\infty)$, являются непрерывными, неубывающими и удовлетворяют следующим условияи по параметру λ:*

(i) $f_0(u) = \begin{cases} 0, & u \le \theta, \\ 1, & u > \theta \end{cases}$

(ii) $f_\lambda \to f_{\widehat{\lambda}}$ равномерно на R при $\lambda \to \widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda} \in (0,\infty)$;

(iii) для любого $\varepsilon > 0$, $f_\lambda \to f_0$ равномерно на $R \setminus B_R(\theta, \varepsilon)$ при $\lambda \to 0$.

Пусть также функция связи ω задана равенством (3.2), где функция $\sigma \in C(\mathcal{Y}, (0,\infty))$ $\mathcal{Y}$-периодична, а функция $\chi \in C^2([0,\infty), R) \bigcap L([0,\infty), \mu, R)$ радиально симметрична. Наконец, пусть выполнены условия (3.5), (3.7), (3.9) и (3.10).

Тогда найдется такое $r > 0$, что при каждом $\lambda \in (0,\infty)$ существует решение $u_\lambda \in C^1_{rs}(\Omega_r, R))$ уравнения (3.1), где $\Xi = \Omega_r$. Более того, $\|u_\lambda - U\|_{C^1(\Omega_r,R))} \to 0$, при $\lambda \to 0$, где бамп $U \in C^1_{rs}(R^2, R))$ — решение уравнения (3.1) при $\Xi = R^2$, $\lambda = 0$, заданное (3.4).

4. Численное исследование бампов в двумерном уравнении нейронного поля с периодической микроструктурой

Уравнение Амари двумерного неоднородного нейронного поля имеет вид (см. [1], уравнение (0.5))

$$\begin{gathered} \partial_t u_\varepsilon(t,x) = -u_\varepsilon(t,x) + \int_{R^2} \omega_\varepsilon(x-y) f(u_\varepsilon(t,y)) dy, \\ t > 0, \ x \in R^2. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Как было показано в работе [5], в случае периодичности микроструктуры, при $\varepsilon \to 0$ решения (4.1) сходятся к решению следующего уравнения

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,x,x_{\mathrm{f}},\gamma) = -u(t,x,x_{\mathrm{f}},\gamma) + \int_{R^2} \int_{[0,1)^2} \omega(x-y, x_{\mathrm{f}}-y_{\mathrm{f}}, \gamma) f(u(t,y,y_{\mathrm{f}},\gamma)) dy_{\mathrm{f}} dy, \\ t > 0, \ x \in R^2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Неоднородность среды при этом параметризуется с помощью $\gamma \in \Gamma$, где Γ — некоторое допустимое множество значений параметра. Нас будут интересовать условия существования бампов U — решений уравнения (4.2). В случае, когда функция активации f представлена функцией Хевисайда с пороговым значением $\theta > 0$ (случай $\lambda = 0$), такие решения, как было показано в [1], удовлетворяют в полярных координатах уравнению (3.3) и имеют вид (3.4) (см. [1]). Учитывая параметр неоднородности, уравнение (3.4) работы [1] записывается следующим образом

$$U(x,\gamma) = 2\pi a \int\limits_0^\infty \widehat{\langle\omega\rangle}(\rho,\gamma) J_0(|x|\rho) J_1(a\rho) d\rho. \tag{4.3}$$

Таким образом, для заданного порогового значения $\theta > 0$, уравнение

$$U(a,\gamma) = \theta \tag{4.4}$$

задает линию уровня на плоскости параметров a, γ, показывая изменение радиуса a бампа от неоднородности нейронного поля γ.

Зададим функцию связи нейронного поля следующим образом

$$\omega(x, x_{\mathrm{f}}, \gamma) = \frac{1}{\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma)} \chi\Big(\frac{x}{\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma)}\Big),$$

где

$$\sigma(x_{\mathrm{f}},\gamma) = 1 + \gamma\cos(2\pi x_{\mathrm{f}1})\cos(2\pi x_{\mathrm{f}2}),\ x_{\mathrm{f}} = (x_{\mathrm{f}1}, x_{\mathrm{f}2}),\ \gamma \in \Gamma = [0,1)$$

и

$$\chi(x) = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\exp(-|x|)}{2} - \frac{\exp(-|x|/2)}{4}\Big). \tag{4.5}$$

Рисунок 1 представляет собой график функции (4.4) для значений параметра неоднородности $\gamma = 0,\ 0.2,\ 0.5,\ 0.9.$ Абсцисса точки пересечение графика данной функции с прямой $\theta = const$ определяет радиус соответствующего бампа. На рис. 1 использовано значение $\theta = 0.1.$ В целом, картина сосуществования «широкого» и «узкого» бампов при допустимых значениях порога активации θ повторяет случай бампов в одномерной модели Амари (см. [6]). Кроме того, для фиксированного значения порога активации, радиусы, как «широкого», так и «узкого» бампов растут с увеличением неоднородности нейронного поля.

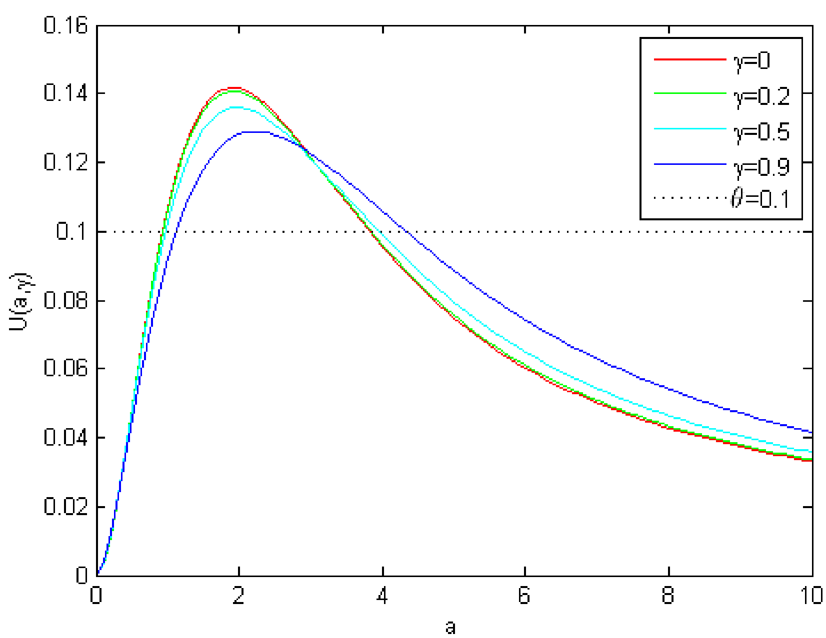


Рис. 1. График функции (4.4) при фиксированных значениях параметра неоднородности γ

Изменение радиусов бампов при вариации параметра неоднородности γ показано на рис. 2 и 3. Радиус a «узкого» бампа растет с увеличением γ. Радиус «широкого» бампа растет для малых и средних значений порога активации θ, убывая при росте γ для больших значений θ. Изменение форм бампов при вариации параметра неоднородности γ представлено на рис. 4.

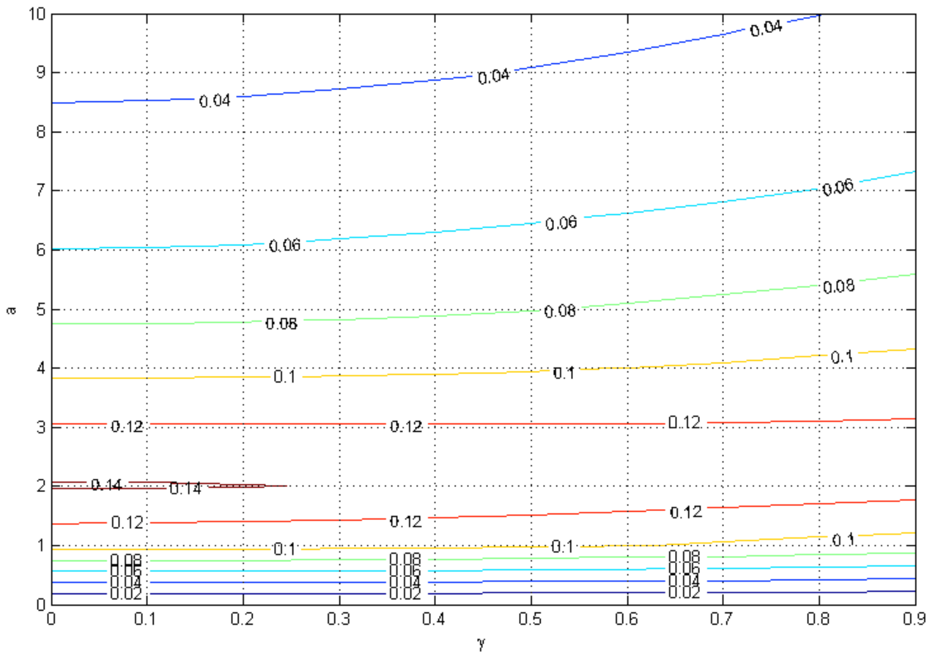


Рис. 2. Линии уровня, определяемые (4.4) для различных значений порога активации (линии отмечены данными значениями)

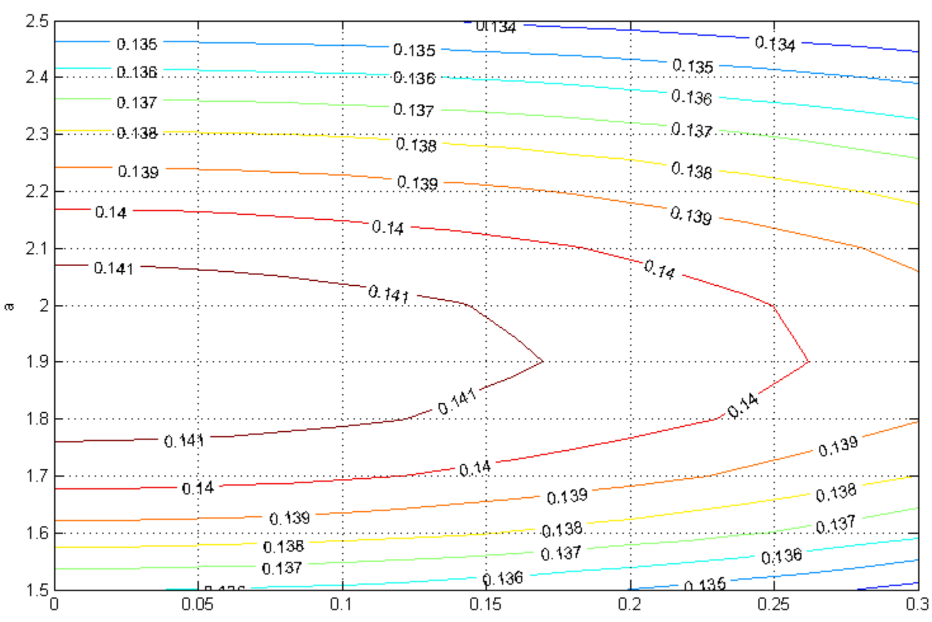


Рис. 3. Увеличение области рис. 2, где «широкий» и «узкий» бампы совпадают (линии уровня отмечены соответствующими значениями порогов активации)

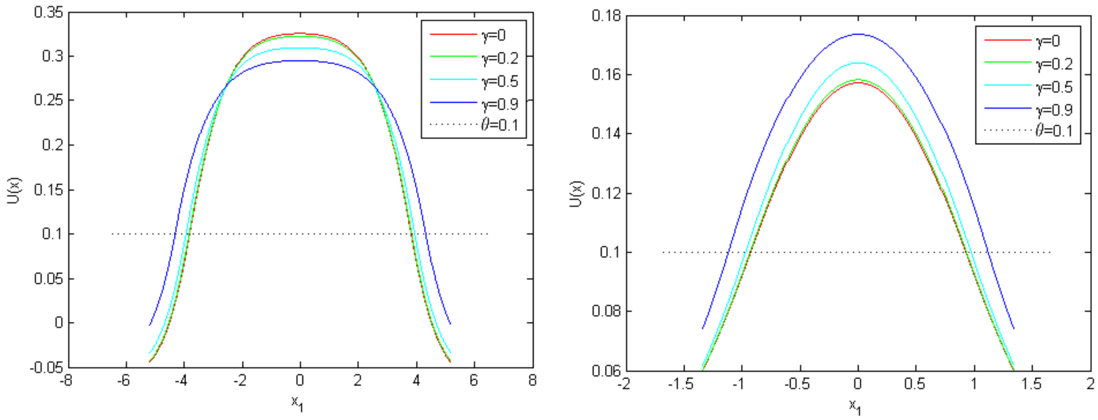


Рис. 4. Форма «широкого» (слева) и «узкого» (справа) бампов $U(x)$, $x=(x_1,x_2)$, при фиксированных значениях параметра неоднородности γ

References

[1] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, "О связи непрерывных и разрывных меделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, "On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure I. General theory", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].

[2] S. Bochner, K. Chandrasekharan, *Fourier Transforms*, Princeton University Press, New Jersey, 1949.

[3] E. Burlakov, E. Zhukovskiy, A. Ponosov, J. Wyller, "Ow well-posedness of generalized neural field equations with delay", *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, **6**:1 (2015), 51–80.

[4] A. Granas, "The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs", *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, **100** (1972), 209–228.

[5] N. Svanstedt, J. L. Woukeng, "Homogenization of a Wilson-Cowan model for neural fields", *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, **14**:3 (2013), 1705–1715.

[6] N. Svanstedt, J. Wyller, E. Malyutina, "A one-population Amari model with periodic microstructure", *Nonlinearity*, **27** (2014), 1394–1417.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, студент института математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Research and Educational Center "Fundamental Mathematical Research". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Student of the Institute of Mathematics and Computer Science. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 14 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 26 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 14 January 2020
Reviewed 26 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24

УДК 517.988.6, 515.124.2

О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Вассим МЕРЧЕЛА**[2] **,**
Андрей Игоревич ШИНДЯПИН[3]

[1)] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

[2)] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[3)] Университет имени Эдуардо Мондлане
3453, Мозамбик, г. Мапуто, ул. Джулиуса Нейрере

On coincidence points of mappings in generalized metric spaces

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA[1] **, Wassim MERCHELA**[2] **, Andrey I. SHINDIAPIN**[3]

[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

[3] Eduardo Mondlane University
Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique

Аннотация. Пусть на пространстве X определена ∞-метрика ρ (возможно, принимающая значение ∞), на пространстве Y определено удовлетворяющее аксиоме тождества ∞-расстояние $d.$ Для отображений $F,G:X\to Y$ рассматривается задача о точке совпадения, т.е. задача о решении уравнения $F(x)=G(x).$ Получены условия существования точки совпадения, использующие множество накрывания отображения F и множество липшицевости отображения G в пространстве $X\times Y.$ Множество α-накрывания ($\alpha>0$) отображения F — это множество таких $(x,y),$ что

$$\exists u\in X\ F(u)=y,\quad \rho(x,u)\leq\alpha^{-1}d(F(x),y),\quad \rho(x,u)<\infty,$$

а множество β-липшицевости ($\beta\geq 0$) отображения G — множество таких $(x,y),$ что

$$\forall u\in X\ G(u)=y\ \Rightarrow\ d(y,G(x))\leq\beta\rho(u,x).$$

Обсуждается связь полученных результатов с известными теоремами о точках совпадения.

Ключевые слова: точка совпадения двух отображений; метрика; расстояние; накрывающее отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке UEM-SIDA 2017-2022 (Подпрограмма № 1.4.2: Наращивание потенциала в математике, статистике и ее приложениях).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Мерчела В., Шиндяпин А.И.* О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 18–24. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24.

Abstract. Let X be a space with ∞-metric ρ (a metric with possibly infinite value) and Y a space with ∞-distance d satisfying the identity axiom. We consider the problem of coincidence point for mappings $F, G : X \to Y$, i.e. the problem of existence of a solution for the equation $F(x) = G(x)$. We provide conditions of the existence of coincidence points in terms of a covering set for the mapping F and a Lipschitz set for the mapping G in the space $X \times Y$. An α-covering set ($\alpha > 0$) of the mapping F is a set of (x, y) such that

$$\exists u \in X \ F(u) = y, \quad \rho(x, u) \leq \alpha^{-1} d(F(x), y), \quad \rho(x, u) < \infty,$$

and a β- Lipschitz set ($\beta \geq 0$) for the mapping G is a set of (x, y) such that

$$\forall u \in X \ G(u) = y \ \Rightarrow \ d(y, G(x)) \leq \beta \rho(u, x).$$

The new results are compared with the known theorems about coincidence points.

Keywords: coincidence point of two mappings; metric; distance; covering mapping

Acknowledgements: The work is partially supported by the UEM-SIDA 2017-2022 (Subprogramme № 1.4.2: Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications).

For citation: Zhukovskaia T.V., Merchela W., Shindiapin A.I. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v obobshchennykh metricheskikh prostranstvakh [On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 18–24.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-18-24. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теорема о существовании точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующими в метрических пространствах, получена А. В. Арутюновым в [1]. В работах [2–4] понятие накрывания было распространено на пространства с различными обобщенными метриками и получены обобщения на такие пространства теоремы о точке совпадения. Эти исследования вызваны не только естественным стремлением определить максимально широкий класс пространств, в которых справедливы результаты о точках совпадения, но и приложениями таких утверждений к различным функциональным уравнениям (в том числе, к дифференциальным и интегральным уравнениям, см., например, [5]).

Данная работа продолжает исследование, начатое в работе [6], в которой было получено утверждение о существовании точки совпадения накрывающего и липшицева отображений, действующих из метрического пространства в множество с расстоянием, удовлетворяющим только аксиоме тождества. Здесь мы предполагаем, что расстояние и метрика в рассматриваемых пространствах могут принимать значение ∞, и ослабляем предположения о накрывающих и липшицевых свойствах отображений.

Предлагаемые в статье результаты о точках совпадения отображений в дальнейшем планируется использовать для исследования функциональных уравнений в пространстве измеримых функций.

1. Основные понятия

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$, $X = (X, \rho)$ — пространство с ∞-*метрикой* $\rho : X^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $B_X(x_0, r) = \{x \in X \,|\, \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in (0, \infty]$.

Пусть на множестве $Y \ne \emptyset$ задано *расстояние* $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее аксиоме тождества:

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2. \tag{1.1}$$

Будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* при $i \to \infty$ к $y \in Y$ и писать $y_i \to y$, если $d(y_i, y) \to 0$. Очевидно, сходящаяся в Y последовательность может иметь более одного предела, кроме того, при сходимости $y_i \to y$ расстояние $d(y, y_i)$ может не сходиться к 0. Для произвольной последовательности $\{y_i\} \subset Y$ обозначим через $\mathrm{Lim} y_i = \{y \,|\, y_i \to y\}$ множество всех пределов этой последовательности.

Отображение $f : X \to Y$ будем называть *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \to x$ выполнено $f(x_i) \to f(x)$, т. е. $f(x) \in \mathrm{Lim} f(x_i)$. Отображение, непрерывное во всех точках множества $V \subset X$, будем называть непрерывным на множестве V. Отметим, что для непрерывности отображения f в точке x единственность предела $f(x)$ последовательности $\{f(x_i)\}$ не требуется. Рассмотрим соответствующий пример.

П р и м е р 1.1. Пусть $X = Y = [0, 1]$, причем в X задана «стандартная метрика» $\rho(x, u) = |x - u|$, $x, u \in [0, 1]$, а в Y — расстояние, определяемое следующими соотношениями:

$$\forall y, z \in [0,1] \quad y > z \;\Rightarrow\; d(y,z) = d(z,y) = \begin{cases} y - z & \text{при } y \ne 1 \text{ и } z \ne 0; \\ \min\{z, 1 - z\} & \text{при } y = 1 \text{ и } z \ne 0; \\ \min\{y, 1 - y\} & \text{при } y \ne 1 \text{ и } z = 0; \\ 1 & \text{при } y = 1 \text{ и } z = 0. \end{cases}$$

В пространстве Y каждая из последовательностей $y_i = i^{-1}$, $z_i = -i^{-1} + 1$ имеет два предела 0 и 1. Отображение $f : X \to Y$, равное $f(x) = x$ при $x \in (0, 1)$ и принимающее любое из значений 0 или 1 при $x = 0$ и $x = 1$, является непрерывным на всем пространстве X.

Теперь приведем определение свойства замкнутости отображения $f : X \to Y$. Обычно используемому для пространств с расстоянием определению замкнутости отображений (см., например, [2,8]) не удовлетворяет отображение f в точке $x \in X$, для которой при $x_i \to x$ предел последовательности $\{f(x_i)\}$ не единственный, и это значительно сокращает преимущества рассмотрения уравнений в пространствах с расстоянием вместо метрики. Поэтому здесь предлагается ослабление этого понятия. Отображение f будем называть *замкнутым* в точке x, если для любой последовательности $\{x_i\} \subset X$ такой, что $x_i \to x$ и $\mathrm{Lim} f(x_i) \ne \emptyset$, выполнено $f(x) \in \mathrm{Lim} f(x_i)$. При таком определении единственность предела последовательности $\{f(x_i)\}$ не является необходимым условием замкнутости отображения. Заметим также, что из непрерывности f в точке x следует замкнутость f в этой точке (как и для отображений «обычных метрических» пространств). Отображение, замкнутое во всех точках множества $V \subset X$, будем называть замкнутым на множестве V.

Сформулируем известные определения свойств накрывания и липшицевости (см. [1]), заменив в пространстве образов «обычную метрику» на расстояние.

Пусть заданы $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$. Отображение $f : X \to Y$ называется *α-накрывающим на множестве* $V \subset X$, если для любых $x \in V$, $y \in Y$ существует $u \in X$ такой, что $f(u) = y$ и $\rho_X(x,u) \leq \alpha^{-1} d\big(f(x), y\big)$. Отображение $f : X \to Y$ называется *β-липшицевым на множестве* $V \subset X$, если для любых $x, u \in V$ выполнено неравенство $d\big(f(x), f(u)\big) \leq \beta\rho(x,u)$.

В формулируемых ниже утверждениях предполагаются выполненными условия, аналогичные приведенным условиям накрывания и липшицевости отображения $f : X \to Y$, использующие следующие множества, введенные в [7]:

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f] = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \exists u \in X \;\; f(u) = y, \;\; \rho(x,u) \leq \alpha^{-1} d(f(x),y), \;\; \rho(x,u) < \infty\big\};$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f] = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall u \in X \;\; f(u) = y \;\Rightarrow\; d(y, f(x)) \leq \beta\rho(u,x)\big\}.$$

Будем называть первое из этих множеств $\mathrm{Cov}_\alpha[f]$ *множеством α-накрывания* этого отображения, а второе множество $\mathrm{Lip}_\beta[f]$ — *множеством β-липшицевости*. Равенство $\mathrm{Cov}_\alpha[f] = V \times Y$ равносильно α-накрыванию на V отображения f, а равенство $\mathrm{Lip}_\beta[f] = V \times Y$ — β-липшицевости на V этого отображения.

2. Теорема о точке совпадения отображений

Пусть заданы отображения $F, G : X \to Y$. Их точкой совпадения называют $x \in X$ такой, что

$$F(x) = G(x). \tag{2.2}$$

Сформулируем условия существования точки совпадения.

Теорема 2.1. *Пусть метрическое пространство X полное и заданы $\alpha > \beta \geq 0$, $x_0 \in X$ такие, что $d\big(F(x_0), G(x_0)\big) < \infty$. Положим*

$$R = (\alpha - \beta)^{-1} d\big(F(x_0), G(x_0)\big), \quad V = B_X(x_0, R).$$

Предположим, что для любого $x \in V$ выполнены включения $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$, $(x, G(x)) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$; на шаре V отображение F является замкнутым, а отображение G — непрерывным, и имеет место следующее соотношение

$$\forall\{x_i\} \subset V \;\forall x \in V \;\; \big(\, x_i \to x \;\; \text{и} \;\; \mathrm{Lim}F(x_i) = \mathrm{Lim}G(x_i) \neq \emptyset\,\big) \;\Rightarrow\; F(x) = G(x). \tag{2.3}$$

Тогда в шаре V существует решение уравнения (2.2).

Доказательство. Покажем, что существует последовательность $\{x_i\} \subset X$ такая, что выполнены соотношения

$$\begin{gathered} x_i \in V, \quad F(x_i) = G(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ \rho(x_{i-1}, x_i) \leq q\rho(x_{i-2}, x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, \quad \text{где} \;\; q = \beta/\alpha. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Проверим эти соотношения при $i = 1$ и $i = 2$. Пусть x_0 — это заданный в условиях теоремы элемент, $y_0 = G(x_0)$. В силу предположения $(x_0, y_0) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F]$, существует $x_1 \in X$ такой, что

$$F(x_1) = G(x_0) \;\; \text{и} \;\; \rho(x_0, x_1) \leq \alpha^{-1} d\big(F(x_0), G(x_0)\big), \tag{2.5}$$

поэтому $\rho(x_0, x_1) \le R,$ и значит, выполнено $x_1 \in V.$ Положим $y_1 = G(x_1).$ Поскольку $(x_1, y_0) \in \mathrm{Lip}_\beta[G],$ имеет место неравенство

$$d(y_0, y_1) = d\big(G(x_0), G(x_1)\big) \le \beta\rho(x_0, x_1). \tag{2.6}$$

Теперь, в силу предположения $(x_1, y_1) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F],$ существует $x_2 \in X$ такой, что выполнено $F(x_2) = G(x_1)$ и $\rho(x_1, x_2) \le \alpha^{-1} d\big(F(x_1), G(x_1)\big),$ поэтому из соотношений (2.5) и (2.6) получим $\rho(x_1, x_2) \le q\rho(x_0, x_1).$ Заметим, что $x_2 \in V,$ так как

$$\rho(x_0, x_2) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) \le \alpha^{-1}(1+q) d(F(x_0), G(x_0)) \le R.$$

Таким образом, при $i = 1$ и $i = 2$ соотношения (2.4) выполнены.

Предположим, что при всех натуральных $i = \overline{1, n}$ определены элементы $x_i \in X,$ так, что выполнены соотношения (2.4). Покажем, что существует элемент $x_{n+1},$ удовлетворяющий также этим соотношениям.

Так как $(x_n, y_n) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F],$ существует $x_{n+1} \in X$ такой, что

$$F(x_{n+1}) = G(x_n)$$

и имеет место неравенство

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^{-1} d\big(F(x_n), G(x_n)\big).$$

Следовательно,

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^{-1} d\big(G(x_{n-1}), G(x_n)\big) \le q\rho(x_n, x_{n-1}). \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.4), справедливого по предположению индукции при всех $i = \overline{1, n},$ и неравенства (2.7) получаем

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \le \alpha^{-1} q^n d\big(F(x_0), G(x_0)\big). \tag{2.8}$$

Таким образом,

$$\rho(x_0, x_{n+1}) \le \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} q^i d\big(F(x_0), G(x_0)\big) \le \frac{1}{\alpha(1-q)} d\big(F(x_0), G(x_0)\big) = R,$$

т. е. $x_{n+1} \in V.$ Доказано, что соотношение (2.4) выполнено при $i = n+1.$

Из неравенства (2.8) очевидно следует, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Пусть $x_i \to x.$ Тогда $x \in V$ и, вследствие непрерывности отображения G на шаре V получаем $G(x_i) \to G(x).$ А так как $G(x_{i+1}) = F(x_i),$ имеем $\mathrm{Lim} G(x_i) = \mathrm{Lim} F(x_i) \ne \emptyset.$ Отсюда, согласно условию (2.3), получаем $F(x) = G(x).$ $\Box$

З а м е ч а н и е 2.1. В аналогичных теоремах о точках совпадения отображений метрических пространств непрерывность отображения G не предполагается, поскольку непрерывность следует из липшицевости этого отображения. Используемое в доказанной здесь теореме 2.1 ослабленное предположение липшицевости (принадлежность пары $(x, G(x))$ при любом $x \in V$ множеству липшицевости отображения G) уже не обеспечивает требуемую для этого утверждения непрерывность $G.$ Приведем пример отображений, не имеющих точки совпадения, для которых выполнены все условия теоремы 2.1 кроме непрерывности $G.$

П р и м е р 2.2. Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ — вещественная прямая с «обычной метрикой», определим функции $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ формулами

$$F(x) = 2x, \quad G(x) = \begin{cases} x & \text{если } x \neq 0, \\ 1 & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция F является 2-накрывающей и непрерывной на всем $\mathbb{R}$. Покажем, что для $\beta = 1$ выполнено $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$ также на всем $\mathbb{R}$.

Если $x \neq 0$ и $x \neq 1/2$, то $F(x) = 2x \neq 0$ и $F(x) = 2x \neq 1$. В этом случае равенство $F(x) = G(u)$ выполнено только при $u = 2x$, и тогда имеем

$$|G(x) - G(u)| = |G(x) - G(2x)| = |x|, \quad |x - u| = |x - 2x| = |x|.$$

В случае $x = 0$ получаем $F(0) = 0$, а равенство $G(u) = 0$ невозможно. В случае $x \neq 1/2$ уравнение $G(u) = 1$ имеет два решения: $u = 0$ $u = 1$. Для этих значений получаем

$$|G(1/2) - G(u)| = 1/2, \quad |1/2 - u| = 1/2.$$

Итак, $(x, F(x)) \in \mathrm{Lip}_\beta[G]$ ($\beta = 1$) на всем $\mathbb{R}$, но при этом функция G не является непрерывной. Остальные условия теоремы 2.1 выполнены, тем не менее, рассматриваемые функции не имеют точки совпадения.

В заключение отметим, что из теоремы 2.1 следуют результаты о точке совпадения, полученные в работе [6]. В [6, теорема 2.1] предполагалось, что метрика ρ и расстояние d могут иметь только конечные значения, и использовались «классические» условия накрывания и липшицевости отображений.

References

[1] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[3] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces”, *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 363–379.

[4] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения векторных отображений”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points for Vector Mappings”, *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.

[5] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[6] В. Мерчела, “К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, “About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[7] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:4 (2019), 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, **25**:4 (2019), 52–63 (In Russian)].

[8] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Шиндяпин Андрей Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик. E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8750-1534

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 23 декабря 2019 г.
Поступила после рецензирования 5 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Wassim Merchela, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Andrey I. Shindiapin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Computer Science Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique.
E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8750-1534

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 23 December 2019
Reviewed 5 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47

УДК 517.9

Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией

Сергей Иванович МИТРОХИН

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function

Sergey I. MITROKHIN

Lomonosov Moscow State University

GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Аннотация. В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора третьего порядка с суммируемым потенциалом с гладкой весовой функцией. Граничные условия являются разделенными. Метод изучения дифференциальных операторов с суммируемым потенциалом является развитием метода изучения операторов с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи такого рода возникают при исследовании колебаний стержней, балок и мостов, составленных из материалов различной плотности. Дифференциальное уравнение, задающее дифференциальный оператор, с помощью метода вариации постоянных сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения находится методом последовательных приближений Пикара. С помощью исследования интегрального уравнения получены асимптотические формулы и оценки для решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. При больших значениях спектрального параметра выведена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Асимптотические оценки решений дифференциального уравнения получаются аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора с гладкими коэффициентами. Изучение граничных условий приводит к исследованию корней функции, представленной в виде определителя третьего порядка. Чтобы получить корни этой функции, была изучена индикаторная диаграмма. Корни этого уравнения находятся в трёх секторах бесконечно малого раствора, задаваемых индикаторной диаграммой. В статье изучено поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы. Вычислена асимптотика собственных значений исследуемого дифференциального оператора. Найденные формулы для асимптотики собственных значений позволяют исследовать спектральные свойства собственных функций изучаемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральный параметр; дифференциальный оператор; краевая задача; суммируемый потенциал; граничные условия; весовая функция; индикаторная диаграмма; асимптотика собственных значений

Для цитирования: *Митрохин С.И.* Об исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов с гладкой весовой функцией // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 25–47. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47.

Abstract. In this paper we study the spectral properties of a third-order differential operator with a summable potential with a smooth weight function. The boundary conditions are separated. The method of studying differential operators with summable potential is a development of the method of studying operators with piecewise smooth coefficients. Boundary value problems of this kind arise in the study of vibrations of rods, beams and bridges composed of materials of different densities. The differential equation defining the differential operator is reduced to the solution of the Volterra integral equation by means of the method of variation of constants. The solution of the integral equation is found by the method of successive Picard approximations. Using the study of an integral equation, we obtained asymptotic formulas and estimates for the solutions of a differential equation defining a differential operator. For large values of the spectral parameter, the asymptotics of solutions of the differential equation that defines the differential operator is derived. Asymptotic estimates of solutions of a differential equation are obtained in the same way as asymptotic estimates of solutions of a differential operator with smooth coefficients. The study of boundary conditions leads to the study of the roots of the function, presented in the form of a third-order determinant. To get the roots of this function, the indicator diagram was studied. The roots of this equation are in three sectors of an infinitely small size, given by the indicator diagram. The article studies the behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram. The asymptotics of the eigenvalues of the differential operator under study is calculated. The formulas found for the asymptotics of eigenvalues allow us to study the spectral properties of the eigenfunctions of the differential operator under study.

Keywords: spectral parameter; differential operator; boundary value problem; summable potential; boundary conditions; weight function; indicator diagram; asymptotics of the eigenvalues

For citation: Mitrokhin S.I. Ob issledovanii spektral'nykh svoystv differentsial'nykh operatorov s gladkoy vesovoy funktsiyey [On the study of the spectral properties of differential operators with a smooth weight function]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 25–47. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-25-47. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Постановка задачи

Изучим следующую краевую задачу для дифференциального оператора третьего порядка, задаваемого дифференциальным уравнением

$$y^{(3)}(x)+q(x)y(x)=\lambda a^3\rho^3(x)y(x), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi, \tag{0.1}$$

где $\rho(x)>0$ при всех $x\in[0;\pi]$, $a>0$, с разделенными граничными условиями

$$y(0)=y'(0)=y^{(n_1)}(\pi)=0, \quad n_1\in\{0,1,2\}, \tag{0.2}$$

при этом $y^{(0)}(x)=y(x)$ по определению.

В дифференциальном уравнении (0.1) число $\lambda\in\mathbb{C}$ — спектральный параметр, функция $q(x)$ — потенциал, функция $v(x)=a^3\rho^3(x)$ — весовая функция. Мы предполагаем, что выполняются следующие условия гладкости на коэффициенты дифференциального уравнения (0.1):

$$\rho(x)\in C^4[0;\pi]; \quad q(x)\in L_1[0;\pi]\Leftrightarrow \left(\int_0^x q(t)dt\right)'_x=q(x) \text{ при п.в. } x\in[0;\pi]. \tag{0.3}$$

1. Исторический обзор

Рассматриваемая нами краевая задача имеет две особенности: потенциал оператора является суммируемой функцией на отрезке, а весовая функция является гладкой непостоянной функцией. Развитие спектральной теории дифференциальных операторов идет в направлении снижения гладкости коэффициентов дифференциальных уравнений, задающих эти операторы. В работах [1–3] коэффициенты (а также и потенциалы) были бесконечно гладкими функциями, были выписаны асимптотики решений соответствующих дифференциальных уравнений при больших значениях спектрального параметра. В работах [4–6] гладкость коэффициентов постоянно снижалась до одного-двух раз дифференцируемости или до непрерывности. Во всех этих работах весовая функция оператора была постоянной (чаще всего она тождественно равнялась единице).

Затем коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих дифференциальные операторы, становились кусочно-гладкими или кусочно-непрерывными функциями. Сходимость разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов для дифференциального оператора второго порядка с кусочно-непрерывной весовой функцией исследовалась в работе [7].

Аналогичные вопросы были рассмотрены в работе [8], также изучались операторы второго порядка. В работах [9] и [10] автором были вычислены регуляризованные следы дифференциальных и функционально-дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами.

В работе [11] были приведены примеры изоспектральных операторов второго и четвертого порядка с кусочно-постоянными весовыми функциями. В работе [12] автором рассмотрены некоторые спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с кусочно-гладкой весовой функцией.

В работе [13] исследовался вопрос о сходимости разложений по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов первого и второго порядков со знакопеременной кусочно-постоянной весовой функцией. Выкладки при этом сложны и громоздки, авторы отмечают, что вряд ли их методику можно перенести на случай операторов четвертого и выше порядков. В работе [14] решена обратная спектральная задача с кусочно-гладким потенциалом.

Дифференциальные операторы с суммируемыми коэффициентами начали бурно изучаться в последнее время. В работе [15] были исследованы спектральные свойства дифференциальных операторов второго порядка с суммируемым потенциалом.

В работах [16–18] автор исследовал операторы четвертого, шестого и выше порядков с суммируемыми коэффициентами с помощью методики, отличной от методики работы [15]. Заметим, что с возрастанием порядка дифференциального оператора многократно увеличиваются трудности его исследования.

Изучение асимптотики собственных значений необходимо для исследования свойств собственных функций и вычисления регуляризованных следов дифференциальных операторов. Общая теория нахождения регуляризованных следов операторов с суммируемыми потенциалами пока что не разработана, хотя для операторов второго порядка в работах [19, 20] вычислены следы операторов с потенциалом в виде δ-функции. Для операторов четвертого и выше порядков случай, когда потенциал — δ-функция, пока что не изучался.

В монографии [21, гл. 4] автором исследованы некоторые вопросы спектральной теории для дифференциальных операторов второго и четвертого порядков с разрывной (кусочно-постоянной, кусочно-непостоянной) весовой функцией. Потенциал оператора может быть при этом суммируемой функцией на отрезке изучения оператора. Рассмотрен также случай знакопеременной весовой функции.

В работе [22] автором изучен дифференциальный оператор высокого четного порядка с кусочно-постоянной весовой функцией с разделенными граничными условиями с дополнительными условиями «сопряжения» в точке разрыва весовой функции.

Случай гладкой весовой функции для дифференциальных операторов порядка выше второго (даже в случае гладкого потенциала) пока что не изучался. В работе [23] автором были изучены спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с суммируемым потенциалом и гладкой (непостоянной) весовой функцией. Были вычислены асимптотики собственных значений дифференциального оператора такого вида. В предлагаемой вниманию работе мы изучим дифференциальный оператор третьего порядка с гладкой весовой функцией и суммируемым потенциалом.

2. Асимптотика решений вспомогательного дифференциального уравнения при $\lambda \to \infty$

Рассмотрим сначала вспомогательное дифференциальное уравнение

$$y^{(3)}(x) = \lambda a^3 \rho^3(x) y(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{2.1}$$

где $\rho(x) > 0$ при всех $x \in [0; \pi]$, получающееся из дифференциального уравнения (0.1) при $q(x) \equiv 0$.

Пусть $\lambda = s^3$, $s = \sqrt[3]{\lambda}$, при этом зафиксируем ту ветвь арифметического корня третьей степени, для которой $\sqrt[3]{1} = +1$. Пусть ω_k $(k = 1, 2, 3)$ различные корни третьей степени из единицы:

$$\begin{gathered} \omega_k^3 = 1, \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{3}(k-1)}, \ k = 1, 2, 3; \quad \omega_1 = 1, \\ \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i; \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для чисел ω_k $(k = 1, 2, 3)$ из (2.2) справедливы следующие соотношения:

$$\omega_2^2 = \omega_3, \quad \omega_3^2 = \omega_2, \quad \omega_1^2 = \omega_1, \quad \omega_2\omega_3 = \omega_1, \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = 0. \tag{2.3}$$

Используя идеи монографии [24, гл. 4], устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Общее решение дифференциального уравнения (0.1) имеет следующий вид:*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^{3} C_k y_k(x, s); \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^{3} C_{1k} y_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, \tag{2.4}$$

где C_k $(k=1,2,3)$ — *произвольные постоянные, а для фундаментальной системы решений* $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^{3}$ *справедливы следующие асимптотические разложения и оценки:*

$$y_k(x,s)=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_k sM(x)}\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\frac{A_{2k}(x)}{s^2}+\frac{A_{3k}(x)}{s^3}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|a\rho^3(x)x}}{s^4}\right)\right], \tag{2.5}$$

$$M(x)=\int_0^x\rho(t)dt,\quad M'(x)=\rho(x),\quad k=1,2,3;$$

$$y_k'(x,s)=(a\omega_k s)e^{a\omega_k M(x)s}\left[1+\frac{A_{1k}^1(x)}{s}+\frac{A_{2k}^1(x)}{s^2}+\frac{A_{3k}^1(x)}{s^3}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|a\rho^3(x)x}}{s^4}\right)\right], \tag{2.6}$$

$$k=1,2,3;$$

$$y_k''(x,s)=(a\omega_k s)^2\rho(x)e^{a\omega_k M(x)s}\left[1+\frac{A_{1k}^2(x)}{s}+\frac{A_{2k}^2(x)}{s^2}+\frac{A_{3k}^2(x)}{s^3}+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|a\rho^3(x)x}}{s^4}\right)\right], \tag{2.7}$$

$$k=1,2,3;$$

при этом выполняются начальные условия

$$A_{1k}(0)=0,\quad A_{2k}(0)=0,\quad A_{3k}(0)=0,\quad y_k(0,s)=\frac{1}{\rho(0)},\quad k=1,2,3. \tag{2.8}$$

Доказательство. Выведем явные формулы для коэффициентов $A_{mk}(x)$, $A_{mk}^n(x)$ $(n=1,2;\ m,k=1,2,3)$ асимптотических разложений (2.5)–(2.7). Пусть $G_k(x)=e^{a\omega_k M(x)s}$, тогда

$$G_k'(x)=e^{a\omega_k M(x)s}(a\omega_k s)M'(x)=(a\omega_k s)G_k(x)\rho(x).$$

Дифференцируя функцию $y_k(x,s)$ из (2.5) по переменной x, получаем

$$y_k'(x,s)=(a\omega_k s)G_k(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]+G_k(x)(-1)\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]$$
$$+\rho^{-1}(x)G_k(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right],\quad k=1,2,3. \tag{2.9}$$

Продифференцируем функцию $y_k'(x,s)$ из (2.9) по переменной x и сделаем необходимые преобразования и упрощения, получим

$$y_k''(x,s)=(a\omega_k s)^2G_k(x)\rho(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]$$
$$+(a\omega_k s)G_k(x)(-1)\rho^{-1}(x)\rho'(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]$$
$$+2(a\omega_k s)G_k(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+G_k(x)g_{13}(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]$$
$$+G_k(x)(-2)\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+G_k(x)\rho^{-1}(x)\left[\frac{A_{1k}''(x)}{s}+\ldots\right],\ k=1,2,3, \tag{2.10}$$

где введено обозначение

$$g_{13}(x)=2\rho^{-3}(x)(\rho'(x))^2-\rho^{-2}(x)\rho''(x), \tag{2.11}$$

при этом производные $\rho'(x)$, $\rho''(x)$ существуют в силу условия гладкости (0.3).

Продифференцируем $y_k''(x,s)$ из (2.10), (2.11) по переменной x, подставим получившееся выражение в дифференциальное уравнение (2.1), приведем подобные слагаемые, поделим на $G_k(x)\neq 0$, получим

$$\begin{aligned}3(a\omega_k s)^2\rho(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+(a\omega_k s)g_{23}(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]\\ +3(a\omega_k s)\rho^{-1}(x)\rho'(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]+3a\omega_k s\left[\frac{A_{1k}''(x)}{s}+\ldots\right]\\ +g_{13}'(x)\left[1+\frac{A_{1k}(x)}{s}+\ldots\right]+g_{33}(x)\left[\frac{A_{1k}'(x)}{s}+\ldots\right]\\ -3\rho^{-2}(x)\rho'(x)\left[\frac{A_{1k}''(x)}{s}+\ldots\right]+\rho^{-1}(x)\left[\frac{A_{1k}^{(3)}(x)}{s}+\ldots\right]=0,\end{aligned}\tag{2.12}$$

где

$$g_{23}(x)=\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^2(x)}-\frac{2\rho''(x)}{\rho(x)};\quad g_{33}(x)=\frac{6(\rho'(x))^2}{\rho^3(x)}-\frac{3\rho''(x)}{\rho^2(x)}.\tag{2.13}$$

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^1, находим

$$A_{1k}'(x)=-\frac{1}{3a\omega_k}\frac{g_{23}(x)}{\rho(x)},$$

откуда получаем

$$A_{1k}(x)=-\frac{1}{3a\omega_k}\int_0^x\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt,\quad k=1,2,3,\tag{2.14}$$

при этом выполняется вспомогательное условие $A_{1k}(0)=0$, проанонсированное нами в (2.8).

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^0, получаем

$$3(a\omega_k s)^2\rho(x)A_{2k}'(x)+a\omega_k g_{23}(x)A_{1k}(x)-3a\omega_k\rho^{-1}(x)\rho'(x)A_{1k}'(x)+3a\omega_k A_{1k}''(x)+g_{13}'(x)=0,$$

откуда с помощью формул (2.11), (2.13) и (2.14) выводим

$$\begin{aligned}A_{2k}(x)=\frac{\omega_k}{9a^2}\left(\int_0^x\frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt\right)^2-\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\int_0^x\frac{g_{13}'(t)}{\rho(t)}dt+\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\left[\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^4(x)}-\frac{2\rho''(x)}{\rho^3(x)}\right]\\ -\frac{1}{3a^2\omega_k^2}\left[\frac{3(\rho'(0))^2}{\rho^4(0)}-\frac{2\rho''(0)}{\rho^3(0)}\right],\quad k=1,2,3,\end{aligned}\tag{2.15}$$

при этом выполнено начальное условие $A_{2k}(0)=0$ из (2.8).

Приравнивая в уравнении (2.12) коэффициенты при s^{-1}, находим

$$\begin{aligned}3(a\omega_k s)^2\rho(x)A_{3k}'(x)+a\omega_k g_{23}(x)A_{2k}(x)-3a\omega_k\rho^{-1}(x)\rho'(x)A_{2k}'(x)+3a\omega_k A_{1k}''(x)\\ +g_{13}'(x)A_{1k}(x)+g_{33}(x)A_{1k}'(x)-3\rho^{-2}(x)\rho'(x)A_{1k}''(x)+\rho^{-1}(x)A_{1k}^{(3)}(x)=0,\end{aligned}$$

откуда можно вывести формулы для коэффициентов $A_{3k}(x)$ $(k=1,2,3)$, при этом достаточно условий гладкости $\rho(x)\in C^4[0;\pi]$. Оценки в формулах (2.5)–(2.7) устанавливаются аналогично оценкам монографии [24, гл. 2].

Вынося в формуле (2.9) сомножители $(a\omega_k s)G_k(x)$ за скобки, получим формулу (2.6), где

$$A^1_{1k}(x) = A_{1k}(x) - \frac{\rho'(x)}{a\omega_k\rho^2(x)}; \quad A^1_{2k}(x) = A_{2k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{A'_{1k}(x)}{a\omega_k\rho(x)};$$
$$A^1_{3k}(x) = A_{3k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{2k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)}, \quad k = 1,2,3. \tag{2.16}$$

Из формулы (2.10), вынося за скобку множитель $(a\omega_k s)^2 G_k(x)\rho(x)$, придем к формуле (2.7), коэффициенты которой при $k = 1,2,3$ находятся по следующим правилам:

$$A^2_{1k}(x) = A_{1k}(x) - \frac{\rho'(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} \overset{(19)}{=} A^1_{1k}(x);$$
$$A^2_{2k}(x) = A_{2k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{2A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)} + \frac{g_{13}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)}; \tag{2.17}$$

$$A^2_{3k}(x) = A_{3k}(x) - \frac{\rho'(x)A_{2k}(x)}{a\omega_k\rho^2(x)} + \frac{2A'_{2k}(x)}{a\omega_k\rho(x)} + \frac{g_{13}(x)A_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)} - \frac{2\rho'(x)A'_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho^3(x)} + \frac{A''_{1k}(x)}{a^2\omega_k^2\rho(x)}. \tag{2.18}$$

Формулы (2.4)–(2.8) доказаны. □

3. Определитель Вронского функций $y_k(x,s)$, $k = 1,2,3$

Для дальнейших вычислений и оценок нам необходимо знать асимптотическое поведение определителя Вронского $\Delta_0(x,s)$ фундаментальной системы решений $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$ дифференциального уравнения (2.1)

$$\Delta_0(x,s) = \det \mathrm{Wr}[y_1(x,s), y_2(x,s), y_3(x,s)] = \begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_3(x,s) \\ y'_1(x,s) & y'_2(x,s) & y'_3(x,s) \\ y''_1(x,s) & y''_2(x,s) & y''_3(x,s) \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

Отметим, что из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений следует, что функция $\Delta_0(x,s)$ не зависит от переменной x, т. е. $\Delta_0(x,s) = \Delta_0(s)$ (зависит только от переменной s). Действительно,

$$\frac{d}{dx}(\Delta_0(x,s)) = \begin{vmatrix} y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y^{(3)}_1 & y^{(3)}_2 & y^{(3)}_3 \end{vmatrix}.$$

Первые два определителя этой суммы равны нулю, так как в них есть две совпадающие строчки, а третий определитель также равен нулю ввиду того, что функции $y_k(x,s)$ — решения дифференциального уравнения (2.1), поэтому $y^{(3)}_k(x,s) = a^3\rho^3(x)y_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y^{(3)}_1 & y^{(3)}_2 & y^{(3)}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ a^3\rho^3 y_1 & a^3\rho^3 y_2 & a^3\rho^3 y_3 \end{vmatrix} = a^3\rho^3(x) \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

также совпадают две строчки, поэтому $\frac{d}{dx}(\Delta_0(x,s)) = 0$, значит,

$$\Delta_0(x,s) = \Delta_0(s) = \Delta_0(0,s). \tag{3.2}$$

Вычислим главные члены асимптотического разложения определителя $\Delta_0(x,s)$, используя асимптотические формулы (2.5)–(2.7)

$$\Delta_0(x,s) = \begin{vmatrix} \dfrac{G_1(x)}{\rho(x)}\left[1+\dfrac{A_{11}(x)}{s}+\ldots\right] & \ldots & \dfrac{G_3(x)}{\rho(x)}\left[1+\dfrac{A_{13}(x)}{s}+\ldots\right] \\ (a\omega_1 s)G_1(x)\left[1+\dfrac{A^1_{11}(x)}{s}+\ldots\right] & \ldots & (a\omega_3 s)G_3(x)\left[1+\dfrac{A^1_{13}(x)}{s}+\ldots\right] \\ (a\omega_1 s)^2 G_1(x)\rho\left[1+\dfrac{A^2_{11}(x)}{s}+\ldots\right] & \ldots & (a\omega_3 s)^2 G_3(x)\rho\left[1+\dfrac{A^2_{13}(x)}{s}+\ldots\right] \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho(x)}(as)(as)^2\rho(x)G_1(x)G_2(x)G_3(x)|\ldots|$$

$$\overset{(6)}{=} a^3 s^3 \begin{vmatrix} 1\cdot\left[1+\dfrac{A_{11}(x)}{s}+\dfrac{A_{21}(x)}{s^2}+\ldots\right] & \ldots & 1\cdot\left[1+\dfrac{A_{13}(x)}{s}+\dfrac{A_{23}(x)}{s^2}+\ldots\right] \\ \omega_1\left[1+\dfrac{A^1_{11}(x)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(x)}{s^2}+\ldots\right] & \ldots & \omega_3\left[1+\dfrac{A^1_{13}(x)}{s}+\dfrac{A^1_{23}(x)}{s^2}+\ldots\right] \\ \omega_1^2\left[1+\dfrac{A^2_{11}(x)}{s}+\dfrac{A^2_{21}(x)}{s^2}+\ldots\right] & \ldots & \omega_3^2\left[1+\dfrac{A^2_{13}(x)}{s}+\dfrac{A^2_{23}(x)}{s^2}+\ldots\right] \end{vmatrix}. \tag{3.3}$$

Раскладывая определитель $\Delta_0(x,s)$ из (3.3) по столбцам на сумму определителей, получаем следующую формулу:

$$\Delta_0(x,s) = a^3 s^3\left[\Delta_{00} + \frac{\Delta_{01}(x,s)}{s} + \frac{\Delta_{02}(x,s)}{s^2} + \frac{\Delta_{03}(x,s)}{s^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^4}\right)\right], \tag{3.4}$$

где коэффициенты получаются по следующим правилам:

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(\omega_2^2-\omega_3^2) - 1\cdot(\omega_2-\omega_3) + 1\cdot(\omega_3-\omega_2) = 3(\omega_3-\omega_2) \overset{(5)}{=} -3\sqrt{3}i \neq 0; \tag{3.5}$$

$$\Delta_{01}(x,s) = \begin{vmatrix} A_{11}(x) & 1 & 1 \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix} 1 & A_{12}(x) & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & A_{13}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_3; \tag{3.6}$$

$$\Delta_{02}(x,s) = \begin{vmatrix} A_{21}(x) & 1 & 1 \\ \omega_1 A^1_{21}(x) & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{21}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}_4 + \begin{vmatrix} 1 & A_{22}(x) & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{22}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{22}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_5 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & A_{23}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 A^1_{23}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{23}(x) \end{vmatrix}_6$$

$$+ \begin{vmatrix} A_{11}(x) & A_{12}(x) & 1 \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 \end{vmatrix}_7 + \begin{vmatrix} A_{11}(x) & 1 & A_{13}(x) \\ \omega_1 A^1_{11}(x) & \omega_2 & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 A^2_{11}(x) & \omega_2^2 & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_8 + \begin{vmatrix} 1 & A_{12}(x) & A_{13}(x) \\ \omega_1 & \omega_2 A^1_{12}(x) & \omega_3 A^1_{13}(x) \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 A^2_{12}(x) & \omega_3^2 A^2_{13}(x) \end{vmatrix}_9. \tag{3.7}$$

Из формул (2.14) и (2.16), (2.17) имеем

$$A_{1k}(x) = \omega_k^2 H(x), \quad H(x) = -\frac{1}{3a}\int_0^x \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt; \quad A_{1k}^1(x) = \omega_k^2 H(x) + \omega_k^2 F(x),$$
$$F(x) = -\frac{\rho'(x)}{a\rho^2(x)}; \quad A_{1k}^2(x) = A_{1k}^1(x), \tag{3.8}$$

поэтому из формул (3.6), (2.3) и (3.8) находим

$$\Delta_{01}(x,s) = \begin{vmatrix} \omega_1^2 H(x) + 0\cdot F(x) & 1 & 1 \\ \omega_1^3 H(x) + \omega_1^3 F(x) & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 H(x) + \omega_1 F(x) & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix}_1 + \begin{vmatrix} 1 & \omega_2^2 H(x) + 0\cdot F(x) & 1 \\ \omega_1 & \omega_2^3 H(x) + \omega_2^3 F(x) & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 H(x) + \omega_2 F(x) & \omega_2 \end{vmatrix}_2$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega_3^2 H(x) + 0\cdot F(x) \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3^3 H(x) + \omega_3^3 F(x) \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3 H(x) + \omega_3 F(x) \end{vmatrix}_3 = H(x)M_1 + F(x)M_2, \tag{3.9}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \omega_3 & 1 \\ \omega_1 & \omega_1 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3 \end{vmatrix} \overset{(6)}{=} 0, \tag{3.10}$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \omega_1 & \omega_1 & \omega_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1 & \omega_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.11}$$

Значит, из формул (3.9)–(3.11) следует, что

$$\Delta_{01}(x,s) = 0. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом с помощью тех же соотношений доказывается формула

$$|\dots|_4 + |\dots|_5 + |\dots|_6 \overset{(28)}{=} 0. \tag{3.13}$$

Из формул (2.15)–(2.17) имеем

$$A_{2k}(x) = \omega_k A_{20}(x); \quad A_{2k}^1(x) = \omega_k[A_{20}(x) + R(x) + P(x)],$$
$$A_{2k}^2(x) = \omega_k[A_{20}(x) + R(x) + 2P(x) + T(x)], \tag{3.14}$$

где

$$A_{20}(x) = \frac{1}{9a^2}\left(\int_0^x \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt\right)^2 - \frac{1}{3a^2}\int_0^x \frac{g_{13}'(t)}{\rho(t)}dt$$
$$+ \frac{1}{3a^2}\left[\frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^4(x)} - \frac{2\rho''(x)}{\rho^3(x)}\right] - \frac{1}{3a^2}\left[\frac{3(\rho'(0))^2}{\rho^4(0)} - \frac{2\rho''(0)}{\rho^3(0)}\right]; \tag{3.15}$$
$$R(x) = -\frac{\rho'(x)A_{1k}(x)}{a\rho^2(x)}; \quad P(x) = \frac{A_{2k}'(x)}{a\rho(x)}; \quad T(x) = \frac{g_{13}(x)}{a^2\rho(x)}.$$

Подставляя формулы (3.14), (3.15) в (3.7), разложим определители по столбцам и перегруппируем слагаемые, в результате чего получим

$$\begin{aligned}|\ldots|_4+|\ldots|_5+|\ldots|_6 &= A_{20}(x)\left[\omega_1\begin{vmatrix}\omega_2 & \omega_3\\ \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}-\omega_2\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_3\\ \omega_1^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+\omega_3\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2\\ \omega_1^2 & \omega_2^2\end{vmatrix}\right]\\ &+A_{20}^1(x)\left[-\omega_1^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+\omega_2^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}-\omega_3^2\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2\end{vmatrix}\right]\\ &+A_{20}^2(x)\left[\omega_1^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_2 & \omega_3\end{vmatrix}-\omega_2^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1 & \omega_3\end{vmatrix}+\omega_3^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2\end{vmatrix}\right]\\ &= A_{20}(x)\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_{20}^1(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_{20}^2(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}=0,\end{aligned} \tag{3.16}$$

так как все определители имеют по две совпадающие строчки (в третьем в силу формулы (2.2) $\omega_1^3=\omega_2^3=\omega_3^3=1$). В формуле (3.16) были введены обозначения $A_{20}^1(x,s)=A_{20}(x)+R(x)+P(x)$, $A_{20}^2(x,s)=A_{20}(x)+R(x)+2P(x)+T(x)$. Формула (3.16) доказывает формулу (3.13).

Аналогичным способом получаем

$$\begin{aligned}|\ldots|_7+|\ldots|_8+|\ldots|_9 &\overset{(28)}{=} A_1(x)A_1^1(x)\left[\omega_3^2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2\\ \omega_1^3 & \omega_2^3\end{vmatrix}-\omega_2^2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}+\omega_4^2\begin{vmatrix}\omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_2^3 & \omega_3^3\end{vmatrix}\right]\\ &+A_1(x)A_1^2(x)\left[-\omega_3\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2\\ \omega_1^4 & \omega_2^4\end{vmatrix}+\omega_2\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}-\omega_1\begin{vmatrix}\omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}\right]\\ &+A_1^1(x)A_1^2(x)\left[1\cdot\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_2^3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}\omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}\right]\\ &= A_1(x)A_1^1(x)\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\end{vmatrix}+A_1(x)A_1^2(x)\begin{vmatrix}\omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}+A_1^1(x)A_1^2(x)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3\\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \omega_3^4\end{vmatrix}=0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

так как все получившиеся определители равны нулю (они имеют по две совпадающие строки: из формулы (2.2) следует, что $\omega_k^3=1$, $\omega_k^4=\omega_k$, $k=1,2,3$). В формуле (3.17) введены обозначения

$$A_1(x)\overset{(17)}{=}A_{1k}(x)\omega_k;\quad A_1^1(x)=A_1^2(x)=A_1(x)-\frac{\rho'(x)}{a\rho^2(x)}.$$

Из формул (3.13), (3.16), (3.17), (3.4), (3.7) и (3.12) получаем

$$\Delta_{02}(x,s)=0;\quad \Delta_0(x,s)=a^3s^3\Delta_{00}\left[1+\frac{0}{s}+\frac{0}{s^2}+\frac{\Delta_{03}(x,s)}{\Delta_{00}s^3}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^4}\right)\right]. \tag{3.18}$$

4. Изучение решений дифференциального уравнения (0.1)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Решение $y(x,s)$ дифференциального уравнения (0.1) является решением следующего интегрального уравнения Вольтерры:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_k y_k(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\int_0^x q(t)y(t,s)\delta_{3k}(t,s)dt_{bk}, \tag{4.1}$$

где C_k — произвольные постоянные $(k=1,2,3)$, $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$ — фундаментальная система решений вспомогательного дифференциального уравнения (2.1), задаваемая формулами (2.5)–(2.18), $\Delta_0(s)$ — определитель Вронского функций $\{y_k(x,s)\}_{k=1}^3$, определяемый формулами (3.1)–(3.4) и (3.18), $\delta_{3k}(t,s)$ $(k=1,2,3)$ — алгебраические миноры к элементам третьей строки в определителе $\Delta_0(x,s)$ из (3.1)–(3.3).

Формула (4.1) получена методом вариации постоянных. В обозначениях формулы (3.1) по определению алгебраических миноров имеем

$$\begin{gathered}\delta_{31}(x,s)=\begin{vmatrix}y_2(x,s) & y_3(x,s)\\ y_2'(x,s) & y_3'(x,s)\end{vmatrix},\quad \delta_{32}(x,s)=\begin{vmatrix}y_1(x,s) & y_3(x,s)\\ y_1'(x,s) & y_3'(x,s)\end{vmatrix},\\ \delta_{33}(x,s)=\begin{vmatrix}y_1(x,s) & y_2(x,s)\\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s)\end{vmatrix}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 4.1 убедимся в справедливости формулы (4.1) непосредственной подстановкой функции $y(x,s)$ из (4.1) в дифференциальное уравнение (0.1). Используя свойство суммируемости (0.3), имеем

$$y'(x,s)\overset{(40)}{=}\sum_{k=1}^{3}C_k y_k'(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k'(x,s)\left(\int_0^x\dots\right)_{bk}+\phi_1(x,s), \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}\phi_1(x,s)&=-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s)\\ &=-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\delta_{3k}(x,s)=-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & y_3\\ y_1' & y_2' & y_3'\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Дифференцируя формулу (4.3), (4.4) по переменной x, с использованием свойства (0.3) получаем

$$y''(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_k y_k''(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k''(x,s)\left(\int_0^x\dots\right)_{bk}+\phi_2(x,s), \tag{4.5}$$

$$\phi_2(x,s) = -\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k'(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s)$$
$$= -\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix} y_1(x,s) & y_2(x,s) & y_3(x,s) \\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s) & y_3'(x,s) \\ y_1'(x,s) & y_2'(x,s) & y_3'(x,s)\end{vmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Продифференцируем функцию $y_1''(x,s)$ из (4.5), (4.6) по переменной x и подставим в уравнение (0.1)

$$y^{(3)}(x,s) + q(x)y(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)$$
$$= \sum_{k=1}^{3} C_k y_k^{(3)}(x,s) - \frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k^{(3)}(x,s)\left(\int_0^x \ldots\right)_{bk}$$
$$-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k''(x,s)q(x)y(x,s)\delta_{3k}(x,s) + q(x)y(x,s)$$
$$-\lambda a^3\rho^3(x)\left[\sum_{k=1}^{3} C_k y_k(x,s) - \frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}y_k(x,s)\left(\int_0^x \ldots\right)_{bk}\right],$$

откуда, перегруппировывая слагаемые и учитывая, что $y_k(x,s)$ — решения вспомогательного уравнения (2.1), получаем

$$y^{(3)}(x,s) + q(x)y(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s) = \sum_{k=1}^{3} C_k[y_k^{(3)}(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)]$$
$$-\frac{1}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3}(-1)^{k-1}\left(\int_0^x \ldots\right)_{bk}[y_k^{(3)}(x,s) - \lambda a^3\rho^3(x)y(x,s)] + q(x)y(x,s)$$
$$-\frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\sum_{k=1}^{3} y_k''(x,s)\delta_{3k}(x,s) = 0 - 0 + q(x)y(x,s) - \frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3''\end{vmatrix}$$
$$\overset{(22)}{=} q(x)y(x,s) - \frac{q(x)y(x,s)}{\Delta_0(s)}\Delta_0(s) = 0.$$

Таким образом, функция $y(x,s)$ из формулы (4.1) действительно является решением дифференциального уравнения (0.1). □

Из формулы (3.3) и ранее введенных обозначений находим

$$\delta_{31}(x,s) = e^{-a\omega_1 sM(x)}\rho^{-1}(x)(as)$$
$$\times\begin{vmatrix} 1\cdot\left[1 + \frac{\omega_2^2 A_1(x)}{s} + \frac{\omega_2 A_2(x)}{s^2} + \ldots\right] & 1\cdot\left[1 + \frac{\omega_3^2 A_1(x)}{s} + \frac{\omega_3 A_2(x)}{s^2} + \ldots\right] \\ \omega_2\left[1 + \frac{\omega_2^2 A_1^1(x)}{s} + \frac{\omega_2 A_2^1(x)}{s^2} + \ldots\right] & \omega_3\left[1 + \frac{\omega_3^2 A_1^1(x)}{s} + \frac{\omega_3 A_2^1(x)}{s^2} + \ldots\right]\end{vmatrix}$$
$$= (as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_1 sM(x)}\left[(\omega_3 - \omega_2) + \frac{\delta_{311}(x,s)}{s} + \frac{\delta_{312}(x,s)}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \quad (4.7)$$

при этом получаем

$$\delta_{311}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_2^2A_1(x) & 1\\ \omega_2^3A_1^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_2 & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}=(\omega_2-\omega_3)A_1(x), \tag{4.8}$$

$$\delta_{312}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_2A_2(x) & 1\\ \omega_2^2A_2^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\omega_2^2A_1(x) & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_2^3A_1^1(x) & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3A_2(x)\\ \omega_2 & \omega_3^1A_2^1(x)\end{vmatrix}$$
$$=(\omega_2-\omega_3)A_2^1(x)-(\omega_2-\omega_3)A_1(x)A_1^1(x). \tag{4.9}$$

Аналогичным образом выводим

$$\delta_{32}(x,s)=e^{-a\omega_2sM(x)}\rho^{-1}(x)(as)$$
$$\times\begin{vmatrix}1\cdot\left[1+\dfrac{\omega_1^2A_1(x)}{s}+\dfrac{\omega_1A_2(x)}{s^2}+\ldots\right] & 1\cdot\left[1+\dfrac{\omega_3^2A_1(x)}{s}+\dfrac{\omega_3A_2(x)}{s^2}+\ldots\right]\\ \omega_1\left[1+\dfrac{\omega_1^2A_1^1(x)}{s}+\dfrac{\omega_1A_2^1(x)}{s^2}+\ldots\right] & \omega_3\left[1+\dfrac{\omega_3^2A_1^1(x)}{s}+\dfrac{\omega_3A_2^1(x)}{s^2}+\ldots\right]\end{vmatrix}$$
$$=(as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_2sM(x)}\left[(\omega_3-\omega_1)+\frac{\delta_{321}(x,s)}{s}+\frac{\delta_{322}(x,s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \tag{4.10}$$

$$\delta_{321}(x,s)=\begin{vmatrix}\omega_1^2A_1(x) & 1\\ \omega_1^3A_1^1(x) & \omega_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & \omega_3^2A_1(x)\\ \omega_1 & \omega_3^3A_1^1(x)\end{vmatrix}=(\omega_3-\omega_2)A_1(x), \tag{4.11}$$

$$\delta_{33}(x,s)=(as)\rho^{-1}(x)e^{-a\omega_3sM(x)}\left[(\omega_2-\omega_1)+\frac{\delta_{331}(x,s)}{s}+\frac{\delta_{332}(x,s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \tag{4.12}$$

$$\delta_{331}(x,s)=(\omega_2-\omega_3)A_1(x). \tag{4.13}$$

Изучим интегральное уравнение (4.1) методом последовательных приближений Пикара: найдем $y(t,s)$ из (4.1) и снова подставим в уравнение (4.1), проведем необходимые преобразования, в результате чего придем к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Общее решение дифференциального уравнения* (0.1) *представляется в следующем виде:*

$$y(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_kg_k(x,s),\quad y^{(m)}(x,s)=\sum_{k=1}^{3}C_kg_k^{(m)}(x,s),\quad m=1,2, \tag{4.14}$$

где C_k *— произвольные постоянные* $(k=1,2,3)$,

$$g_k(x,s)=y_k(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}H_k(x,s)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|M_0ax}}{s^3}\right),\quad k=1,2,3, \tag{4.15}$$

M_0 *— наибольшее значение функции* $\rho^3(x)$ *на отрезке* $[0;\pi]$;

$$g_k^{(m)}(x,s)=y_k^{(m)}(x,s)-\frac{1}{\Delta_0(s)}H_k^{(m)}(x,s)+\underline{O}\left(\frac{e^{|\mathrm{Im}s|M_0ax}}{s^3}\right),\quad m=1,2,\quad k=1,2,3, \tag{4.16}$$

при этом $y_k(x,s)$ *— фундаментальная система решений вспомогательного уравнения* (2.1)*, определенная формулами* (2.5)–(2.18)*,*

$$H_k(x,s)=\sum_{n=1}^{3} y_n(x,s)\int_0^x q(t)y_k(t,s)\delta_{3n}(t,s)dt_{akn},\quad k=1,2,3, \tag{4.17}$$

$$H_k^{(m)}(x,s)=\sum_{n=1}^{3} y_n^{(m)}(x,s)\int_0^x q(t)y_k(t,s)\delta_{3n}(t,s)dt_{akn},\quad k=1,2,3,\quad m=1,2, \tag{4.18}$$

$\delta_{3n}(x,s)$ $(n=1,2,3)$ *— алгебраические миноры к элементам третьей строки определителя* $\Delta_0(x,s)$ *из* (3.1).

Подставляя в формулы (4.15)–(4.18) формулы (2.5)–(2.18) и (4.2), (4.7)–(4.13), проводя вычисления с точностью до $\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)$, выпишем более удобные формулы для функций $g_k(x,s)$ $(k=1,2,3)$ из (4.14)

$$\begin{aligned} g_1(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\left[1+\frac{A_{11}(x)}{s}+\frac{A_{21}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\ &\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\Bigg[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_1)sM(t)}dt_{a11}\\ &\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_2)sM(t)}dt_{a12}\\ &\quad+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_1-\omega_3)sM(t)}dt_{a13}\Bigg]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} g_2(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\left[1+\frac{A_{12}(x)}{s}+\frac{A_{22}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\ &\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\Bigg[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_1)sM(t)}dt_{a21}\\ &\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_2)sM(t)}dt_{a22}\\ &\quad+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(t)}dt_{a23}\Bigg]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} g_3(x,s)&=\frac{1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\left[1+\frac{A_{13}(x)}{s}+\frac{A_{23}(x)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]\\ &\quad-\frac{1}{\Delta_{00}a^2s^2}\Bigg[\frac{\omega_3-\omega_2}{\rho(x)}e^{a\omega_1 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_1)sM(t)}dt_{a31}\\ &\quad-\frac{\omega_3-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_2 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_2)sM(t)}dt_{a32}\\ &\quad+\frac{\omega_2-\omega_1}{\rho(x)}e^{a\omega_3 sM(x)}\int_0^x\frac{q(t)}{\rho^2(t)}e^{a(\omega_3-\omega_3)sM(t)}dt_{a33}\Bigg]+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right); \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$g_k'(x,s)=y_k'(x,s)-\frac{1}{\Delta_{00}as}G_{k2}^1(x,s)+\underline{O}\left(\frac{1}{s^2}\right),\quad k=1,2,3, \tag{4.22}$$

$$y_k'(x,s) = (a\omega_k s)e^{a\omega_k sM(x)}\left[1 + \frac{A_{1k}^1(x)}{s} + \frac{A_{2k}^1(x)}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \quad k = 1,2,3, \tag{4.23}$$

$$G_{k2}^1(x,s) = \omega_1(\omega_3-\omega_2)e^{a\omega_1 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak1} - \omega_2(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_2 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak2} + \omega_3(\omega_2-\omega_1)e^{a\omega_3 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak3}, \quad k = 1,2,3; \tag{4.24}$$

$$g_k''(x,s) = y_k''(x,s) - \frac{1}{\Delta_{00}}G_{k2}^2(x,s) + \underline{O}\left(\frac{1}{s}\right), \quad k = 1,2,3, \tag{4.25}$$

$$y_k''(x,s) = (a\omega_k s)^2 e^{a\omega_k sM(x)}\rho(x)\left[1 + \frac{A_{1k}^2(x)}{s} + \frac{A_{2k}^2(x)}{s^2} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right], \quad k = 1,2,3, \tag{4.26}$$

$$G_{k2}^2(x,s) = \omega_1^2(\omega_3-\omega_2)e^{a\omega_1 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak1} - \omega_2^2(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_2 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak2} + \omega_3^2(\omega_2-\omega_1)e^{a\omega_3 sM(x)}\left(\int_0^x \dots\right)_{ak3}, \quad k = 1,2,3; \tag{4.27}$$

5. Изучение граничных условий (0.2) в случае $n_1 = 0$.

Подставляя формулы (4.14) в граничные условия (0.2), в случае $n_1 = 0$ получаем, используя формулы (4.19)–(4.27), следующие соотношения

$$y(0,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g_k(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k y_k(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} \frac{C_k}{\rho(0)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k = 0; \tag{5.1}$$

$$y'(0,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g_k'(0,s) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k y_k'(0,s) = 0; \tag{5.2}$$

$$y(\pi,s){=}0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{3} C_k g_k(\pi,s) = 0. \tag{5.3}$$

Система (5.1)–(5.3) представляет собой однородную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными C_1, C_2, C_3. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевые решения только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *в случае* $n_1 = 0$ *имеет следующий вид:*

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) & y_3'(0,s) \\ g_1(\pi,s) & g_2(\pi,s) & g_3(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.4}$$

где $y_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$ *— решения вспомогательного уравнения* (2.1), *определяемые формулами* (2.5)–(2.18), $g_k(x,s)$ $(k = 1,2,3)$ *— решения дифференциального уравнения* (0.1), *задаваемые формулами* (4.19)–(4.27).

Подставляя в уравнение (5.4) формулы (2.5)–(2.18) и (4.19)–(4.27), перепишем уравнение $f(s)=0$ в следующем виде

$$\frac{f(s)}{as} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega_1\Big[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\dots\Big] & \dots & \omega_3\Big[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\dots\Big] \\ y_1(\pi,s)-\dfrac{G_{12}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\Big(\dfrac{1}{s^3}\Big) & \dots & y_3(\pi,s)-\dfrac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\Big(\dfrac{1}{s^3}\Big) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.5)$$

где $G_{12}(x,s)$, $G_{22}(x,s)$, $G_{32}(x,s)$ — величины, находящиеся во вторых квадратных скобках формул (4.19), (4.20) и (4.21) соответственно.

Раскладывая определитель $f(s)$ из формулы (5.5) по третьей строке, убеждаемся, что в этом уравнении присутствуют только экспоненты $e^{a\omega_k sM(x)}$ $(k=1,2,3)$, поэтому индикаторная диаграмма этого уравнения (см. [25, гл. 12]), т. е. выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в уравнение, имеет следующий вид:

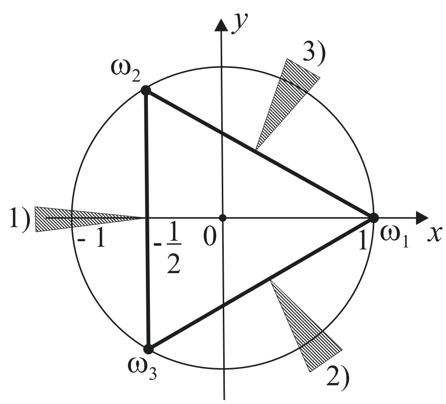


Рис. 1. Индикаторная диаграмма уравнения (5.4), (5.5)

Из вида индикаторной диаграммы следует, что корни уравнения (5.4), (5.5) могут находиться только в трех заштрихованных секторах бесконечно малого раствора, биссектрисами которых являются срединные перпендикуляры к отрезкам $[\omega_2;\omega_3]$, $[\omega_3;\omega_1]$ и $[\omega_1;\omega_2]$. Чтобы найти асимптотику корней уравнения (5.4), (5.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1, в этом уравнении необходимо оставить только экспоненты $e^{a\omega_2 sM(x)}$ и $e^{a\omega_3 sM(x)}$, экспонента $e^{a\omega_1 sM(x)}$ в этом секторе будет представлять собой бесконечно малую величину, ее можно отбросить. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Уравнение на собственные значения в секторе 1) индикаторной диаграммы рис. 1 имеет вид*

$$h_1(s) = \Big[y_2(\pi,s)-\frac{G_{22}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\Big(\frac{1}{s^3}\Big)\Big]$$
$$\times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1\Big[1+\dfrac{A^1_{11}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{21}(0)}{s^2}+\dots\Big] & \omega_3\Big[1+\dfrac{A^1_{13}(0)}{s}+\dfrac{A^1_{23}(0)}{s^2}+\dots\Big] \end{vmatrix}$$

$$-\left[y_3(\pi,s)-\frac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)\right]$$
$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1\left[1+\dfrac{A_{11}^1(0)}{s}+\dfrac{A_{21}^1(0)}{s^2}+\ldots\right] & \omega_2\left[1+\dfrac{A_{12}^1(0)}{s}+\dfrac{A_{22}^1(0)}{s^2}+\ldots\right]\end{vmatrix}=0. \quad (5.6)$$

Используя формулы (2.5)–(2.18) и (4.19)–(4.27), уравнение (5.6) можно переписать следующим образом:

$$h_1(s)=h_{10}(s)+\frac{h_{11}(s)}{s}+\frac{h_{12}(s)}{s^2}++\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)=0, \quad (5.7)$$

где

$$h_{10}(s)=(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)e^{a\omega_3sM(\pi)}, \quad (5.8)$$

$$h_{11}(s)=(\omega_3-\omega_1)A_{12}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)A_{13}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}$$
$$+(\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0))e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A_{12}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0))e^{a\omega_3sM(\pi)}, \quad (5.9)$$

$$h_{12}(s)=(\omega_3-\omega_1)A_{22}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2-\omega_1)A_{23}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}$$
$$+(\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0))A_{12}(\pi)e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A_{12}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0))A_{13}(\pi)e^{a\omega_3sM(\pi)}$$
$$+(\omega_3A_{23}^1(0)-\omega_1A_{21}^1(0))e^{a\omega_2sM(\pi)}-(\omega_2A_{22}^1(0)-\omega_1A_{21}^1(0))e^{a\omega_3sM(\pi)}$$
$$+\frac{(\omega_2-\omega_1)G_{32}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}-\frac{(\omega_3-\omega_1)G_{22}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}. \quad (5.10)$$

Поделив обе части уравнения (5.7)–(5.10) на $(\omega_3-\omega_1)e^{a\omega_3sM(\pi)}\neq 0$, перепишем это уравнение следующим образом:

$$\widetilde{h}_1(s)=\widetilde{h}_{10}(s)+\frac{\widetilde{h}_{11}(s)}{s}+\frac{\widetilde{h}_{12}(s)}{s^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{s^3}\right)=0, \quad (5.11)$$

$$\widetilde{h}_{10}(s)=e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}, \quad (5.12)$$

$$\widetilde{h}_{11}(s)=\left[A_{12}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}A_{13}(\pi)\right]$$
$$+\left[\frac{\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\right], \quad (5.13)$$

$$\widetilde{h}_{12}(s)=\left[A_{22}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}A_{23}(\pi)\right]$$
$$+\left[\frac{\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}A_{12}(\pi)e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}-\frac{\omega_2A_{12}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}A_{13}(\pi)\right]$$
$$+\left[e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}\frac{\omega_3A_{23}^1(0)-\omega_1A_{21}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}-\frac{\omega_2A_{22}^1(0)-\omega_1A_{21}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\right]$$
$$+\left[\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}\frac{G_{32}(\pi,s)}{\Delta_{00}a^2}e^{-a\omega_3sM(\pi)}-\frac{G_{22}(\pi,s)}{a^2\Delta_{00}}\frac{1}{\omega_3-\omega_1}e^{-a\omega_3sM(\pi)}\right]. \quad (5.14)$$

Из формул (2.2) получаем

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}=\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}=e^{-\frac{\pi i}{3}},\quad \omega_2=e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \omega_3=e^{-\frac{2\pi i}{3}}. \tag{5.15}$$

Основное приближение уравнения (5.11)–(5.14) имеет вид $\widetilde{h}_{10}(s)=0$, откуда с помощью формулы (5.15) получаем

$$\begin{gathered} e^{a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_3-\omega_1}=e^{2\pi ik}e^{-\frac{\pi i}{3}}\Leftrightarrow s_{k,1,\text{осн}}=\frac{2\pi i\widetilde{k}}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)},\\ M(\pi)\overset{(8)}{=}\int_0^\pi\rho(t)dt,\quad \omega_2-\omega_3\overset{(5)}{=}\sqrt{3}i,\quad \widetilde{k}=k-\frac{1}{6},\quad k\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.16}$$

Зная основное приближение корней уравнения (5.11)–(5.14), можно выписать в общем виде асимптотику корней этого уравнения (см. [6], [26]).

Теорема 5.3. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора* (0.1)–(0.3) *(при $n_1=0$) в секторе 1) индикаторной диаграммы уравнения* (5.4), (5.5) *(рис. 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1}=\frac{2\pi i}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}\left[\widetilde{k}+\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{d_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right],\quad \widetilde{k}=k-\frac{1}{6},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что все коэффициенты $d_{1k,1}, d_{2k,1}$ $(k=1,2,3)$ формулы (5.17) находятся единственным образом, и приведем явные формулы для этих коэффициентов.

Используя формулы Маклорена, имеем

$$\begin{aligned} \exp[a(\omega_2-\omega_3)sM(\pi)]\Big|_{s_{k,1}} &\overset{(84)}{=}\exp\left[a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)\frac{2\pi i}{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}\left(\widetilde{k}+\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\dots\right)\right]\\ &=e^{-\frac{\pi i}{3}}\left[1+\frac{2\pi i d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{2\pi i d_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}-\frac{2\pi^2 d_{1k,1}^2}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right], \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{s}\Big|_{s_{k,1}}\overset{(84)}{=}\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{2\pi i\widetilde{k}}\left(1-\frac{d_{1k,1}}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)\right). \tag{5.19}$$

Подставляя формулы (5.17)–(5.19) в уравнение (5.11)–(5.15), получаем

$$\begin{gathered} \left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi i d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi i d_{2k,1}}{\widetilde{k}^2}-\frac{e^{-\pi i/3}2\pi^2 d_{1k,1}^2}{\widetilde{k}^2}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)-e^{-\frac{\pi i}{3}}\right]\\ +\frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{2\pi i}\frac{1}{\widetilde{k}}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right)\left\{A_{12}(\pi)\left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi i d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right]\right.\\ \left.-e^{-\frac{\pi i}{3}}A_{13}(\pi)+\frac{\omega_3A_{13}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\left[e^{-\frac{\pi i}{3}}+\frac{e^{-\pi i/3}2\pi i d_{1k,1}}{\widetilde{k}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right]-\frac{\omega_2A_{12}^1(0)-\omega_1A_{11}^1(0)}{\omega_3-\omega_1}\right\}\\ +\frac{a^2(\omega_2-\omega_3)^2M^2(\pi)}{-4\pi^2}\frac{1}{\widetilde{k}^2}\left(1+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^2}\right)\right)\widetilde{h}_{12}\big|_{s_{k,1}}+\underline{O}\left(\frac{1}{\widetilde{k}^3}\right)=0. \end{gathered} \tag{5.20}$$

В формуле (5.20) коэффициент при $\widetilde{k}^0$ равен нулю: $e^{-\pi i/3} - e^{-\pi i/3} = 0$, что подтверждает правильность нахождения корней основного приближения уравнения (5.11)–(5.15) в виде (5.16).

Приравнивая в (5.20) коэффициенты при $1/\widetilde{k}$, выводим следующую формулу:

$$d_{1k,1} = \frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{4\pi^2}[A_{12}(\pi) - A_{13}(\pi)] + \frac{a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)}{(\omega_3-\omega_1)4\pi^2}\big[(\omega_3 A^1_{13}(0) - \omega_1 A^1_{11}(0)) - \\ - e^{\frac{\pi i}{3}}(\omega_2 A^1_{12}(0) - \omega_1 A^1_{11}(0))\big], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.21)$$

Используя формулы (2.14), находим

$$\begin{gathered} A_{12}(\pi) - A_{13}(\pi) = \omega_2^2 A_1(\pi) - \omega_3^2 A_1(\pi) = (\omega_2-\omega_3)(-1)A_1(\pi), \\ A_1(\pi) = -\frac{1}{3a}\int_0^\pi \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt. \end{gathered} \quad (5.22)$$

Из формул (2.14) и (2.16) находим

$$\begin{gathered} \omega_3 A^1_{13}(0) - \omega_1 A^1_{11}(0) = \omega_3 A_{13}(0) - \omega_3\frac{\rho'(0)}{a\omega_3\rho^2(0)} - \omega_1 A_{11}(0) + \omega_1\frac{\rho'(0)}{a\omega_1\rho^2(0)} = 0; \\ \omega_2 A^1_{12}(0) - \omega_1 A^1_{11}(0) = 0, \end{gathered} \quad (5.23)$$

так как $A_{1k}(0) = 0$ в силу формул (2.8) и (2.14).

Подставляя формулы (5.22) и (5.23) в (5.21) и проведя необходимые преобразования, получаем

$$d_{1k,1} = \frac{3aM(\pi)}{4\pi^2}A_1(\pi) = -\frac{M(\pi)}{4\pi^2}\widetilde{A}_1(\pi), \quad M(\pi) = \int_0^\pi \rho(t)dt, \quad \widetilde{A}_1(\pi) = \int_0^\pi \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt. \quad (5.24)$$

Приравнивая в формуле (5.20) коэффициенты при $1/\widetilde{k}^2$, находим

$$d_{1k,1} = \frac{d_{1k,1}}{2\pi i}\big[2\pi^2 d_{1k,1} - a(\omega_2-\omega_3)M(\pi)A_{12}(\pi)\big] \\ + \frac{e^{\pi i/3}}{2\pi i}\frac{a^2(\omega_2-\omega_3)^2}{4\pi^2}M^2(\pi)\widetilde{h}_{12}(s)\big|_{s_{k,1,\text{осн}}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

Используя формулы (5.14), (4.19)–(4.21), (2.2), (5.23) и (2.5)–(2.18), сделав необходимые преобразования, из (5.25) выведем следующую формулу:

$$d_{2k,1} = \frac{M^2(\pi)}{48\pi^3}\left[\sqrt{2}\widetilde{A}_1^2(\pi) - 18\sqrt{3}\widetilde{A}_2(\pi) + \frac{36}{\rho(\pi)}D_k(\pi)\right], \quad (5.26)$$

где

$$\begin{gathered} M(\pi) = \int_0^\pi \rho(t)dt, \quad \widetilde{A}_1(\pi) = \int_0^\pi \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}dt, \quad g_{23}(x) = \frac{3(\rho'(x))^2}{\rho^2(x)} - \frac{2\rho'(x)}{\rho(x)}; \\ \widetilde{A}_2(\pi) = \frac{1}{18}\left(\int_0^\pi \frac{g_{23}(t)}{\rho(t)}\right)^2 + \frac{g_{23}(\pi)}{3\rho^2(\pi)} - \frac{g_{23}(0)}{3\rho^2(0)}; \\ D_k(x) = \int_0^x \frac{q(t)}{\rho^2(t)}\sin\left[2\pi\widetilde{k}t + \frac{\pi}{3}\right]dt, \quad \widetilde{k} = k - \frac{1}{6}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{gathered} \quad (5.27)$$

Получение формул (5.24)–(5.27) завершает доказательство теоремы 5.3: все коэффициенты разложения (5.17) находятся единственным образом, и мы привели явные формулы для их вычисления. □

Аналогичным образом изучаются секторы 2) и 3) индикаторной диаграммы уравнения (5.4), (5.5) (рис. 1).

Теорема 5.4. *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (0.1)–(0.3) (при $n_1 = 0$) в секторах 2) и 3) индикаторной диаграммы уравнения (5.4), (5.5) (рис. 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,2} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{3}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2} e^{\frac{2\pi i}{3}} = s_{k,1} e^{\frac{4\pi i}{3}}, \quad k \in \mathbb{N}; \tag{5.28}$$

при этом

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^3, \quad m = 1,2,3, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{5.29}$$

Граничные условия (0.2) в случае $n_1 = 1$ и $n_1 = 2$ изучаются аналогичным образом.

Теорема 5.5. *Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (0.1)–(0.3) в случае $n_1 = 1$ или $n_1 = 2$ имеет следующий вид:*

$$f_{n_1}(s) = \begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) & y_3'(0,s) \\ g_1^{(n_1)}(\pi,s) & g_2^{(n_1)}(\pi,s) & g_3^{(n_1)}(\pi,s) \end{vmatrix} = 0, \tag{5.30}$$

где $\{y_k(x,s)\}$ $(k = 1,2,3)$ — фундаментальная система решений вспомогательного уравнения (2.1), задаваемая формулами (2.5)–(2.18), $\{g_k^{(n_1)}(x,s)\}$ $(k = 1,2,3,$ $n_1 = 1$ или $n_1 = 2)$ — фундаментальная система решений дифференциального уравнения (0.1), задаваемая формулами (4.19)–(4.21).

Изучая уравнения (5.30) аналогично уравнению (5.4), (5.5), докажем, что и в случае $n_1 = 1$, $n_1 = 2$ дифференциальный оператор (0.1)–(0.3) имеет дискретный спектр, при этом асимптотика собственных значений определяется формулами, аналогичными формулам (5.17), (5.24)–(5.29).

Теорема 5.6. *Асимптотика собственных функций дифференциального оператора (0.1)–(0.3) может быть найдена по формулам*

$$y_k(x,\lambda_k) = \left.\begin{vmatrix} y_1(0,s) & y_2(0,s) & y_3(0,s) \\ y_1'(0,s) & y_2'(0,s) & y_3'(0,s) \\ g_1^{(n_1)}(x,s) & g_2^{(n_1)}(x,s) & g_3^{(n_1)}(x,s) \end{vmatrix}\right|_{s=s_{k,m}} \qquad (k = 1,2,3),$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения, определяемые формулами (5.17), (5.24)–(5.29).

References

[1] G. D. Birkhoff, "On the asymptotic character of the solutions of the certain linear differential equations containing parameter", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9** (1908), 219–231.

[2] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, тип. М.П. Фроловой, Петроград, 1917, 308 с. [Ya. D. Tamarkin, *On some general problems in the theory of ordinary linear differential equations*, Printing house M.P. Frolova, Petrograd, 1917 (In Russian), 308 pp.]

[3] М. В. Федорюк, "Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка", *Дифференциальные уравнения*, **2**:4 (1966), 492–507. [M. V. Fedoryuk, "Asymptotics of solutions of ordinary linear differential equations of n-th order", *Differential Equations*, **2**:4 (1966), 492–507 (In Russian)].

[4] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, "Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка", *Доклады АН СССР*, **88** (1953), 593–596. [I. M. Gelfand, B. M. Levitan, "About one simple identity for the eigenvalues of a second-order differential operator", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **88** (1953), 593–596 (In Russian)].

[5] Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", *УМН*, **19**:2(116) (1964), 3–63; англ. пер.:B. M. Levitan, M. G. Gasymov, "Determination of a differential equation by two of its spectra", *Russian Math. Surveys*, **19**:2 (1964), 1–63.

[6] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, "Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций", *Матем. сб.*, **75(117)**:4 (1968), 558–566; англ. пер.:V. B. Lidskii, V. A. Sadovnichii, "Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions", *Math. USSR-Sb.*, **4**:4 (1968), 519–527.

[7] В. А. Ильин, "О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора", *Матем. заметки*, **22**:5 (1977), 679–698; англ. пер.:V. A. Il'in, "Convergence of eigenfunction expansions at points of discontinuity of the coefficients of a differential operator", *Math. Notes*, **22**:5 (1977), 870–882.

[8] В. Д. Будаев, "О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами", *Дифференц. уравнения*, **23**:6 (1987), 941–952. [V. D. Budaev, "The property of being an unconditional basis on a closed interval, for systems of eigen- and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients", *Differ. Uravn.*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russian)].

[9] С. И. Митрохин, "О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, №6, 3–6. [S. I. Mitrokhin, "Regularized trace formulas for second-order differential operators with discontinuous coefficients", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 1986, №6, 3–6 (In Russian)].

[10] С. И. Митрохин, "О формулах следов для одной краевой задачи с функционально-дифференциальным уравнением с разрывным коэффициентом", *Дифференц. уравнения*, **22**:6 (1986), 927–931. [S. I. Mitrokhin, "Trace formulas for a boundary value problem with a functional-differential equation with a discontinuous coefficient", *Differ. Uravn.*, **22**:6 (1986), 927–931 (In Russian)].

[11] H. P. W. Gottlieb, "Iso-spectral operators: some model examples with discontinuous coefficients", *Journal of Math. Anal. and Appl*, **132** (1988), 123–137.

[12] С. И. Митрохин, "О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией", *Доклады РАН*, **356**:1 (1997), 13–15. [S. I. Mitrokhin, "About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function", *Reports of the Russian Academy of Sciences*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russian)].

[13] А. П. Гуревич, А. П. Хромов, "Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией", *Матем. заметки*, **56**:1 (1994), 3–15; англ. пер.:A. P. Gurevich, A. P. Khromov, "First and second order differentiation operators with weight functions of variable sign", *Math. Notes*, **56**:1 (1994), 653–661.

[14] O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems”, *Communs Pure and Appl. Math.*, **37** (1984), 539–577.

[15] В. А. Винокуров, В. А. Садовничий, “Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом”, *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1423–1426; англ. пер.:V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichii, “Arbitrary-order asymptotics of the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm–Liouville boundary value problem on an interval with integrable potential”, *Differ. Equ.*, **34**:10 (1998), 1425–1429.

[16] С. И. Митрохин, “Асимптотика собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, №3, 14–17. [S. I. Mitrokhin, “The asymptotics of the eigenvalues of a fourth order differential operator with summable coefficients”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, №3, 14–17 (In Russian)].

[17] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом”, *Уфимский математический журнал*, **3**:4 (2011), 95–115. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of one differential operator with summable coefficients with the retarded argument”, *Ufa Mathematical Journal*, 2011 vol 3, №4, 95–115 (In Russian)].

[18] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1808–1811. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of differential operators of odd order with a summable potential”, *Differential Equation*, **47**:12 (2011), 1808–1811 (In Russian)].

[19] А. М. Савчук, “Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом”, *УМН*, **55**:6(336) (2000), 155–156; англ. пер.:A. M. Savchuk, “First-order regularised trace of the Sturm–Liouville operator with δ-potential”, *Russian Math. Surveys*, **55**:6 (2000), 1168–1169.

[20] А. М. Савчук, А.,А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912; англ. пер.:A.,M. Savchuk, A.,A. Shkalikov, “Sturm–Liouville operators with singular potentials”, *Math. Notes*, **66**:6 (1999), 741–753.

[21] С. И. Митрохин, *Асимптотические методы решений дифференциальных уравнений с суммируемыми коэффициентами*, ИНТУИТ, М., 2011, 592 с. [S. I. Mitrokhin, *Asymptotic Methods for Solving Differential Equations with Summable Coefficients*, INTUIT, Moscow, 2011 (In Russian), 592 pp.]

[22] С. И. Митрохин, “Об изучении спектральных свойств дифференциальных операторов четного порядка с разрывной весовой функцией”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 74–99. [S. I. Mitrokhin, “About the study of spectral properties of differential operators of even order with discontinuous weight function”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 74–99 (In Russian)].

[23] С. И. Митрохин, “О спектральных свойствах дифференциального оператора с суммируемым потенциалом и гладкой весовой функцией”, *Вестник СамГУ. Естественнонауч. серия*, 2008, №8(1/67), 172–187. [S. I. Mitrokhin, “About spectral properties of the differential operator with summable potential and smooth weight function”, *Vestnik of SamGU. Estestvennonauch. series*, 2008, №8(1/67), 172–187 (In Russian)].

[24] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 528 с. [M. A. Naimark, *Linear differential operators*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 528 pp.]

[25] Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967, 548 с. [R. Bellman, K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russian), 548 pp.]

[26] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, “О некоторых новых результатах теории регуляризованных следов дифференциальных операторов”, *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 109–116. [V. A. Sadovnichii, V. A. Lyubishkin, “Some new results of the theory of regularized traces of differential operators”, *Differ. Uravn.*, **18**:1 (1982), 109–116 (In Russian)].

Информация об авторе

Митрохин Сергей Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Научно-исследовательского вычислительного центра. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Information about the author

Sergey I. Mitrokhin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Senior Researcher of the Research Computer Center. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

Поступила в редакцию 17 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 24 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Received 17 January 2020
Reviewed 24 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56
УДК 517.928

Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Asymptotic solution of the Cauchy problem for the first-order equation with perturbed Fredholm operator

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве. Уравнение содержит малый параметр при старшей производной и возмущенный с помощью операторной добавки фредгольмов оператор в правой части. Системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока, поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др. В задаче выявляется наличие явления погранслоя; в этом случае даже малая добавка оказывает сильное влияние на поведение решения. Строится асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра методом Васильевой–Вишика–Люстерника. Доказывается асимптотичность этого разложения. Для построения регулярной части разложения применяется метод декомпозиции уравнения. Этот метод заключается в пошаговом переходе к аналогичным задачам уменьшающихся размерностей.

Ключевые слова: задача Коши; дифференциальное уравнение первого порядка; малый параметр; фредгольмов оператор; явление погранслоя; асимптотическое разложение решения; декомпозиция

Для цитирования: *Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с возмущенным фредгольмовым оператором // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 48–56. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56.

Abstract. We consider the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Banach space. The equation contains a small parameter in the highest derivative and a Fredholm operator perturbed by an operator addition on the right-hand side. Systems with small parameter in the highest derivative describe the motion of a viscous flow, the behavior of thin and flexible plates and shells, the process of a supersonic viscous gas flow around a blunt body, etc. The presence of a boundary layer phenomenon is revealed; in this case, even a small additive has a strong influence on the behavior of the solution. Asymptotic expansion of the solution in powers of small parameter is constructed by means of the Vasil'yeva–Vishik–Lyusternik method. Asymptotic property of the expansion is proved. To construct the regular part of the expansion, the equation decomposition method is used. It is consisted in a step-by-step transition to similar problems of decreasing dimensions.

Keywords: Cauchy problem; first-order differential equation; small parameter; Fredholm operator; boundary layer phenomenon; asymptotic expansion of solution; decomposition

For citation: Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s vozmushchennym fredgol'movym operatorom [Asymptotic solution Cauchy problem for the first-order equation with perturbed fredholm operator]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 48–56. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-48-56. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = (A+\varepsilon I)x(t,\varepsilon) + F(t), \tag{0.1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0 \in E, \tag{0.2}$$

где A — линейный ограниченный фредгольмов оператор, действующий в банаховом пространстве E, $I : E \to E$ — тождественный оператор, $x(t,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция из E, $F(t)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$.

Такими системами с малым параметром при старшей производной описывается движение вязкого потока [1], поведение тонких и гибких пластин и оболочек, процесс обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и др.

Если поведение решения при $\varepsilon \to 0$ существенно изменяется, то уравнение (0.1) является сингулярно возмущенным. Теорию сингулярно возмущенных уравнений создавали и развивали А. Н. Тихонов, М. М. Вишик, Л. А. Люстерник, А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, С. А. Ломов, И. С. Ломов, Н. Н. Нефедов и др. авторы.

Для задачи (0.1), (0.2) с фредгольмовым оператором A, невозмущенным операторной добавкой, построено асимптотическое разложение решения в случае одномерного ядра [2] и в более общем случае ядра произвольной размерности с жордановыми цепочками элементов, отвечающих нулевому собственному числу, различной длины [3]. Случай возмущенного фредгольмова оператора исследован в работе [4] без построения асимпотического разложения решения.

Приведем необходимые сведения.

С в о й с т в о 0.1. [5] Оператор $A : E \to E$ обладает свойством фредгольмовости (далее, Φ-оператор), если имеют место разложения:

$$E = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E = \operatorname{Coker} A \oplus \operatorname{Im} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство; $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$; сужение $\tilde{A} = A|_{\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$.

Вводятся: проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^{-} = \tilde{A}^{-1}(I-Q)$: $\operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$.

Рассматривается случай: $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ и определим в $\operatorname{Coker} A$ скалярное произведение $<\cdot,\cdot>$ так, чтобы $<\varphi,\varphi> = 1$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 0.1. [6] *Уравнение $Ax = y$ с линейным Φ-оператором A, имеющим одномерное ядро, равносильно системе:*

$$x = A^{-}y + ce \quad \text{для любого} \quad c \in \mathbb{C},$$

$$< Qy, \varphi >= 0.$$

О п р е д е л е н и е 0.1. [7] Ограниченная функция $v(t,\varepsilon)$ называется функцией погранслоя вблизи $t = 0$, если при $\varepsilon \to 0$ выполнено $v(t,\varepsilon) \rightrightarrows 0$ на $[t',T]$ для всех $t' \in (0,T)$ и $v(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows 0$ на $[0,T]$ (символом «$\rightrightarrows$» обозначена равномерная сходимость).

Возможно следующее поведение решения $x(t,\varepsilon)$ задачи (0.1), (0.2) при $\varepsilon \to 0$:

a) $x(t,\varepsilon) \rightrightarrows \overline{x}(t)$ на $t \in [0,T]$, где $\overline{x}(t)$ — решение предельной задачи для (0.1);

b) $x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t) + v(t,\varepsilon)$, где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t = 0$;

c) остальные случаи: $\|x(t,\varepsilon)\| \to \infty$ или не существует предела.

В случае b) говорят о наличии явления погранслоя.

Целью настоящей работы является выявление наличия явления погранслоя в задаче (0.1), (0.2) и построение асимптотического разложения решения по степеням ε:

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}_m(t,\varepsilon) + \overline{v}_m(t,\varepsilon) + R_m(t,\varepsilon), \tag{0.3}$$

$$\overline{x}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k x_k(t), \quad \overline{v}_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k v_k(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon.$$

Часть $\overline{x}_m(t,\varepsilon)$ разложения (0.3) называется регулярной частью, $\overline{v}_m(t,\varepsilon)$ — погранслойной частью, $R_m(t,\varepsilon)$ — остаточным членом.

1. Определение уравнений для компонент разложения

Методом Васильевой–Вишика–Люстерника [8] определяются уравнения для вычисления компонент разложения (0.3).

Уравнения первого итерационного процесса:

$$Ax_0(t) = -F(t), \tag{1.1}$$

$$Ax_k(t) = \frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{1.2}$$

Уравнения второго итерационного процесса:

$$\frac{dv_0}{d\tau} = Av_0(\tau), \tag{1.3}$$

$$\frac{dv_k}{d\tau} = Av_k(\tau) + v_{k-1}(\tau), \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{1.4}$$

Уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon \frac{dR_m}{dt} = A_\varepsilon R_m(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{1.5}$$

в обозначениях:

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon I, \tag{1.6}$$

$$g(t,\varepsilon) = \varepsilon^m (g_1(t) + g_2(\tau)) + \varepsilon^{m+1} g_3(t,\tau),$$

где

$$g_1(t) = -\frac{dx_{m-1}}{dt} + x_{m-1}(t) + Ax_m(t),$$
$$g_2(\tau) = -\frac{dv_m}{d\tau} + v_{m-1}(\tau) + Av_m(\tau),$$
$$g_3(t,\tau) = -\frac{dx_m}{dt} + x_m\,(t) + v_m(\tau).$$

Равенства для вычисления начальных условий:

$$x_0(0) + v_0(0) = x^0, \tag{1.7}$$

$$x_k(0) + v_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.8}$$

$$R_m(0,\varepsilon) = 0. \tag{1.9}$$

2. Решение уравнений первого итерационного процесса

Рассмотрим подробно вычисление функции $x_0(t)$.

В силу леммы 0.1 уравнение (1.1) равносильно системе:

$$x_0(t) = -A^- F(t) + c_0(t)e, \tag{2.1}$$

$$< QF(t), \varphi >= 0,$$

а уравнения (1.2) — системам:

$$x_k(t) = A^- \left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t) \right) + c_k(t)e, \tag{2.2}$$

$$< Q \left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t) \right), \varphi >= 0,$$

где функции $c_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, надлежит вычислить.

Подставив (2.1) в (2.2) при $k = 1$, получим уравнение:

$$< Qe, \varphi > \frac{dc_0}{dt} - < Qe, \varphi > c_0(t) =< QA^- \frac{dF}{dt}, \varphi > - < QA^- F(t), \varphi > . \tag{2.3}$$

Пусть далее выполнено условие:

$$< Qe, \varphi > \neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда уравнение (2.3) с начальным значением $c_0(0)$ имеет решение:

$$c_0(t) = \exp(t)c_0(0) + \int\limits_0^t \exp(t-s)\psi_0(s)\, ds, \tag{2.5}$$

где

$$\psi_0(t) = \frac{1}{< Qe, \varphi >}\left(< QA^-\frac{dF}{dt}, \varphi > - < QA^-F(t), \varphi >\right).$$

Подставив (2.5) в (2.1), найдем $x_0(t)$.

Остальные компоненты $x_k(t)$ регулярной части разложения вычисляются аналогичным образом; выражения для $c_k(t)$ таковы:

$$c_k(t) = \exp(t)c_k(0) + \int\limits_0^t \exp(t-s)\psi_k(s)\, ds,$$

где

$$\psi_k(t) = -\frac{1}{< Qe, \varphi >}\left(< Q\frac{df_k}{dt}, \varphi > - < Qf_k(t), \varphi >\right),$$

$$f_k(t) = A^-\left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - x_{k-1}(t)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Начальные значения $c_k(0)$ будут определены далее.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $F(t)$, $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, — единожды непрерывно дифференцируемые функции. Тогда функции $x_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, ограничены.*

Доказательство. Докажем утверждение для функции $x_0(t)$. Оценим функцию $c_0(t)$:

$$\|c_0(t)\| \leqslant \exp(t)\|c_0(0)\| + \int\limits_0^t \exp(t-s)\|\psi_0(s)\|\, ds.$$

Условие непрерывной дифференцируемости функции $F(t)$ в силу неравенства Коши–Буняковского влечет ограниченность функции $\psi_0(t)$. Далее, из неравенства $\exp(t) \leqslant \exp(T)$ на $t \in [0, T]$ и ограниченности интеграла вытекает ограниченность функции $c_0(t)$.

Следовательно, в силу следующей оценки:

$$\|x_0(t)\| \leqslant \left\|-A^-F(t) + c_0(t)e\right\| \leqslant \|A^-\| \cdot \|F(t)\| + \|c_0(t)\| \cdot \|e\|,$$

функция $x_0(t)$ ограничена.

Ограниченность остальных функций доказывается аналогично. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что и их первые производные также ограничены.

3. Решение уравнений второго итерационного процесса

Решение уравнений (1.3), (1.4) с начальными значениями $v_k(0)$ равно [9]

$$v_0(\tau) = \exp(\tau A) v_0(0),$$

$$v_k(\tau) = \exp(\tau A) v_k(0) + \int_0^\tau \exp((\tau - \zeta)A) v_{k-1}(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Для операторной экспоненты имеет место оценка [9]:

$$\|\exp(\tau A)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \tag{3.1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от τ. Число ω называется типом полугруппы оператора A.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. *При выполнении условия*

$$\omega < 0 \tag{3.2}$$

функции $v_k(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, *являются функциями погранслоя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие (3.2). Тогда в силу вытекающей из неравенства (3.1) оценки:

$$\|v_0(\tau)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \|v_0(0)\|$$

следует, что $v_0(\tau)$ является функцией погранслоя.

Отметим, что эта функция ограничена.

Для остальных функций, в силу оценки:

$$\|v_k(\tau)\| \leqslant C \exp(\tau\omega) \|v_k(0)\| + \int_0^\tau C \exp((\tau - \zeta)\omega) \|v_{k-1}(\zeta)\|\, d\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет место тот же самый результат. □

Нетрудно видеть, что функции погранслоя непрерывно дифференцируемы.

Условие (3.2) — это условие регулярности вырождения.

4. Вычисление начальных условий для уравнений первого и второго итерационного процесса

Рассмотрим равенство (1.7). Разложим элемент $x_0 \in E$ в сумму элементов из подпространств в первом разложении (0.3):

$$x_0 = z_0 e + (x_0)_{\mathrm{Coim}\, A}, \quad z_0 e \in \mathrm{Ker}\, A, \quad (x_0)_{\mathrm{Coim}\, A} \in \mathrm{Coim}\, A.$$

С другой стороны, в силу (2.1) при $t = 0$

$$x_0(0) + v_0(0) = -A^{-} F(0) + c_0(0) e + v_0(0),$$

что влечет следующие равенства:

$$c_0(0) = z_0,$$

$$v_0(0) = A^{-}F(0) + (x_0)_{\operatorname{Coim} A}. \tag{4.1}$$

Далее, перейдем к равенству (1.8) при $k = 1$. Взяв $t = 0$, получим:

$$x_1(0) = f_1(0) + c_1(0)e.$$

Тогда из $f_1(0) \in \operatorname{Coim} A$ следуют равенства:

$$c_1(0) = 0,$$

$$v_1(0) = -f_1(0).$$

Аналогично,

$$c_k(0) = 0,$$

$$v_k(0) = -f_k(0), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Из соотношений (4.1), (4.2) следует, что $v_k(0) \in \operatorname{Coim} A$, следовательно, и $v_k(\tau) \in \operatorname{Coim} A$.

5. Доказательство асимптотичности разложения

Решение задачи (1.5), (1.9) равно (см. [9])

$$R_m(t, \varepsilon) = \int\limits_0^t \exp\left((t - s)A_\varepsilon\right)\tilde{g}(s, \varepsilon)\, ds,$$

где $\tilde{g}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-1} g(t, \varepsilon)$.

В силу лемм 2.1 и 3.1 функция $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ равномерно ограничена и имеет порядок $O(\varepsilon^m)$ по норме, то есть

$$\|\tilde{g}(t, \varepsilon)\| \leqslant C\varepsilon^m. \tag{5.1}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть A — ограниченный и производящий оператор полугруппы типа ω. Тогда имеет место оценка:*

$$\|\exp\left(tA_\varepsilon\right)\| \leqslant C \exp\left(\tau\omega\right), \quad C = \mathrm{const} > 0,$$

где A_ε определяется формулой (1.6), $\tau = t/\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varepsilon^{-1}A$ и I коммутируют, то, применив оценку (3.1), имеем:

$$\|\exp\left(tA_\varepsilon\right)\| = \|\exp\left(\varepsilon^{-1}tA\right)\exp\left(tI\right)\| \leqslant C\|\exp\left(\varepsilon^{-1}tA\right)\| \leqslant C_1 \exp\left(\tau\omega\right),$$
$$C = \exp\left(T\right), \quad C_1 = \mathrm{const} > 0.$$

□

Оценим остаточный член разложения. Воспользуемся утверждением последней леммы и оценкой (5.1). При выполнении условия (3.2) имеем:

$$\|R_m(t,\varepsilon)\| \leqslant \int_0^t \|\exp((t-s)A_\varepsilon)\| \cdot \|\tilde{g}(s,\varepsilon)\|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^m \int_0^t \exp(\omega\varepsilon^{-1}(t-s))\, ds \leqslant C_2\varepsilon^{m+1}, \quad C_2 = -C\omega^{-1}(1-\exp(\omega\varepsilon^{-1}T)) > 0.$$

Последняя часть неравенства выполнена в силу монотонности функции $\omega^{-1}(1-\exp(\omega\varepsilon^{-1}t))$ при $t \in [0,T]$.

Тем самым получены следующие результаты.

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* (2.4). *Пусть* $\tilde{A}$ *— производящий оператор полугруппы отрицательного типа. Пусть функции* $F(t)$, $f_k(t)$, $k=1,2,\dots,m$, *единожды непрерывно дифференцируемы и* $< QF(t), \varphi > \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Тогда имеет место асимптотическое разложение (0.3) *решения задачи* (0.1), (0.2).

Компоненты $x_k(t)$ *разложения являются непрерывно дифференцируемыми функциями и определяются по формулам:*

$$x_0(t) = -A^- F(t) + \left(e^t z_0 + \int_0^t \exp(t-s)\psi_0(s)\, ds\right) e,$$

$$x_k(t) = f_k(t) + \left(\int_0^t \exp(t-s)\psi_k(s)\, ds\right) e, \quad k=1,2,\dots,m.$$

Компоненты $v_k(t)$ *разложения являются непрерывно дифференцируемыми функциями и определяются по формулам:*

$$v_0(\tau) = \exp(\tau A)(A^- F(0) + (x_0)_{\operatorname{Coim} A}),$$

$$v_k(\tau) = -\exp(\tau A) f_k(0) + \int_0^\tau \exp((\tau-\zeta)A) v_{k-1}(\zeta)\, d\zeta, \quad k=1,2,\dots,m.$$

Теорема 5.2. *При выполнении условий теоремы 5.1 в задаче имеет место явление погранслоя.*

References

[1] Ф. Л. Черноусько, “Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **5**:6 (1965), 1049–1070; англ. пер.:F. L. Chernousko, “Motion of a rigid body with cavities filled with viscous fluid at small Reynolds numbers”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **5**:6 (1965), 99–127.

[2] В. А. Треногин, “Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника–Вишика”, *Успехи математических наук*, **25**:4 (1970), 123–156; англ. пер.:V. A. Trenogin, “The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik”, *Russian Mathematical Surveys*, **25**:4 (1970), 119–156.

[3] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве”, *Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика*, 2016, № 3, 147–155; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “The asymptotic solution of a singularly perturbed Cauchy problem for the first-order equation in a Banach space”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, № 3, 147–155 (In Russian).

[4] С. П. Зубова, “Исследование решения задачи Коши для одного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2000, № 8, 76–80; англ. пер.:S. P. Zubova, “Investigation of the solution to the Cauchy problem for a singularly perturbed differential equation”, *Russian Mathematics*, **44**:8 (2000), 73–77.

[5] С. М. Никольский, “Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах”, *Известия АН СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. M. Nikol’skij, “Linejnye uravneniya v linejnyh normirovannyh prostranstvah”, *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[6] С. П. Зубова, В. И. Усков, “Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай”, *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, “Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a Banach space. The regular case”, *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[7] С. П. Зубова, “О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной”, *Доклады РАН*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер.:S. P. Zubova, “The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative”, *Doklady Mathematics*, **89**:1 (2014), 72–75.

[8] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973. [A. B. Vasil’eva, V. F. Butuzov, *Asimptoticheskiye Razlozheniya Resheniy Singulyarno Vozmushchennykh Uravneniy*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].

[9] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krejn, *Lineynyye Differentsial’Nyye Uravneniya v Banakhovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 21 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 27 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Department of Mathematics. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 21 January 2020
Reviewed 27 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67
УДК 517.1

О неограниченных комплексных операторах

Василий Ильич ФОМИН
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

About unbounded complex operators

Vasiliy I. FOMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Аннотация. Вводится понятие неограниченного комплексного оператора как оператора, действующего в декартовом квадрате банахова пространства. Доказывается, что каждый такой оператор является линейным. На множестве неограниченных комплексных операторов определяются линейные операции сложения и умножения на число а также операция умножения. Указываются условия коммутируемости операторов из этого множества. Рассматриваются произведение комплексно сопряжённых операторов и свойства операции сопряжения. Исследуются вопросы обратимости: предложены два сужения неограниченного комплексного оператора, которые имеют обратный оператор, при этом для одного из этих сужений найден явный вид обратного оператора. Отмечается, что неограниченные комплексные операторы могут найти применение при изучении линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Ключевые слова: декартов квадрат банахова пространства; неограниченный комплексный оператор; линейный оператор; полуограниченный комплексный оператор; коммутируемость операторов; сопряжённый оператор; ядро оператора; обратный оператор; сужение оператора

Для цитирования: *Фомин В.И.* О неограниченных комплексных операторах // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 57–67. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67.

Abstract. The concept of an unbounded complex operator as an operator acting in the pull-back of a Banach space is introduced. It is proved that each such operator is linear. Linear operations of addition and multiplication by a number and also the operation of multiplication are determined on the set of unbounded complex operators. The conditions for commutability of operators from this set are indicated. The product of complex conjugate operators and the properties of the conjugation operation are considered. Invertibility questions are studied: two contractions of an unbounded complex operator that have an inverse operator are proposed, and an explicit form of the inverse operator is found for one of these restrictions. It is noted that unbounded complex operators can find application in the study of a linear homogeneous differential equation with constant unbounded operator coefficients in a Banach space.

Keywords: pull-back of a Banach space; unbounded complex operator; linear operator; semibounded complex operator; operator commutation; conjugate operator; operator kernel; inverse operator; operator contraction

For citation: Fomin V.I. O neogranichennykh kompleksnykh operatorakh [About unbounded complex operators]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 57–67. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-57-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — банахово пространство, $L(E)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве E, $P(E)$ — множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E, с плотными в E областями определения.

При исследовании в работах [1–6] линейного однородного дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t) + A_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + A_{n-1} x'(t) + A_n x(t) = 0, \quad 0 \le t < \infty, \tag{0.1}$$

с линейными операторными коэффициентами A_i, $1 \le i \le n$, действующими в пространстве E, выяснилось, что вид решений этого уравнения определяется видом корней соответствующего характеристического операторного уравнения

$$Z^n + A_1 Z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} Z + A_n = O, \tag{0.2}$$

в частности, для уравнения второго порядка

$$x''(t) + A_1 x'(t) + A_2 x(t) = 0, \quad 0 \le t < \infty, \tag{0.3}$$

видом корней уравнения

$$Z^2 + A_1 Z + A_2 = O. \tag{0.4}$$

В свою очередь, вид корней уравнения (0.4) определяется видом операторного дискриминанта $\Delta = A_1^2 - 4A_2$. Уравнение (0.3) с коэффициентами $A_1, A_2 \in L(E)$ изучено в работе [1] в случае, когда уравнение (0.4) имеет действительные корни (т. е. при $\Delta = F^2$ или $\Delta = O$), в работе [5] — в случае, когда уравнение (0.4) имеет комплексно сопряжённые корни (т. е. при $\Delta = -F^2$, $F \ne O$). Уравнение (0.3) с коэффициентами $A_1, A_2 \in P(E)$ в случае действительных корней уравнения (0.4) изучено в работах [3,6]. Уравнение (0.1) при $A_i \in L(E)$, $1 \le i \le n$, в случае простых действительных корней уравнения (0.2) изучено в работе [2]; в случае, когда уравнение (0.2) имеет кратные действительные корни, в работе [4]; в случае, когда уравнение (0.2) имеет наряду с действительными корнями комплексные корни, в работе [7]. При этом в [7] были использованы операторы из банаховой алгебры ограниченных комплексных операторов $C_{L(E)} = \{Z = A + \mathrm{J}B) | A, B \in L(E)\}$, рассмотренной в работе [8]. При $A_i \in P(E)$, $1 \le i \le n$, возможна ситуация, когда характеристическое операторное уравнение (0.2) имеет неограниченные комплексные корни, например, для уравнения (0.4) в случае $\Delta = -F^2$, $F \ne O$, такими корнями являются $Z_{1,2} = (1/2)\,(-A_1 \pm \mathrm{J}F)$. В связи с этим актуальна задача изучения неограниченных комплексных операторов.

1. Основные понятия

Рассмотрим декартов квадрат банахова пространства E :

$$E^2 = E \times E = \{z = (x, y) | x, y \in E\}$$

с линейными операциями $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, где $\alpha \in R$; и любой из норм $\|(x, y)\| = [\|x\|^p + \|y\|^p]^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$, $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Напомним, что эти нормы эквивалентны и E^2 является банаховым пространством (см. [9, с. 103]). Для элемента $z = (x, y) \in E^2$ компоненты x и y называются соответственно действительной и мнимой частью этого элемента. В связи с тем, что линейные операции над элементами вида $(x, 0)$ из E^2 сводятся к линейным операциям в пространстве E, такие элементы можно отождествлять с их действительными частями:

$$(x, 0) = x \quad \forall x \in E, \tag{1.1}$$

в частности, нулевой элемент $\theta = (0, 0)$ пространства E^2 можно отождествлять с нулевым элементом пространства E.

Пусть $N(E)$ — множество неограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E.

З а м е ч а н и е 1.1. В дальнейшем предполагается, что рассматриваемые области определения операторов и пересечения таких областей содержат ненулевые элементы.

Напомним (см. [10, с. 207]): если $A \in N(E)$, $\alpha \in R$, то

$$\alpha A : D(\alpha A) \to E, \text{ где } D(\alpha A) = D(A); \quad (\alpha A)x = \alpha Ax;$$

если $A, B \in N(E)$, то

$$A + B : D(A + B) \to E, \text{ где } D(A + B) = D(A) \cap D(B); \quad (A + B)x = Ax + Bx;$$
$$AB : D(AB) \to E, \text{ где } D(AB) = \big\{x \in D(B) \,|\, Bx \in D(A)\big\}; \quad (AB)x = A(Bx).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Неограниченным комплексным оператором называется упорядоченная пара $W = (A, B)$ двух операторов $A, B \in N(E)$, с областью определения $D(W) = \{(x, y) \in E^2 \,|\, x, y \in D(A) \cap D(B)\}$ и следующим законом действия: для любого элемента $z = (x, y) \in D(W)$

$$Wz = (A, B)(x, y) = (Ax - By, Ay + Bx), \tag{1.2}$$

при этом операторы A и B называются соответственно действительной и мнимой частью комплексного оператора W.

Таким образом, $W : D(W) \to E^2$. Отметим, что $\theta \in D(W)$, следовательно $D(W) \neq \emptyset$, т. е. определение 1.1 корректно. Очевидно, что $W\theta = \theta$. Область значений неограниченного комплексного оператора W имеет вид $R(W) = \{h = Wz \,|\, z \in D(W)\}$ или, в силу формулы (1.2), $R(W) = \{(Ax - By, Ay + Bx) \,|\, (x, y) \in D(W)\}$.

Если $D(A) \cap D(B) = \{0\}$, то $D(W) = \{\theta\}$, $R(W) = \{\theta\}$. Такие неограниченные комплексные операторы называются тривиальными. В дальнейшем рассматриваются нетривиальные неограниченные комплексные операторы, т. е. операторы W, для которых $D(W) \neq \{\theta\}$.

Для любого $z = (x, 0) \in D(W)$ по формуле (1.2) $Wz = (A, B)(x, 0) = (Ax, Bx)$ или, в силу соглашения (1.1), $Wx = (Ax, Bx)$ для любого $x \in D(A) \cap D(B)$.

2. Основные результаты

Рассмотрим множество неограниченных комплексных операторов

$$C_{N(E)} = \{W = (A, B) \mid A, B \in N(E)\}.$$

Теорема 2.1. *Любой оператор $W = (A, B) \in C_{N(E)}$ является линейным.*

Доказательство. По определению линейного оператора, надо показать, что $D(W)$ является линейным многообразием в пространстве E^2 и оператор W обладает свойствами аддитивности и однородности. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in D(W)$, следовательно, x_1, y_1, x_2, y_2 принадлежат $D(A)$ и $D(B)$. Тогда, в силу того, что $D(A)$, $D(B)$ — линейные многообразия в пространстве E, x_1+x_2, y_1+y_2 принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, а это означает, что $z_1+z_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in D(W)$. Пусть $z = (x, y) \in D(W)$, $\alpha \in R$. Имеем: x, y принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, следовательно $\alpha x, \alpha y$ принадлежат $D(A)$ и $D(B)$, а это означает, что $\alpha z = (\alpha x, \alpha y) \in D(W)$. Показано, что $D(W)$ является линейным многообразием в E^2. Используя формулу (1.2) и аддитивность операторов A, B, получаем для любых $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in D(W)$

$$\begin{aligned} W(z_1 + z_2) &= (A(x_1 + x_2) - B(y_1 + y_2), A(y_1 + y_2) + B(x_1 + x_2)) \\ &= (Ax_1 + Ax_2 - By_1 - By_2, Ay_1 + Ay_2 + Bx_1 + Bx_2) \\ &= (Ax_1 - By_1, Ay_1 + Bx_1) + (Ax_2 - By_2, Ay_2 + Bx_2) = Wz_1 + Wz_2. \end{aligned}$$

Свойство аддитивности доказано. В силу однородности операторов A, B, для любых $z = (x, y) \in D(W)$, $\alpha \in R$ имеем

$$\begin{aligned} W(\alpha z) &= (A(\alpha x) - B(\alpha y), A(\alpha y) + B(\alpha x)) \\ &= (\alpha Ax - \alpha By, \alpha Ay + \alpha Bx) = \alpha(Ax - By, Ay + Bx) = \alpha Wz. \end{aligned}$$

Свойство однородности установлено. □

Заметим, что $R(W)$ является линейным многообразием в пространстве E^2 как область значений линейного оператора (см. [11, с. 117]).

Используя линейность оператора W и применяя метод математической индукции, получаем: для любых $z_1, z_2, \ldots, z_m \in D(W)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in R$

$$W\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i W z_i.$$

Пусть $W_1 = (A_1, B_1)$, $W_2 = (A_2, B_2) \in C_{N(E)}$. В силу того, что $\theta \in D(W_1) \cap D(W_2)$, получаем

$$D(W_1) \cap D(W_2) \neq \emptyset. \tag{2.1}$$

По определению, $W_1 + W_2 : D(W_1 + W_2) \to E^2$, где $D(W_1 + W_2) = D(W_1) \cap D(W_2)$; для любого $z = (x, y) \in D(W_1 + W_2)$ $(W_1 + W_2)z = W_1 z + W_2 z$ или, в силу формулы (1.2), $(W_1 + W_2)(x, y) = ((A_1 + A_2)x - (B_1 + B_2)y, (A_1 + A_2)y + (B_1 + B_2)x)$, т. е. $W_1 + W_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2)$, $D(W_1+W_2) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A_1) \cap D(B_1) \cap D(A_2) \cap D(B_2)\}$. В силу соотношения (2.1) определение суммы $W_1 + W_2$ корректно. Если выполнено $D(W_1) \cap D(W_2) = \{\theta\}$, то оператор $W_1 + W_2$ является тривиальным.

Пусть $W = (A, B) \in C_{N(E)}$, $\alpha \in R$. По определению, $\alpha W : D(\alpha W) \to E^2$, где $D(\alpha W) = D(W)$; для любого $z = (x, y) \in D(\alpha W)$ $(\alpha W)z = \alpha W z$ или, в силу формулы (1.2), $(\alpha W)(x, y) = \alpha(Ax - By, Ay + Bx)$, т. е. $\alpha W = (\alpha A, \alpha B)$.

Пусть $W_1 = (A_1, B_1)$, $W_2 = (A_2, B_2) \in C_{N(E)}$. По определению, $W_1W_2 : D(W_1W_2) \to E^2$, где $D(W_1W_2) = \{z = (x, y) \in D(W_2) \mid W_2 z \in D(W_1)\}$; для любого $z = (x, y) \in D(W_1W_2)$ $(W_1W_2)z = W_1(W_2 z)$. Заметим, что $\theta \in D(W_1W_2)$, следовательно, $D(W_1W_2) \neq \emptyset$, т. е. определение произведения W_1W_2 корректно. Если $D(W_1W_2) = \{\theta\}$, то оператор W_1W_2 является тривиальным. Согласно формуле (1.2) $W_2 z = (A_2 x - B_2 y, A_2 y + B_2 x)$,

$$\begin{aligned}(W_1W_2)z &= W_1(W_2 z)\\ &= \big((A_1A_2 - B_1B_2)x - (A_1B_2 + B_1A_2)y, (A_1A_2 - B_1B_2)y + (A_1B_2 + B_1A_2)x\big),\end{aligned} \tag{2.2}$$

следовательно,

$$W_1W_2 = (A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1A_2 - B_1B_2, A_1B_2 + B_1A_2), \tag{2.3}$$

$$D(W_1W_2) = \big\{(x, y) \in E^2 | x, y \in D(A_1A_2) \cap D(B_1B_2) \cap D(A_1B_2) \cap D(B_1A_2)\big\} \tag{2.4}$$

(согласно замечанию 1.1 предполагается, что $D(W_1W_2) \neq \{\theta\}$).

Пусть $W = (A, B) \in C_{N(E)}$. Тогда $W^2 : D(W^2) \to E^2$, где

$$D(W^2) = \{z = (x, y) \in D(W) | Wz \in D(W)\}.$$

В силу соотношения (2.2) для любого $z = (x, y) \in D(W^2)$

$$W^2 z = \big((A^2 - B^2)x - (AB + BA)y, (A^2 - B^2)y + (AB + BA)x\big),$$

т. е. $W^2 = (A^2 - B^2, AB + BA)$,

$$D(W^2) = \big\{(x, y) \in E^2 | x, y \in D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(AB) \cap D(BA)\big\}. \tag{2.5}$$

Заметим, что $D(W^2) \subset D(W)$.

Наряду с ограниченными и неограниченными комплексными операторами можно рассмотреть полуограниченные комплексные операторы. По определению, множество таких операторов имеет вид $K = K_1 \cup K_2$, где $K_1 = \{W = (A, B) | A \in N(E), B \in L(E)\}$, $K_2 = \{W = (A, B) | A \in L(E), B \in N(E)\}$. По определению, для любого $W = (A, B) \in K$ $W : D(W) \to E^2$ по правилу (1.2). Заметим, что для $W = (A, B) \in K_1$ имеем $D(W) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(A)\}$, а для $W = (A, B) \in K_2$ $D(W) = \{(x, y) \in E^2 \mid x, y \in D(B)\}$.

Рассмотрим множество полуограниченных комплексных операторов вида

$$\Omega = \{W = (A, O) \mid A \in N(E)\}.$$

Заметим, что $\Omega \subset K_1$. Между множествами Ω и $N(E)$ существует взаимно однозначное соответствие $(A, O) \leftrightarrow A$, $A \in N(E)$. Тогда для любых $(A_1, O), (A_2, O) \in \Omega$ имеем

$$(A_1, O) + (A_2, O) = (A_1 + A_2, O) \leftrightarrow A_1 + A_2,$$

$$(A_1, O)(A_2, O) = (A_1A_2, O) \leftrightarrow A_1A_2,$$

т. е. комплексные операторы из множества Ω складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие им операторы из $N(E)$. Следовательно, любой комплексный оператор $(A,O)\in\Omega$ можно отождествить с соответствующим ему оператором A из $N(E)$:

$$(A,O)=A \quad \forall A\in N(E). \tag{2.6}$$

По той же причине любой ограниченный комплексный оператор вида (A,O) можно отождествить с соответствующим ему оператором A из $L(E)$: $(A,O)=A$ для любого $A\in L(E)$, в частности $(O,O)=O$, $(I,O)=I$.

Пусть $W=(A,O)\in\Omega$. Тогда, в силу формулы (1.2), для любого $z=(x,y)\in D(W)$ $Wz=(A,O)(x,y)=(Ax-Oy,Ay+Ox)=(Ax,Ay)$ или, в силу соглашения (2.6), $A(x,y)=(Ax,Ay)$. Для любого оператора $(P,Q)\in C_{N(E)}$, в силу соглашения (2.6) и равенства (2.3), получаем $A(P,Q)=(A,O)(P,Q)=(AP,AQ)$.

Любой оператор $W=(A,B)\in C_{N(E)}$ можно представить в виде суммы $W=(A,O)+(O,B)$. Рассмотрим мнимую операторную единицу $\mathrm{J}=(O,I)$. В силу равенства (2.3) $\mathrm{J}B=(O,I)(B,O)=(O,B)$. Учитывая соглашение (2.6), получаем

$$W=A+\mathrm{J}B. \tag{2.7}$$

Заметим, что $\mathrm{J}B=B\mathrm{J}$, следовательно, допустима также запись $W=A+B\mathrm{J}$. Далее, $\mathrm{J}^2=(-I,O)=-I$, поэтому J можно записать в виде $\mathrm{J}=\sqrt{-I}$. По аналогии с комплексными числами представление (2.7) называется алгебраической формой комплексного оператора $W=(A,B)$. Действительная и мнимая части комплексного оператора W обозначаются соответственно через $\mathrm{Re}W$, $\mathrm{Im}W$: $\mathrm{Re}W=A$, $\mathrm{Im}W=B$.

Напомним, что операторы $A,B\in N(E)$ коммутируют на множестве

$$D(AB)\cap D(BA)=\big\{x\in D(A)\cap D(B)\,|\,Ax\in D(B),\ Bx\in D(A)\big\},$$

если $ABx=BAx$ для любого $x\in D(AB)\cap D(BA)$. Пусть

$$W_1=A_1+\mathrm{J}B_1,\quad W_2=A_2+\mathrm{J}B_2\in C_{N(E)} \quad \text{и} \quad H=D(W_1W_2)\cap D(W_2W_1)$$

(согласно замечанию 1.1 предполагается, что $H\neq\{\theta\}$). Тогда $W_1W_2=W_2W_1$ на множестве H, т. е. выполнено $W_1W_2z=W_2W_1z$ для любого $z\in H$, если $A_1A_2=A_2A_1$, $B_1B_2=B_2B_1$, $A_1B_2=B_2A_1$, $B_1A_2=A_2B_1$ соответственно на множествах

$$\begin{aligned}
H_1&=\{x\in D(A_1)\cap D(A_2)|A_1x\in D(A_2),A_2x\in D(A_1)\}\,,\\
H_2&=\{x\in D(B_1)\cap D(B_2)|B_1x\in D(B_2),B_2x\in D(B_1)\}\,,\\
H_3&=\{x\in D(A_1)\cap D(B_2)|A_1x\in D(B_2),B_2x\in D(A_1)\}\,,\\
H_4&=\{x\in D(A_2)\cap D(B_1)|A_2x\in D(B_1),B_1x\in D(A_2)\}\,.
\end{aligned}$$

Пусть оператор $W=A+\mathrm{J}B\in C_{N(E)}$. Рассмотрим комплексно сопряженный ему оператор $\overline{W}=A-\mathrm{J}B$. Заметим, что $D(\overline{W})=D(W)$. Для любого $\alpha\in R$ имеем $\overline{\alpha W}=\alpha\overline{W}$. В силу равенства (2.3)

$$W\overline{W}=A^2+B^2+\mathrm{J}(-AB+BA), \tag{2.8}$$

в частности, если
$$ABx = BAx \ \ \forall x \in D(AB) \cap D(BA), \tag{2.9}$$
то
$$W\overline{W} = A^2 + B^2. \tag{2.10}$$
Из равенств (2.5), (2.8) следует, что $D(W\overline{W}) = D(W^2)$. Непосредственно проверяется, что для любых $W_1 = A_1 + \mathrm{J}B_1$, $W_2 = A_2 + \mathrm{J}B_2 \in C_{N(E)}$ выполнено $\overline{W_1 + W_2} = \overline{W_1} + \overline{W_2}$ на множестве $D(W_1) \cap D(W_2)$. Далее, из равенства (2.3) получаем
$$\overline{W_1 W_2} = A_1A_2 - B_1B_2 - \mathrm{J}(A_1B_2 + B_1A_2). \tag{2.11}$$
В силу равенств (2.4), (2.11) $D(\overline{W_1W_2}) = D(W_1W_2)$. Из соотношения (2.3) следует равенство
$$\overline{W_1}\,\overline{W_2} = A_1A_2 - B_1B_2 + \mathrm{J}(-A_1B_2 - B_1A_2). \tag{2.12}$$
Заметим, что $D(\overline{W_1}\,\overline{W_2}) = D(\overline{W_1W_2}) = D(W_1W_2)$. Из соотношений (2.11), (2.12) следует, что $\overline{W_1W_2} = \overline{W_1}\,\overline{W_2}$ на множестве $D(W_1W_2)$.

Пусть $W = A + \mathrm{J}B \in C_{N(E)}$. Рассмотрим ядро оператора W :
$$\mathrm{Ker}W = \left\{z = (x, y) \in E^2 \,|\, Wz = \theta\right\}.$$
Заметим, что $\mathrm{Ker}W \neq \emptyset$, так как $\theta \in \mathrm{Ker}W$. Известно [11, с. 133], что линейный оператор имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда ядро этого оператора состоит только из нулевого элемента. Следовательно, при выполнении условия
$$\mathrm{Ker}W = \{\theta\} \tag{2.13}$$
существует $W^{-1} : R(W) \to D(W)$; для любого $h = Wz \in R(W)$ $W^{-1}h = z$. Оператор W^{-1} является линейным оператором как оператор, обратный линейному оператору (см. [12, с. 225]). В силу равенства (1.2) условие (2.13) выполняется лишь в том случае, когда система уравнений
$$\begin{aligned} Ax - By = 0, \\ Bx + Ay = 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$
рассматриваемая при $x, y \in D(A) \cap D(B)$, не имеет других решений, кроме нулевого решения $x = 0$, $y = 0$. Операторный определитель системы уравнений (2.14) имеет вид $T = A^2 + B^2$. Заметим, что $D(T) = D(A^2) \cap D(B^2)$, $R(T) = \{u = Tx \,|\, x \in D(T)\}$, $D(T) \subset D(A) \cap D(B)$, оператор T является линейным. При выполнении условия (2.9) получаем, в силу равенства (2.10), $T = W\overline{W}$. Пусть $\mathrm{Ker}T = \{0\}$. Тогда существует $T^{-1} : R(T) \to D(T)$; для любого $u = Tx \in R(T)$ $T^{-1}u = x$. Оператор T^{-1} является линейным.

Рассмотрим сужение оператора W на множество $D(W^2)$ (которое задаётся равенством (2.5)), т. е. оператор $\hat{W} : D(\hat{W}) \to R(\hat{W})$, где $D(\hat{W}) = D(W^2)$; для любого $z = (x, y) \in D(\hat{W})$ $\hat{W}z = Wz$. Напомним, что $R(\hat{W}) = \left\{h = \hat{W}z \,|\, z \in D(\hat{W})\right\}$.

Заметим, что условие $\mathrm{Ker}\hat{W} = \{\theta\}$ выполняется лишь в том случае, когда система (2.14), рассматриваемая при $x, y \in M$, где $M = D(A^2) \cap D(B^2) \cap D(AB) \cap D(BA)$, не имеет других решений, кроме нулевого решения $x = 0$, $y = 0$.

Пусть выполняется условие (2.9) и, кроме того,

$$\exists T^{-1} \in L(E). \tag{2.15}$$

Рассмотрим систему уравнений (2.14) при $x, y \in M$. Применяя к первому и второму уравнениям системы (2.14) соответственно операторы A и B и учитывая равенства $A0 = 0$, $B0 = 0$, получаем $A^2x - ABy = 0$, $B^2x + BAy = 0$. Складывая эти соотношения и учитывая условие (2.9), получаем $Tx = 0$, следовательно, $T^{-1}Tx = T^{-1}0$, т. е. $x = 0$. Аналогично, применяя к первому и второму уравнениям системы (2.14) соответственно операторы B и A, получаем $BAx - B^2y = 0$, $ABx + A^2y = 0$. Вычитая из второго соотношения первое, имеем $Ty = 0$, следовательно, $T^{-1}Ty = T^{-1}0$, т. е. $y = 0$. Показано, что система уравнений (2.14), рассматриваемая при $x, y \in M$, имеет только нулевое решение. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2.2. *При выполнении условий* (2.9), (2.15) $\hat{W}$ *имеет обратный оператор* $\hat{W}^{-1} : R(\hat{W}) \to D(\hat{W})$; *для любого элемента* $h = \hat{W}z \in R(\hat{W})$ $\hat{W}^{-1}h = z$.

В дальнейшем потребуется следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть операторы* $P, Q \in N(E)$ *удовлетворяют следующим условиям:*
а) *на множестве* $G = D(PQ) \cap D(QP) = \{x \in D(P) \cap D(Q) | Px \in D(Q), Qx \in D(P)\}$ *выполнено* $PQ = QP$;
б) *существует* $Q^{-1} \in L(E)$.
Тогда $PQ^{-1} = Q^{-1}P$ *на множестве* $Q(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y \in Q(G)$, т. е. $y = Qx$, где $x \in G$. Следовательно, $x = Q^{-1}y$. Имеем: $x \in G \Rightarrow x \in D(PQ) \Rightarrow y = Qx \in D(P)$. Тогда, в силу условия а) $Py = PQx = QPx$, следовательно, $Q^{-1}Py = Q^{-1}QPx$, т. е. $Q^{-1}Py = PQ^{-1}y$. □

Заметим, что утверждения, аналогичные лемме 2.1, сформулированы в виде задач в [10, с. 218], [13, с. 55].

При выполнении условия (2.9) справедливы следующие равенства: $AT = TA$ на множестве $M_1 = D(A^3) \cap D(AB^2) \cap D(B^2A)$ и $BT = TB$ на множестве $M_2 = D(B^3) \cap D(BA^2) \cap D(A^2B)$. Пусть выполняется условие (2.15). Тогда, в силу леммы 2.1,

$$AT^{-1} = T^{-1}A, \quad BT^{-1} = T^{-1}B \tag{2.16}$$

на множестве $T(M_1 \cap M_2)$. Напомним, что, согласно замечанию 1.1, предполагается следующее: действительная и мнимая части рассматриваемого комплексного оператора $W = A + \mathrm{J}B$ таковы, что $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$.

Лемма 2.2. *Справедливы включения*

$$M_1 \cap M_2 \subset D(AB) \cap D(BA), \tag{2.17}$$

$$T(M_1 \cap M_2) \subset D(A) \cap D(B). \tag{2.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in M_1 \cap M_2$. Тогда $x \in D(A^2B)$, $x \in D(B^2A)$, следовательно, $x \in D(AB)$, $x \in D(BA)$, т. е. $x \in D(AB) \cap D(BA)$. Включение (2.17) доказано.

Пусть $u \in T(M_1 \cap M_2)$, т. е. $u = Tx$, где $x \in M_1 \cap M_2$. Имеем: $x \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow A^2x \in D(A)$, $A^2x \in D(B)$, $B^2x \in D(A)$, $B^2x \in D(B) \Rightarrow A^2x \in D(A) \cap D(B)$, $B^2x \in D(A) \cap D(B) \Rightarrow u = Tx = A^2x + B^2x \in D(A) \cap D(B)$. Включение (2.18) установлено. □

Если выполняется условие (2.9), то, в силу включения (2.17), имеем

$$ABx = BAx \ \ \forall x \in M_1 \cap M_2. \tag{2.19}$$

Пусть $\Phi = \{h = (u,v) \in E^2 \,|\, u, v \in T(M_1 \cap M_2)\}$. Тогда в силу включения (2.18) выполнено $\Phi \subset D(W)$. Рассмотрим сужение оператора W на множество Φ, т. е. оператор $\tilde{W} : D(\tilde{W}) \to R(\tilde{W})$, где $D(\tilde{W}) = \Phi$; для любого $h = (u,v) \in D(\tilde{W})$ $\tilde{W}h = Wh$. Напомним, что $R(\tilde{W}) = \left\{d = \tilde{W}h | h \in D(\tilde{W})\right\}$.

Теорема 2.3. *При выполнении условий* (2.9), (2.15) $\tilde{W}$ *имеет обратный оператор*

$$\tilde{W}^{-1} = AT^{-1} - \mathrm{J}BT^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что

$$\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h = h \ \ \forall h = (u,v) \in D(\tilde{W}). \tag{2.20}$$

Пусть $h = (u,v) \in D(\tilde{W})$. Тогда $u, v \in T(M_1 \cap M_2)$, т. е. $u = Tx$, $v = Ty$, где $x, y \in M_1 \cap M_2$. Используя операцию умножения (2.3), формулу (1.2), соотношения (2.16), равенство (2.19) и свойство ассоциативности, получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h = \tilde{W}^{-1}Wh &= \tilde{W}^{-1}W(Tx,Ty) = (AT^{-1}, -BT^{-1})(A,B)(Tx,Ty)\\
&= (AT^{-1}A + BT^{-1}B, AT^{-1}B - BT^{-1}A)(Tx,Ty)\\
&= \big((AT^{-1}A + BT^{-1}B)Tx - (AT^{-1}B - BT^{-1}A)Ty,\\
&\qquad (AT^{-1}A + BT^{-1}B)Ty + (AT^{-1}B - BT^{-1}A)Tx\big)\\
&= \big((A^2T^{-1} + B^2T^{-1})Tx - (ABT^{-1} - BAT^{-1})Ty,\\
&\qquad (A^2T^{-1} + B^2T^{-1})Ty + (ABT^{-1} - BAT^{-1})Tx\big)\\
&= (TT^{-1}Tx - (AB - BA)T^{-1}Ty, TT^{-1}Ty + (AB - BA)T^{-1}Tx)\\
&= (Tx - (AB - BA)y, Ty + (AB - BA)x) = (Tx, Ty) = (u,v) = h.
\end{aligned}$$

Получили равенство $\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h = h$. Соотношение (2.20) доказано. Из этого соотношения следует равенство $\tilde{W}\tilde{W}^{-1}d = d$ для любого $d \in R(\tilde{W})$. Действительно, пусть $d \in R(\tilde{W})$, т. е. $d = \tilde{W}h$, где $h \in D(\tilde{W})$. Тогда $\tilde{W}\tilde{W}^{-1}d = \tilde{W}(\tilde{W}^{-1}d) = \tilde{W}(\tilde{W}^{-1}\tilde{W}h) = \tilde{W}h = d$. □

При исследовании уравнения (0.1), в частности, уравнения (0.3) в случае, когда $A_i \in P(E)$, $1 \le i \le n$, и соответствующее характеристическое операторное уравнение имеет комплексные корни с отличной от нуля мнимой частью, приходится использовать операторы из класса $C_{P(E)} = \big\{W = A + \mathrm{J}B \,|\, A, B \in P(E)\big\}$ неограниченных комплексных операторов.

References

[1] В. И. Фомин, “О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **38**:8 (2002), 1140–1141; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the Solution of the Cauchy Problem for a Second-Ordered Linear Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **38**:8 (2002), 1219–1221.

[2] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the General Solution of a Linear nth Order Differential Equation with Constant Bounded Opereator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.

[3] В. И. Фомин, “О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:8 (2005), 1130–1133; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the Solution of the Cauchy Problem for a Second-Ordered Linear Differential Equation with Constant Unbounded Pperator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **41**:8 (2005), 1187–1191.

[4] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713; англ. пер.:V. I. Fomin, “On the Case of Multiple Roots of the Characteristic Operator Polynomial of an nth Order Linear Homogeneous Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.

[5] В. И. Фомин, “О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **13**:1 (2008), 38–42. [V. I. Fomin, “On a second-order linear differential equation in Banach space in the case of a negative operator discriminant”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **13**:1 (2008), 38–42 (In Russian)].

[6] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **44**:3 (2008), 427–428; англ. пер.:V. I. Fomin, “On a Family of Solutions of a Linear Second-Order Differential Equation with Constant Unbounded Operator Coefficients in a Banach Space”, *Differential Equations*, **44**:3 (2008), 449–451.

[7] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 237–243. [V. I. Fomin, “On a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 237–243 (In Russian)].

[8] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823. [V. I. Fomin, “On the Banach algebra of complex operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823 (In Russian)].

[9] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Иностранная литература, М., 1962. [N. Dunford, J. Schwartz, *Linejnye operatory. Obshchaya teoriya*, Inostrannaya literatura, Moscow, 1962 (In Russian)].

[10] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [T. Kato, *Teoriya vozmushchenij linejnyh operatorov*, Mir, Moscow, 1972 (In Russian)].

[11] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Funkcionalnyj analiz*, Nauka, Moscow, 1980 (In Russian)].

[12] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementy teorii funkcij i funkcionalnogo analiza*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russian)].

[13] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Piskarevskij, T. S. Soboleva, *Zadachi i uprazhneniya po funkcionalnomu analizu*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 25 декабря 2019 г.
Поступила после рецензирования 4 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 25 December 2019
Reviewed 4 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84
УДК 519.6

Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems and ultrafilters: main representations and topological properties

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Исследуются вопросы, связанные с представлением множества ультрафильтров (УФ) широко понимаемого измеримого пространства как подпространства битопологического пространства максимальных сцепленных систем (МСС) в оснащении топологиями волмэновского и стоуновского типов (измеримая структура определяется в виде π-системы с «нулем» и «единицей»). Рассматриваются также аналогичные представления, связанные с обобщенным вариантом сцепленности, при котором для соответствующего семейства множеств постулируется непустота пересечения конечных подсемейств с мощностью, не превышающей заданную. Исследуются условия, при которых УФ и МСС (в упомянутом обобщенном смысле) отождествимы. Рассматриваются конструкции, приводящие к битопологическим пространствам с точками в виде обобщенных МСС, а также свойство n-суперкомпактности, обобщающее «обычную» суперкомпактность. Наконец, изучаются некоторые характеристические свойства МСС и их следствия, связанные с сужением МСС на «меньшую» π-систему. Особо выделяется случай, когда последняя является алгеброй множеств.

Ключевые слова: битопологическое пространство; максимальная сцепленная система; ультрафильтр

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00410_а).

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры: основные представления и топологические свойства // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 68–84. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84.

Abstract. Questions connected with representation of the ultrafilter (UF) set for widely understood measurable space are investigated; this set is considered as a subspace of bitopological space of maximal linked systems (MLS) under equipment with topologies of Wallman and Stone types (measurable structure is defined as a π-system with “zero” and “unit”). Analogous representations connected with generalized variant of cohesion is considered also; in this variant, for corresponding set family, it is postulated the nonemptyness of intersection for finite subfamilies with power not exceeding given. Conditions of identification of UF and MLS (in the above-mentioned generalized sense) are investigated. Constructions reducing to bitopological spaces with points in the form of MLS and n-supercompactness property generalizing the “usual” supercompactness are considered. Finally, some characteristic properties of MLS and their corollaries connected with the MLS contraction to a smaller π-system are being studied. The case of algebras of sets is selected separately.

Keywords: bitopological space; maximal linked system; ultrafilter

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project no. 18-01-00410_a).

For citation: Chentsov A.G. Maksimal’nyye stseplennyye sistemy i ul’trafil’try: osnovnyye predstavleniya i topologicheskiye svoystva [Maximal linked systems and ultrafilters: main representations and topological properties]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 68–84.
DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-68-84. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию топологических структур на весьма специфичных множествах. Их точками являются семейства множеств со специальными свойствами. Однако, они имеют важное значение для конструкций, возникающих в самых различных разделах современной математики и ее приложений. Так, в частности, ультрафильтры (УФ) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) играют важную роль в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости (см. [1, 2] и др.); они используются в общей топологии (отметим, в частности, компактификацию Стоуна–Чеха, расширение Волмэна; см. [3, 3.6]). Изучение УФ представляет и самостоятельный интерес. В частности, это касается вопросов «внешнего» описания пространства УФ при естественном оснащении топологиями; имеется в виду представление в виде подпространств тех или иных объемлющих топологических пространств (ТП). Этот вопрос рассматривается в статье несколько шире: множество УФ оснащается парой сравнимых топологий и превращается в битопологическое пространство (БТП), которое оказывается представимым в виде подпространства некоторого объемлющего БТП (в связи с теорией и применением БТП см. [4]). Оснащения, применяемые в упомянутых БТП, отвечают содержательно известным схемам Волмэна и Стоуна, ранее используемым в соответствующих специальных случаях. Точками объемлющего БТП оказываются максимальные сцепленные системы (МСС) [5, гл. VII] типа, отвечающего исходному ИП. С конструкциями на основе МСС естественным образом связываются такие понятия, как суперкомпактность и суперрасширение; см. [5–8] (особо отметим принципиальное положение [8] о суперкомпактности метризуемых компактов).

В серии работ автора упомянутые конструкции были распространены на весьма общий случай, когда исходное (широко понимаемое) ИП определяется посредством π-системы [9, с. 14] с «нулем» (пустое множество) и «единицей» (объемлющее множество). Для этого случая были реализованы вышеупомянутые представления в терминах БТП (см. [10]); кроме того, исследовался вопрос о суперкомпактности пространства УФ с топологией волмэновского типа, а также вопрос об условиях, при которых все МСС оказываются УФ. Настоящая работа продолжает эти исследования; рассматривается, в частности, естественное обобщение сцепленности [5–8], а именно: свойство семейства подмножеств (ПМ) «единицы», состоящее в том, что для любого кортежа множеств заданной «длины» пересечение всех множеств (данного кортежа) непусто. Здесь основной вопрос, исследуемый в статье, касается отождествимости УФ и аналогов МСС, понимаемых в упомянутом обобщенном смысле. Кроме того, для каждого натурального числа n, $n \geq 2$, на семействе МСС со свойством непустого пересечения подсемейств мощности, не превосходящей n, определяются (по аналогии со случаем «обычной» сцепленности) топологии волмэновского и стоуновского типов. В первом случае реализуется аналог свойства суперкомпактности (n-суперкомпактность). Наконец, в работе установлена сравнимость упомянутых топологий и показано, что получающееся при этом БТП является объемлющим по отношению к БТП, точками которого являются УФ. Следует отметить, что и «обычная» сцепленность представляет интерес для исследования, как свойство, более слабое чем свойства фильтров. Особенно это проявляется в конструкциях, связанных с ИП, понимаемыми весьма широко. Имеются в виду уже упоминавшиеся π-системы (семейства, замкнутые относительно конечных пересечений). Именно такой вариант измеримости рассматривается в статье. Конструкции [5–8] можно рассматривать как вариант последующих построений (имеется в виду «обычная» сцепленность) для случая π-системы (точнее, решетки) замкнутых множеств в ТП. Мы не ограничиваемся этим случаем.

1. Общие конструкции и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); в дальнейшем $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для каждого объекта x через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество со свойством $x \in \{x\}$. Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ (через $\mathcal{P}'(H)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) ПМ H; через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных ПМ множества H. Если A и B — два множества, то [11, с. 77] через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B. Каждому множеству $\mathbb{M}$ и семейству $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ сопоставляем двойственное семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} \{\, \mathbb{M} \setminus M :\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Если $\mathcal{A}$ — непустое семейство, а B — множество, то в виде

$$\mathcal{A}|_B \stackrel{\triangle}{=} \{\, A \cap B :\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

имеем след $\mathcal{A}$ на множество B. Для произвольного непустого семейства $\mathfrak{X}$ семейства

$$\{\cup\}(\mathfrak{X}),\ \{\cap\}(\mathfrak{X}),\ \{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}),\ \{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$$

соответствуют [10, (2.4)] (семейства всевозможных объединений, пересечений, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$). Если $\mathcal{E}$ — непустое семейство, то через $(\mathrm{Cen})[\mathcal{E}]$ обозначаем семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{E}$, т. е.

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{E}] \triangleq \{ \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) | \bigcap_{C \in \mathcal{K}} C \neq \varnothing \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{C})\}.$$

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; $I_n \triangleq \{k \in \mathbb{N} | k \leq n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N}) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами, используем для всяких множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо H^{I_k} более традиционное H^k для обозначения множества всех отображений из I_k в H (т. е. кортежей $(h_i)_{i \in I_k}$, где $h_j \in H$ при $j \in I_k$). В качестве H может, конечно, использоваться семейство.

Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$ и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) | \, (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (\, \mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (\, A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.1}$$

семейства из $\pi[\mathbf{I}]$ — суть π-системы с «нулем» $\varnothing$ и «единицей» $\mathbf{I}$. Используем подсемейства (1.1): $(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] | \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}\}$ (семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$), $\pi_*^\sharp[\mathbf{I}]$ соответствует [10, (2.6)], $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ – семейство всех топологий на $\mathbf{I}$ (см. обозначения [10, раздел 2]), $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{ \ \mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] : \ \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$. В виде $(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ имеем соответственно семейства всех открытых и замкнутых баз топологий на $\mathbf{I}$ (см. [10, раздел 2]), а $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ – семейства всех открытых и замкнутых предбаз топологий из $(\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ (см. [10, раздел 2]). Разумеется, $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ при $\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $\{\cap\}(\tilde{\beta}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}]$ при $\tilde{\beta} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. При $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ понимаем $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$, $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ и $(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}; \tau]$ в смысле [10, раздел 2], имея в виду семейства баз и предбаз (открытых и замкнутых) конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I} | \mathcal{I}] \triangleq \{\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) | \, \mathbf{I} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J\}$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{I}$. Введем в рассмотрение специальные (открытые) предбазы, которые будем называть суперкомпактными, имея в виду свойство, обеспечивающее суперкомпактность топологий, порожденных данными предбазами. Итак, пусть

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \triangleq \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] | \, \forall \kappa \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} | \chi] \ \exists X_1 \in \kappa \ \exists X_2 \in \kappa : \ \mathbf{I} = X_1 \cup X_2\}$$

и $((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \triangleq ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$. Тогда в виде

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] | ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \varnothing\}$$

имеем семейство всех топологий (на $\mathbf{I}$), превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное [5, гл. VII] ТП; см. также [6–8]. Отметим, что суперкомпактные T_2-пространства называют суперкомпактами.

2. Сцепленность

Фиксируем далее непустое множество E. Полагаем до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (итак, $\mathcal{L}$ есть произвольное непустое семейство ПМ E). Тогда в виде

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})|\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing\ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}$$

имеем семейство всех сцепленных [5–8] подсемейств $\mathcal{L}$; среди всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ выделяем максимальные. Легко видеть,что

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] &\stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]|\ \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ (\ \mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\ \mathcal{E} = \mathcal{S})\} \\ &= \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]|\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\}.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Введено семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, которые будем называть также МСС (на $\mathcal{L}$). С использованием леммы Цорна проверяется, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]\ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]:\ \mathcal{E} \subset \mathcal{S}.$$

Тогда при $\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing$ имеем свойство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing$. В частности, имеем, что

$$(\mathcal{L} \in \pi[E]) \Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing).$$

Случай, определяемый посылкой последней импликации, по ряду причин представляется наиболее интересным и мы сосредоточимся далее на его рассмотрении.

3. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы

Всюду в настоящем разделе полагаем, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Следуя [10, раздел 3], через $\mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ обозначаем соответственно семейства всех фильтров и всех УФ широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$, при этом

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]|\ \forall \tilde{\mathcal{U}} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]\ \ (\ \mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}) \Longrightarrow (\ \mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}})\}$$

(УФ используемого ИП – суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ и только они); $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})\ \exists \mathfrak{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}):\ \ \mathcal{F} \subset \mathfrak{U}$. Пусть $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|L \in \mathcal{U}\}\ \forall L \in \mathcal{L}$. Тогда (см. [2])

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L):\ L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})].$$

В частности, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (свойство открытой базы) и, следовательно, определена топология $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (стоуновского типа), превращающая $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное [3, 6.2] T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]), \tag{3.1}$$

в котором все множества из $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$ открыто-замкнуты. Полагаем, кроме того, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})|\exists U \in \mathcal{U}:\ U \subset H\}\ \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

Тогда (см. [10, (3.9)]) получаем следующее положение:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}|\Lambda]:\ \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \\ \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \cap (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})].\end{aligned}$$

Используя свойство открытой предбазы, получаем, что $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]$ порождает топологию

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})]$$

волмэновского типа, при этом

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle) \tag{3.2}$$

есть компактное T_1-пространство; кроме того (см. [12, раздел 7]), $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$, а триплет

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]) \tag{3.3}$$

определяет БТП. Вместе с тем, имеем следующее важное свойство

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] |\ A \cap B \in \mathcal{E}\ \forall A \in \mathcal{E}\ \forall B \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]); \tag{3.4}$$

итак, УФ — суть МСС. Для построения БТП с точками в виде МСС введем семейства $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p-BAS})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$ и $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p-BAS})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$, определяемые в [12, (4.9)] и находящиеся в двойственности; при этом

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{3.5}$$

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{3.6}$$

$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, а получающееся БТП

$$(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{3.7}$$

таково, что (3.3) может рассматриваться как подпространство БТП (3.7):

$$(\ \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})})\&(\ \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}). \tag{3.8}$$

Само же БТП (3.7) может рассматриваться (см. (3.8)) как объемлющее по отношению к (3.3). В виде $(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle)$ имеем [12, раздел 5] суперкомпактное T_1-пространство, а $(\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle)$ есть нульмерное T_2-пространство; подробнее о свойствах БТП (3.3), (3.7) см. в [12, разделы 5,6]. Из построений [10, раздел 5] вытекает, что

$$\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] |\ \exists \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E}:\ \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing\}. \tag{3.9}$$

Напомним, что $E \neq \varnothing$. Из (3.9) легко следует равенство

$$\pi^{\sharp}_*[E] = \{\mathcal{M} \in \pi[E] |\ \langle\mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{M})\}. \tag{3.10}$$

4. Обобщенная сцепленность

Имея в виду (3.9) и (3.10), рассмотрим одно естественное обобщение сцепленности, полагая далее, что $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (дополнительные условия на $\mathcal{L}$ оговариваются по мере надобности): если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) |\ \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i \neq \varnothing\ \forall (\Sigma_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{E}^m\} \tag{4.1}$$

(ясно, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|2] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$). При этом, как легко видеть,

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m+1] \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m]\ \forall m \in \mathbb{N})\&(\ (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|n]). \quad (4.2)$$

Семейства — элементы (4.1) — m-сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$; (4.2) указывает связь так определяемой m-сцепленности и центрированности. Подобно (2.1) при $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m] | \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\} \quad (4.3)$$

есть семейство всех максимальных m-сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. При этом

$$\begin{gathered}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] = \Big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m+1]| \\ \forall L \in \mathcal{L}\ \ (\ L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i) \neq \varnothing\ \forall (\Sigma_i)_{i\in I_m} \in \mathcal{E}^m) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\Big\}\ \forall m \in \mathbb{N}.\end{gathered} \quad (4.4)$$

С использованием леммы Цорна получаем, что

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m]\ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] :\ \mathcal{E} \subset \mathcal{S}. \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что $(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing) \Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \neq \varnothing\ \forall m \in \mathbb{N})$. В частности, $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \neq \varnothing$ при $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L} \in (\mathrm{COV})[E|\mathcal{E}]$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. Ясно, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|2] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. При $m \in \mathbb{N}$ семейство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$ вписано в $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m]$, т. е. $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\ \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] :\ \mathcal{E} \subset \mathcal{S}$.

Полагаем до конца статьи, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая свойство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m] \neq \varnothing$ $\forall m \in \mathbb{N}$. При этом

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E|m]\ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ясно также, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|1] = \{\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\}$ и, как легко видеть,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\ \forall m \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

При $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m]$, $\Sigma \in \mathcal{E}$ и $L \in \mathcal{L}$ имеем импликацию

$$(\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}).$$

В связи с соотношениями для УФ и максимальных n-сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ отметим, что (подобно (3.4))

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] | \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \quad (4.7)$$

при $m \in \mathbb{N}$ (здесь $n = m+1$).

Теорема 4.1. *Справедливо равенство* $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пересечение всех множеств $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$, $m \in \mathbb{N}$, обозначим через Ω. Тогда в силу (4.6) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда, в частности, $\mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. При этом, как легко видеть, для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ имеет место

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{W}. \quad (4.8)$$

Ясно, что (см. (3.4)) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ (действительно $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|2]$; дальнейшее получается по выбору $\mathcal{V}$). Поскольку в силу (3.4) $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, из (4.8) следует равенство $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, а тогда $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Свойство $\Omega \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ установлено. Требуемое равенство установлено. □

5. Обобщенная сцепленность и ультрафильтры

В настоящем разделе фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и исследуем условия отождествимости множеств $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]$. Однако сначала рассмотрим вопрос о представлении максимальных $(m+1)$-сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, не являющихся у/ф. В дальнейшем условимся при $n \in \mathbb{N}$ максимальные n-сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$ именовать n-МСС, так что мы рассматриваем далее n-МСС при $n = m+1$, не являющиеся у/ф; такие n-МСС будем называть собственными.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \\ = \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] | \exists (\Sigma_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2} : \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing\big\}.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Доказательство получается комбинацией (4.4), (4.7) и свойства замкнутости фильтров относительно конечных пересечений. Конечно, свойство (3.9) является частным случаем (5.1). Предложение 5.1 означает , что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] | \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \varnothing \ \forall (\Sigma_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}\big\}. \tag{5.2}$$

Следствие 5.1. *Справедлива цепочка равенств*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m+2] = \langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1] \cap \langle \mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+2].$$

Доказательство очевидно (см. (5.2)). Введем в рассмотрение следующее семейство π-систем

$$\begin{gathered}\pi_*^\sharp[E|m] \triangleq \big\{\mathcal{M} \in \pi[E]| \\ \forall (L_i)_{i \in I_{m+2}} \in \mathcal{M}^{m+2} \ \ (\{L_i : \ i \in I_{m+2}\} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[E|m+1]) \Longrightarrow (\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i \neq \varnothing)\big\}.\end{gathered}$$

Теорема 5.1. *Справедливо следующее равенство:*

$$\pi_*^\sharp[E|m] = \{\mathcal{M} \in \pi[E] | \ \mathbb{F}_0^*(\mathcal{M}) = \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\}.$$

Доказательство фактически сводится к комбинации предложения 5.1 и последнего определения.

Итак, $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]) \Longleftrightarrow (\ \mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E|m])$. Случай $m=1$ характеризуется равенством $\pi_*^\sharp[E] = \pi_*^\sharp[E|1]$ (см. (3.10)).

6. Обобщенная суперкомпактность

Пусть $\mathbb{E}$ — непустое множество и, при $m \in \mathbb{N}$ и $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}]$,

$$((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m, \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau] \triangleq \{\kappa \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{E}; \tau] | \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S \neq \varnothing \ \forall \mathcal{S} \in \langle \kappa - \mathrm{link} \rangle [\mathbb{E}|m]\}$$

(рассматриваем аналоги замкнутых бинарных предбаз; см. [5, гл. VII], [13, 5.11]). Тогда имеем по двойственности, что при $m \in \mathbb{N}$

$$((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}] | \ ((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_m, \mathrm{cl})[\mathbb{E}; \tau] \neq \varnothing\}$$
$$= \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbb{E}] | \ \exists \mathcal{E} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{E}; \tau] \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbb{E}|\mathcal{E}] \exists (G_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{G}^m \colon \mathbb{E} = \bigcup_{i=1}^{m} G_i\}; \quad (6.1)$$

при $\tau \in ((\mathbb{SC})_m - \mathrm{top})[\mathbb{E}]$ ТП $(\mathbb{E}, \tau)$, именуемое ниже m-суперкомпактным, компактно по лемме Александера. Фиксируем до конца раздела $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и вводим при $k \in \mathbb{N}$

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|k; L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|k] | L \in \mathcal{E}\} \ \forall L \in \mathcal{L}) \& (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|k; H]$$
$$\triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|k+1] | \exists (\Sigma_i)_{i \in I_k} \in \mathcal{E}^k : \ \bigcap_{i=1}^{k} \Sigma_i \subset H\} \ \forall H \in \mathcal{P}(E)). \quad (6.2)$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $m \in \mathbb{N}$ *и* $L \in \mathcal{L}$, *то*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L] = \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] | \ L \cap (\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i) \neq \varnothing \ \forall (\Sigma_i)_{i \in I_m} \in \mathcal{E}^m\big\}.$$

Доказательство вытекает из (4.4). Как следствие, при $m \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathcal{L}$ имеем равенство

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; E \setminus L] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|m+1; L]. \quad (6.3)$$

Полагаем при всяком $k \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|k] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|k; L] : L \in \mathcal{L}\}$ и $\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E; \mathcal{L}|k] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|k; \Lambda] : \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\}$, получая непустые семейства. С учетом (6.3) имеем при $m \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|m+1] = \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]} [\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E; \mathcal{L}|m]]$; легко видеть, что $\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E; \mathcal{L}|m] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]]$ и, следовательно, определена топология

$$\mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp (\hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E; \mathcal{L}|m])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]],$$

для которой по аналогии с [12, предложение 5.1] устанавливается, что

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|m+1] \in ((\mathrm{p}, \mathrm{bin})_{m+1}, \mathrm{cl})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]; \mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle]. \quad (6.4)$$

Теорема 6.1. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то* $\mathbb{T}_0 \langle E|\mathcal{L}; m \rangle \in ((\mathbb{SC})_{m+1} - \mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1]]$.

Доказательство сводится к комбинации (6.1) и (6.4).

В связи с (6.1), (6.4) и теоремой 6.1 отметим, что при $\mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{L}])$

$$(\ \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; G]) \Longrightarrow (\ \exists (G_i)_{i \in I_{m+1}} \in \mathcal{G}^{m+1} :$$
$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E|m+1] = \bigcup_{i=1}^{m+1} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^*_{\mathrm{op}} [E|m; G_i]).$$

Из определений вытекает следующее положение.

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если* $m \in \mathbb{N}$ *и* $H \in \mathcal{P}(E)$, *то*

$$\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}|H] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^*_{\mathrm{op}}[E|m; H].$$

Из последнего предложения при $m \in \mathbb{N}$ следует весьма очевидное равенство $\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^{(\mathrm{op})}_*[E; \mathcal{L}|m]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$, из которого, в свою очередь, вытекает

Теорема 6.2. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то* (3.2) *является подпространством ТП*

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle), \tag{6.5}$$

а именно: справедливо равенство $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$.

В силу теоремы 6.1 будем рассматривать (6.5) как n-суперкомпактное ТП, где $n = m + 1$; (6.5) является объемлющим по отношению к ТП (3.2). Кроме того,

$$\bigcap_{L \in \mathcal{E}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1; L] = \{\mathcal{E}\} \quad \forall m \in \mathbb{N}\ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]. \tag{6.6}$$

Итак, (6.5) есть (см. (6.4), (6.6)) $(m+1)$-суперкомпактное T_1-пространство.

Рассмотрим другой вариант топологической структуры, учитывая при $k \in \mathbb{N}$, что $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|k] \in (\mathrm{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|k]]$ и, следовательно,

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; k\rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|k])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|k]]. \tag{6.7}$$

П р е д л о ж е н и е 6.3. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то в виде ТП*

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle) \tag{6.8}$$

реализуется нульмерное T_2*-пространство.*

Доказательство в идейном отношении соответствует построениям [12, раздел 6]. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ до конца раздела. В связи с предложением 6.3 заметим, что при $L \in \mathcal{L}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|m+1; L] \in \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]}[\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle].$$

Как следствие, семейство $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|m+1])$ есть база ТП (6.8), состоящая из открыто-замкнутых множеств; наконец, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}^*_0[E; \mathcal{L}|m+1]|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$ и поэтому

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}.$$

П р е д л о ж е н и е 6.4. *Топологии* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle$ *сравнимы и при этом*

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle.$$

Доказательство осуществляется по аналогии с [12, предложение 7.1].

Итак, установлено, что триплет

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|m+1], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle) \tag{6.9}$$

есть БТП, для которого (3.3) может рассматриваться в виде подпространства, поскольку $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}; m\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$ и $\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}; m+1\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})}$.

7. Частные случаи

Напомним положения [12, раздел 8], касающиеся некоторых частных случаев широко понимаемого ИП $(E,\mathcal{L})$.

Сейчас отметим случай, когда $\mathcal{L}=\mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau\in(\mathrm{top})[E]$. Ясно, что $\mathbf{C}_E[\tau]\in\pi[E]$, а потому все построения предыдущих разделов сохраняют в рассматриваемом случае π-системы замкнутых множеств в произвольном ТП свою силу. Следующее положение, устанавливаемое по аналогии с [15, § 7], характеризует весьма общий случай невырожденного БТП (6.9).

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Если* (E,τ) *есть* T_1*-пространство и при этом* $\tau\neq\mathcal{P}(E)$ *(т. е. ТП* (E,τ) *не является дискретным), то* $\mathbb{T}_0\langle E|\mathbf{C}_E[\tau];m\rangle\neq\mathbb{T}_*\langle E|\mathbf{C}_E[\tau];m+1\rangle$ $\forall m\in\mathbb{N}$.

Отметим также, что при условиях предложения 7.1 $\mathbf{T}^0_{\mathbf{C}_E[\tau]}\langle E\rangle\neq\mathbf{T}^*_{\mathbf{C}_E[\tau]}[E]$ (см. [12, разд. 8]); итак, реализуется невырожденное БТП с точками в виде УФ. Вместе с тем, отметим, что при $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]\cup(\mathrm{top})[E]$ реализуются (см. [12, разд. 8]) равенства

$$(\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle)\&(\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle=\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]).$$

Итак, возвращаясь к рассмотрению «обычных» МСС (см. раздел 4), имеем в случаях, когда исходная π-система является алгеброй п/м E или топологией на E, что рассматриваемые БТП с элементами в виде УФ и МСС вырождаются в смысле совпадения образующих эти БТП топологий. При этом $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};2\rangle=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ и $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};1\rangle=\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle$ в общем случае $\mathcal{L}\in\pi[E]$. Итак, при $m=1$ и $\mathcal{L}\in(\mathrm{alg})[E]\cup(\mathrm{top})[E]$ имеем равенство $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L};m\rangle=\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L};m+1\rangle$.

8. Добавление, 1

Сохраняем предположение о том, что E — непустое множество и $\mathcal{L}\in\pi[E]$. Отметим прежде всего положение, вытекающее из следствия 5.1: если $m\in\mathbb{N}$, то

$$\mathcal{E}\notin\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m+2]\ \ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\setminus\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}) \tag{8.1}$$

и, вместе с тем

$$\mathcal{S}\notin\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+1]\ \ \forall\mathcal{S}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|m+2]\setminus\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}). \tag{8.2}$$

Свойства (8.1) и (8.2) могут быть дополнены. В этой связи мы отметим сначала ряд простых положений, легко следующих из определений. Так,

$$\mathcal{P}'(\mathcal{E})\subset\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|k]\ \forall m\in\mathbb{N}\ \forall\mathcal{E}\in\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle[E|m]\ \forall k\in I_m.$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если* $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}, 2\leqslant k$, $2\leqslant l$ *и при этом* $k\neq l$, *то*

$$\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|k]\cap\langle\mathcal{L}-\mathrm{link}\rangle_0[E|l]=\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}).$$

Доказательство следует из (4.2) и следствия 5.1.

Вернемся к рассмотрению «обычной» сцепленности. Введем в рассмотрение следующее непустое семейство π-систем

$$\pi_0[E;\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{M} \in \pi[E] | \mathcal{M} \subset \mathcal{L}\}. \tag{8.3}$$

Тогда, как легко видеть, имеет место свойство: если $\mathcal{M} \in \pi_0[E;\mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$, то

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[E].$$

П р е д л о ж е н и е 8.2. *Если* $\mathcal{M} \in \pi_0[E;\mathcal{L}]$ *и* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$, *то*

$$\exists \mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] : \ \mathcal{E} = \mathcal{H} \cap \mathcal{M}. \tag{8.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{M} \in \pi_0[E;\mathcal{L}]$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Легко видеть, что $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, а потому для некоторого $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ имеет место $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}$. Тогда

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[E].$$

При этом, однако, $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. В силу максимальности $\mathcal{E}$ получаем равенство $\mathcal{E} = \mathcal{V} \cap \mathcal{M}$. □

Отметим, что данное свойство распространяются на случай n-сцепленных семейств. При этом легко проверяется свойство: если $\mathcal{M} \in \pi_0[E;\mathcal{L}]$, $k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|k]$, то

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[E|k]. \tag{8.5}$$

П р е д л о ж е н и е 8.3. *Если* $\mathcal{M} \in \pi_0[E;\mathcal{L}]$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E|k]$, *то*

$$\exists \mathcal{H} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E|k] : \ \mathcal{E} = \mathcal{H} \cap \mathcal{M}. \tag{8.6}$$

Доказательство подобно обоснованию предложения 8.2.

П р е д л о ж е н и е 8.4. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ *и* $L \in \mathcal{L}$, *то*

$$(L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{E} : \ \Sigma \subset E \setminus L).$$

Доказательство вытекает из следующей очевидной в силу (2.1) импликации

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}).$$

Следствие 8.1. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] | \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{E} : \ \Sigma \subset E \setminus L))\}. \tag{8.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через Ω обозначим множество в правой части (8.7). Из предложения 8.4 вытекает, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \subset \Omega. \tag{8.8}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. При этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{V}) \vee (\exists \Sigma \in \mathcal{V} : \ \Sigma \subset E \setminus L). \tag{8.9}$$

Покажем, что $\mathcal{V}$ есть МСС. В самом деле, пусть $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$ обладает свойством $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Покажем, что $\mathcal{V} = \mathcal{W}$. Действительно, допустим противное: пусть $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$. Тогда $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем множество $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. Поскольку $W \in \mathcal{L}$ имеем, что (см. (8.9)) для некоторого множества $V \in \mathcal{V}$

$$V \subset E \setminus W. \tag{8.10}$$

Тогда по выбору $\mathcal{W}$ имеем свойство $V \in \mathcal{W}$, которое в силу сцепленности $\mathcal{W}$ приводит к противоречию с (8.10), поскольку $V \cap W$ непусто как пересечение множеств сцепленного семейства $\mathcal{W}$. Полученное противоречие доказывает требуемое совпадение $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{W}$ выбиралось произвольно, имеем свойство максимальности $\mathcal{V}$, т. е. $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$. Установлено вложение противоположное (8.8), а, стало быть, и требуемое равенство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \Omega$. $\square$

Приводимое ниже положение может быть извлечено из только что доказанного следствия, но мы все же рассмотрим его «прямое» доказательство.

Теорема 8.1. *Если* $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, *то справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E] | \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E})\}. \tag{8.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω_0 множество в правой части (8.11). Сравним $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ и Ω_0. Пусть $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$ и $D \in \mathcal{L}$. Допустим, что

$$D \notin \mathcal{U}. \tag{8.12}$$

Из (2.1) и (8.12) вытекает, что для некоторого множества $U \in \mathcal{U}$ справедливо равенство

$$D \cap U = \varnothing. \tag{8.13}$$

Рассмотрим множество $E \setminus D \in \mathcal{L}$, для которого $U \subset E \setminus D$ в силу (8.13). Тогда (см. раздел 4) $E \setminus D \in \mathcal{U}$, чем завершается проверка импликации

$$(D \notin \mathcal{U}) \Longrightarrow (E \setminus D \in \mathcal{U}).$$

Поскольку выбор D был произвольным, установлено, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{U}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{U}).$$

Получили включение $\mathcal{U} \in \Omega_0$, чем завершается проверка вложения

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] \subset \Omega_0. \tag{8.14}$$

Пусть $\mathcal{V} \in \Omega_0$. Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$ и при этом $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{V}). \tag{8.15}$$

Покажем, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$. Допустим противное: пусть

$$\mathcal{V} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]. \tag{8.16}$$

Тогда $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E] \setminus \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$. Поэтому для некоторого сцепленного семейства $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$

$$(\mathcal{V} \subset \mathcal{W})\&(\mathcal{V} \neq \mathcal{W}).$$

Ясно, что $\mathcal{W} \setminus \mathcal{V} \neq \varnothing$. Пусть $W \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{V}$. Вместе с тем

$$(W \in \mathcal{V}) \vee (E \setminus W \in \mathcal{V})$$

в силу (8.15). Поэтому $E \setminus W \in \mathcal{V}$. По выбору $\mathcal{W}$ получаем, что $E \setminus W \in \mathcal{W}$. Получили, что

$$(W \in \mathcal{W})\&(E \setminus W \in \mathcal{W}),$$

что приводит к противоречию со сцепленностью $\mathcal{W}$. Полученное противоречие доказывает требуемую максимальность $\mathcal{V}$, чем завершается проверка вложения $\Omega_0 \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$. С учетом (8.14) получаем равенство

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \Omega_0.$$

□

Свойство, установленное в теореме, подобно известному характеристическому свойству УФ (см. [14, с. 26]). В следующем разделе оно будет применено для исследования конструкции, связанной с преобразованием МСС при сужении измеримой структуры (см. (8.3)); эту конструкцию мы будем рассматривать в случае ИП с алгеброй множеств.

9. Добавление, 2

Рассматриваем далее случай $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, где $E \neq \varnothing$. Итак, всюду в дальнейшем объектом нашего рассмотрения будет ИП $(E, \mathcal{L})$ с алгеброй множеств (ясно, что при этом $\mathcal{L} \in \pi[E]$, причем $E \setminus L \in \mathcal{L} \ \forall L \in \mathcal{L}$). Полагаем

$$(\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \mathcal{M} \in (\mathrm{alg})[E] | \mathcal{M} \subset \mathcal{L}\} \tag{9.1}$$

(мы ввели в рассмотрение семейство подалгебр $\mathcal{L}$). Определено, также семейство (8.3). Легко видеть, что $(\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}] \subset \pi_0[E; \mathcal{L}]$.

П р е д л о ж е н и е 9.1. *Если* $\mathcal{M} \in (\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}]$ *и* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$, *то* $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link} \rangle_0[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 8.1 имеем следующие два свойства. Первое состоит в том, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E}). \tag{9.2}$$

Второе свойство аналогично и касается МСС на алгебре $\mathcal{M}$:

$$\langle \mathcal{M} - \mathrm{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{J} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link} \rangle[E] | \forall J \in \mathcal{M} \ \ (J \in \mathcal{J}) \vee (E \setminus J \in \mathcal{J})\}. \tag{9.3}$$

Напомним (см. предыдущий раздел), что $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link} \rangle[E]$. Выберем произвольно $M \in \mathcal{M}$. Тогда, в частности, $M \in \mathcal{L}$, а потому имеем (см. (9.2)), что

$$(M \in \mathcal{E}) \vee (E \setminus M \in \mathcal{E}). \tag{9.4}$$

Оба случая в (9.4) рассмотрим отдельно. Пусть сначала у нас

1) $M \in \mathcal{E}$. Тогда $M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$ по выбору M. Итак,

$$(M \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}). \tag{9.5}$$

2)Пусть $E \setminus M \in \mathcal{E}$. По свойствам алгебры множеств $E \setminus M \in \mathcal{M}$. В итоге $E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}$. Итак, получили импликацию

$$(E \setminus M \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

С учетом (9.5) получаем следующее свойство

$$(M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}) \vee (E \setminus M \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

Поскольку M выбиралось произвольно, установлено, что $\forall L \in \mathcal{M}$

$$(L \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}) \vee (E \setminus L \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M}).$$

С учетом теоремы 8.1 и (9.3) получаем требуемое свойство $\mathcal{E} \cap \mathcal{M} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. $\square$

Следствие 9.1. *Если* $\mathcal{M} \in (\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}]$, *то справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \{\, \mathcal{E} \cap \mathcal{M} :\ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\}.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (9.1), предложений 8.2 и 9.1. В силу следствия 9.1 получаем, что при всяком выборе $\mathcal{M} \in (\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}]$ отображение

$$\mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E} \cap \mathcal{M} :\ \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \longrightarrow \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \tag{9.6}$$

сюръективно. Напомним, что [3, предложение 1.4.1] справедливо следующее свойство: если (X, τ), $X \neq \varnothing$, и (Y, θ), $Y \neq \varnothing$, суть два ТП, $f \in Y^X$, $\mathcal{Y} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[Y; \theta]$ и при этом

$$f^{-1}(S) \in \tau \ \ \forall S \in \mathcal{Y}, \tag{9.7}$$

то отображение f непрерывно в смысле топологий τ и θ.

П р е д л о ж е н и е 9.2. *Если* $\mathcal{M} \in (\mathrm{alg})_0[E; \mathcal{L}]$, *то отображение (9.6) непрерывно в смысле топологий* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{M}\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся свойством (9.7). Для этого обозначим через φ отображение (9.6). Таким образом,

$$\varphi \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E]^{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]}$$

и при этом $\varphi(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{E} \cap \mathcal{M}\ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. Напомним, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{M}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E]; \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{M}\rangle];$$

см. (3.6). Выберем произвольно множество $\mathbb{M} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{M}]$, после чего подберем (см. [12, (4.9)]) $\Gamma \in \mathcal{M}$ со свойством

$$\mathbb{M} = \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\Gamma] = \{\, \mathcal{E} \in \langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | \Gamma \in \mathcal{E}\};$$

подробнее см. в [12, раздел 4]. Отметим, что $\Gamma \in \mathcal{L}$, а потому (см. [12, раздел 4])

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\Gamma] \triangleq \{\, \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | \Gamma \in \mathcal{E}\} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]. \qquad (9.8)$$

С учетом вышеупомянутого представления $\mathbb{M}$ легко проверяется равенство $\varphi^{-1}(\mathbb{M}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\Gamma]$ (учитываем тот факт, что $\Gamma \in \mathcal{M}$). В силу (9.8) получаем, что $\varphi^{-1}(\mathbb{M}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$. Поскольку выбор $\mathbb{M}$ был произвольным, установлено свойство

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \ \ \forall \mathbb{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{M}].$$

С учетом (3.6) получаем теперь, что

$$\varphi^{-1}(\mathbb{C}) \in \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \ \ \forall \mathbb{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{M}]. \qquad (9.9)$$

Из (9.7) и (9.9) вытекает требуемое свойство непрерывности. □

References

[1] А. Г. Ченцов, “Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера”, Тр. ИММ УрО РАН, **22**, 2016, 294–309; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **296**:suppl. 1 (2017), 102–118.

[2] А. Г. Ченцов, “Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2011, № 1, 113–142. [A. G. Chentsov, “Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, № 1, 113–142 (In Russian)].

[3] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 752 с.; польск. пер.:R. Engelking, *Generel Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977, 752 pp.

[4] B. P. Dvalishvili, *Bitopological Spaces: Theory, Relations with Generalized Algebraic Structures, and Applications*, Mathematics studies, Nort-Holland, 2005, 422 pp.

[5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *Generel Topology. Basic constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]

[6] J. de Groot, “Superextensions and supercompactness”, *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium “Extension Theory of Topological Structures and its Applications” (Berlin, 1969), VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.

[7] J. van. Mill, *Supercompactness and Wallman Spaces*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.

[8] M. Strok, A. Szymanski, “Compact metric spaces have binary subbases”, *Fund. Math.*, **89**:1 (1975), 81–91.

[9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian), 402 pp.]

[10] А. Г. Ченцов, “Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, “Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].

[11] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovskiy, A. Mostovskiy, *Teoriya Mnozhestv*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]

[12] А. Г. Ченцов, “Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[13] А. В. Архангельский, “Компактность”, *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel'skii, “Compactness”, *General Topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].

[14] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 310 с.; франц. пер.:J. Neveu, *Bases Mathematiques du Calcul des Probabilites*, Masson Et Cie, Paris, 1964, 310 pp.

[15] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:3 (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:3 (2017), 365–388 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16 января 2020 г.
Поступила после рецензирования 21 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Received 16 January 2020
Reviewed 21 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 25, № 129 2020

DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99
УДК 517.956.27

О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества

Андрей Владимирович ЧЕРНОВ
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24

On the uniqueness of solution to the inverse problem of the atmospheric electricity

Andrei V. CHERNOV
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation
Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev
24 Minin St., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation

Аннотация. Исследуется обратная задача определения двух неизвестных числовых параметров, входящих линейно и нелинейно в старший коэффициент линейного эллиптического уравнения второго порядка типа диффузии-реакции в области Ω, диффеоморфной шаровому слою, при специальных краевых условиях, по наблюдению в окрестностях соответствующего количества точек. Для аналогичной обратной задачи при краевых условиях Дирихле автором в свое время были получены достаточные условия единственности решения, но они носили абстрактный характер, в силу чего были неудобны для практического использования. В данной статье эти условия распространяются на случай иных краевых условий и конкретизируются для случая старшего коэффициента экспоненциального вида. Исследуемая обратная задача имеет непосредственное отношение к изучению электрических процессов в атмосфере Земли в условиях глобальной электрической цепи в стационарном приближении и вытекает из потребностей восстановления неизвестного старшего коэффициента уравнения на основе данных наблюдений, полученных с двух локальных датчиков.

Ключевые слова: обратная параметрическая задача; старший коэффициент; линейное эллиптическое уравнение второго порядка; краевая задача в шаровом слое

Для цитирования: *Чернов А.В.* О единственности решения обратной задачи атмосферного электричества // Вестник российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. № 129. С. 85–99. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99.

Abstract. We investigate the inverse problem of determination of two unknown numerical parameters occuring linearly and nonlinearly in the higher coefficient of a linear second order elliptic equation of the diffusion–reaction type in a domain Ω diffeomorphic to a ball layer under special boundary conditions by observation in neighborhoods of the correspondent amount of points. For an analogous inverse problem under Dirichlet boundary conditions, sufficient conditions of solution uniqueness was obtained by the author formerly, but they had an abstract character and so were inconvenient for practical usage. In the paper, these conditions are extended to the case of different boundary conditions and rendered concrete for the case of the exponential type higher coefficient. The inverse problem investigated in the paper refers to research of electric processes in the Earth atmosphere in the frame of global electric circuit in the stationary approximation and arises from needs of recovering the unknown higher coefficient of the equation on the base of observation data obtained from two local transmitters.

Keywords: inverse parametric problem; higher coefficient; second order linear elliptic equation; boundary value problem in a ball layer

For citation: Chernov A.V. O edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi atmosfernogo elektrichestva [On the uniqueness of solution to an inverse problem of the atmospheric electricity]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika — Russian Universities Reports. Mathematics*, 2020, vol. 25, no. 129, pp. 85–99. DOI 10.20310/2686-9667-2020-25-129-85-99. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследуется обратная задача определения двух неизвестных числовых параметров, входящих линейно и нелинейно в старший коэффициент линейного эллиптического уравнения второго порядка типа диффузии-реакции в области Ω, диффеоморфной шаровому слою, при специальных краевых условиях, по наблюдению в окрестностях соответствующего количества точек. Краевая задача, о которой идет речь, возникает как стационарная модель при изучении электрических процессов, протекающих в атмосфере. О моделях глобальной электрической цепи и их корректности см. [1, 2] для нестационарного случая ([1] соответствует нашему способу выбора краевых условий; в [2] рассматриваются различные альтернативные постановки) и [3] для стационарного (при альтернативном выборе краевых условий). Область Ω ассоциируется с атмосферой Земли.

Указанная выше обратная задача вытекает из потребностей восстановления неизвестного старшего коэффициента уравнения на основе данных наблюдений, полученных с двух локальных датчиков; аналогичная задача (при краевых условиях Дирихле) изучалась в [4], где были получены некоторые общие условия единственности решения. К сожалению, указанные условия имели несколько абстрактный вид, поскольку никак не использовали специфику конкретной формы представления коэффициента, и, вследствие этого, не удобны для непосредственного использования и, очевидно, нуждаются в соответствующей конкретизации. Именно проблеме этой конкретизации для старшего коэффициента экспоненциального вида и посвящена данная статья. Упомянутый экспоненциальный вид имеет реальную физическую подоплеку, см. [3]. Проблема единственности решения обратной задачи здесь очень важна с физической точки зрения, так как требуется однозначно установить истинные, реальные значения неизвестных параметров в то время, как существование решения естественно ожидать из физических соображений.

Проблема однозначного определения старшего коэффициента эллиптических уравнений по данным наблюдений того или иного типа уже достаточно давно привлекает внимание исследователей. См. на этот счет краткий обзор в [4].

Физические механизмы формирования *глобальной электрической цепи* (ГЭЦ) излагаются в [5]. Достижения и перспективы исследований ГЭЦ обсуждаются в [6]. Модели ГЭЦ, учитывающие топографию земной поверхности, конструируются в [7, 8]. Стационарная и нестационарная модели ГЭЦ с учетом грозовых облаков как генераторов электрического поля атмосферы, различных космических факторов, аэрозольных частиц и радиоактивных веществ, подробно изучаются в [9, 10]. В [11] исследуется электрическое поле и ток внутри и около стационарной мезомасштабной конвективной системы и ее вклад в ГЭЦ. В [12] предлагается схема моделирования ГЭЦ, собирающая эффекты от тропосферы до ионосферы, изучавшиеся ранее по отдельности, в единую модель. В [13] разрабатывается эффективная численная модель, основанная на методе обобщенных конечных разностей с применением радиальных базисных функций для симуляции ГЭЦ в атмосфере Земли с учетом топографии земной поверхности. В приведенных здесь источниках см. также дополнительную библиографию.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 1 приводится общая постановка прямой и обратной задачи, а также основные обозначения и соглашения. Раздел 2 содержит формулировку основных результатов. В разделе 3 обосновывается корректность используемого нами понятия обобщенного решения прямой задачи. Раздел 4 содержит некоторые общие признаки единственности решения обратной задачи, никак не использующие конкретный вид старшего коэффициента. В разделе 5 проводится доказательство основного результата на базе теоремы 4.2 раздела 4, которая в свою очередь является переформулировкой [4, теорема 5].

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — область, диффеоморфная шаровому слою; $\vec{J}^{\text{ст}} \in L_2^3(\Omega)$ — заданная вектор-функция. С физической точки зрения, Ω — атмосфера Земли, $\vec{J}^{\text{ст}}$ — вектор сторонних электрических токов. Через $L_\infty^+(\Omega)$ будем обозначать класс всех неотрицательных функций из $L_\infty(\Omega)$; для $n \in \mathbb{N}$ обозначаем $\mathbb{R}_+^n$ — множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Далее, пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — заданное ограниченное множество неизвестных параметров υ, подлежащих определению; $\gamma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ – заданная непрерывная функция; $\Lambda \subset \Omega$ — заданная область (с физической точки зрения представляющая, например, грозовое облако); $\sigma = \sigma[\upsilon] \in L_\infty^+(\Omega)$ — старший коэффициент, содержащий набор параметров $\upsilon \in \mathcal{D}$, подлежащих определению. Далее мы везде считаем, что всюду в области Ω выполняется неравенство:

$$0 < \sigma_* \le \sigma[\upsilon](x) \le \sigma^* \quad \text{для п.в. } x \in \Omega, \quad \forall \upsilon \in \mathcal{D}.$$

Кроме того, мы предполагаем, что в области Λ справедливо представление

$$\sigma[\upsilon](x) = \upsilon_1 \exp\big\{\upsilon_2 \gamma(x)\big\}.$$

При определенных условиях можно считать, что скалярная функция $\varphi(x)$, представляющая потенциал электрического поля в области Ω, в стационарном режиме подчиняется дифференциальному уравнению типа диффузии-реакции вида

$$\operatorname{div}\big(\sigma[\upsilon](x)\nabla\varphi(x)\big) = \operatorname{div}\vec{J}^{\text{ст}}(x),\ x \in \Omega,\ \upsilon \in \mathcal{D}; \tag{1.1}$$

и краевым условиям

$$\varphi\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi\Big|_{\Gamma_2} = C; \tag{1.2}$$

$$\int\limits_{\Gamma_2} \left\{ \sigma[\upsilon]\, \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \vec{J}^{\text{ст}}_{\vec{n}} \right\} d\ell = 0. \tag{1.3}$$

Здесь Γ_1 — внешняя часть, а Γ_2 — внутренняя часть границы области Ω; C — нефиксированная константа, характеризующая средневзвешенный фоновый показатель электрического потенциала; $\vec{n}(x)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_2, $\vec{J}^{\text{ст}}_{\vec{n}} = \vec{J}^{\text{ст}}_{\vec{n}} \cdot \vec{n}$ — нормальная составляющая вектора $\vec{J}^{\text{ст}}$.

Прежде чем дать понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3), проведем некоторые формальные преобразования (то есть предполагая, что участвующие в них функции являются достаточно гладкими). Обозначим Ω_i — область, ограниченная поверхностью Γ_i, $i \in \{1, 2\}$. Для скалярной функции ψ и вектор-функции $\vec{g}$ непосредственно из формулы Остроградского–Гаусса получаем:

$$\int\limits_{\Omega_i} \operatorname{div}(\psi \vec{g})\, dx = \int\limits_{\Gamma_i} \psi \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\ell.$$

Здесь точка $\cdot$ означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^3$. С другой стороны,

$$\operatorname{div}(\psi \vec{g}) = \nabla \psi \cdot \vec{g} + \psi \cdot \operatorname{div} \vec{g}.$$

Таким образом, приходим к формуле интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Omega_i} \psi \operatorname{div} \vec{g}\, dx = \int\limits_{\Gamma_i} \psi \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\ell - \int\limits_{\Omega_i} \vec{g} \cdot \nabla \psi\, dx.$$

Пользуясь теперь этой формулой, получаем:

$$\int\limits_{\Omega} \psi \operatorname{div} \vec{g}\, dx = \int\limits_{\Omega_2} \psi \operatorname{div} \vec{g}\, dx - \int\limits_{\Omega_1} \psi \operatorname{div} \vec{g}\, dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \vec{g} \cdot \nabla \psi\, dx + \int\limits_{\Gamma_2} \psi \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\ell - \int\limits_{\Gamma_1} \psi \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\ell.$$

Если теперь ψ удовлетворяет условиям (1.2), то ясно, что

$$\int\limits_{\Omega} \psi \operatorname{div} \vec{g}\, dx = -\int\limits_{\Omega} \vec{g} \cdot \nabla \psi\, dx + C \int\limits_{\Gamma_2} \vec{g} \cdot \vec{n}\, d\ell.$$

Таким образом, тождество

$$\int\limits_{\Omega} \psi \operatorname{div}(\sigma \nabla \varphi)\, dx = \int\limits_{\Omega} \psi \operatorname{div} \vec{J}^{\text{ст}}\, dx$$

можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int\limits_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}} \cdot \nabla\psi \, dx + C \int\limits_{\Gamma_2} \left(\sigma\nabla\varphi - \vec{J}^{\text{ст}}\right) \cdot \vec{n} \, d\ell.$$

Используя теперь условия (1.3), то же самое можем конкретизировать следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx = \int\limits_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}} \cdot \nabla\psi \, dx.$$

Сделаем некоторые важные замечания. Обозначим

$$V(\Omega) = \left\{ \psi \in H^1(\Omega) \;\Big|\; \exists C \in \mathbb{R}: \; \psi\Big|_{\Gamma_1} = 0, \; \psi\Big|_{\Gamma_2} = C \right\}.$$

В работе [1] было показано, что множество $V(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением вида

$$(\varphi, \psi)_{V(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx.$$

Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию $\varphi \in V(\Omega)$, удовлетворяющую для всех $\psi \in V(\Omega)$ интегральному тождеству.

$$B\{\upsilon\}[\varphi, \psi] = \mathcal{F}[\psi], \tag{1.4}$$

где приняты обозначения

$$B\{\upsilon\}[\varphi, \psi] \equiv \int\limits_{\Omega} \sigma[\upsilon](x) \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx, \; \mathcal{F}[\psi] \equiv \int\limits_{\Omega} \vec{J}^{\text{ст}}(x) \cdot \nabla\psi(x) \, dx.$$

Корректность такого определения устанавливается в разделе 3. А именно, основываясь на теореме Лакса–Мильграма, доказывается, что для всех $\upsilon \in \mathcal{D}$ задача (1.1)–(1.3) имеет единственное решение $\varphi = \varphi[\upsilon] \in V(\Omega)$.

Далее будем считать, что заданы некоторые непересекающиеся подобласти $\Lambda_j \subset \Lambda$, $j = 1, 2$, и на каждой из них фиксируется наблюдение $\varphi = \overline{\varphi}(x)$. Решается следующая обратная задача: по данным наблюдений $\varphi = \varphi[\upsilon](x) = \overline{\varphi}(x)$, $x \in \Lambda_j$, $j = 1, 2$, восстановить значения неизвестных параметров $\upsilon \in \mathcal{D}$. Существование решения ожидается, исходя из физических соображений. Требуется установить единственность решения обратной задачи.

2. Формулировка основных результатов

Теорема 2.1. *Пусть на каждой из областей Λ_j, $j = 1, 2$, выполняются следующие условия.*

1. *Функция $\gamma(x)$ имеет градиент $\nabla\gamma \in L_2^3(\Lambda_j)$ и не обращается в ноль.*

2. *Функция $\overline{\varphi}(x)$ имеет лапласиан $\Delta\overline{\varphi} \in L_2(\Lambda_j)$.*

3. *Для любых* $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi_2 \neq \eta_2$, *система из десяти функций*

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\bigl\{\upsilon_2\gamma(x)\bigr\}, \quad \Delta\overline{\varphi}(x)\gamma(x)\exp\bigl\{\upsilon_2\gamma(x)\bigr\},$$

$$A[\overline{\varphi},\upsilon](x), \quad \gamma(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x), \quad \gamma^2(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

где

$$A[\overline{\varphi},\upsilon](x) \equiv \bigl(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\bigr)\exp\bigl\{\upsilon_2\gamma(x)\bigr\},$$

при $\upsilon = \xi$ *(пять функций),* $\upsilon = \eta$ *(еще пять функций) линейно независима.*

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2.1 см. в разделе 5.

Теорема 2.2. *Пусть на каждой из областей* Λ_j, $j = 1, 2$, *выполняются следующие условия.*

1. *Функция* $\gamma(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\gamma \in \bigl[\mathbf{C}(\Lambda_j)\bigr]^3$ *и не обращается в ноль.*

2. *Функция* $\overline{\varphi}(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\overline{\varphi} \in \bigl[\mathbf{C}(\Lambda_j)\bigr]^3$ *и лапласиан* $\Delta\overline{\varphi} \in \mathbf{C}(\Lambda_j)$.

3. *Существует набор точек* $x_{j,i} \in \Lambda_j$, $i = \overline{1,6}$, *расположенных на различных поверхностях уровня функции* $\gamma(x)$, *для которого выполняется по крайней мере одно из двух:*
   a) $\Delta\overline{\varphi}(x_{j,i}) \neq 0$, $\bigl(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\bigr)(x_{j,i}) = 0$, $i = \overline{1,6}$,
   или наоборот,
   b) $\Delta\overline{\varphi} \not\equiv 0$, $\Delta\overline{\varphi}(x_{j,i}) = 0$, $\bigl(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\bigr)(x_{j,i}) \neq 0$, $i = \overline{1,6}$.

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2.2 см. в разделе 5.

Следствие 2.1. *Пусть на каждой из областей* Λ_j, $j = 1, 2$, *выполняются следующие условия.*

1. *Функция* $\gamma(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\gamma \in \bigl[\mathbf{C}(\Lambda_j)\bigr]^3$ *и не обращается в ноль.*

2. *Функция* $\overline{\varphi}(x)$ *имеет непрерывный градиент* $\nabla\overline{\varphi} \in \bigl[\mathbf{C}(\Lambda_j)\bigr]^3$ *и лапласиан* $\Delta\overline{\varphi} \in \mathbf{C}(\Lambda_j)$.

3. *Существует непрерывная кривая* $\ell_j \subset \Lambda_j$, *вдоль которой функция* $\gamma(x)$ *не является постоянной и выполняется по крайней мере одно из двух: a)* $\Delta\overline{\varphi} \neq 0$, $\bigl(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\bigr) = 0$, *или наоборот, b)* $\Delta\overline{\varphi} = 0$, $\bigl(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\bigr) \neq 0$, *при том, что* $\Delta\overline{\varphi} \not\equiv 0$ *на* $\Lambda_j \setminus \ell_j$.

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

3. Корректность понятия обобщенного решения краевой задачи

Докажем, используя стандартную схему, что задача (1.1)–(1.3) имеет единственное обобщенное решение $\varphi \in V(\Omega)$ в смысле интегрального тождества (1.4).

Следующее утверждение известно как теорема Лакса–Мильграма, см., например, [14, § 5.8, теорема 5.8, с.84].

Лемма 3.1. *Пусть H — вещественное гильбертово пространство; $B : H \times H \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, которая является ограниченной и коэрцитивной, то есть существуют константы γ_1, $\gamma_2 > 0$ такие, что*

$$\big|B[\varphi,\psi]\big| \le \gamma_2\|\varphi\|\,\|\psi\|, \quad B(\varphi,\varphi) \ge \gamma_1\|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi,\psi \in H.$$

Тогда для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $\varphi \in H$ такой, что $B[\varphi,\cdot] = f$.

Очевидно, что формула $\mathcal{F}[\psi]$ определяет линейный функционал $\mathcal{F} : V(\Omega) \to \mathbb{R}$. Функционал $\mathcal{F}$ является ограниченным. Действительно, согласно неравенству Гельдера, для всякого $\psi \in V(\Omega)$ имеем:

$$|\mathcal{F}[\psi]| \le \|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{L_2^3(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L_2^3(\Omega)} = \|\vec{J}^{\text{ст}}\|_{L_2^3(\Omega)}\|\psi\|_{V(\Omega)}.$$

Таким образом, $\mathcal{F} \in H^*$ при $H = V(\Omega)$.

Покажем, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ является ограниченной. Используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Гельдера, для всех $\varphi,\psi \in V(\Omega)$ получаем:

$$\big|B[\varphi,\psi]\big| \le \sigma^*\|\nabla\varphi\|_{L_2^3(\Omega)}\|\nabla\psi\|_{L_2^3(\Omega)} = \sigma^*\|\varphi\|_{V(\Omega)}\|\psi\|_{V(\Omega)}.$$

Это означает, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ является ограниченной.

Пользуясь теперь определением скалярного произведения в гильбертовом пространстве $V(\Omega)$, для произвольного $\varphi \in V(\Omega)$ оценим

$$B[\varphi,\varphi] \ge \sigma_*\|\nabla\varphi\|^2_{L_2^3(\Omega)} = \sigma_*\|\varphi\|^2_{V(\Omega)}.$$

Это означает, что билинейная форма $B[\varphi,\psi]$ коэрцитивна. Таким образом, согласно теореме Лакса–Мильграма (лемме 3.1), при данном (произвольно фиксированном) $\upsilon \in \mathcal{D}$ существует единственное обобщенное решение $\varphi \in V(\Omega)$ задачи (1.1)–(1.3).

4. Общие признаки единственности решения обратной задачи

В этом разделе считаем выполненными условия 1 и 2 теоремы 2.1. Но, вообще говоря, функция $\sigma[\upsilon](x)$ может иметь произвольный вид; достаточно лишь, чтобы она обладала определенной степенью гладкости в областях Λ_j, $j = 1,2$. Фактически, речь идет о переформулировке общих признаков единственности решения обратной задачи из [4].

Для $j \in \overline{1,2}$ обозначим $\mathcal{H}_j$ – множество всех функций $\psi \in V(\Omega)$, сужение которых на область Λ_j принадлежит пространству $H_0^1(\Lambda_j)$, и более того, $\psi \equiv 0$, $\nabla\psi \equiv 0$ на $\Omega \setminus \Lambda_j$. При заданных $\psi_j \in \mathcal{H}_j$, $j = \overline{1,2}$, определим функции

$$F_j[\psi_j](\upsilon) = \int\limits_{\Lambda_j} \sigma[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\cdot\nabla\psi_j(x)\,dx, \quad j = \overline{1,2}.$$

Определим также вектор-функцию $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^2$ формулой

$$F=F[\vec{\psi}]=\mathrm{col}\,(F_1[\psi_1],F_2[\psi_2]),\quad \vec{\psi}=\mathrm{col}\,(\psi_1,\psi_2)\in\mathcal{H},$$

где $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$.

Теорема 4.1. *Пусть для всякой пары $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, существует $\vec{\psi}\in\mathcal{H}$ такое, что скалярное произведение*

$$\big(F[\vec{\psi}](\xi)-F[\vec{\psi}](\eta)\big)\cdot(\xi-\eta)>0. \tag{4.1}$$

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство см. в [4, теорема 3].

Далее будем конкретизировать теорему 4.1, предполагая, что выполняется условие

$\mathbf{H}_1$) Для всех $\upsilon\in\mathcal{D}$, $i,j=1,2$ сужение $\big[\sigma'_{\upsilon_j}[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\big]\,\big|_{\Lambda_i}$ принадлежит пространству $H^1(\Lambda_i)$.

Используя интегрирование по частям, получаем равенство:

$$\frac{\partial F_i[\psi_i](\xi)}{\partial\upsilon_j}=-\int\limits_{\Lambda_i}\mathrm{div}\,\big[\sigma'_{\upsilon_j}[\upsilon](x)\nabla\overline{\varphi}(x)\big]\,\psi_i(x)\,dx,\quad i,j=\overline{1,2}. \tag{4.2}$$

Предположим дополнительно выполнение следующего условия.

$\mathbf{H}_2$) Функции $h_j(x,\xi)=\mathrm{div}\,\sigma'_{\upsilon_j}[\xi](x)\nabla\overline{\varphi}(x)$, $j=1,2$, таковы, что для любых $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, функции

$$H_j(x;\xi,\eta)=\int\limits_0^1 h_j\big(x,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta,\quad j=\overline{1,2},$$

линейно независимы на каждом из множеств Λ_i, $i=\overline{1,2}$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* $\mathbf{H}_1$), $\mathbf{H}_2$). *Тогда все предположения теоремы 4.1 выполняются, и тем самым, обратная задача не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 4.2 практически дословно повторяет доказательство [4, теорема 5]; отличие лишь в том, что подынтегральное выражение в формуле (4.2), формально говоря, выглядело несколько иначе, но лишь за счет того, что рассматривалось уравнение более общего вида.

5. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.1. В соответствии с теоремой 4.2 нам достаточно лишь проверить выполнение условий $\mathbf{H}_1$), $\mathbf{H}_2$). Условие $\mathbf{H}_1$) выполняется очевидным образом. Покажем, что выполнено также и условие $\mathbf{H}_2$). Это и составляет основную трудность. Именно здесь нам потребуется конкретное представление функции $\sigma(x)$ на области Λ, а точнее, на областях $\Lambda_j \subset \Lambda$, $j = 1, 2$.

Найдем выражения функций $H_j(x;\xi,\eta)$, $j = 1, 2$, $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$. Прежде всего, непосредственным вычислением получаем:

$$\sigma'_{\upsilon_1}[\upsilon](x) = \exp\bigl\{\upsilon_2\gamma(x)\bigr\}, \quad \sigma'_{\upsilon_2}[\upsilon](x) = \upsilon_1\gamma(x)\exp\bigl\{\upsilon_2\gamma(x)\bigr\}, \quad x \in \Lambda_j,$$

$j = 1, 2$, и следовательно,

$$h_1(x,\xi) = \operatorname{div}\sigma'_{\xi_1}[\xi](x)\nabla\overline{\varphi}(x) = \exp\bigl\{\xi_2\gamma(x)\bigr\}\bigl(\Delta\overline{\varphi}(x) + \xi_2\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\bigr);$$

$$h_2(x,\xi) = \operatorname{div}\sigma'_{\xi_2}[\xi](x)\nabla\overline{\varphi}(x) =$$
$$= \exp\bigl\{\xi_2\gamma(x)\bigr\}\xi_1\Bigl[\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \{1 + \xi_2\gamma(x)\}\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\Bigr].$$

Далее необходимо рассмотреть три случая.

I. Пусть $\xi_j \neq \eta_j$, $j = 1, 2$. В соответствии с определением функций $H_j(x;\xi,\eta)$ и полученными выражениями для $h_j(x,\xi)$, $j = 1, 2$, прежде всего, вычислим интегралы:

$$J_0 = \int\limits_0^1 \exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\,d\theta = \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[e^{\xi_2\gamma(x)} - e^{\eta_2\gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_1 = \int\limits_0^1 \bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\,d\theta =$$
$$= \frac{\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\Bigl|_{\theta=0}^{\theta=1} - \frac{\xi_2 - \eta_2}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}J_0 =$$
$$= \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[\xi_2 e^{\xi_2\gamma(x)} - \eta_2 e^{\eta_2\gamma(x)}\Bigr] - \frac{\xi_2 - \eta_2}{\bigl[\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)\bigr]^2}\Bigl[e^{\xi_2\gamma(x)} - e^{\eta_2\gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_2 = \int\limits_0^1 \bigl[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\bigr]\exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)}\Bigl[\xi_1 e^{\xi_2\gamma(x)} - \eta_1 e^{\eta_2\gamma(x)}\Bigr] - \frac{\xi_1 - \eta_1}{\bigl[\gamma(x)(\xi_2 - \eta_2)\bigr]^2}\Bigl[e^{\xi_2\gamma(x)} - e^{\eta_2\gamma(x)}\Bigr];$$

$$J_3 = \int\limits_0^1 \bigl[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\bigr]\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]e^{\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}}\,d\theta = \eta_2 J_2 + J_4;$$

$$J_4 = \int\limits_0^1 \bigl[\eta_1\theta + \theta^2(\xi_1 - \eta_1)\bigr]\bigl[\xi_2 - \eta_2\bigr]\exp\Bigl\{\bigl[\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2)\bigr]\gamma(x)\Bigr\}\,d\theta =$$

$$= \frac{\eta_1\theta + \theta^2(\xi_1-\eta_1)}{\gamma(x)} \exp\Big\{\big[\eta_2+\theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} -$$

$$-\frac{1}{\gamma(x)}\int\limits_0^1 \big[\eta_1+2\theta(\xi_1-\eta_1)\big]\exp\Big\{\big[\eta_2+\theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\,d\theta =$$

$$= \frac{\xi_1}{\gamma(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} - \frac{1}{\gamma(x)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\eta_1+2\theta(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)\gamma(x)}\exp\Big\{\big[\eta_2+\theta(\xi_2-\eta_2)\big]\gamma(x)\Big\}\Big|_{\theta=0}^{\theta=1} - \frac{2(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)\gamma(x)}J_0\right] =$$

$$= \frac{\xi_1}{\gamma(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} - \frac{2\xi_1-\eta_1}{(\xi_2-\eta_2)\gamma^2(x)}\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\} +$$

$$+\frac{\eta_1}{(\xi_2-\eta_2)\gamma^2(x)}\exp\big\{\eta_2\gamma(x)\big\} + \frac{2(\xi_1-\eta_1)}{(\xi_2-\eta_2)^2\gamma^2(x)}\Big[e^{\{\xi_2\gamma(x)\}} - e^{\{\eta_2\gamma(x)\}}\Big].$$

Теперь можем записать:

$$H_1(x;\xi,\eta) = \int\limits_0^1 h_1\big(x,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta = J_0\,\Delta\overline{\varphi}(x) + J_1\,\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big),$$

$$H_2(x;\xi,\eta) = \int\limits_0^1 h_2\big(x,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta =$$

$$= \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,J_2 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,J_3.$$

Нас интересуют условия, при которых функции $H_1(x;\xi,\eta)$, $H_2(x;\xi,\eta)$ будут линейно независимы на каждой из областей Λ_j, $j=1,2$. В связи с этим заметим, что домножение на функцию $\gamma^2(x)>0$ не влияет на их линейную зависимость. При этом из полученных представлений видим, что функция $\gamma^2(x)H_1(x;\xi,\eta)$ представляется в виде линейной комбинации функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma(x)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\}, \quad A[\overline{\varphi},\upsilon](x) \equiv \big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\},$$

$$\gamma(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

а функция $\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta)$ — в виде линейной комбинации тех же функций и плюс к тому функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\upsilon_2\gamma(x)\big\}, \quad \gamma^2(x)A[\overline{\varphi},\upsilon](x),$$

при $\upsilon=\xi$, $\upsilon=\eta$. Покажем, что выполняется условие $\mathbf{H}_2$). Рассуждая от противного, предположим, что при некоторых константах C_1, C_2 имеет место тождество

$$C_1\gamma^2(x)H_1(x;\xi,\eta) + C_2\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta) \equiv 0, \quad x\in\Lambda_j. \tag{5.1}$$

Заметим, что в выражении $\gamma^2(x)H_2(x;\xi,\eta)$ коэффициент при каждой из функций

$$\Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\xi_2\gamma(x)\big\}, \quad \Delta\overline{\varphi}(x)\gamma^2(x)\exp\big\{\eta_2\gamma(x)\big\},$$

обязательно не нулевой. В самом деле, для всех $v \in \mathcal{D}$ должно быть $v_1 > 0$, иначе получим противоречие с исходным предположением $\sigma[v](x) \geq \sigma_* > 0 \ \ \forall v \in \mathcal{D}$. Таким образом, $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$. Причем в выражение $\gamma^2(x)H_1(x;\xi,\eta)$ ни та, ни другая функция не входит. Поэтому, предполагая, что $C_2 \neq 0$, получаем противоречие с условием 3 теоремы 2.1. Если же $C_2 = 0$, то предполагая, что $C_1 \neq 0$, и учитывая полученное выше представление для функции $H_1(x;\xi,\eta)$, вновь получаем противоречие с условием 3 теоремы 2.1. Таким образом, $C_1 = C_2 = 0$, то есть выполняется условие $\mathbf{H}_2$).

II. Пусть $\xi_1 = \eta_1 = \tau > 0$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Выясним, как преобразуются интегралы по сравнению с пунктом I. Очевидно, что интегралы J_0 и J_1 не меняются. Вычислим интегралы

$$J_2 = \tau\, J_0, \quad J_3 = \tau\, J_1.$$

Ясно, что выражение для $H_1(x;\xi,\eta)$ по сравнению с пунктом I никак не изменится:

$$H_1(x;\xi,\eta) = J_0\, \Delta\overline{\varphi}(x) + J_1 \left(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\right).$$

При этом

$$H_2(x;\xi,\eta) = \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, J_2 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\, J_3,$$

то есть

$$H_2(x;\xi,\eta) = \big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,\tau\, J_0 + \gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big)\,\tau\, J_1.$$

После этого аналогично пункту I устанавливаем выполнение условия $\mathbf{H}_2$).

III. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2 = \tau$. Выясним, как преобразуются интегралы по сравнению с пунктом I:

$$J_0 = \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\}, \quad J_1 = \tau\, \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\},$$

$$J_2 = \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\} \int\limits_0^1 \big[\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\big]\, d\theta =$$

$$= \exp\big\{\tau\gamma(x)\big\} \left[\eta_1\theta + \frac{\xi_1-\eta_1}{2}\theta^2\right] \Big|_{\theta=0}^{\theta=1} = \frac{\xi_1+\eta_1}{2}\exp\big\{\tau\gamma(x)\big\}, \quad J_3 = \tau\, J_2.$$

Таким образом, обозначая $\xi_1 + \eta_1 = 2\nu > 0$, получаем:

$$\exp\big\{-\tau\gamma(x)\big\}\Big\{C_1H_1(x;\xi,\eta) + C_2H_2(x;\xi,\eta)\Big\} =$$

$$= C_1\Delta\overline{\varphi}(x) + C_1\tau\left(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\right) +$$

$$+ C_2\nu\big(\gamma(x)\Delta\overline{\varphi}(x) + \nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big) + C_2\nu\tau\gamma(x)\big(\nabla\gamma(x)\cdot\nabla\overline{\varphi}(x)\big).$$

Отсюда и из условия 3 теоремы 2.1 следует, что условие $\mathbf{H}_2$) выполняется. □

Далее, для доказательства теоремы 2.2 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Пусть* $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,6}$, *— произвольные постоянные, не все равные нулю;* ξ, $\eta \in \mathbb{R}$, $\xi \neq \eta$, *— заданные константы. Тогда уравнение вида*

$$\big(C_1t^2 + C_2t + C_3\big)\exp\{\xi t\} + \big(C_4t^2 + C_5t + C_6\big)\exp\{\eta t\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

может иметь не более пяти корней.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\xi < \eta$. Обозначим $k = \eta - \xi > 0$. Тогда, домножая уравнение (5.2) на $\exp\{-\xi t\}$, можем переписать его в виде

$$f(t) \equiv C_1t^2 + C_2t + C_3 + \big(C_4t^2 + C_5t + C_6\big)\exp\{kt\} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

В случае $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ утверждение леммы очевидно. Поэтому предположим, что это не так. Непосредственным вычислением получаем, что производные функции $f(t)$ могут быть представлены следующим образом:

$$f'(t) = 2C_1t + C_2 + \big(\overline{C}_4t^2 + \overline{C}_5t + \overline{C}_6\big)\exp\{kt\},$$

$$f''(t) = 2C_1 + \big(\widetilde{C}_4t^2 + \widetilde{C}_5t + \widetilde{C}_6\big)\exp\{kt\},$$

$$f'''(t) = \big(\widehat{C}_4t^2 + \widehat{C}_5t + \widehat{C}_6\big)\exp\{kt\}.$$

Ясно, что уравнение $f'''(t) = 0$ может иметь не более двух корней. Таким образом, функция $f''(t)$ имеет не более трех промежутков монотонности. Поэтому уравнение $f''(t) = 0$ может иметь не более трех корней. Следовательно (по аналогичным причинам), уравнение $f'(t) = 0$ может иметь не более четырех корней, а уравнение (5.3) — не более пяти корней. □

Доказательство теоремы 2.2. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2.1, рассмотрим три случая.

I. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Покажем, что тождество

$$\gamma^2(x)\Big\{C_1H_1(x;\xi,\eta) + C_2H_2(x;\xi,\eta)\Big\} \equiv 0 \quad \text{на} \quad \Lambda_j, \tag{5.4}$$

возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Как видно из доказательства теоремы 2.1, тождество (5.4) может быть переписано в виде

$$A(x)\mathcal{P}[\nu]\{\gamma(x)\} + B(x)\mathcal{Q}[\mu]\{\gamma(x)\} \equiv 0, \quad x \in \Lambda_j, \tag{5.5}$$

где приняты обозначения:

$$\mathcal{P}[\nu]\{t\} = \big(\nu_1t^2 + \nu_2t + \nu_3\big)\exp\{\xi_2t\} + \big(\nu_4t^2 + \nu_5t + \nu_6\big)\exp\{\eta_2t\};$$

$$\mathcal{Q}[\mu]\{t\} = \big(\mu_1t^2 + \mu_2t + \mu_3\big)\exp\{\xi_2t\} + \big(\mu_4t^2 + \mu_5t + \mu_6\big)\exp\{\eta_2t\};$$

$$A(x) = \Delta\overline{\varphi}(x), \quad B(x) = \big(\nabla\overline{\varphi}\cdot\nabla\gamma\big)(x);$$

ν_i, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,6}$, — некоторые числа. При этом

$$\nu_1 = C_2\frac{\xi_1}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \nu_4 = -C_2\frac{\eta_1}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_1 = C_2\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_4 = -C_2\frac{\eta_1\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}.$$

Предположим, что $C_2 \neq 0$. Тогда ясно, что $\nu_1 \neq 0$, $\nu_4 \neq 0$, поскольку, как уже было отмечено при доказательстве теоремы 2.1, $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$. Кроме того, по крайней мере один из коэффициентов μ_1 или μ_4 не равен нулю (иначе окажется, что $\xi_2 = \eta_2 = 0$, но по исходному предположению, $\xi_2 \neq \eta_2$). Если же $C_2 = 0$, то

$$\nu_2 = \frac{C_1}{\xi_2 - \eta_2}, \ \nu_5 = -\frac{C_1}{\xi_2 - \eta_2}, \ \mu_2 = C_1\frac{\xi_2}{\xi_2 - \eta_2}, \ \mu_5 = -C_1\frac{\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}, \tag{5.6}$$

и если $C_1 \neq 0$, то $\nu_2 \neq 0$, $\nu_5 \neq 0$ и по крайней мере один из коэффициентов μ_2 или μ_5 не равен нулю. Иными словами, если хотя бы одно из чисел C_1 или C_2 не равно нулю, то и оба набора ν и μ не нулевые.

Предположим, например, что из двух условий 3 a) и 3 b) теоремы 2.2 выполнено первое, и покажем, что в этом случае набор ν нулевой. Рассуждая от противного, допустим, что это не так.

Обозначим $t_{ji} = \gamma(x_{ji})$, $i = \overline{1,6}$. Поскольку, согласно условию 3 теоремы 2.2, точки x_{ji} принадлежат различным поверхностям уровня функции $\gamma(x)$, то ясно, что все числа t_{ji}, $i = \overline{1,6}$, различны. Поэтому, в соответствии с леммой 5.1, функция $\mathcal{P}[\nu]\{\gamma(x)\}$ по крайней мере в одной из точек x_{ji}, $i = \overline{1,6}$, не обращается в ноль. Для краткости обозначим эту точку как $\widehat{x}$. Таким образом, в точке $\widehat{x} \in \Lambda_j$ выполняются соотношения:

$$A(\widehat{x}) \neq 0, \quad \mathcal{P}[\nu]\{\gamma(\widehat{x})\} \neq 0, \quad B(\widehat{x}) = 0.$$

Получаем противоречие с тождеством (5.5). Стало быть, наше предположение не верно, то есть набор ν нулевой. Отсюда, как уже было установлено выше, следует, что $C_1 = C_2 = 0$.

II. Пусть $\xi_1 = \eta_1 = \tau > 0$, $\xi_2 \neq \eta_2$. Покажем, что тождество (5.4) возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Как и в пункте I, можно переписать тождество (5.4) в эквивалентном виде (5.5), но, вообще говоря, с другими наборами коэффициентов ν и μ.

При этом

$$\nu_1 = C_2\frac{\tau}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \nu_4 = -C_2\frac{\tau}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_1 = C_2\frac{\tau\xi_2}{\xi_2 - \eta_2}, \quad \mu_4 = -C_2\frac{\tau\eta_2}{\xi_2 - \eta_2}.$$

Предположим, что $C_2 \neq 0$. Тогда ясно, что $\nu_1 \neq 0$, $\nu_4 \neq 0$. Кроме того, по крайней мере один из коэффициентов μ_1 или μ_4 не равен нулю. Если же $C_2 = 0$, то опять получаем (5.6) (поскольку выражение $H_1(x;\xi,\eta)$ остается тем же, что и в пункте I), и оставшаяся часть доказательства дословно такая же, как в пункте I.

III. Пусть $\xi_1 \neq \eta_1$, $\xi_2 = \eta_2 = \tau$. Тогда вместо тождества (5.4) рассмотрим следующее:

$$\exp\bigl\{-\tau\gamma(x)\bigr\}\Bigl\{C_1H_1(x;\xi,\eta) + C_2H_2(x;\xi,\eta)\Bigr\} \equiv 0 \quad \text{на} \quad \Lambda_j. \tag{5.7}$$

Докажем, что (5.7) возможно лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Примем обозначение $\nu = \dfrac{\xi_1 + \eta_1}{2} > 0$. Тождество (5.7) можно переписать в виде:

$$A(x)\bigl\{C_1 + C_2\nu\gamma(x)\bigr\} + B(x)\bigl\{C_1\tau + C_2\nu + C_2\tau\nu\gamma(x)\bigr\} = 0 \quad \forall x \in \Lambda_j. \tag{5.8}$$

Пусть выполнено условие 3 a) теоремы 2.2. Тогда при ненулевом наборе параметров C_1, C_2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) \neq 0, \quad B(\widehat{x}) = 0, \quad C_1 + C_2\nu\gamma(\widehat{x}) \neq 0.$$

В результате получаем противоречие с (5.8). Поэтому $C_1 = C_2 = 0$.

Пусть выполнено условие 3 b) теоремы 2.2. Сначала предположим, что $\tau \neq 0$. Тогда при ненулевом наборе параметров C_1, C_2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) = 0, \quad B(\widehat{x}) \neq 0, \quad C_1\tau + C_2\nu + C_2\tau\nu\gamma(\widehat{x}) \neq 0.$$

В результате получаем противоречие с (5.8). Поэтому $C_1 = C_2 = 0$.

Теперь предположим, что $\tau = 0$. Тогда тождество (5.8) принимает вид:

$$A(x)\big\{C_1 + C_2\nu\gamma(x)\big\} + B(x)C_2\nu = 0 \quad \forall x \in \Lambda_j. \tag{5.9}$$

При этом непосредственно по условию 3 b) теоремы 2.2 существует точка $\widehat{x} \in \Lambda_j$ такая, что

$$A(\widehat{x}) = 0, \quad B(\widehat{x}) \neq 0.$$

Отсюда и из (5.9) сразу же получаем, что $C_2 = 0$. В таком случае, при $C_1 \neq 0$ будет $A(x) \equiv 0$ на Λ_j, но это противоречит условию 3 b) теоремы 2.2. Поэтому $C_1 = C_2 = 0$. $\square$

References

[1] А. А. Жидков, А. В. Калинин, “Некоторые вопросы математического и численного моделирования глобальной электрической цепи в атмосфере”, *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2009, №6(1), 150–158. [A. A. Zhidkov, A. V. Kalinin, “Several problems of mathematical and numerical modeling of global electric circuit in the atmosphere”, *Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta imeni N.I. Lobachevskogo (Nizhni Novgorod University Reports)*, 2009, №6(1), 150–158 (In Russian)].

[2] A. V. Kalinin, N. N. Slyunyaev, “Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **450** (2017), 112–136.

[3] N. A. Denisova, A. V. Kalinin, “Influence of the choice of boundary conditions on the distribution of the electric field in models of the global electric circuit”, *Radiophysics and Quantum Electronics*, **61**:10 (2019), 741–751.

[4] А. В. Чернов, “О единственности решения обратной задачи определения параметров в старшем коэффициенте и правой части эллиптического уравнения”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1 (2016), 96–110. [A. V. Chernov, “On the uniqueness of solution to the inverse problem of determination parameters in the senior coefficient and the righthand side of an elliptic equation”, *Far Eastern Mathematical Journal*, **16**:1 (2016), 96–110 (In Russian)].

[5] E. A. Mareev, S. V. Anisimov, “Geophysical Studies of the Global Electric Circuit”, *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, **44**:10 (2008), 760–769.

[6] Е. А. Мареев, “Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи”, *Успехи физических наук*, **180**:5 (2010), 527–534; англ. пер.:E. A. Mareev, “Global electric circuit research: achievements and prospects”, *Physics, Uspekhi*, **53**:5 (2010), 504–511.

[7] J. Jansky, V. P. Pasko, “Effects of conductivity perturbations in time-dependent global electric circuit model”, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **120**:12 (2015), 10654–10668.

[8] V. V. Denisenko, M. J. Rycroft, R. G. Harrison, “Mathematical Simulation of the Ionospheric Electric Field as a Part of the Global Electric Circuit”, *Surveys in Geophysics*, **40**:1 (2019), 1–35.

[9] В. Н. Морозов, *Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ*, Российский государственный гидрометеорологический университет, СПб., 2011. [V. N. Morozov, *Mathematical Modeling of Atmospheric Electric Processes Allowing for the Influence of Aerosol Particles and Radioactive Substances*, Russian State Hydrometeorological University, St. Petersburg, 2011 (In Russian)].

[10] A. J. G. Baumgaertner, J. P. Thayer, R. R. Neely, G. Lucas, “Toward a comprehensive global electric circuit model: Atmospheric conductivity and its variability in CESM1(WACCM) model simulations”, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, **118**:16 (2013), 9221–9232.

[11] S. S. Davydenko, E. A. Mareev, T. C. Marshall, M. Stolzenburg, “On the calculation of electric fields and currents of mesoscale convective systems”, *Journal of Geophysical Research*, **109**:D11 (2004), 1–10.

[12] G. M. Lucas, A. J. G. Baumgaertner, J. P. Thayer, “A global electric circuit model within a community climate model”, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, **120**:23 (2015), 12054–12066.

[13] V. Bayona, N. Flyer, G. M. Lucas, A. J. G. Baumgaertner, “A 3-D RBF-FD solver for modeling the atmospheric global electric circuit with topography (GEC-RBFFD v1.0)”, *Geoscientific Model Development*, **8**:10 (2015), 3007–3020.

[14] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; англ. пер.:D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin etc., 1983.

Информация об авторе

Чернов Андрей Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: chavnn@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249

Поступила в редакцию 26 декабря 2019 г.
Поступила после рецензирования 3 февраля 2020 г.
Принята к публикации 6 марта 2020 г.

Information about the author

Andrei V. Chernov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod; Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russian Federation. E-mail: chavnn@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1464-8249

Received 26 December 2019
Reviewed 3 February 2020
Accepted for press 6 March 2020

Памяти профессора Александра Ивановича Булгакова

Семь лет прошло со дня трагической смерти 18 мая 2013 года доктора физико-математических наук, профессора Александра Ивановича Булгакова. В этом году 9 апреля Александру Ивановичу исполнилось бы 70 лет. Бо́льшую часть своей жизни А.И. Булгаков посвятил математике, которой занимался самозабвенно и с истинным удовольствием. Мы с теплотой вспоминаем Александра Ивановича, обращаемся к его работам, его мудрости и опыту, продолжаем задуманное и начатое им. В память о профессоре А.И. Булгакове 12–16 октября этого года мы планируем провести в Тамбовском государственном университете им. Г.Р. Державина очередную Международную конференцию «Колмогоровские чтения IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020)», когда-то им задуманную и организованную. Ежегодно 9 апреля в день рождения Александра Ивановича в университете подводят итоги конкурса грантов молодых ученых, аспирантов и студентов имени профессора А.И. Булгакова. В этой заметке мы — его товарищи, друзья, ученики, коллеги хотели бы вспомнить нашего дорогого Александра Ивановича.

Александр Иванович Булгаков родился в Тамбове 9 апреля 1950 года в рабочей семье. В 1968 году поступил в ТИХМ — Тамбовский институт химического машиностроения на факультет автоматизации химических процессов. Кафедрой высшей математики в то время руководил известный математик профессор Николай Викторович Азбелев. Его усилиями в ТИХМе была создана группа «инженеров-математиков», для которой читался курс математики, близкий по объему и содержанию университетскому курсу по специальности «Математика». В этой группе учился А.И. Булгаков. С первого курса наиболее талантливые студенты участвовали в работе научного семинара кафедры, начинали самостоятельные исследования. Даже среди этого окружения, в группе, где были собраны наиболее подготовленные студенты, Александр Иванович выделялся своими математическими способностями, оригинальными нестандартными решениями исследовательских задач, неподдельным интересом к математике и трудолюбием.

По окончании ТИХМа в 1973 году А.И. Булгаков поступил в аспирантуру при кафедре высшей математики. Тема его научного исследования была связана с новым бурно развивавшимся в то время направлением анализа и теории дифференциальных уравнений — многозначными отображениями, дифференциальными и функционально-дифференциальными включениями. Руководителями молодого ученого были Николай Викторович Азбелев и талантливый математик выпускник Мехмата МГУ Лев Николаевич Ляпин. Учеба в аспирантуре прерывалась службой в Советской Армии. В 1979 году А.И. Булгаков защитил кандидатскую диссертацию «Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами» в Горьковском государственном университете им. Н.И. Лобачевского. В диссертации Александр Иванович получил условия существования и продолжимости решений, оценки решений, исследовал топологические свойства множеств решений функциональных и функционально-дифференциальных включений.

После защиты кандидатской диссертации Александр Иванович преподавал в ТИХМе, активно продолжал научные занятия. Он получил интересные и перспективные результаты об осцилляционных свойствах решений уравнений второго порядка, увлекшись краевыми задачами для функционально-дифференциальных уравнений и включений, получил условия их разрешимости, доказал принцип связности решений функциональных включений, начал исследовать включения с многозначными отображениями, значения которых могут быть не выпуклы. В это время Александр Иванович много публикуется, участвует в научных конференциях, делает доклады на семинарах у ведущих специалистов по тематике его исследований, в том числе у Н.В. Азбелева, И.Т. Кигурадзе, В.М. Тихомирова, А.А. Толстоногова, Е.Л. Тонкова, А.Ф. Филиппова, А.Г. Ченцова. В 1993 году А.И. Булгаков защитил докторскую диссертацию «Элементы теории краевых задач для функционально-дифференциальных включений» в Институте математики и механики УНЦ АН СССР в Екатеринбурге.

Вскоре после защиты докторской диссертации в декабре 1993 года А.И. Булгаков перешел на работу в Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина (в то время — Тамбовский государственный педагогический институт), где возглавил кафедру алгебры и геометрии, и работа на кафедре стала одной из важнейших в его жизни. Александр Иванович создал коллектив единомышленников, привлек на кафедру квалифицированных математиков, в том числе своих лучших учеников, создал доброжелательную творческую атмосферу. В короткое время кафедра стала одним из самых плодотворно работающих научных коллективов в университете и за его пределами. Александр Иванович пользовался огромным авторитетом, уважением в университете. Руководя кафедрой, Александр Иванович продолжает плодотворно заниматься научными исследованиями, им получены результаты по теории функционально-дифференциальных включений, теории их аппроксимации, описаны свойства множеств решений, найдены условия полунепрерывной сверху и снизу зависимости множества решений от параметров. Александр Иванович разработал методы исследования включений с многозначными отображениями, которые не обладают свойствами замкнутости, выпуклости и выпуклости по переключению значений. Эти методы используют введенные им понятие выпуклой по переключению оболочки множества в пространстве суммируемых функций и понятие обобщенного решения функционально-дифференциального включения. Для таких включений им доказаны принцип плотности и «бэнг-бэнг» принцип. А.И. Булгаков стал признанным специалистом в области функционально-дифференциальных включений. Им опубликовано свыше 200 научных работ. А.И. Булгаков руководил многочисленными научными проектами, поддержанными грантами Президента РФ, Министерства образования и науки РФ, Российского фонда фундаментальных исследований, иностранных научных фондов.

Александр Иванович много работал с аспирантами и молодыми учеными, щедро делился с учениками своими знаниями, идеями, опытом. Под руководством А.И. Булгакова было защищено десять кандидатских диссертаций и докторская диссертация. Он руководил аспирантами не только в Тамбовском университете, но также и в Норвежском университете естественных наук. Ученики профессора А.И. Булгакова работают в Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина, Тамбовском техническом университете, в ряде других университетов России и зарубежья.

Александр Иванович организовал при кафедре постоянно действующий межвузовский научный семинар, с 2000 года начал проводить в Тамбове регулярные Международные конференции «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения». Для участия в этих конференциях привлекался ряд крупных российских и иностранных ученых. Благодаря энергии, энтузиазму, организаторским способностям Александра Ивановича конференции стали заметным явлением в жизни математического сообщества. В организации и проведении конференций принимали участие многие научные и академические организации, в том числе, Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, Институт математики и механики УрО РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова.

Александр Иванович был членом программных и организационных комитетов международных конференций, членом редколлегий и рецензентом журналов: «Mathematical Reviews», «Georgian Mathematical Journal», «Вестник Воронежского университета. Серия: Физика. Математика», «Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения», «Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки», «Вестник Тамбовского технического университета», членом диссертационных советов, членом Американского математического общества.

В университете, в Тамбове и далеко за его пределами жива память о замечательном человеке, ученом, педагоге, руководителе Александре Ивановиче Булгакове.

Арутюнов А.В., Борзова М.В., Бурлаков Е.О., Григоренко А.А., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е., Максимов В.П., Панасенко Е.А., Плужникова Е.А., Поносов А.В., Тихомиров В.М., Филиппова О.В., Финогенко И.А., Фомичева Ю.Г., Ченцов А.Г., Шиндяпин А.И.

Том 25, № 129 2020

Информационное сообщение о конференции «Колмогоровские чтения IX. ОПУ-2020»

Information message about the conference "Kolmogorov Readings IX. GCP-2020"

В Тамбовском государственном университете имени Г.Р. Державина 12–16 октября 2020 г. состоится очередная Международная конференция «Колмогоровские чтения IX. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ–2020)», посвященная 70-летию со дня рождения Александра Ивановича Булгакова и 90-летию Института математики, физики и информационных технологий ТГУ.

Адрес оргкомитета: kafedra_fa@mail.ru. Сайт конференции: opu2020.tsutmb.ru

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Министерство науки и высшего образования РФ, Российская академия наук, Администрация Тамбовской области, Управление образования и науки Тамбовской области, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский физико-технический институт (государственный университет), Тюменский государственный университет, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Российский фонд фундаментальных исследований.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели:
профессор А.В. Арутюнов (Москва), профессор А.С. Мищенко (Москва), член-корреспондент РАН А.Г. Ченцов (Екатеринбург).

Члены программного комитета:
профессор А.П. Афанасьев (Москва), профессор Л.М. Березанский (Беэр-Шева, Израиль), профессор А.И. Буренков (Москва), профессор М.Р. Вебер (Дрезден, Германия), профессор А.В. Дыхта (Иркутск), член-корреспондент РАН М.И. Зеликин (Москва), профессор А.Д. Иоффе (Хайфа, Израиль), профессор Г.Г. Магарил-Ильяев (Москва), профессор В.П. Максимов (Пермь), профессор В.Ф. Молчанов (Тамбов), профессор К.Ю. Осипенко (Москва), профессор Н.Н. Петров (Ижевск), профессор А.В. Поносов (Ос, Норвегия), профессор В.М. Тихомиров (Москва), член-корреспондент РАН А.А. Толстоногов (Иркутск), член-корреспондент РАН В.Н. Ушаков (Екатеринбург), профессор А.В. Фурсиков (Москва), профессор Г.Ф. Хельминк (Амстердам, Нидерланды), профессор А.И. Шиндяпин (Мапуту, Мозамбик).

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Председатель профессор Е.С. Жуковский (Тамбов) zukovskys@mail.ru
Заместители председателя:
доцент А.А. Арутюнов (Москва) andronick.arutyunov@gmail.com
доцент Е.О. Бурлаков (Тюмень) eb_@bk.ru
доцент Е.А. Панасенко (Тамбов) panlena_t@mail.ru

Члены организационного комитета:
асп. С. Бенараб (Тамбов), инж. М.В. Борзова (Тамбов) kafedra_fa@mail.ru, доцент Х. Геббай (Гельма, Алжир), доцент А.А. Григоренко (Тамбов), асп. И.А. Забродский (Тамбов), доцент И.В. Косенкова (Тамбов), доцент И.В. Кривопалова (Тамбов), асп. В. Мерчела (Тамбов), доцент Е.А. Плужникова (Тамбов), студ. И.Д. Серова (Тамбов), доцент О.В. Филиппова (Тамбов), доцент Ю.Г. Фомичева (Тамбов).

НАУЧНАЯ ПРОГРАММА КОНФЕРЕНЦИИ

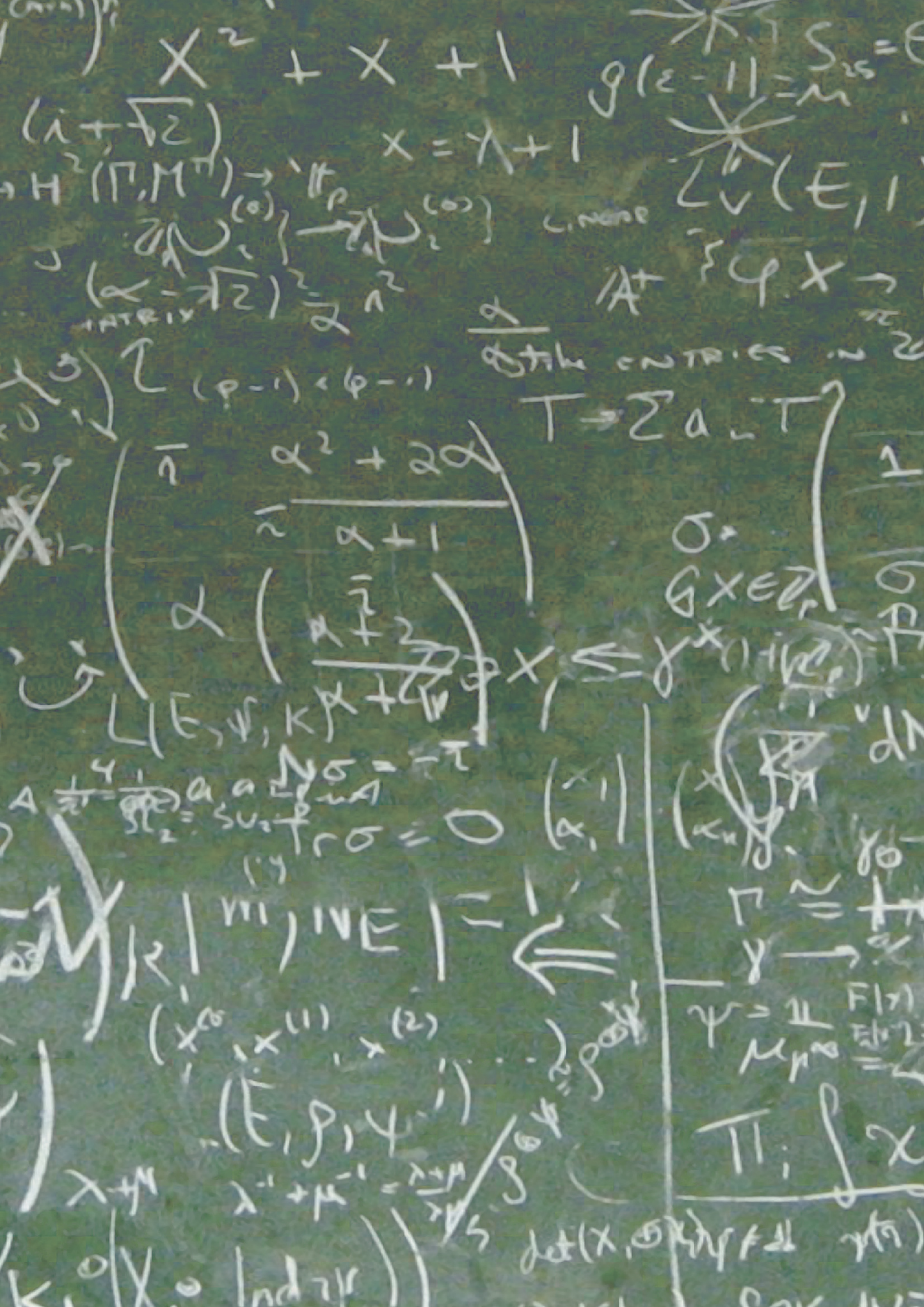
Основными научными направлениями конференции являются:
- Вариационное исчисление и оптимальное управление
- Управление динамическими объектами, теория игр, дифференциальные и функционально-дифференциальные включения
- Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения
- Методы нелинейного функционального анализа и экстремальные задачи
- Алгебраическая топология и некоммутативная геометрия
- Приложения теории управления и оптимизации, дифференциальных уравнений и включений в математическом моделировании
- Вопросы истории, философии, методологии и преподавания математики

Регламент выступлений: пленарные доклады – 40 минут, секционные – 20 минут. Рабочие языки конференции: русский и английский.

Для молодых участников в рамках конференции планируется провести Международную школу молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление».

Для участников конференции будут проведены курсы повышения квалификации «Математическое образование в вузе в условиях развития цифрового общества», слушатели которых получат сертификаты.

Материалы конференции. Участники могут представить материалы докладов в форме тезисов (рекомендуемый объем 1-3 страницы) или в форме полнотекстовой статьи (рекомендуемый объем 8-16 страниц). Участником могут быть представлены и тезисы и статья. Тезисы будут опубликованы в сборнике, который будет размещен в РИНЦ. Статьи будут опубликованы в рецензируемом журнале «Вестник российских университетов. Математика». После проведения конференции по материалам некоторых докладов программный комитет предложит написать статьи для индексируемого в Scopus журнала «Advances in Systems Science and Applications (ASSA)».


X^2 + X + 1
x = λ + 1
MATRIX
ENTRIES IN
T → Σ a_n T
L(E, ψ, K)
tr σ = 0