ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

# ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
# МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

# RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS
# MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

ISSN 2686-9667

23142 >

9 772686 966000

Том 28
№ 142
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

# ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
# МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

**Том 28, № 142, 2023**

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория К1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

## СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

**Учредитель:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)



**Адрес редакции:** 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Бударин
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

*Для цитирования*:
Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 142. 116 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142

Подписано в печать 14.06.2023. Дата выхода в свет 06.07.2023
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 14,5. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 23178. Свободная цена.

**Издатель:** ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
**Адрес издателя:** 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

# RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

**Volume 28, no. 142, 2023**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

## CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

**Founder:** Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)



**Editors address:** 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

*For citation*:
Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, no. 142. 116 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142

Signed for printing 14.06.2023. Release date 06.07.2023
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 14,5. Conv. pr. sheet 13,5. Copies printed 1000. Order no. 23178. Free price

**Publisher:** FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
**Publisher’s address:** 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110
УДК 517.927.4

# О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка

**Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ**

ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»

367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

**Аннотация.** Рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}
&D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{где} \ \ \alpha \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2,\\
&x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0,\\
&x(1) = 0.
\end{aligned}$$

Эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению с монотонным оператором в пространстве $C$ непрерывных на $[0,1]$ функций (пространство $C$ полагается упорядоченным конусом неотрицательных функций, удовлетворяющих граничным условиям рассматриваемой задачи). С помощью известной теоремы Красносельского о неподвижных точках оператора растяжения (сжатия) конуса доказано существование хотя бы одного положительного решения рассматриваемой задачи. Приведен пример, иллюстрирующий выполнение достаточных условий, обеспечивающих разрешимость поставленной задачи. Полученные результаты являются продолжением исследований автора (см. [Вестник российских университетов. Математика, **27**:138 (2022), 129–135]), посвященных вопросам существования и единственности положительных решений краевых задач для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** функционально-дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина

**Для цитирования:** *Абдурагимов Г.Э.* О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 101–110. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110

# On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional-differential equation of fractional order

**Gusen E. ABDURAGIMOV**
Dagestan State University
43a M. Hajiyev St., Makhachkala 367025, Russian Federation

**Abstract.** The following boundary value problem is considered:

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\,(t, (Tx)\,(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad \text{where} \quad \alpha \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2,$$
$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0,$$
$$x(1) = 0.$$

This problem reduces to an equivalent integral equation with a monotone operator in the space $C$ of functions continuous on $[0,1]$ (the space $C$ is assumed to be an ordered cone of nonnegative functions satisfying the boundary conditions of the problem under consideration). Using the well-known Krasnosel'sky theorem about fixed points of the operator of expansion (compression) of a cone, the existence of at least one positive solution of the problem under consideration is proved. An example is given that illustrates the fulfillment of sufficient conditions that ensure the solvability of the problem. The results obtained continue the author's research (see [Russian Universities Reports. Mathematics, **27**:138 (2022), 129–135]) devoted to the existence and uniqueness of positive solutions to boundary value problems for nonlinear functional-differential equations.

**Keywords:** functional-differential equation of fractional order, positive solution, boundary value problem, Green's function

**Mathematics Subject Classification:** 34K10, 34K17.

**For citation:** Abduragimov G.E. On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional-differential equation of fractional order. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 101–110. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-101-110 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

В последние годы стала достаточно интенсивно развиваться теория дробного дифференцирования и интегрирования. Большое распространение дробные уравнения получили в многочисленных приложениях науки и техники. В частности, в физике они широко используются при описании различных стохастических процессов, диффузии в средах с фрактальной геометрией, при изучении деформационно-прочностных свойств полимерных материалов. Кроме того, активное развитие дробные дифференциальные уравнения нашли в химических процессах. Поэтому класс задач, в которых используется аналитический аппарат дробного исчисления, довольно широк и актуален.

С развитием теории дробного дифференцирования и интегрирования возрос интерес, в том числе, к исследованию краевых задач для нелинейных дробно-дифференциальных уравнений. Например, в [1,2] получены достаточные условия существования и единственности сингулярных нелинейных краевых задач с помощью теоремы о неподвижной точке в конусах. В [3] исследуется существование положительных решений системы нелинейных уравнений смешанных дробных порядков. В работе [4] на основе принципа сжатия и альтернативы Лере–Шаудера доказано существование и единственность нелинейной дробной краевой задачи с производной Капуто. С помощью известной теоремы Го–Красносельского в [5] найдены достаточные условия отсутствия и существования хотя бы одного или двух положительных решений нелинейной дробной краевой задачи. Дробные задачи с производной Капуто, помимо [4], рассматривались также в работах [6–8]. В достаточно общей постановке вопросы существования положительных решений краевых задач для нелинейных возмущенных дробных уравнений были изучены в [9, 10]. Отметим еще публикации [11–14], посвященные данной тематике.

Следует отметить, что, несмотря на интенсивное развитие теории дробно-дифференциальных уравнений, в литературе сравнительно немного работ, в которых подробно рассматривались бы вопросы существования и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений дробного порядка. В данной статье предпринята попытка в определенной степени восполнить этот пробел. С помощью теоремы Красносельского о неподвижных точках оператора растяжения (сжатия) конуса получены достаточные условия существования положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка. Среди последних результатов автора по настоящей тематике можно отметить основанные на близких подходах утверждения, опубликованные в работах [15, 16].

## 1. Постановка задачи

В дальнейшем для сокращения выкладок через $C$ обозначим пространство $C[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ — пространство $\mathbb{L}_p(0,1)$ и $\mathbb{W}^n$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной $(n-1)$ производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$D^{\alpha}_{0+}x(t) + f\left(t, (Tx)\,(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x'(0) = \ldots x^{(n-2)}(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x(1) = 0, \tag{1.3}$$

где $\alpha \in (n-1, n] \quad (n \in \mathbb{N}, \quad n > 2)$ — некоторое действительное число, $D^{\alpha}_{0+}$ — дробная производная Римана–Лиувилля, $T\colon C \to \mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times[0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу и удовлетворяет условию Каратеодори.

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем подразумевать функцию $x \in \mathbb{W}^n$ положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

## 2. Основные результаты

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds, \qquad 0 \le t \le 1, \tag{2.1}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-D^{\alpha}_{0+}x(t)$ с краевыми условиями (1.2), (1.3), определяемая формулой

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } 0 \le s \le t, \\ \dfrac{(t(1-s))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{если } t \le s \le 1. \end{cases}$$

**Лемма 2.1.** *Ядро $G(t,s)$ обладает следующими свойствами:*

1. $G(t,s) \ge 0, \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$ *;*
2. $\max_{0\le t\le 1} \displaystyle\int_0^1 G(t,s)\, ds = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}$ *;*
3. $\max_{0\le t\le 1} G(t,s) = \dfrac{(s-s^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *;*
4. $G(t,s) \le G(s,s), \quad (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение свойства 1 очевидно.

Введем теперь обозначения:

$$g_1(t,s) = (t(1-s))^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, \;\; 0 \le s \le t$$
$$g_2(t,s) = (t(1-s))^{\alpha-1}, \;\; t \le s \le 1.$$

Для этих функций имеем

$$\int_0^t g_1(t,s)\, ds = \frac{t^{\alpha-1}-t^{\alpha}}{\alpha} - \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha}}{\alpha},$$
$$\int_t^1 g_2(t,s)\, ds = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha}}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 G(t,s)\, ds = \frac{t^{\alpha-1}-t^{\alpha}}{\alpha},$$

откуда следует справедливость свойства 2.

Далее, имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1(t,s)}{\partial t} &= (\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-1} - \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-2}\right] \\ &\le (\alpha-1)t^{\alpha-2}\left[(1-s)^{\alpha-2} - \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-2}\right] \le 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $g_1(t,s)$ монотонно убывает по $t$, а поэтому при $t \ge s$ эта функция достигнет максимума в точке $t = s$. С другой стороны, очевидно,

$$\max_{t\le s} g_2(t,s) = (s(1-s))^{\alpha-1}.$$

Таким образом, выполнение свойства 3 установлено.

Наконец, свойство 4 вытекает из монотонности по $t$ функций $g_1(t,s)$ и $g_2(t,s)$. □

Предположим, что функция $f(t,u)$ при п. в. $t \in [0,1]$ и любых неотрицательных $u$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \le a(t) + bu^{p/q}, \tag{2.2}$$

где $b > 0$, $a(t) \in \mathbb{L}_q$, $q \in (1,\infty)$.

Запишем уравнение (2.1) в операторном виде

$$x = GNTx,$$

где $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$ — оператор Немыцкого, $G\colon \mathbb{L}_q \to C$.

Оператор $A$, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций, монотонен и оставляет инвариантным нормальный конус $\tilde{K}$ неотрицательных функций пространства $C$, удовлетворяющих граничным условиям (1.2), (1.3).

Далее для доказательства существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1.1)–(1.3) нам понадобится следующая известная теорема Красносельского [17] (см. также [18, Theorem 2]).

**Теорема 2.1.** *Пусть $E$ — банахово пространство, $K \subset E$ — конус, а $\Omega_1, \Omega_2$ — два ограниченных открытых шара $E$ с центром в начале координат, причем $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Предположим, что $\Phi : K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to K$ — вполне непрерывный оператор такой, что выполнено одно из двух условий*

*(i)* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ $\|\Phi x\| \le \|x\|$ *и* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$ $\|\Phi x\| \ge \|x\|$,

*(ii)* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ $\|\Phi x\| \ge \|x\|$ *и* $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$ $\|\Phi x\| \le \|x\|$.

*Тогда $\Phi$ имеет неподвижную точку в $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.*

**Лемма 2.2.** *Оператор* $A : \tilde{K} \to \tilde{K}$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Определим функцию $g(s) = \max_{0 \le t \le 1} G(t,s)$, $s \in [0,1]$. Заметим, что согласно лемме 2.1

$$g(s) = \frac{(s-s^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Пусть $R > 0$ и $\mathcal{S} = \{x \in \tilde{K} : \|x\|_C < R\}$. Для $x \in \mathcal{S}$ имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \le \int_0^1 \max_{0 \le t \le 1} G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds$$
$$\le \int_0^1 g(s) a(s)\, ds + b \int_0^1 g(s) \left(Tx\right)^{\frac{p}{q}}(s)\, ds \le \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}}$$
$$\le \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} < \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}},$$

где $\tau$ — норма оператора $T$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Следовательно, множество $A(\mathcal{S})$ равномерно ограничено.

Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\delta = \left( \frac{\varepsilon}{\|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}}} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Пусть для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ выполнено

$$|t_2 - t_1| < \delta.$$

В силу (2.2) для всех $x \in \mathcal{S}$ имеем

$$|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \le \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)| f\left(s, (Tx)(s)\right) ds$$
$$\le \left| t_2^{\alpha-1} - t_1^{\alpha-1} \right| \int_0^1 f\left(s, (Tx)(s)\right) ds < \left( \|a\|_{\mathbb{L}_q} \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b \|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} \tau^{\frac{p}{q}} R_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \right) |t_2 - t_1|^{\alpha-1} < \varepsilon.$$

Отсюда, очевидно, следует равностепенная непрерывность оператора $A$ на $\mathcal{S}$.

Таким образом, согласно теореме Арцела–Асколи оператор $A$ вполне непрерывен. □

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \left\{\omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C < r\right\}, \quad \partial\Omega_1 = \left\{\omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C = r\right\},$$
$$\Omega_2 = \left\{\omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C < R\right\}, \quad \partial\Omega_2 = \left\{\omega \in \tilde{K} : \|\omega\|_C = R\right\},$$
$$\Omega = \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1,$$

где $r, R > 0$, причем $r < R$.

**Теорема 2.2.** *Предположим, что выполнено неравенство* (2.2) *и*

1. $p \ne q$;

*2. для $p > q$ выполнено условие*

$$\frac{p-q}{p}\left(\frac{q}{pb\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p-q}} \geq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}};$$

*3. $(T1)(t) \leq 1, \quad t \in [0,1]$;*

*4. существует такое число $r > 0$, что при п. в. $t \in [0,1]$ и $u \in [0,r]$*

$$f(t,u) \geq \mu r,$$

*где* $\mu \geq \dfrac{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)}{(\alpha-1)^{\alpha-1}}$.

*Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение условия $(ii)$ теоремы 2.1. Для этого покажем существование числа $R > 0$ такого, что при $x \in \partial\Omega_2$

$$\|Ax\|_C \leq \|x\|_C. \tag{2.3}$$

Действительно, в силу (2.2) для $x \in \partial\Omega_2$ имеем

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_C = \max_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds \leq \int_0^1 \max_{0\leq t\leq 1} G(t,s)f\left(s,(Tx)(s)\right)\,ds \\
\leq \int_0^1 g(s)a(s)\,ds + b\int_0^1 g(s)\,(Tx)^{\frac{p}{q}}(s)\,ds \leq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \\
\leq \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}\|x\|_C^{\frac{p}{q}} = \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}} + b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}R^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(s) = s - \beta s^{\sigma} - \gamma,$$

где $\beta > 0$, $\gamma \geq 0$, $\sigma > 0$, $\sigma \neq 1$.

Несложно проверить, что наибольшее значение этой функции при $\sigma > 1$ на положительной полуоси достигается в точке

$$s_{max} = \left(\frac{1}{\sigma\beta}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}. \tag{2.5}$$

Положив $\beta = b\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}\tau^{\frac{p}{q}}$, $\gamma = \|a\|_{\mathbb{L}_q}\|g\|_{\mathbb{L}_{q'}}$ и $\sigma = p/q$, принимая во внимание условие 2 теоремы, обеспечивающее неотрицательность функции $\varphi$ в точке $s_{max}$, из (2.4) при $R = s_{max}$, получим (2.3).

В случае $0 < \sigma < 1$, выбрав в качестве $R$ любое положительное число, для которого $\varphi(R) > 0$ при определенных выше значениях $\beta$, $\gamma$ и $\sigma$, очевидным образом, обеспечим выполнение (2.3).

Укажем теперь такое число $r > 0$, что при $x \in \partial\Omega_1$

$$\|Ax\|_C \geq \|x\|_C.$$

В силу условий 3 и 4 теоремы и соответствующих свойств функции Грина леммы 2.1 для $x \in \partial\Omega_1$ имеем

$$\|Ax\|_C = \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds$$
$$\ge \mu r \max_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)\, ds = \mu r \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\alpha^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)} \ge \|x\|_C.$$

Таким образом, при соответствующем выборе $r$ и $R$, нетрудно обеспечить выполнение условия $(ii)$ теоремы 2.1. Следовательно, вполне непрерывный оператор $A$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку в $\Omega$, что в свою очередь эквивалентно существованию хотя бы одного положительного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) такого, что $r \le \|x\|_C \le R$, где $r$ и $R$ определены выше. $\square$

Следующий пример иллюстрирует использование теоремы 2.2 при исследовании конкретных краевых задач.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{5/2} x(t) + b\left(\int_0^1 x(s)\, ds\right)^3 + a = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{2.6}$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = 0, \tag{2.7}$$

где $a \ge 0$ и $b > 0$ — некоторые действительные числа, которые определим ниже.

Здесь, очевидно, $\alpha = 5/2$, $p/q = 3$ и $f(t,u) = bu^3 + a$. В дальнейшем для удобства и простоты вычислений положим $p = 6$ и $q = 2$. В неравенстве (2.2) в качестве $a(t)$, в частности, можно взять положительное число $a$. В силу леммы 2.1,

$$g(s) = \max_{0\le t\le 1} G(t,s) = \frac{(s-s^2)^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(s-s^2)^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\|g\|_{\mathbb{L}_2} = \sqrt{\int_0^1 g^2(s)\, ds} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\int_0^1 (s-s^2)^3\, ds} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{140}} = \frac{2}{3\sqrt{35\pi}}.$$

Для линейного интегрального оператора $T\colon C \to \mathbb{L}_6$, определенного равенством

$$(Tx)(t) = \int_0^1 x(s)\, ds,$$

выполнение условия 3 теоремы 2.2 очевидно. Кроме того, норма этого оператора $\tau = 1$. Тогда условие 2 теоремы 2.2 принимает вид

$$\sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}} \ge \frac{a}{\sqrt{35\pi}}. \tag{2.8}$$

Выясним, наконец, при каких положительных значениях $r$ и $R$, соответственно, выполняется условие 4 теоремы 2.2 и можно гарантировать требуемое в теореме 2.1 растяжение оператора $A$. Условие 4 теоремы 2.2 в данном случае примет вид неравенства

$$bu^3 + a \ge \mu r, \tag{2.9}$$

где
$$\mu \geq \left(\frac{5}{2}\right)^{7/2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 17.88.$$

Нетрудно проверить, что неравенство (2.9) выполняется на интервале $\left[\sqrt[3]{\frac{\mu}{b}r - \frac{a}{b}}, \infty\right)$. С другой стороны, согласно теореме 2.2 неравенство (2.9) должно быть обеспечено при $u \in [0, r]$. Следовательно, сгруппировав соответствующие интервалы, получим $r = \dfrac{a}{\mu}$.

Искомое $R$ в соответствии (2.5)
$$R = s_{max} = \sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}}.$$

Учитывая требование $r < R$, окончательно получим правило выбора границ множества $\Omega$
$$\frac{a}{\mu} < \sqrt{\frac{\sqrt{35\pi}}{2b}}. \tag{2.10}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.8), выбирая числа $r$ и $R$ в соответствии с (2.10), на основании теоремы (2.2) заключаем, что краевая задача (2.6), (2.7) имеет хотя бы одно положительное решение такое, что $r \leq \|x\|_C \leq R$.

В частности, при $a = \mu = 18$, $b = 1$, легко проверить, что рассматриваемая задача имеет по крайней мере одно положительное решение такое, что $1 \leq \|x\|_C \leq \sqrt{\dfrac{\sqrt{35\pi}}{2}}$.

## References


[1] X. Xu, D. Jiang, C. Yuan, “Multiple positive solutions for the boundary value problem of a nonlinear fractional differential equation”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:10 (2009), 4676–4688.

[2] S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, M. Xu, “Uniqueness of positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**:3 (2012), 299–309.

[3] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, W. Feng, “Positive solutions for a coupled system of nonlinear differential equations of mixed fractional orders”, *Advances in Difference Equations*, 2011, № 1, 1–13.

[4] T. Qiu, Z. Bai, “Existence of positive solutions for singular fractional differential equations”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2008**:146 (2008), 1–9.

[5] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, “Positive solutions to boundary value problems of nonlinear fractional differential equations”, *Abstract and Applied Analysis*, **2011**:217 (2011), 6950–6958.

[6] Y. Zhao, S. Sun, Z. Han, Q. Li, “The existence of multiple positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**:4 (2011), 2086–2097.

[7] B. Ahmad, R. P. Agarwal, “Some new versions of fractional boundary value problems with slit-strips conditions”, *Boundary Value Problems*, **175** (2014), 1–12.

[8] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, Y. L, “The iterative solutions of nonlinear fractional differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, **219**:9 (2013), 4680–4691.

[9] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, “Existence results for multiple positive solutions of nonlinear higher order perturbed fractional differential equations with derivatives”, *Applied Mathematics and Computation*, **219**:4 (2012), 1420–1433.

[10] X. Zhang, L. Liu, Y. Wu, “Multiple positive solutions of a singular fractional differential equation with negatively perturbed term”, *Mathematical and Computer Modelling*, **55**:3–4 (2012), 1263–1274.

[11] Y. Wang, L. Liu, Y. Wu, “Positive solutions for a nonlocal fractional differential equation”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **74**:11 (2011), 3599–3605.

[12] Zhanbing Bai, Haishen Lü, “Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**:2 (2005), 495–505.

[13] S. Zhang, “Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006**:36 (2006), 1–12.

[14] S. Liang, J. Zhang, “Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **71**:11 (2009), 5545–5550.

[15] Г. Э. Абдурагимов, “О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка”, *Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения–XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **194**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 3–7. [G. E. Abduragimov, “On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order”, *Proceedings of the Voronezh spring mathematical school “Modern methods of the theory of boundary-value problems. Pontryagin readings – XXX”. Voronezh, May 3-9, 2019. Part 5*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **194**, VINITI, Moscow, 2021, 3–7 (In Russian)].

[16] Г. Э. Абдурагимов, “О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 129–135. [G. E. Abduragimov, “On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear functional-differential equation of fractional order”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 129–135 (In Russian)].

[17] M. A. Krasnosel’skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, 1964.

[18] A. Cabada, J. Iglesias, “Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions”, *Boundary Value Problems*, **66** (2021), 1–19.

### Информация об авторе

**Абдурагимов Гусен Эльдерханович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Поступила в редакцию 19.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.04.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

### Information about the author

**Gusen E. Abduragimov**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail:gusen_e@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Received 19.01.2023
Reviewed 14.04.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124

УДК 517.983.23, 517.988.33

# Линейные и нелинейные интегральные функционалы в пространстве непрерывных вектор-функций

**Мануэль Жоаким АЛВЕС**[1] **, Елена Владимировна АЛВЕС**[2] **,**
**Жоао Себастьян Паулу МУНЕМБЕ**[1] **, Юрий Витальевич НЕПОМНЯЩИХ**[1]

[1] «Университет Эдуардо Мондлане»
1100, Мозамбик, г. Мапуто, Главный кампус, П.Я. 257

[2] «Высший институт наук и технологий Мозамбика»
1100, Мозамбик, г. Мапуто, ул. 1.194, No 332, Центральный С.

**Аннотация.** Статья посвящена исследованию нелинейного интегрального функционала вида $F(u)=\int_\Omega f(s,u(s))\,ds,$ где $\Omega$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, порождающая функция $f:\Omega\times X\to\mathbb{R}$ (где $X$ — вещественное сепарабельное банахово пространство) удовлетворяет условиям Каратеодори.

Изучаются действие и ограниченность функционала $F$ на пространстве $C(X)$ непрерывных вектор-функций $u:\Omega\to X$ и на пространстве $L_\infty(X)$ существенно ограниченных вектор-функций (с естественными нормами).

Основными результатами статьи являются 1) эквивалентность действия и ограниченности функционала $F$ на пространствах $C(X)$ и $L_\infty(X)$; 2) равенство для этих пространств числовой характеристики функционала в виде супремума нормы значений функционала на замкнутом шаре; 3) выражение этой числовой характеристики в терминах функции $f$, порождающей функционал.

Для распространения свойств функционала с $C(X)$ на $L_\infty(X)$ существенно используются результаты И. В. Шрагина об операторе Немыцкого и порождающей функции, а также его идеи и методы, основанные на последовательном доказательстве специальных вспомогательных утверждений, которые используют, в частности, теоремы непрерывного и измеримого выбора.

Полученные для функционала $F$ результаты конкретизируются для случая линейного интегрального функционала на пространствах банаховозначных функций (когда $f(s,x)=a(s)[x]$ для некоторой функции $a:\Omega\to X^*$), в частности, установлено, что норма этого функционала на пространствах $C(X)$ и $L_\infty(X)$ равна $\int_\Omega \|a(s)\|_{X^*}ds$.

**Ключевые слова:** банахово пространство, ограниченный функционал, норма линейного функционала, сопряжённое пространство

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке SIDA в рамках подпрограммы «Наращивание потенциала в области математики, статистики и ее приложений» (Подпрограмма 1.4.2)

**Для цитирования:** *Алвес М.Ж., Алвес Е.В., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В.* Линейные и нелинейные интегральные функционалы в пространстве непрерывных вектор-функций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 111–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124

# Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions

**Manuel J. ALVES**[1] , **Elena V. ALVES**[2] , **João S.P. MUNEMBE**[1] , **Yury V. NEPOMNYASHCHIKH**[1] ,

[1] Eduardo Mondlane University
Main Campus, PO. Box 257, Maputo, Mozambique
[2] High Institute of Sciences and Technologies Mozambique
Street 1.194 no. 332, Central C, Maputo 1100, Mozambique

**Abstract.** The present article is devoted to the study of a nonlinear integral functional of the form $F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds,$ where $\Omega$ is a closed bounded set in $\mathbb{R}^n$, and the generating function $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ (where $X$ is real separable Banach space) satisfies Carathéodory conditions.

We study the action and boundedness of the functional $F$ on the space $C(X)$ of continuous vector functions $u : \Omega \to X$ and on the space $L_\infty(X)$ of essentially bounded vector functions (with natural norms).

The main results of the article are: 1) the equivalence of the action and boundedness of the functional $F$ on the spaces $C(X)$ and $L_\infty(X)$; 2) equivalence, for these spaces, of the numerical characteristic of the functional in the form of the supremum of the norm of the functional values on a closed ball; 3) expressing this numerical characteristic in terms of the function $f$ that generates the functional.

Moreover, to extend the properties of the functional from $C(X)$ to $L_\infty(X)$, we essentially use the results of I. V. Shragin on the study of the Nemytskii operator and its generating function, as well as his ideas and methods based on the consistent proof of special auxiliary statements that use, in particular, continuous and measurable choice theorems.

The results thus obtained for the functional $F$ are specified for the case of a linear integral functional on spaces of Banach-valued functions (when $f(s, x) = a(s)[x]$ for some function $a : \Omega \to X^*$ ), and in particular, it is established that the norm of this functional on the spaces $C(X)$ and $L_\infty(X)$ is equal to $\int_\Omega \|a(s)\|_{X^*} ds.$

**Keywords:** Banach space, bounded functional, norm of linear functional, dual space

**Acknowledgements:** The work is supported by SIDA under the subprogram Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications (Subprogram 1.4.2)

**Mathematics Subject Classification:** 47B38, 47H.

**For citation:** Alves M.J., Alves E.V, Munembe J.S.P., Nepomnyashchikh Y.V. Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 111–124. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-111-124 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Исследование свойств нелинейных функционалов на пространствах непрерывных и существенно ограниченных функций является важной задачей функционального анализа, которая находит многочисленные приложения, в частности, в теории оптимального управления. Статья посвящена исследованию нелинейного интегрального функционала вида

$$F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds,$$

где $\Omega$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, порождающая функция $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ (где $X$ — вещественное сепарабельное банахово пространство) удовлетворяет условиям Каратеодори. Исследуется действие и ограниченность функционала $F$ на пространствах непрерывных и ограниченных вектор-функций $u : \Omega \to X$.

В статье используются ряд известных понятий из теории меры и функционального анализа (например, банахово пространство, сопряженное пространство, мера Лебега, линейный функционал), с которыми мы будем оперировать без ссылок и которые описаны в классических монографиях (см., например, [1–3]). При использовании менее известных понятий и теорем стараемся давать точные ссылки.

В первом параграфе вводятся основные обозначения, общие для всей статьи.

Во втором параграфе доказывается ряд специальных утверждений для функционала $F$, связанных с распространением некоторых свойств функционала с пространства непрерывных функции на пространство существенно ограниченных функций. При этом существенно используются результаты и идеи доказательств работ И. В. Шрагина [4–7] (см. также [8–11]), в том числе связанные с применением теорем непрерывного выбора Майкла и измеримого выбора (см., например, [12], теорема Д1 и следствие 1 на с. 328–329, теорема Д5 на с. 332–333), а также некоторые идеи из [13, с. 146–149] и [14].

В третьем параграфе приводятся критерии действия и ограниченности функционала $F$ на пространствах непрерывных и существенно ограниченных функций, а также эквивалентность этих свойств для указанных пространств. Доказательство проводится путем непосредственного применения утверждений предыдущего параграфа.

В четвертом параграфе конкретизируются результаты предыдущего для случая линейного интегрального функционала.

Полученные в статье результаты исследования интегрального функционала $F$ могут быть использованы для исследования линейных и нелинейных интегральных операторов в функциональных пространствах.

## 1. Основные обозначения

В работе будем использовать следующие основные обозначения:

$\Omega$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ с классической мерой Лебега $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\Sigma$ измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega$.

$\chi_E$ — характеристическая функция множества $E \subset \Omega$ ($\chi_E(s) = 1$, если $s \in E$, и $\chi_E(s) = 0$, если $s \notin E$).

$X$ — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$.

Функция $u : \Omega \to X$ называется измеримой, если прообраз любого борелевского множества в $X$ измерим по Лебегу.

Через $L_0(X)$, $L_\infty(X)$, $L^c_\infty(X)$, $C(X)$ будем обозначать множества функций $u : \Omega \to X$, состоящие, соответственно: из всех измеримых функций, измеримых ограниченных функций, измеримых функций, множество значений которых относительно компактно в $X$, и непрерывных функций. Обратим внимание на цепочку вложений линейных подпространств $C(X) \subset L^c_\infty(X) \subset L_\infty(X) \subset L_0(X)$, где первые три из них являются банаховыми пространствами с sup-нормой: $\|u\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} \|u(t)\|$. Если $D \subset X$ и $V$ любой из символов $L_0(X)$, $L^c_\infty(X)$ или $C(X)$, то $V(D) = \{u \in V(X) \colon u(\Omega) \subset D\}$.

$\mathrm{L}_\infty(X)$ — фактор-пространство пространства $L_\infty(X)$, то есть пространство классов $\mu$-эквивалентных существенно ограниченных функций $u : \Omega \to X$ с нормой $\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} \|u(t)\|_X$.

## 2. Некоторые свойства нелинейного интегрального функционала

Утверждения этого параграфа существенно используются для получения критерия действия и ограниченности нелинейного интегрального функционала на пространствах $C(X)$ и $\mathrm{L}_\infty(X)$, но, на наш взгляд, имеют и самостоятельный интерес. Различные приемы доказательств были почерпнуты из работ И. В. Шрагина об исследовании оператора суперпозиции (Немыцкого) в функциональных проствнствах и порождающих его функций [4–7] (см. также [8–11]), но при использовании в наших целях имеют особенности, поэтому приводим полные доказательства утверждений. Использованы также некоторые идеи доказательств из [13, с. 146–149] и [14].

**Лемма 2.1.** *Пусть множество $D \subset X$ выпукло и замкнуто, и пусть $u \in L_0(D)$. Тогда существуют такие компактные множества $A_n \in \Sigma$ и функции $u_n \in C(D)$ (где $n \in \mathbb{N}$ ), что*

$$\mu(\Omega \setminus A_n) < 1/n \quad \text{и} \quad u_n|_{A_n} = u|_{A_n}.$$

*В частности, $u_n \to u$ почти всюду на множестве $\Omega$ (и по мере).*

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем согласно $C$-свойству Лузина (его формулировка для функций со значениями в банаховом пространстве имеется, например, в [12, с. 40]) такое замкнутое множество $A_n \in \Sigma$, что $\mu(\Omega \setminus A_n) < 1/n$ и функция $u|_{A_n}$ непрерывна. В силу следствия из теоремы Майкла о непрерывном выборе (см., например, [12, с. 329]) существует непрерывное продолжение $u_n$ функции $u|_{A_n}$ с замкнутого подмножества $A_n$ компакта $\Omega$ на все $\Omega$ с сохранением замкнутой выпуклой оболочки множества значений. По построению, $u_n \in C(D)$ и $u_n|_{A_n} = u|_{A_n}$. □

Пусть функция $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, то есть

(C1) $\forall x \in X$ функция $f(\cdot, x)$ измерима;

(C2) $\forall s \in \Omega$ функция $f(s, \cdot)$ непрерывна.

Функционал $F$, порожденный функцией $f$, формально определим равенством

$$F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds. \tag{2.1}$$

Если конечный интеграл в (2.1) существует для всех функций $u : \Omega \to X$ из некоторого подмножества $V \subset L_0(X)$, то выражение (2.1) определяет функционал $F : V \to \mathbb{R}$, который, вообще говоря, нелинеен.

З а м е ч а н и е 2.1. В литературе часто вместо условия (C2) рассматривают более слабое условие (C2a) непрерывности $f(s,\cdot)$ при почти всех $s$. Однако предположение (C2) вместо (C2a) не ограничивает общности. Действительно, если $f$ удовлетворяет условию (C2a), то, переопределив функцию $f$, положив ее равной нулю на множестве $N_0 \times X$ для некоторого множества $N_0 \subset \Omega$ нулевой меры, получим функцию, удовлетворяющую условию (C2) и порождающую тот же функционал $F$.

**Лемма 2.2.** *Для любой измеримой функции $u : \Omega \to X$ функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, определяемая равенством $\varphi(s) = f(s, u(s))$, является измеримой. Более того, если $u_n \in L_0(X)$ и $u_n \to u$ почти всюду на множестве $\Omega$ (по мере), то последовательность функций $\varphi_n(s) = f(s, u_n(s))$ сходится к функции $\varphi$ почти всюду на $\Omega$ (по мере, соответственно).*

Утверждение леммы хорошо известно и вытекает, например, из теорем 2 и 3 работы [6] и теоремы 2.5 работы [8] (см. также [5]).

**Лемма 2.3.** *Для любого замкнутого множества $D \subset X$ функция $\psi : \Omega \to [0,\infty]$, определяемая равенством $\psi(s) = \sup_{x\in D} |f(s,x)|$, является измеримой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_n \colon n = 1, 2, \ldots\}$ счетное всюду плотное в $D$ множество. Зафиксируем произвольное $c \in \mathbb{R}$. Множества $E_n = \{s \in \Omega \colon |f(s,x_n)| > c\}$ измеримы по условию (C1). По условию (C2) $[\, \psi(s) > c \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\ |f(s,x_n)| > c\, ]$. Поэтому

$$\{s \in \Omega \colon \psi(s) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma.$$

Измеримость функции $\psi$ доказана. □

По лемме 2.3, для любого замкнутого множества $D \subset X$ корректно определена величина

$$I(D) = \int_\Omega \sup_{x\in D} |f(t,x)|\, dx,$$

которая может принимать конечное неотрицательное значение или значение $+\infty$. Обозначение $I(D)$ нам будет удобно использовать в формулировках утверждений этого и следующего параграфов.

**Утверждение 2.1.** *Для любого замкнутого множества $D \subset X$ имеет место равенство*

$$\sup_{u\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s,u(s))|\, ds = I(D). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\psi(s) = \sup_{x\in D} |f(s,x)|$. По леммам 2.1 и 2.2 величины (конечные или бесконечные) в левой и правой частях равенства (2.2) существуют. Очевидно, что

$$\sup_{u\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s,u(s))|\, ds \le I(D). \tag{2.3}$$

Через $\mathcal{B}(X)$ обозначим $\sigma$-алгебру борелевских множеств в $X$ и через $\Lambda = \Sigma \otimes \mathcal{B}(X)$ произведение $\sigma$-алгебр $\Sigma$ и $\mathcal{B}(X)$ (то есть наименьшую $\sigma$-алгебру, содержащую все произведения $A\times D$, где $A \in \Sigma$ и $D \in \mathcal{B}(X)$ ). По теореме 3 работы [6] функция $f : \Omega\times X \to \mathbb{R}$ измерима (в смысле $\forall U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \ f^{-1}(B) \in \Lambda$ ).

Рассмотрим множества

$$A = \{s \in \Omega\colon \psi(s) < \infty\}, \quad A_0 = \{s \in \Omega\colon \psi(s) = +\infty\},$$

которые, по лемме 2.3, измеримы. Далее рассмотрим раздельно два случая.

*1-й случай.* Пусть $\mu A_0 = 0$. Определим множества $W_n \subset \Omega \times X$ $(n = 1, 2, \dots)$ равенством

$$W_n = \{(s, x) \in A \times D\colon |f(s, x)| \geq \psi(s) - 1/n\} \cup (A_0 \times D).$$

Из измеримости функций $f$ и $\psi$ следует $W_n \in \Lambda$. Более того, из условия (C2) вытекает, что $\forall s \in \Omega$ множество $W_n(s) = \{x \in X\colon (s, x) \in W_n\}$ непусто и замкнуто в $X$. По теореме измеримого выбора [12, с. 332] существует измеримая функция $u_n : \Omega \to D$ такая, что $(s, u_n(s)) \in W_n$ для всех $s \in \Omega$.

По построению, $u_n \in L_0(D)$ и

$$\int_\Omega |f(s, u_n(s))|\, ds \geq \int_\Omega (\psi(s) - 1/n)\, ds = I(D) - \mu\Omega/n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по всем $n \in \mathbb{N}$, получаем неравенство

$$\sup_{u \in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds \geq I(D). \tag{2.4}$$

*2-й случай.* Пусть $\mu A_0 > 0$. В этом случае, очевидно

$$I(D) = +\infty. \tag{2.5}$$

Определим множества $Z_n \subset \Omega \times X$ $(n = 1, 2, \dots)$ равенством

$$Z_n = \{(s, x) \in A_0 \times D\colon |f(s, x)| \geq n\} \cup (A \times D).$$

В силу измеримости функций $f$ и $\psi$ имеем $Z_n \in \Lambda$, а в силу условия (C2) $\forall s \in \Omega$ множество $Z_n(s) = \{x \in X\colon (s, x) \in Z_n\}$ непусто и замкнуто в $X$. По теореме измеримого выбора существует измеримая функция $v_n : \Omega \to D$ такая, что $(s, v_n(s)) \in Z_n$ для всех $s \in \Omega$.

По построению, $v_n \in L_0(D)$ и

$$\int_\Omega |f(s, v_n(s))|\, ds \geq n \cdot \mu A_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{u \in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds = +\infty,$$

что вместе с (2.5) доказывает (2.4).

Из (2.3) и (2.4) вытекает (2.2). □

Следующее утверждение в несколько иной формулировке установлено И. В. Шрагиным [4], [7], схема его доказательства заимствована из этих работ.

**Утверждение 2.2.** *Если множество* $D \subset X$ *замкнуто и выпукло, и* $F : C(D) \to \mathbb{R}$, *то* $F : L^c_\infty(D) \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, то есть для некоторого $u \in L^c_\infty(D)$ значение $F(u)$ либо не определено, либо имеет одно из значений $\pm\infty$. По лемме 2.1, функция $f(\cdot, u(\cdot))$ измерима, поэтому равенство

$$\lambda(E) = \int_E |f(s, u(s)|\, ds, \quad E \in \Sigma,$$

корректно определяет меру $\lambda : \Sigma \to [0, \infty]$. По нашему предположению

$$\lambda(\Omega) = \infty. \tag{2.6}$$

Докажем существование $s^* \in \Omega$ такого, что для любой открытой окрестности $U$ точки $s^*$ имеем $\lambda(U) = \infty$. Предположим противное. Для каждого $s \in \Omega$ выберем открытую окрестность $U_s$ точки $s$ такую, что $\lambda(U_s) < \infty$. Из открытого покрытия $\{U_s \colon s \in \Omega\}$ компакта $\Omega$ извлечем конечное подпокрытие $\{U_{t_1}, \dots, U_{t_k}\}$. По свойству счетной полуаддитивности меры имеем $\lambda(\Omega) \le \sum_{i=1}^k \lambda(U_{t_i}) < \infty$, что противоречит соотношению (2.6).

Обозначим через $K$ замыкание множества $u(\Omega)$. Очевидно, что множество $K$ компактно. Поэтому для любого натурального $n$ существует конечное покрытие $\sigma_n = \{D^k_n \colon k = 1, 2, \dots, M_n\} \subset X$ множества $K$ замкнутыми шарами $D^k_n$ диаметра, меньшего чем $1/n$.

Замыкание любого множества $E \subset \Omega$ будем обозначать символом $\overline{E}$.

Через $V_i$ обозначим открытый шар с центром в точке $s^*$ радиуса $1/i$. В силу выбора точки $s^*$ и по свойству счетной аддитивности меры $\sum_{i=1}^\infty \lambda(V_i \setminus \overline{V}_{i+1}) = \lambda(V_1) = \infty$. Поэтому найдется такая подпоследовательность $\{i_n\}$, что для множеств $E_n = V_{i_n} \setminus \overline{V}_{i_{n+1}}$ имеет место

$$\lambda(E_n) > M_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.7}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем согласно $C$-свойству Лузина такие компактные множества $E^j_n \subset E_n$, что $\mu(E_n \setminus E^j_n) \to 0$, когда $j \to \infty$, и функции $u|_{E^j_n}$ непрерывны. В силу непрерывности меры $\lambda$ e (2.7) найдутся такие $j = j(n) \in \mathbb{N}$, что $\lambda(E^{j(n)}_n) > M_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Далее, для каждого $n \in \mathbb{N}$, из определения покрытий $\sigma_n$ следует $\cup_{k=1}^{M_n} u^{-1}(D^k_n) \cap E^{j(n)}_n \supset E^{j(n)}_n$. Поэтому в силу полуаддитивности меры $\lambda$ найдутся $k(n) \in \{1, 2, \dots, M_n\}$ такие, что

$$\lambda(A_n) > 1, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.8}$$

где $A_n = u^{-1}(D^{k(n)}_n) \cap E^{j(n)}_n$.

Покажем, что множество $A = \{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^\infty A_n)$ замкнуто. Сначала заметим, что в силу компактности множеств $D^{k(n)}_n$, $E^{j(n)}_n$ и непрерывности функций $u|_{E^{j(n)}_n}$ множества $A_n$ компактны, значит, замкнуты. Далее, имеем

$$(\forall p \in \mathbb{N}) \quad \overline{A} = \overline{\{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^p A_n) \cup \left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)} = \{s^*\} \cup (\cup_{n=1}^p A_n) \cup \overline{\left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)}$$
$$\subset A \cup \overline{\left(\cup_{n=p+1}^\infty A_n\right)} \subset A \cup V_{i_{p+1}} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subset A \cup \left(\cap_{p=1}^\infty V_{i_{p+1}}\right) = A \cup \{s^*\} = A.$$

Таким образом, замкнутость множества $A$ доказана.

Возьмем некоторые точки $x_n \in u(A_n)$. Поскольку множество $K$ компактно, то, не ограничивая общности, можно считать, что $x_n \to x_0$ для некоторого $x_0 \in K$. Определим функцию $v : A \to K$ равенством

$$v(s) = \begin{cases} u(s), & \text{если} \quad s \in A \setminus \{s^*\} \\ x_0, & \text{если} \quad s = s^* \end{cases} .$$

Докажем, что функция $v$ непрерывна.

Компакты $A_n$ попарно не пересекаются, и для любого натурального $n$ функция $u|_{A_n}$ непрерывна. Поэтому функция $v$ непрерывна в любой точке $s \in A \setminus \{s^*\}$.

Докажем непрерывность функции $v$ в точке $s^*$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем натуральное число $m \geq 1/\varepsilon$ такое, что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$\|x_n - x_0\| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Рассмотрим открытую окрестность $V = V_{i_m}$ точки $s^*$ и зафиксируем произвольную точку $s \in (V \cap A) \setminus \{s^*\}$. Ясно, что $s \in A_n$ для некоторого $n \geq m$. Поскольку $v(s), x_n \in D_n^{k(n)}$ и $\operatorname{diam} D_n^{k(n)} < 1/n$, имеем

$$\|v(s) - x_n\| < 1/n \leq 1/m < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Из (2.9) и (2.10) следует

$$\|v(s) - v(s^*)\| = \|v(s) - x_0\| \leq \|v(s) - x_n\| + \|x_n - x_0\| < 2\varepsilon.$$

Непрерывность функции $v$ в точке $s^*$, значит, и на всем множестве $A$ доказана.

По следствию из теоремы Майкла о непрерывном выборе [12, с. 329] существует $w \in C(D)$, такое что $w|_A = v$. Тогда $w|_{A_n} = u|_{A_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, и в силу (2.8)

$$\int_\Omega |f(s, w(s))|\, ds \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{A_n} |f(s, w(s))|\, ds = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n) = \infty,$$

что противоречит условию $F : C(D) \to \mathbb{R}$. □

**Утверждение 2.3.** *Если множество $D \subset X$ замкнуто и выпукло, и $F : C(D) \to \mathbb{R}$, то для любого компакта $K \subset D$ множество*

$$M(K) = \{|f(s, u(s))| \colon u \in L_0(K)\}$$

*имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то есть*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall u \in L_0(K))\ :\ E \in \Sigma,\ \mu E < \delta \Rightarrow \int_E |f(s, u(s))|\, ds < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея доказательства аналогична используемой при доказательстве признака Лебега равностепенной непрерывности в [13, с. 146-149]. Предположим, что утверждение неверно. Тогда

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)\ (\forall \delta > 0)\ (\exists u_\delta \in L_0(K))\ (\exists E_\delta \in \Sigma)\ :\ \mu E_\delta < \delta\ \wedge\ \int_{E_\delta} |f(s, u_\delta(s))\, ds \geq \varepsilon_0. \tag{2.11}$$

Построим рекурсивно последовательности положительных чисел $\delta_n$, множеств $E_n \in \Sigma$ и функций $u_n \in L_\infty(K)$, удовлетворяющие для $n = 1, 2, \dots$ следующим условиям:

1) $\int_{E_n} |f(s,u_n(s))|\,ds \geq \varepsilon_0$ ;
2) $\mu E_n < \delta_{n-1}/2$ (по определению, $\delta_0 = 1$ );
3) $\mu E < \delta_n \Rightarrow \int_E |f(s,u_n(s))|\,ds < \varepsilon_0/2$.

В силу (2.11) существуют $E_1 \in \Sigma$ е $u_1 \in L_0(K)$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) для $n = 1$. По утверждению 2.1, $\int_E |f(s,u_1(s))|\,ds < \infty$, тогда по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_1 > 0$, так что выполнено условие 3) для $n = 1$.

Предположим, что существуют $\delta_n$, $E_n$ е $u_n$, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) для $n = 1, 2, \ldots, k-1$. В силу (2.11) найдутся $E_k \in \Sigma$ е $u_k \in L_0(K)$, удовлетворяющие условиям 1) и 2) для $n = k$. По утверждению 2.1, $\int_E |f(s,u_k(s))|\,ds < \infty$, тогда по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует $\delta_k > 0$, так что выполнено условие 3) для $n = k$.

По принципу математической индукции, последовательности $\delta_n$, $E_n$ е $u_n$, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) для всех натуральных $n$, существуют. Таким образом, эти последовательности будем считать построенными.

Введем в рассмотрение множества

$$G_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_n, \quad A_n = E_n \setminus G_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что множества $A_n$ попарно не пересекаются. Более того, $\delta_n < \delta_{n-1}/2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так что по условию 2)

$$\mu G_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu E_n < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\delta_k}{2} < \delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда из условий 1), 3) и полуаддитивности интеграла Лебега следует

$$\int_{A_n} |f(s,u_n(s))|\,ds \geq \int_{A_n} |f(s,u_n(s))|\,ds - \int_{G_n} |f(s,u_n(s))|\,ds \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{2.12}$$

Определим функцию $v : \Omega \to X$ равенством $v = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} u_n$. Ясно, что $v(\Omega) \subset K$, так что $v \in L_\infty^c(D)$, е в силу (2.12)

$$\int_\Omega |f(s,v(s))|\,ds \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(s,v(s))|\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(s,u_n(s))|\,ds \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} = \infty.$$

Итак, функционал $F$ не действует из $L_\infty^c(D)$ в $\mathbb{R}$, что противоречит утверждению 2.2. □

**Следствие 2.1.** *Если множество $K \subset X$ выпукло и компактно, и $F : C(K) \to \mathbb{R}$, то*

$$\sup_{u \in L_0(K)} \int_\Omega |f(s,u(s))|\,ds < \infty.$$

**Утверждение 2.4.** *Если множество $D \subset X$ замкнуто и выпукло, и $F : C(D) \to \mathbb{R}$, то*

$$\sup_{u \in C(D)} |F(u)| = \sup_{u \in L_0(D)} |F(u)| = I(D).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $\sup_{u\in C(D)}|F(u)| \le \sup_{u\in L_0(D)}|F(u)| \le I(D)$ очевидно. Докажем обратное неравенство.

Зафиксируем произвольные $u \in C(D)$ и $\varepsilon > 0$. Положим $K = \overline{\text{co}}(u(\Omega) \cup (-u)(\Omega))$. Очевидно $K \subset D$, и по теореме Мазура множество $K$ компактно. Найдем согласно утверждению 2.3 такое $\delta > 0$, что

$$E \in \Sigma,\ \mu E < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{z\in L_0(K)} \int_E |f(s, z(s)|\, ds < \varepsilon. \tag{2.13}$$

Определим множества $E_+$, $E_-$ и функцию $u_1 : \Omega \to X$ равенствами

$$E_+ = \{s \in \Omega\colon f(s, u(s)) \ge 0\}, \quad E_- = \{s \in \Omega\colon f(s, u(s)) < 0\}, \quad u_1 = \chi_{E_+}u - \chi_{E_-}u.$$

Очевидно, что $u_1(\Omega) \subset K$. По лемме 2.1, существует компакт $A \subset \Omega$ и функция $u_2 \in C(K)$, такие что $\mu(\Omega \setminus A) < \delta$ и $u_1|_A = u_2|_A$.

Согласно построению и (2.13)

$$\int_\Omega |f(s, u(s)|\, ds = F(u_1) = F(u_2) + \int_{\Omega\setminus A} f(s, u_1(s))\, ds - \int_{\Omega\setminus A} f(s, u_2(s))\, ds \le F(u_2) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $u \in C(D)$ и $\varepsilon > 0$ из этого неравенства вытекает

$$\sup_{u\in C(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds \le \sup_{u\in C(D)} |F(u)|. \tag{2.14}$$

Пусть теперь $v \in L_0(D)$ произвольно. Согласно лемме 2.1, существует последовательность функций $v_n \in C(D)$, сходящаяся по мере к $v$. По лемме 2.2, последовательность неотрицательных функций $w_n(s) = |f(s, v_n(s))|$ сходится по мере к функции $w(s) = |f(s, v(s))|$. По теореме Фату

$$\int_\Omega |f(s, v(s))|\, ds \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega w_n(s)\, ds \le \sup_{u\in C(D)} \int_\Omega |f(s, u(s))|\, ds. \tag{2.15}$$

Из (2.14), (2.15) и утверждения 2.1 следует

$$I(D) = \sup_{c\in L_0(D)} \int_\Omega |f(s, v(s))| \le \sup_{u\in C(D)} |F(u)|.$$

Утверждение доказано. □

## 3. Критерий действия и ограниченности нелинейного интегрального функционала на пространстве непрерывных функций

Как и в предыдущем параграфе, объектом нашего исследования является функционал

$$F(u) = \int_\Omega f(s, u(s))\, ds,$$

порожденный функцией $f : \Omega \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям Каратеодори (C1) и (C2). Для замкнутых множеств $D \subset X$ будем использовать обозначение

$$I(D) = \int_D \sup_{x\in D} |f(t, x)|\, dx.$$

Также введем обозначение для замкнутых шаров $B_r = \{x \in X\colon \|x\| \le r\}$ $(r > 0)$.

**Теорема 3.1.** *Для любого выпуклого компакта* $K \subset X$ *имеют место следующие утверждения:*

*1)* $[\, F : C(K) \to \mathbb{R}\,] \;\Leftrightarrow\; [\, F : L_0(K) \to \mathbb{R}\,] \;\Leftrightarrow\; [\, I(K) < \infty\,]$*;*

*2) Если* $F : C(K) \to \mathbb{R}$, *то* $\sup\limits_{u \in C(K)} |F(u)| = \sup\limits_{u \in L_0(K)} |F(u)| = I(K) < \infty.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вытекает непосредственно из следствия 2.1 и утверждения 2.4. □

**Теорема 3.2.** *Следующие условия* a), b) *и* c) *эквивалентны между собой:*

a) $F : C(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен;*

b) $F : \mathrm{L}_\infty(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен;*

c) $\forall r > 0$ *имеет место* $I(B_r) < \infty$.

*Более того, если* $F : C(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен, то для любого* $r > 0$

$$\sup_{u \in C(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| = \sup_{u \in \mathrm{L}_\infty(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| = I(B_r) < \infty. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство c) ⇒ b) ⇒ a) вытекает из очевидного неравенства

$$\sup_{u \in C(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| \le \sup_{u \in \mathrm{L}_\infty(X),\, \|u\|_\infty \le r} |F(u)| \le I(B_r), \quad r > 0.$$

Пусть выполнено условие a). Из утверждения 2.4, примененного к шарам $D = B_r$, вытекает соотношение (3.1), а из него следует справедливость условия c). □

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно вытекает следующий результат.

**Следствие 3.1.** *Пусть* $X$ *конечномерно и функционал* $F$ *действует из* $C(X)$ *в* $\mathbb{R}$. *Тогда этот функционал ограничен, более того,* $F : \mathrm{L}_\infty(X) \to \mathbb{R}$, *ограничен, и для любого* $r > 0$ *имеет место соотношение* (3.1)*.*

Теоремы 3.1 и 3.2 дополняет следующая теорема.

**Теорема 3.3.** *Если* $F : C(X) \to \mathbb{R}$ *и ограничен, то для любой ограниченной последовательности* $\{u_n\} \subset L_\infty(X)$, *сходящейся по мере к некоторому* $u \in L_\infty(X)$, *имеет место* $F(u_n) \to F(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u, u_n \in L_\infty(X)$ удовлетворяют условию теоремы. Выберем $r > 0$ такое, что $u_n(\Omega) \subset B_r$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Определим функции $v, v_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равенствами $v(s) = f(s, u_n(s))$, $v_n(s) = f(s, u_n(s))$.

По лемме 2.2, последовательность измеримых функций $v_n$ сходится по мере к функции $v$. Более того,

$$|v_n(s)| \le \psi(s), \quad s \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(s) = \sup_{x \in B_r} |f(s, x)|$ есть интегрируемая функция, поскольку в силу теоремы 3.2 $\int_\Omega \psi(s)\, ds = I(B_r) < \infty$.

По теореме Лебега, $F(u_n) \to F(u)$. □

Из теоремы 3.3 и леммы 2.1 непосредственно вытекает следующий результат.

**Следствие 3.2.** *Множество* $F(C(X))$ *всюду плотно в* $F(\mathrm{L}_\infty(X))$.

## 4. Линейный интегральный функционал в пространстве непрерывных функций

В этом параграфе конкретизируем результаты предыдущего на случай линейного интегрального функционала. Приводящаяся ниже теорема обобщает утверждение из [2, с. 178–181] об ограниченности и выражении для нормы линейного интегрального функционала на пространстве $C(\mathbb{R})$.

Если $Y$ — некоторое банахово пространство, то значение линейного функционала $g : Y \to \mathbb{R}$ в точке $y \in Y$ будем обозначать через $g[y]$. Сопряженное к $Y$ банахово пространство (пространство линейных ограниченных функционалов $g : Y \to \mathbb{R}$ с естественной нормой) будем обозначать через $Y^*$.

Пусть $a : \Omega \to X^*$. Функционал $H$ формально определим равенством

$$H[u] = \int_\Omega a(s)[u(s)]\, ds. \tag{4.1}$$

Если конечный интеграл в (4.1) существует для всех функций $u : \Omega \to X$ из некоторого линейного подпространства $V$ пространства $L_0(X)$, то выражение (4.1) определяет линейный функционал $H : V \to \mathbb{R}$.

Функция $a : \Omega \to X^*$ называется $*$-слабо измеримой [3, с. 41], если при любом $x \in X$ вещественная функция $a(s)[x]$ измерима.

Ясно, что линейный функционал $H$ есть частный случай функционала $F$ вида (2.1) с порождающей функцией $f(s, x) = a(s)[x]$, причем если функция $a(\cdot)$ $*$-слабо измерима, то функция $f$ удовлетворяет условиям (C1) и (C2).

**Теорема 4.1.** *Следующие условия* a), b) *и* c) *эквиваленты между собой:*

a) $H \in (C(X))^*$, *то есть функционал* $H$ *действует из* $C(X)$ *в* $\mathbb{R}$ *и ограничен;*

b) $H \in (\mathrm{L}_\infty(X))^*$ *;*

c) *Функция* $a(\cdot)$ $*$*-слабо измерима и* $\|a\|_1 \overset{\text{def.}}{=} \int_\Omega \|a(s)\|_{X^*}\, ds < \infty$.

*При выполнении любого из этих условий*

$$\|H\|_{(C(X))^*} = \|H\|_{(\mathrm{L}_\infty(X))^*} = \|a\|_1. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы вытекает непосредственно из теоремы 3.2, с учетом следующих фактов:

1) Если $H : C(X) \to \mathbb{R}$, то функция $a(\cdot)$ $*$-слабо измерима;

2) $\|a(s)\|_{X^*} = \sup_{x \in B_1} |a(s)[x]|$;

3) $\|H\|_{V^*} = \sup_{u \in V,\, \|u\|_\infty \le 1} |H[u]|$, где $V = C(X)$ или $V = \mathrm{L}_\infty(X)$. □

З а м е ч а н и е 4.1. Если пространство $X^*$ сепарабельно (это справедливо, в частности, если сепарабельное банахово пространство $X$ рефлексивно), то условие c) теоремы 4.1 эквивалентно следующему условию:

c)$^*$ функция $a : \Omega \to X^*$ интегрируема по Бохнеру [3, с. 44–45].

Действительно, если $X^*$ сепарабельно, то по следствию 4 из [3, с. 42], $*$-слабая измеримость функции $a$ эквивалентна ее измеримости.

**Следствие 4.1.** *Пусть* $X$ *конечномерно, и функционал* $H$ *действует из* $C(X)$ *в* $\mathbb{R}$. *Тогда* $H \in (C(X))^*$, $H \in (\mathrm{L}_\infty(X))^*$ *и имеет место равенство* (4.2).

**Следствие 4.2.** *Если* $H \in (C(X))^*$, *то для любой ограниченной последовательности* $\{u_n\} \subset L_\infty(X)$, *сходящейся по мере к некоторому* $u \in L_\infty(X)$, *имеет место сходимость* $H[u_n] \to H[u]$.

**Следствие 4.3.** *Если* $H \in (C(X))^*$, *то множество* $H(C(X))$ *является всюду плотным в* $H(\mathrm{L}_\infty(X))$.

## References


[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.:A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. V. I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

[2] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, 3-е изд., Наука, М., 1984; англ. пер.:L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press Ltd. & Nauka Publ., Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, 1982.

[3] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys. V. 15, AMS, Providence, 1977.

[4] И. В. Шрагин, “Оператор Немыцкого из $C$ в $L^M$”, *Ученые записки Моск. обл. педаг. ин-та*, **77**:5 (1969), 161–178. [I. V. Shragin, “The Nemytskii operator from $C$ to $L^M$”, *Scientific notes of the Moscow Regional Pedagogical Institute*, **77**:5 (1969), 161–178 (In Russian)].

[5] И. В. Шрагин, “Условия измеримости суперпозиций”, *Доклады Академии наук СССР*, **197**:5 (1971), 295–298; англ. пер.:I. V. Shragin, “Conditions for measurability of superpositions”, *Soviet Mathematics, Doklady*, **12**:2 (1971), 465–470.

[6] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость”, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, №1, 82–92. [I. V. Shragin, “Superposition measurability”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1975, №1, 82–92 (In Russian)].

[7] И. В. Шрагин, “Об одном применении теорем Лузина, Титце-Урысона и теоремы измеримого выбора”, *Краевые задачи*, Межвузовский сборник научных трудов, Пермский политехнический институт, Пермь, 1979, 171–175. [I. V. Shragin, “On one application of the theorems of Luzin, Tietze-Urysohn and the measurable choice theorem”, *Boundary Value Problems*, Interuniversity Collection of Scientific Papers, Perm Polytechnic Institute, Perm, 1979, 171–175 (In Russian)].

[8] И. В. Шрагин, Ю. В. Непомнящих, “$D$-условия Каратеодори и их связь с $D$-непрерывностью оператора Немыцкого”, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, №6, 70–82; англ. пер.:I. V. Shragin, Y. V. Nepomnyashchikh, “The Carathéodory $D$-conditions and their connection with the $D$-continuity of the Nemytskij operator”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **41**:6 (1997), 66–78.

[9] A. V. Ponosov, Y. V. Nepomnyashchikh, “The necessity of the Carathéodory conditions for the lower semicontinuity in measure of the multivalued Nemytskii operator”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **30**:2 (1997), 727–734.

[10] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superposition measurability under generalized Carathéodory conditions”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[11] И. Д. Серова, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I. D. Serova, “Superposition measurability of a multivalued function under generalized Carathéodory conditions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[12] В. Л. Левин, *Выпуклый анализ в пространнствах измеримых функций и его применение в математике и экономике*, Наука, М., 1985. [V. L. Levin, *Convex Analysis in Spaces of Measurable Functions and Its Application in Mathematics and Economics*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].

[13] И. П. Натансон, *Теория функци вещественной переменной*, 3-е изд., Наука, М., 1974; англ. пер.:I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*. V. I, Dover Publ., Mineola, New York, 2016.

[14] Ю. В. Непомнящих, *Свойства оператора Урысона в пространствах равномерно непрерывных и почти периодических функций*, Деп. в ВИНИТИ 15.09.92, № 2787–В92, Перм. ун-т, Пермь, 1992. [Y. V. Nepomnyashchikh, *Properties of the Uryson Operator in Spaces of Uniformly Continuous and Almost Periodic Functions*, Dep. VINITI, no. 2787–B92, PSU, Perm, 1992 (In Russian)].

**Информация об авторах**

**Алвес Мануэль Жоаким**, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик.
E-mail: mjalves.moz@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-3713-155X

**Алвес Елена Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент школы экономики и делового администрирования. Высший институт наук и технологий Мозамбика, г. Мапуто, Мозамбик. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
**ORCID:** https://orcid.org/0009-0000-1452-2553

**Мунембе Жоао Себастьян Паулу**, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик.
E-mail: jmunembe3@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

**Непомнящих Юрий Витальевич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Мозамбик.
E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
**ORCID:** https://orcid.org/0009-0008-1374-4283

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**
Непомнящих Юрий Витальевич
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.04.2023 г.
Поступила после рецензирования 02.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

**Information about the authors**

**Manuel J. Alves**, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: mjalves.moz@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-3713-155X

**Elena V. Alves**, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the School of Economy and Business Administration. High Institute of Sciences and Technologies Mozambique, Maputo, Mozambique. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
**ORCID:** https://orcid.org/0009-0000-1452-2553

**João S. P. Munembe**, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: jmunembe3@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-0380-6734

**Yury V. Nepomnyashchikh**, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics and Informatics Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
**ORCID:** https://orcid.org/0009-0008-1374-4283

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**
Yury V. Nepomnyashchikh
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Received 04.04.2023
Reviewed 02.06.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136
УДК 517.28+512.552+512.548.4

# Категорный подход к исследованию дифференцирований в групповых алгебрах

**Андроник Арамович АРУТЮНОВ**
ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141701, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

**Аннотация.** В работе представлен обзор результатов, посвященных описанию семейств операторов, подчиняющихся некоторым индуктивным тождествам (например правилу Лейбница — случай дифференцирований, дифференцирования Фокса, а также $(\sigma,\tau)$ -дифференцирований) как характеров на подходящем группоиде. В первую очередь дается реализация данной конструкции для дифференцирований в групповых алгебрах и дифференцирований Фокса, как характеров на группоиде действия. Также демонстрируется, как данная конструкция реализуется для дифференцирований на алгебрах, порожденных мальцевскими полугруппами, для случая дифференцирований со значениями в конечных кольцах, а также для $(\sigma,\tau)-$ дифференцирований.

**Ключевые слова:** дифференцирования, производная Фокса, операторная алгебра, тождество, группоиды

**Благодарности:** Работа выполнена в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/).

**Для цитирования:** *Арутюнов А.А.* Категорный подход к исследованию дифференцирований в групповых алгебрах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 125–136. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136

# A categorical approach to the study of derivations in group algebras

**Andronick A. ARUTYUNOV**
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology
9 Inststitutskii Per., Dolgoprudny 141700, Moscow Reg, Russian Federation

**Abstract.** We present a review of the results devoted to describing families of operators obeying some inductive identities (e. g. Leibniz's rule — the case of derivations, Fox derivation, and $(\sigma,\tau)$-derivations) as characters on a suitable groupoid. We first give an implementation of this construction for derivations in group algebras and Fox derivations as characters on an action groupoid. It is also demonstrated how this construction can be realized for derivations on algebras generated by Maltsev semigroups, for the case of derivations with values in finite rings, and for $(\sigma,\tau)-$ derivations.

**Keywords:** derivation, Fox derivative, operator algebra, identity, groupoid

**Acknowledgements:** The work was carried out at the V. A. Trapeznikov Institute for Control Problems of the Russian Academy of Sciences with the support of a grant from the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

**Mathematics Subject Classification:** 16W25, 47B47, 46L10, 16S34.

**For citation:** Arutyunov A.A. A categorical approach to the study of derivations in group algebras. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 125–136. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-125-136
(In Russian, Abstr. in Engl.)

В данной работе предлагается концепция категорного подхода к исследованию дифференцирований в различных некоммутативных алгебрах, основанный на идее, предложенной в [1, 2]. Ниже мы опишем сам метод и продемонстрируем на нескольких примерах, как данный метод работает для различных вариантов дифференцирований в групповых и некоторых других ассоциативных алгебрах.

Сама задача изучения дифференцирований связана с проблемой Джонсона о тривиальности внешних дифференцирований в алгебре $L_1(G)$ (см. библиографию к [1]). При изучении дифференцирований в алгебрах без топологической структуры дифференциальное исчисление Фокса возникло (см. [3] и другие работы Фокса) как важный инструмент изучения теории узлов. Классические ассоциативные дифференцирования в таком алгебраическом смысле начали изучать независимо, они нашли свои приложения например в криптографии. Более подробно об истории исследований дифференцирований см. [4].

Важным мотивирующим примером является единая конструкция для классических дифференцирований, порожденных ассоциативной структурой, и для дифференциального исчисления в смысле Фокса.

Суть метода состоит в описании оператора дифференцирования как характера на некоторой категории (чаще всего группоиде, связанном со структурой групповой алгебры). Конкретно, дифференцирования (т. е. линейный оператор, удовлетворяющий правилу Лейбница $d(uv) = d(u)v + ud(v)$, либо его аналогу) отождествляются с характерами на группоиде присоединенного действия. Под характером при этом подразумевается отображение $\chi : \mathbf{Hom}\,(\Gamma) \to \mathbb{C}$, которое удовлетворяет для пары компонируемых морфизмов $\psi, \varphi$ свойству

$$\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi).$$

В случае алгебр без оснащения топологической структурой, дифференцирования взаимно однозначно отождествляются с т. н. локально-финитными характерами на группоиде присоединенного действия. При этом удобно работать с идеалом квазивнутренних дифференцирований (неформально говоря, это дифференцирования, которые представимы в виде бесконечной суммы внутренних) и возникающей фактор алгеброй всех дифференцирований по квазивнутренним — квазивнешним дифференцированиям (эта конструкция была предложена в [5]).

Структура алгебр внешних и квазивнешних дифференцирований зависит от строения классов сопряженных элементов, от структур централизаторов. Эта связь ожидаема в контексте результатов по описанию первых когомологий Хохшильда (см. [6] и работы [7,8], в последних также изложена более подробная история вопроса). При описании структуры возникают и другие инварианты группы, в частности изученный в свое время Столлингсом инвариант — число концов группы.

Развитие предлагаемого подхода находит разные приложения: алгебры, порожденные мальцевскими полугруппами, $(\sigma, \tau)$-дифференцирования, дифференцирования над групповыми алгебрами с коэффициентами в конечных полях (последний пример чрезвычайно интересен с точки зрения приложений (см., например, [9])).

Если оснастить групповую алгебру структурой нормированного пространства, то задача приводит к дифференцированиям со значениями в свободных бимодулях над $\mathbb{C}[G]$. Примечательно, что в последнем случае удается получить достаточно общий результат о тривиальности алгебры квазивнешних дифференцирований (подробнее см. в [10]).

## 1. Группоид действия и линейные операторы

Пусть $\lambda : G \times G \to G$ — действие группы на себе. С его помощью определим группоид действия $\Gamma_\lambda$. В качестве объектов возьмем элементы группы $G$, т. е. $\mathbf{Obj}(\Gamma_\lambda) := G$. В качестве морфизмов возьмем пары из множества $G \times G$, т. е. $\mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) := G \times G$. Началом морфизма $\phi = (m, g)$ положим объект $s(\phi) := m$, а в качестве конца $t(\phi) := g(m)$. Иными словами,

$$\mathbf{Hom}\,(a, b) = \{(a, g)|\, g(a) = b\}.$$

Эндоморфизмами (иногда будем называть их «петлями») назовем морфизмы, у которых совпадает начало и конец. Группа эндоморфизмов вокруг объекта $m$ изоморфна стабилизатору элемента $m$,

$$\mathbf{Hom}\,(m, m) \cong Stab(m).$$

Для пары морфизмов $\varphi = (m, g_1), \psi = (m', g_2)$ таких, что $m' = g_1(m)$, определим композицию $\psi \circ \varphi$ по формуле

$$\psi \circ \varphi := (m, g_2 g_1).$$

Ассоциативность композиции следует из ассоциативности умножения в группе. Нейтральный морфизм вокруг объекта $m$ имеет вид $(m, e)$, где $e$ — нейтральный элемент в группе $G$. Морфизм обратный к $(m, a)$ имеет вид $(a(m), a^{-1})$. Таким образом, $\Gamma_\lambda$ действительно является группоидом.

Для элемента $u \in G$ будем обозначать через $[u]$ множество элементов орбиты относительно действия $\lambda$. Множество орбит будем обозначать $G^\lambda$. Определим субгруппоид $\Gamma_{[u]}$ следующим образом

$$\mathbf{Obj}(\Gamma_{[u]}) = [u], \;\; \mathbf{Hom}\,(\Gamma_{[u]}) = \mathbf{Hom}\,(a, x), \quad a \in [u], \;\; x \in G.$$

Группоид $\Gamma_\lambda$ представим в виде несвязного объединения субгруппоидов $\Gamma_{[u]}$, т. е.

$$\Gamma_\lambda = \coprod_{[u] \in G^\lambda} \Gamma_{[u]}.$$

Зададим на группоиде $\Gamma_\lambda$ пространство характеров, аналогичное изученному ранее в работах [2, 5, 11]. Пусть имеем некоторое кольцо $\mathfrak{K}$. Тогда

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем называть функцию $\chi : \mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) \to \mathfrak{K}$ характером, если для любой пары компонируемых морфизмов $\phi, \psi$ выполняется

$$\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi). \tag{1.1}$$

Формулу (1.1) удобно переписать в эквивалентном виде

$$\chi(m, g_2 g_1) = \chi(m, g_1) + \chi(g_1(m), g_2). \tag{1.2}$$

Нас будут интересовать в основном локально финитные характеры.

О п р е д е л е н и е 1.2. Назовем характер $\chi$ локально финитным, если для каждого $g \in G$ множество морфизмов $\psi \in \mathbf{Hom}\,(*, g)$ таких, что $\chi(\psi) \neq 0$, конечно. Пространство локально финитных характеров со значениями в кольце $\mathfrak{K}$ будем обозначать $X(\Gamma_\lambda, \mathfrak{K})$. Если это не вызывает разночтений, то будем писать коротко $X(\Gamma)$.

Обычно мы будем работать со стандартными групповыми алгебрами $\mathbb{C}[G]$, т. е. финитными линейными комбинациями $\sum_{g\in G} x(g)g$, где $x(\cdot) : G \to \mathbb{C}$. Однако, также у нас будут встречаться и алгебры над другими кольцами. А именно, пусть $\mathfrak{K}$ — кольцо, обозначим через $\mathfrak{K}[G]$ финитные линейные комбинации $\sum_{g\in G} x(g)g$, где функция $x(\cdot) : G \to \mathfrak{K}$ со значениями в кольце $\mathfrak{K}$.

## 2. Характеры и порождаемые тождества

Пусть $\lambda : G \times G \to G$ — свободное и транзитивное левое действие группы на себе. Когда речь идет о фиксированном действии, будем для краткости писать $\lambda(g, h) =: g(h)$. Продолжим действие $\lambda$ по линейности до действия $\lambda : G \times \mathfrak{K}[G] \to \mathfrak{K}[G]$ на групповой алгебре. А именно, если $x(\cdot) : G \to \mathfrak{K}$ — финитная функция, определим действие элемента $g$ по формуле

$$g\left(\sum_{h\in G} x(h)h\right) := \sum_{h\in G} x(h)gh.$$

Рассмотрим семейство операторов, действующих в групповой алгебре $\mathfrak{K}[G]$, порождаемое характерами на группоиде $\Gamma_\lambda$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Обозначим через $\mathcal{B}(\mathfrak{K}[G], \lambda)$ пространство операторов, действующих в $\mathfrak{K}[G]$ таких, что для каждого $\alpha \in \mathcal{B}(\mathfrak{K}[G], \lambda)$ выполнено

$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + uv \cdot v^{-1}\left(u^{-1} \cdot \alpha(u)\right). \tag{2.1}$$

Для краткости будем писать $\mathcal{B}$ вместо $\mathcal{B}(\mathfrak{K}[G], \lambda)$.

**Лемма 2.1.** *Пространство операторов $\mathcal{B}$ канонически изоморфно $X(\Gamma_\lambda)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оператор $\alpha$ лежит в $\mathcal{B}$, если (и только если) тождество (2.1) выполнено на всех образующих. Запишем оператор $\alpha$ для $g \in G$ в виде

$$\alpha(g) = \sum_{h\in G} \chi(h, g)gh. \tag{2.2}$$

Тождество (2.1) для образующих $g_{1,2} \in G$ дает следующее

$$\alpha(g_2g_1) = \sum_{h\in G} \chi(h, g_2g_1)g_2g_1h = g_2\sum_{h\in G}(\chi(h, g_1)g_1h + g_1\chi(g_1(h), g_2)h) =$$
$$= g_2\alpha(g_1) + g_2g_1\sum_{h\in G}\chi(h, g_2)g_1^{-1}(h) = g_2\alpha(g_1) + g_2g_1g_1^{-1}(g_2^{-1}\alpha(g_2)).$$

Здесь мы воспользовались «перенумерацией» элементов группы, использовав точность действия: если $g_1(h) = m$, то $h = g_1^{-1}(m)$, а также транзитивностью, поставив знак суммирования по всей группе.

Поскольку в выкладке все переходы эквивалентны, получаем, что из выполнения тождества (2.1) следует, что для коэффициентов, определенных формулой (2.2), будет выполняться свойство (1.2), а значит рассматриваемое отображение является характером. $\square$

Семейство операторов $\mathcal{B}$ обобщает понятия классического дифференцирования и дифференциальное исчисление Фокса.

**Теорема 2.1.**

- *Если имеем действие левыми сдвигами* $tr_-$, *то тождество* (2.1) *принимает вид*
$$\alpha(uv) = \alpha(u) + u\alpha(v).$$

- *Если* $\lambda$ *— действие сопряжениями, то тождество* (2.1) *определяет дифференцирования, т. е. задает правило Лейбница*
$$\alpha(uv) = u\alpha(v) + v\alpha(u).$$

Второе тождество — «классическое» правило Лейбница, определяющее «классическое» дифференцирование. Первое же тождество $\alpha(u)+u\alpha(v)$ — соответствует тождеству, которому удовлетворяют т. н. производные Фокса (Fox derivative), что следует из определения в [12, с. 96].

Само понятие дифференцирования Фокса было введено в оригинальной работе Р. Фоксом (см. [3]). В дальнейшем дифференциальное исчисление Фокса применялось к различным задачам, в частности к теории узлов (см. [12]).

С учетом сказанного получаем

**Следствие 2.1.**

1. *Пространство дифференцирований Фокса канонически изоморфно пространству* $\mathcal{B}(\mathbf{Z}[G], tr_-)$;

2. *Пространство дифференцирований в* $\mathbb{C}[G]$ *канонически изоморфно пространству* $\mathcal{B}(\mathbb{C}[G], \lambda)$, *где* $\lambda$ *— действие сопряжениями.*

Отметим, что способ задания семейства операторов при помощи формулы (2.2) не единственен. Например, можно рассмотреть операторы, задаваемые формулой
$$\alpha(g) = \sum_{h \in G} \chi(h, g)h.$$
При этом рассуждения в духе леммы 2.1 будут приводить к другим индуктивным тождествам вида
$$\alpha(uv) = f(\alpha(u), v) + g(u, \alpha(v)) \tag{2.3}$$
для некоторых билинейных функций $f, g$. Одним из возникающих таким образом семейств являются $(\sigma, \tau)$-дифференцирования, которые будут рассмотрены ниже. Отметим, что возникающие таким образом семейства операторов не обязаны быть алгебрами. Тем не менее, при решении задачи их описания естественна следующая схема: рассмотрение операторов, порождаемых тривиальными на петлях характерами, затем рассмотрение фактор пространства по ним. Таким образом, возникает аналог понятия внешних и внутренних дифференцирований, которые, конечно, не обязаны образовывать идеал (поскольку операторы не образуют алгебру). Однако, как показывает предлагаемый ниже пример дифференцирований со значениями в конечном кольце и дифференцирований в алгебре, порождаемой мальцевской полугруппой, если соответствующее семейство операторов все же образует алгебру, то операторы, порождаемые тривиальными на петлях характерами, будут образовывать идеал.

## 3. Описание алгебры дифференцирований

Далее мы сосредоточимся на изучении «классических» дифференцирований, т. е. удовлетворяющих правилу Лейбница. Зафиксируем обозначения.

Определение 3.1. Далее через $Der(\mathbb{C}[G])$ мы будем обозначать алгебру линейных операторов $d : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющих правилу Лейбница

$$d(uv) = d(u)v + ud(v), \forall u, v \in \mathbb{C}[G].$$

Далее мы будем работать группоидом, порождаемым действием группы на себе при помощи сопряжений и обозначим его для краткости $\Gamma$.

Пусть $d$ — дифференцирование. В силу линейности, для элемента групповой алгебры $u = \sum\limits_{g\in G} \lambda^g g$ найдутся коэффициенты $d^g_h g, h \in G$ такие, что справедлива формула

$$d(u) = \sum_{g\in G} \left( \sum_{h\in G} d^g_h \lambda^h \right) g. \tag{3.1}$$

- Обозначим через $X(\Gamma)$ пространство всех локально финитных характеров на группоиде $\Gamma$.
- Подпространство в $X(\Gamma)$ локально финитных характеров тривиальных на петлях обозначим через $X_0(\Gamma)$, т. е.

  $$X_0(\Gamma) = \{\chi \in X(\Gamma) | \forall \varphi \in \mathbf{Hom}\ (a, a) :\ \chi(\varphi) = 0\}.$$

- Через $X(\Gamma_{[u]})$ и $X_0(\Gamma_{[u]})$ мы будем обозначать подпространства общего пространства характеров, с носителями, локализованными в соответствующем субгруппоиде $supp\chi \subset \Gamma_{[u]}$.

Определение 3.2. Назовем дифференцирования, задаваемые формулой (3.1) при помощи характеров из пространства $X_0(\Gamma)$, квазивнутренними дифференцированиями $QInnDer(\mathbb{C}[G])$.

Понятие квазивнутреннего дифференцирования было введено в [5] (раздел 3.3, и названы слабыми дифференцированиями). Несложно убедиться, что всякое внутреннее дифференцирование является квазивнутренним. Обратное — вообще говоря неверно. Соответствующим примером является свободная группа (см. пример в [2]) или группа Гейзенберга и вообще нипльпотентные группы ранга 2 (см. [13]).

При этом квазивнутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре $Der(\mathbb{C}[G])$.

**Теорема 3.1.** [5, теорема 3.1] *Пространство $QInnDer(\mathbb{C}[G])$ квазивнутренних дифференцирований образует идеал в алгебре всех дифференцирований.*

Эта теорема делает корректным следующее определение.

Определение 3.3. Фактор алгебру

$$QOutDer(\mathbb{C}[G]) := Der(\mathbb{C}[G])/QInnDer(\mathbb{C}[G])$$

назовем алгеброй квазивнешних дифференцирований.

Через $\langle\langle H\rangle\rangle$ для подгруппы $H$ в группе $G$ обозначим нормальное замыкание подгруппы $H$. Чтобы определить гомоморфизм $\tau_{[u]} : \langle\langle Z(u)\rangle\rangle \to (\mathbb{C}, +)$, заметим, что каждый элемент $h \in \langle\langle Z(u)\rangle\rangle$ имеет вид

$$h = t_1 z_1 t_1^{-1} \cdot \dots \cdot t_k z_k t_k^{-1},$$

где $t_i \in G, z_i \in Z(u)$. Зададим гомоморфизм следующим образом

$$\tau_{[u]}(h) := \tau_u^*(z_1) + \dots + \tau_u^*(z_k).$$

Определение 3.4. Обозначим через $\mathcal{Q}([u])$ пространство всех гомоморфизмов $\tau_{[u]} : \langle\langle Z(u)\rangle\rangle \to (\mathbb{C}, +)$.

Неформально говоря, пространство $\mathcal{Q}$ — это те гомоморфизмы на централизаторе, которые порождают некоторый локально финитный характер. Разумеется, «порождают» с точностью до характера тривиального на петлях. При этом далеко не каждый гомоморфизм централизатора породит некоторый локально финитный характер. К примеру, в нильпотентных группах ранга 2 (см. [13, теорема 5]) никакой характер, нетривиальный на петлях над бесконечным субгруппоидом, не может быть локально финитным. Наиболее естественным примером такой группы является группа Гейзенберга.

**Теорема 3.2.** [14, Theorem 3.6] *Для конечно порожденных групп $G$ следующие пространства канонически изоморфны:*

$$QOutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathcal{Q}([u]).$$

*Если, к тому же, $e(G) = 1$, то имеет место также канонический изоморфизм*

$$OutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathcal{Q}([u]).$$

**Следствие 3.1.** [14, Corollary 3.7] *Для любой конечно порожденной группы справедлив канонический изоморфизм*

$$OutDer(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u]\in G^G} \left(X(\Gamma_{[u]})/X_0(\Gamma_{[u]}) \times X_0(\Gamma_{[u]})/X_0^{loc}(\Gamma_{[u]})\right).$$

## 4. Обобщения для других алгебр

### FC-группы и характеры со значениями в конечных кольцах

Для приложений представляет интерес случай групповых алгебр с коэффициентами в конечных кольцах для конечных групп. На самом деле с точки зрения нашего подхода нет разницы между конечными группами и группами, в которых все классы сопряженности конечны (FC-группы, см. [15]). В частности, теорема 3.2 и следствие 3.1 приобретают следующий вид.

**Теорема 4.1.** [11, теорема 3.2] *Пусть $G$ — конечно порожденная FC-группа, $A$ — унитальное коммутативное кольцо, тогда*

$$Der(A[G]) \cong Inn(A[G]) \oplus \bigoplus_{[u]\in G^G} \mathbf{Hom}_{Ab}(Z(u), A).$$

Здесь (см. [11, определение 2.12]) $\mathbf{Hom}_{Ab}$ — множество аддитивных гомоморфизмов из централизатора $Z(u)$ фиксированного элемента $u \in G$ в кольцо $A$.

Если кольцо $A$ конечно, имеет место следующее разложение

$$A \cong \mathbf{Z}_{p_1^{i_1}} \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_{p_n^{i_n}}.$$

Если и группа $G$ конечна, то фактор группа по коммутанту конечна и

$$G/[G,G] \cong \mathbf{Z}_{q_1^{j_1}} \oplus ... \oplus \mathbf{Z}_{q_m^{j_m}}$$

есть примарное разложение группы $G/[G,G]$.

**Теорема 4.2.** [11, теорема 4.3] *Для конечной группы $G$ и конечного кольца $A$ все дифференцирования $Der(A[G])$ будут внутренними ($Der(A[G]) = Inn(A[G])$), если и только если $\{p_1,...,p_n\} \cap \{q_1,...,q_m\} = \emptyset$.*

В частности, для приложений интересны случаи групповых алгебр $\mathbf{Z}_4[S_3]$ и $\mathcal{F}_{2^m}D_{2n}$. О важности данных результатов см. [9].

Таким образом, в случае $FC$-групп (в частности конечных) и групповых алгебр с коэффициентами в конечных кольцах алгебра внешних дифференцирований вообще говоря не тривиальна. При этом внутренние и квазивнутренние дифференцирования совпадают.

## Мальцевские полугруппы

Другим примером использования нашей конструкции являются алгебры (с комплексными коэффициентами) над полугруппами. Возможность получения всеобъемлющих результатов для произвольных полугрупп представляется нам малореальной, однако в [16] для случая мальцевской полугруппы $S$ получены следующие результаты.

**Теорема 4.3.** [16, теорема 2.2] *Пространство $QInnDer(S)$ квазивнутренних дифференцирований образует идеал в алгебре $Der(S)$.*

Отметим, что здесь вместо группоида выступает категория (вкладываемая в группоид группы, порождаемой полугруппой $S$), и характеры определяются соответственным образом на этой категории (см. [16, раздел 2.3]), как и квазивнутренние дифференцирования понимаются как дифференцирования, задаваемые характерами, тривиальными на эндоморфизмах.

Характерно, что алгебра дифференцирований такой полугрупповой алгебры вкладывается в алгебру дифференцирований соответствующей групповой алгебры ([16, теорема 2.3]).

## Случай $(\sigma,\tau)$-дифференцирований

Еще одним важным примером реализации предлагаемой нами категорной конструкции являются т. н. $(\sigma,\tau)$-дифференцирования.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра над полем $\mathcal{K}$ и $(\sigma,\tau)$ — пара $\mathcal{K}$-линейных эндоморфизмов $\mathcal{A}$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Будем называть $(\sigma,\tau)$-дифференцированием все такие $\mathcal{K}$-линейные отображения $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, что для всех $a,b \in \mathcal{A}$ справедливо $(\sigma,\tau)$-обобщенное тождество Лейбница

$$D(ab) = D(a)\tau(b) + \sigma(a)D(b). \tag{4.1}$$

Отметим, что это правило — частный случай формулы (2.3).

Множество всех $(\sigma,\tau)$-дифференцирований на $\mathcal{A}$ обозначим $\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathcal{A})$.

Линейное отображение $D:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ для каждого базисного элемента $g\in G$ может быть записано как

$$D(g)=\sum_{h\in G}\lambda_g^h h,\qquad \lambda_g^h\in\mathbb{C}.$$

Если $D:\mathbb{C}[G]\to\mathbb{C}[G]$ — это $(\sigma,\tau)$-дифференцирование, удовлетворяющее $(\sigma,\tau)$-правилу Лейбница (4.1), для любых $g_1,g_2\in G$ имеем

$$D(g_2g_1)=D(g_2)\tau(g_1)+\sigma(g_2)D(g_1),$$
$$\lambda^h_{g_2g_1}=\lambda^{h\tau(g_1^{-1})}_{g_2}+\lambda^{\sigma(g_2^{-1})h}_{g_1}.$$

Теперь построим подходящий группоид (с характерами на нем мы и будем ассоциировать наши $(\sigma,\tau)$-дифференцирования). Следующая конструкция была предложена в [17].

О п р е д е л е н и е 4.2. [17, с. 5] Определим

- $Obj(\Gamma)=G$
- Для объектов $a,b\in Obj(\Gamma)$ морфизмами будет множество

$$\mathbf{Hom}\,(a,b)=\big\{(u,v)\in G\times G\,|\,\sigma(v^{-1})u=a,\ u\tau(v^{-1})=b\big\}$$

- Композицию морфизмов $\varphi=(u_1,v_1)\in\mathbf{Hom}\,(a,b)$ и $\psi=(u_2,v_2)\in\mathbf{Hom}\,(b,c)$ определим как морфизм $\varphi\circ\psi\in\mathbf{Hom}\,(a,c)$ такой, что

$$\varphi\circ\psi=(u_2\tau(v_1),v_2v_1).$$

Тогда справедливо описание через характеры $(\sigma,\tau)$-дифференцирований групповой алгебры. Рассмотрим отображение $\Psi:\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{C}[G])\to X(\Gamma)$, такое, что если $D(g)=\sum\limits_{h\in G}\lambda_g^h h$, то $\Psi(D)(h,g)=\lambda_g^h$. Аналогично строится и обратное отображение $\Psi^{-1}$,

$$\Psi^{-1}(\chi)(g)=\sum_{h\in G}\chi(h,g)h.$$

**Теорема 4.4.** [17, теорема 1] *Пусть $G$ — дискретная, конечно порожденная группа, такая что $\sigma,\tau\in\boldsymbol{End}(G)$. Тогда отображение $\Psi:\mathcal{D}_{(\sigma,\tau)}(\mathbb{C}[G])\to X(\Gamma)$ — изоморфизм.*

Аналогично вводится понятие квазивнутреннего дифференцирования.

О п р е д е л е н и е 4.3. [17, определение 6] Назовем $(\sigma,\tau)$-дифференцирование $D$ квазивнутренним, если характер $\Psi(D)$ тривиален на петлях.

К сожалению, сами $(\sigma,\tau)$-дифференцирования алгебру в обычном смысле не образуют, однако изучение квазивнутренних дифференцирований все равно достаточно полезно. К примеру, имеет место следующее утверждение.

Назовем группу $G$ — $(\sigma,\tau)$-$FC$ группой, если каждый $(\sigma,\tau)$-класс сопряженности $[u]_{\sigma,\tau}$ конечен.

**Теорема 4.5.** [17, теорема 4] *Если* $G$ *— конечно порожденная* $(\sigma,\tau)$*-*$FC$ *группа, и* $\sigma,\tau$ *— эндоморфизмы группы* $G$, *то*

$$D_{(\sigma,\tau)} \cong \bigoplus_{[a]_{(\sigma,\tau)}} Z^*_{(\sigma,\tau)}(a) \bigoplus Inn(\Gamma).$$

Здесь $Z^*_{(\sigma,\tau)}(a)$ — пространство групповых характеров $(\sigma,\tau)$-централизатора $Z_{(\sigma,\tau)}(a)$. В частности, справедливо следующее следствие, которое отнюдь не является самоочевидным для $(\sigma,\tau)$-дифференцирований.

**Следствие 4.1.** [17, следствие 5] *Если* $G$ *— конечная группа и* $\sigma,\tau\in \boldsymbol{End}(G)$, *то все* $(\sigma,\tau)$*-дифференцирования являются внутренними.*

В завершение отметим, что предлагаемый подход также может быть применен для описания дифференцирований и других операторных пространств, удовлетворяющих индуктивным тождествам. Более того, по всей видимости пространство характеров на каждой категории отвечает такому пространству над некоторой алгеброй. Установление подобной двойственности между пространствами характеров категорий и операторных пространств не только представляет самостоятельный интерес, но и даст возможность посмотреть на пространства характеров как на некоторый аналог сопряженного пространства.

## References


[1] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, “Деривации групповых алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 65–78; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, A. I. Shtern, “Derivations of group algebras”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248** (2020), 709–718.

[2] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 3–29; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 756–782.

[3] R. H. Fox, “Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring”, *The Annals of Mathematics*, **57**:3 (1953), 547–560.

[4] А. А. Арутюнов, “О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 305–317. [A. A. Arutyunov, “On derivations in group algebras and other algebraic structures”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 305–317 (In Russian)].

[5] A. A. Arutyunov, A. V. Alekseev, “Complex of $n$-categories and derivations in group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), 107002.

[6] D. Burghelea, “The cyclic homology of the group rings”, *Coment. Math. Helv.*, **60** (1985), 354–365.

[7] A. S. Mischenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology”, *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Trends in Mathematics, eds. V. M. Manuilov, A. S. Mishchenko, V. E. Nazaikinskii, B.-W. Schulze, W. Zhang, Springer Nature Switzerland, Switzerland, 2022, 263–272.

[8] A. S. Mischenko, “Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras”, *Contemporary Mathematics*, 2021, 267–279.

[9] L. Creedon, K. Hughes, “Derivations on group algebras with coding theory applications”, *Finite Fields and Their Applications*, **56** (2019), 247–265.

[10] A. Arutyunov, *A combinatorial view on derivations in bimodules*, 2022, arXiv: abs/2208.05478.

[11] A. A. Arutyunov, L. M. Kosolapov, “Derivations of group rings for finite and FC groups”, *Finite Fields and Their Applications*, **76** (2021), 101921.

[12] R. H. Crowell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **57**, Springer, New York, 1977.

[13] А. А. Арутюнов, "Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 28–41; англ. пер.:A. A. Arutyunov, "Derivation algebra in noncommutative group algebras", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 22–34.

[14] A. Arutyunov, "Derivations in group algebras and combinatorial invariants of groups", *European Journal of Mathematics*, **9**:39 (2023).

[15] D. Robinson, *Finintess Conditions and Generalized Solvable Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, **62**, Springer-Verlag: Berlin, 1972.

[16] A. V. Alekseev, A. A. Arutyunov, "Derivations in semigroup algebras", *Eurasian Mathematical Journal*, **11**:2 (2020), 9–18.

[17] A. Alekseev, A. Arutyunov, S. Silvestrov, *On $(\sigma, \tau)$-derivations of group algebra as category characters*, 2020, arXiv: abs/2008.00390.

### Информация об авторе

**Арутюнов Андроник Арамович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; доцент кафедры высшей математики. Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Поступила в редакцию 19.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 05.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

### Information about the author

**Andronick A. Arutyunov**, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Reg., Russian Federation. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Received 19.05.2023
Reviewed 05.06.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154

УДК 517.911, 517.929

# Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с запаздыванием: общие свойства и особенности

**Никита Сергеевич БОРЗОВ**[1,2], **Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ**[3], **Ирина Дмитриевна СЕРОВА**[1]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392036, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

**Аннотация.** Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h(t))\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0,$$

относительно неизвестной функции $x$, абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке. Предполагается, что функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима, функции $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ измеримы и при п. в. $t \geq 0$ выполнено $h(t) \leq t$. Если имеет место более обременительное неравенство $h(t) \leq t - \tau$ при некотором $\tau > 0$, то задача Коши для этого уравнения однозначно разрешима и любое решение продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$. В то же время задача Коши для соответствующего дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \geq 0,$$

как известно, может иметь бесконечно много решений, а максимальный интервал существования решений может быть конечным. В статье рассмотрен вопрос, какими из перечисленных свойств обладает уравнение с запаздыванием (единственность решения или бесконечность множества решений, бесконечность или конечность максимального интервала существования решений), если функция $h$ имеет всего лишь одну «критическую» точку $t_0 \geq 0$ — точку, для которой мера множества $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+ : \, h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$. Оказывается, что при такой функции запаздывания свойства решений близки свойствам решений обыкновенного дифференциального уравнения. Кроме того, рассмотрена задача о зависимости решений уравнения с запаздыванием от функции $h$.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение с запаздыванием, задача Коши, зависимость решения от функции запаздывания

**Благодарности:** Результаты раздела 1 получены третьим автором в Тамбовском государственном университете им. Г. Р. Державина при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/), результаты раздела 2 получены первым автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131, https://rscf.ru/project/20-11-20131/)

**Для цитирования:** *Борзов Н.С., Жуковская Т.В., Серова И.Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с запаздыванием: общие свойства и особенности // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 137–154. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154

# Ordinary differential equations and differential equations with delay: general properties and features

**Nikita S. BORZOV**[1,2], **Tatyana V. ZHUKOVSKAYA**[3], **Irina D. SEROVA**[1]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 International St., Tambov 392036, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
[3] Tambov State Technical University
106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Abstract.** We consider the differential equation with delay

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h(t))\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0,$$

with respect to an unknown function $x$ absolutely continuous on every finite interval. It is assumed that the function $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is superpositionally measurable, the functions $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are measurable, and $h(t) \leq t$ for a. e. $t \geq 0$. If the more burdensome inequality $h(t) \leq t - \tau$ holds for some $\tau > 0$, then the Cauchy problem for this equation is uniquely solvable and any solution can be extended to the semiaxis $\mathbb{R}_+$. At the same time, the Cauchy problem for the corresponding differential equation

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t)\big), \quad t \geq 0,$$

may have infinitely many solutions, and the maximum interval of existence of solutions may be finite. In the article, we investigate which of the listed properties a delay equation possesses (i.e. has a unique solution or infinitely many solutions, has finite or infinite maximum interval of existence of solutions), if the function $h$ has only one «critical» point $t_0 \geq 0$, a point for which the measure of the set $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap \mathbb{R}_+ : h(t) > t - \varepsilon\big\}$ is positive for any $\varepsilon > 0$. It turns out that for such a delay function, the properties of solutions are close to those of solutions of an ordinary differential equation. In addition, we consider the problem of the dependence of solutions of a delay equation on the function $h$.

**Keywords:** differential equation with delay, Cauchy problem, dependence of a solution on a delay function

**Acknowledgements:** The results of section 1 were obtained by the third author at Derzhavin Tambov State University with the support of the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/), the results of section 2 were obtained by the first author V. A. Trapeznikov Institute of Control Problems RAS with the support of the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131, https://rscf.ru/en/project/20-11-20131/).

**Mathematics Subject Classification:** 34K05, 34A12.

**For citation:** Borzov N.S., Zhukovskaya T.V., Serova I.D. Ordinary differential equations and differential equations with delay: general properties and features. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 137–154. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-137-154 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Статья посвящена проблеме зависимости свойств множества решений уравнения с запаздывающим аргументом $h(t)$, выявлению эффектов, возникающих при сходимости $h(t)$ к функции, хотя бы в одной точке не имеющей запаздывания, т. е. совпадающей с $t$.

Вопросам непрерывной зависимости решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений от параметров посвящена многочисленная литература (см. монографии [1, § 4.1§ 9.4], [2, § 1.5], [3, гл. 189], статьи [4,5] и библиографические списки данных работ). Многие из этих исследований используют методы анализа, в частности, результаты о неподвижных точках (см. [6–8]), точках совпадения (см. [9, 10]), и возмущениях (см. [11–14]) регулярных отображений нормированных, метрических или частично упорядоченных пространств. Но такие исследования почти не затрагивают ситуации скачкообразного изменения решений и их важнейших свойств. «Импульсные» перестройки структуры множеств решений возможны, например, для уравнений с запаздывающим аргументом в случае, когда запаздывание $t-h(t)$ стремится к нулю, а уравнение превращается, соответственно, в обыкновенное дифференциальное уравнение. В частности, задача Коши для уравнения с положительным запаздыванием однозначно разрешима, и ее решение продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$, а задача Коши для предельного обыкновенного дифференциального уравнения может иметь бесконечное множество решений, и максимальный интервал существования решений может быть конечным. В данной статье показано, что такое же скачкообразное изменение решений возможно и в случае, если функция положительного запаздывания стремится к функции запаздывания, положительной везде, кроме лишь одной точки (называемой в статье «критической»).

Отметим, что вопросы скачкообразного изменения решений относятся к предмету теории катастроф и теории особенностей (см. [15]), однако, большинство работ в этих областях математики более сосредоточены на вопросах перестройки решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [16–18]) и, как правило, не рассматривают изменения, возникающие в множестве решений функционально-дифференциальных уравнений. А вопросы кардинальной перестройки множества решений при стремлении запаздывания к нулю и превращении соответствующего уравнения с отклоняющимся аргументом в обыкновенное дифференциальное уравнение, насколько известно авторам данной статьи, в литературе не исследовались.

Основная часть предлагаемой статьи содержит три раздела. В первом рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с положительным запаздыванием. Здесь показано, что при самых общих предположениях на функции, порождающие такое уравнение, задача Коши однозначно разрешима, и ее решение неограничено продолжаемо. Во втором разделе демонстрируются примеры дифференциальных уравнений, функция запаздывания которых содержит одну критическую точку $t_0 > 0$, и при этом множество решений задачи Коши бесконечно, а среди решений есть непродолжаемые на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Таким образом, если функция положительного запаздывания сходится к функции, имеющей хотя бы одну критическую точку, то множество решений соответствующих уравнений при таком предельном переходе испытывает скачкообразные изменения. В третьем разделе показывается, что даже в случае скачкообразного изменения структуры множества решений при изменении запаздывания можно выделить конечный отрезок положительной длины в области определения решений, на котором решение непрерывно зависит от запаздывания.

## 1. Дифференциальное уравнение с положительным запаздыванием

Меру Лебега на прямой $\mathbb{R}$ будем называть *мерой* и будем обозначать ее символом $\operatorname{mes}$. Обозначим через $L_{[0,T]}$, $AC_{[0,T]}$ и $C_{[0,T]}$ банаховы пространства, соответственно, суммируемых, абсолютно непрерывных и непрерывных на $[0,T]\subset\mathbb{R}_+$ ($T<\infty$) функций. Нормы в этих пространствах определяются формулами

$$\|x\|_L=\int_0^T|x(s)|\,ds,\quad \|x\|_{AC}=|x(0)|+\|\dot{x}\|_L,\quad \|x\|_C=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|.$$

В работе рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(h(t))\big),\quad t\geq 0,\quad x(s)=\varphi(s),\quad s<0, \tag{1.1}$$

в котором «функция предыстории» $\varphi:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ измерима и существенно ограничена, функция $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ измерима и при п.в. $t\in\mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству $h(t)\leq t$, функция $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *суперпозиционно измерима* (например, удовлетворяет условиям Каратеодори или их обобщениям, см. [19, 20]), то есть для любой измеримой функции $u:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ композиция $f(\cdot,u(\cdot)):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ также измерима. Кроме того, предполагается, что для любого $r>0$ и любых $u\in[-r,r]$ функция $\widehat{f}_r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$,

$$\widehat{f}_r(t)=\sup_{u\in[-r,r]}\big|f(t,u)\big|,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

является суммируемой на каждом конечном отрезке, принадлежащим $\mathbb{R}_+$ (заметим, что измеримость функции $\widehat{f}_r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ следует из [21, следствие 1.5.9]).

Запишем уравнение (1.1) в виде

$$\dot{x}(t)=f\big(t,(S_hx)(t)\big),\quad t\geq 0,\quad \text{где}\quad (S_hx)(s)=\begin{cases}x(h(s)), & \text{если}\ \ h(s)\geq 0,\\ \varphi(h(s)), & \text{если}\ \ h(s)<0.\end{cases} \tag{1.3}$$

Представление уравнения (1.1) в виде (1.3) позволяет дать следующее определение его решения (см. [1, § 1.1]).

Пусть $T>0$. *Решением уравнения* (1.1)*, определенным на* $[0,T]$, называем абсолютно непрерывную на этом отрезке функцию, удовлетворяющую (1.3) при п. в. $t\in[0,T]$, а *решением, определенным на* $[0,T)$ или $[0,\infty)$ называем функцию, абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке, принадлежащем этому интервалу, и удовлетворяющую (1.3) при п. в. $t\in[0,T)$, соответственно, при п. в. $t\in[0,\infty)$. В случае $T<\infty$ решение называем *локальным.* Если решение $x_{J_1}$ определено на множестве $J_1$, решение $x_{J_2}$ определено на $J_2$ и имеют место соотношения

$$J_1\subset J_2\ \ \text{и}\ \ x_{J_1}(t)=x_{J_2}(t)\ \ \text{при}\ \ t\in J_1,$$

то $x_{J_2}$ называется *продолжением решения* $x_{J_1}$, а $x_{J_1}$ — *частью решения* $x_{J_2}$. Решение $x_J$, определенное на некотором множестве $J$, называется *максимально продолженным*, если оно не является частью никакого другого решения. В этом случае множество $J$ называется *максимальным интервалом существования* данного решения.

Определение решения как элемента пространства абсолютно непрерывных функций со значениями в $\mathbb{R}$, а не в бесконечномерном банаховом пространстве, предложенное

Н. В. Азбелевым более 50 лет назад (см. [1, § 1.1]), позволило распространить на уравнения с отклоняющимся аргументом фундаментальные результаты о представлении общего решения, о краевых задачах, задачах управления и вариационных задачах, известные для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2–4]). Это определение не требует «непрерывной стыковки» решения и начальной функции, т. е. возможно $x(0) \neq \varphi(0)$, более того, в этом и следующем параграфе статьи непрерывность функции $\varphi$ не требуется, предполагается лишь ее измеримость. Но, безусловно, случай непрерывной функции $\varphi$ и непрерывное ее продолжение решением не отвергается принятым нами определением решения, эта ситуация соответствует задаче Коши с начальным условием $x(0) = \varphi(0)$. Такая задача будет рассмотрена в разделе 3. статьи, где будет исследоваться зависимость решения этой задачи от изменения функции запаздывания.

Вначале рассмотрим частный случай уравнения (1.1) — дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием $\tau > 0$. Такое уравнение имеет вид

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t-\tau)\big), \quad t \geq 0, \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0. \tag{1.4}$$

Вполне очевидно, что любое решение уравнения (1.4) может быть неограничено продолжено, точнее, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Задача Коши для уравнения* (1.4) *с начальным условием*

$$x(0) = \alpha \tag{1.5}$$

*при любом* $\alpha \in \mathbb{R}$ *имеет единственное определенное на всей полуоси* $\mathbb{R}_+$ *решение* $x(\cdot)$, *и любое локальное решение является частью этого решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение задачи (1.4), (1.5) может быть получено на каждом из интервалов $(i\tau, (i+1)\tau]$, $i = 0, 1, \ldots$, в виде функции $x(t) = u_i(t)$, $t \in (i\tau, (i+1)\tau]$, определяемой рекуррентными формулами

$$u_0(t) = \alpha + \int_0^t f\big(s, \varphi(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (0, \tau];$$

$$u_1(t) = u_0(\tau) + \int_\tau^t f\big(s, u_0(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (\tau, 2\tau];$$

$$u_i(t) = u_{i-1}(i\tau) + \int_{i\tau}^t f\big(s, u_{i-1}(s-\tau)\big)\, ds \ \text{ при } \ t \in (i\tau, (i+1)\tau], \quad i = 1, 2, \ldots .$$

В первой из этих формул, в силу суммируемости на отрезке $[0, \tau]$ при любом $r$ функции $\widehat{f}_r$ и существенной ограниченности на этом отрезке функции $s \mapsto \varphi(s-\tau)$, подынтегральная функция $s \mapsto f\big(s, \varphi(s-\tau)\big)$ суммируема. Следовательно, функция $u_0(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Далее, во второй из этих формул, в силу суммируемости на отрезке $[\tau, 2\tau]$ функции $\widehat{f}_r$ и ограниченности на этом отрезке непрерывной функции $s \mapsto u_0(s-\tau)$, подынтегральная функция $s \mapsto f\big(s, u_0(s-\tau)\big)$ суммируема. Следовательно, функция $u_1(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Таким образом доказывается, что при всех $i = 0, 1, \ldots$ функция $u_i(\cdot)$ абсолютно непрерывна. Итак, существование определенного на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решения задачи (1.4), (1.5) установлено.

Предположим, что существует некоторое локальное решение $\widetilde{x}(\cdot)$, отличное на его области определения от решения $x(\cdot)$. Определим множество

$$E = \big\{t : \widetilde{x}(t) \neq x(t)\big\} \subset \mathbb{R}_+$$

и найдем наименьший из номеров $i$ таких, что мера множества $E \cap (i\tau, (i+1)\tau]$ положительна. Тогда на интервале $((i-1)\tau, i\tau]$ значения функций $\widetilde{x}(t), x(t)$ совпадают, $\widetilde{x}(t) = x(t) = u_{i-1}(t)$. Остается заметить, что в силу уравнения (1.4) его решение на $(i\tau, (i+1)\tau]$ однозначно определяется по «предыстории» — функции $u_{i-1}$. □

Утверждение теоремы 1.1 без труда переносится на более общее уравнение (1.1) с запаздывающим аргументом.

**Теорема 1.2.** *Пусть для любого $T > 0$ существует $\tau > 0$ такое, что при п. в. $t \in [0, T]$ выполнено неравенство $h(t) \leq t - \tau$. Тогда задача Коши для уравнения (1.1) с начальным условием (1.5) при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет единственное определенное на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $x(\cdot)$, и любое локальное решение является частью этого решения.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.1.

## 2. Уравнение с запаздыванием, имеющим критическую точку

Для измеримой функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, определяющей отклонение аргумента в уравнении (1.1), теперь будем предполагать, что при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство $h(t) \leq t$.

Точку $t_0 \geq 0$ будем называть *левой критической для функции* $h$, если мера множества $\big\{t \in (t_0 - \varepsilon, t_0) : h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$, и *правой критической для функции* $h$, если мера множества $\big\{t \in (t_0, t_0 + \varepsilon) : h(t) > t - \varepsilon\big\}$ является положительной при любом $\varepsilon > 0$. Очевидно, что для левой критической точки $t_0$ выполнено строгое неравенство $t_0 > 0$. Точку $t_0 \geq 0$ называем *критической для функции* $h$, если она является левой или правой или одновременно и левой, и правой критической.

Следующие две теоремы показывают, что в левой критической точке может «закончиться» максимальный интервал существования решения, а правая точка может стать «точкой рождения» бесконечного множества продолжений локального решения.

**Теорема 2.1.** *Пусть в уравнении (1.1) функция запаздывания $h$ имеет одну критическую точку $t_0 > 0$, являющуюся левой критической точкой. Тогда на интервале $[0, t_0)$ задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения. Кроме того, имеет место следующая альтернатива: либо для сужения решения $x(\cdot)$ на произвольный отрезок $[0, T]$, $T < t_0$ выполнено $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$, и в этом случае максимальным интервалом определения решений задачи (1.1), (1.5) является интервал $[0, t_0)$, либо $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} < \infty$, и тогда решение $x(\cdot)$ продолжаемо единственным образом на всю полуось $\mathbb{R}_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при произвольном $T \in (0, t_0)$ существует такое $\tau = \tau(T) > 0$, что $h(t) \leq t - \tau$ при п. в. $t \in [0, T]$. Предположим, что требуемое число $\tau = \tau(T) > 0$ не существует. Тогда при любом натуральном $i$ для $\tau_i = i^{-1}$ на некотором множестве $E_i \subset [0, T]$ положительной меры выполнено $h(t) > t - \tau_i$. Множества $E_i$ упорядочены по вложению, т. е. $E_{i+1} \subset E_i$. Теперь определим множество

$$\overline{E}_i = \big\{t \in [0, T] : \forall \delta > 0 \ \operatorname{mes}\big([t, t + \delta] \cap E_i\big) > 0\big\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

которое не пусто, поскольку $\operatorname{mes} E_i > 0$. Положим $\theta_i = \inf \overline{E}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ . Так как множества $E_i$ упорядочены по вложению, определенная таким образом последовательность

$\{\theta_i\}$ возрастает и ограничена, и поэтому сходится к некоторому $\theta \in [0, T]$. Для любого $\delta > 0$ существует натуральное $I$ такое, что $\theta_i \in [\theta - \delta, \theta]$ при всех $i > I$. Следовательно,

$$[\theta_i, \theta_i + \delta] \subset [\theta - \delta, \theta + \delta], \quad \operatorname{mes}\bigl([\theta - \delta, \theta + \delta] \cap E_i\bigr) > 0 \text{ при всех } i > I.$$

Полученное неравенство означает, что точка $\theta$ критическая, но по условию теоремы в отрезке $[0, T]$ нет критических точек.

Итак, для произвольного $T \in (0, t_0)$ при п. в. $t \in [0, T]$ выполнено $h(t) \le t - \tau$, где $\tau > 0$. Это неравенство, согласно теореме 1.2, гарантирует, что на интервале $[0, t_0)$ задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $x_{t_0}(\cdot)$, и любое другое локальное решение совпадает с решением $x_{t_0}(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Функция $(0, t_0) \ni T \mapsto \|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}}$ возрастает. Возможны две ситуации: либо эта функция ограничена, либо $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$. В первой ситуации существует конечный $\lim_{T \to t_0 - 0} \|x_{t_0}(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}}$, и поэтому существует $\widetilde{x} = \lim_{t \to t_0 - 0} x_{t_0}(t) < \infty$. Определим функцию

$$\widetilde{\varphi} : (-\infty, t_0) \to R, \quad \widetilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{при } s \in (-\infty, 0), \\ x_{t_0}(s) & \text{при } s \in [0, t_0), \end{cases} \tag{2.1}$$

и рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = f\bigl(t, x(h(t))\bigr), \quad t \ge t_0; \quad x(s) = \widetilde{\varphi}(s), \quad s < t_0; \quad x(0) = \widetilde{x}. \tag{2.2}$$

На множестве $[t_0, \infty)$ у функции $h$ нет критических точек. Повторив приведенные выше рассуждения, получим, что для любого $T > t_0$ существует $\tau = \tau(T) > 0$ такое, что при п. в. $t \in [t_0, T]$ выполнено неравенство $h(t) \le t - \tau$. Согласно теореме 1.2 на всем $[t_0, \infty)$ задача Коши (2.2) имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение этой задачи совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Для завершения доказательства остается заметить, что искомым единственным максимально определенным решением исходной задачи (1.1), (1.5) является функция со значениями $x_{t_0}(t)$ при $t \in [0, t_0)$ и $x(t)$ при $t \in [t_0, \infty)$. $\square$

**Теорема 2.2.** *Пусть в уравнении (1.1) функция запаздывания $h$ имеет одну критическую точку $t_0 \ge 0$, являющуюся правой критической точкой. Тогда на отрезке $[0, t_0]$ (если $t_0 = 0$, отрезок вырождается в одноточечное множество) задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения. Кроме того, если для некоторого $\delta > 0$ при п. в. $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ функция $f(t, \cdot)$ непрерывна, то любое локальное решение уравнения (1.1), включая решение $x(\cdot)$, продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$ и имеет место следующая альтернатива: либо это продолжение единственно, либо решений, определенных на полуоси бесконечно много, но при этом для произвольного $\sigma > 0$ любое решение, определенное на интервале $[0, t_0 + \sigma)$, имеет единственное продолжение на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Утверждение теоремы о решении на отрезке $[0, t_0]$ тривиально, если $t_0 = 0$. Рассмотрим ситуацию $t_0 > 0$.

Так как сужение функции $h$ на отрезок $[0, t_0]$ не имеет критических точек, как показано при доказательстве теоремы 2.2, существует $\tau > 0$ такое, что $h(t) \le t - \tau$ при п. в.

$t \in [0, t_0]$. В силу этого неравенства на $[0, t_0]$ существует локальное решение $x_{t_0}$, причем это решение определяется равенством

$$x_{t_0}(t) = u_{i_0+1}(t),$$

где $i_0$ — целая часть действительного числа $t_0/\tau$, а значения $u_{i_0+1}(t)$, вычисляются по формулам:

$$u_0(t) = \varphi(t) \text{ при } t < 0;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при } t < 0, \\ \alpha + \int_0^t f\big(s, u_0(h(s))\big)\, ds & \text{при } t \in [0, \tau]; \end{cases}$$

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i-1}(t) & \text{при } t \le (i-1)\tau, \\ u_{i-1}((i-1)\tau) + \int_{(i-1)\tau}^t f\big(s, u_{i-1}(h(s))\big)\, ds & \text{при } t \in ((i-1)\tau, i\tau], \end{cases} \quad i = 2, \ldots, i_0;$$

$$u_{i_0+1}(t) = \begin{cases} u_{i_0}(t) & \text{при } t \le i_0\tau, \\ u_{i_0}(i_0\tau) + \int_{i_0\tau}^t f\big(s, u_{i_0}(h(s))\big)\, ds & \text{при } t \in (i_0\tau, t_0]. \end{cases}$$

Для доказательства продолжаемости локального решения $x_{t_0}$ рассмотрим задачу (2.2) с функцией «предыстории» (2.1), а начальное значение положим равным $\widetilde{x} = x_{t_0}(t_0)$. Запишем эту задачу в виде эквивалентного интегрального уравнения

$$x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t f\big(s, (S_h x)(s)\big)\, ds, \quad t \ge t_0; \text{ где } (S_h x)(s) = \begin{cases} x(h(s)), & \text{если } h(s) \ge t_0, \\ \widetilde{\varphi}(h(s)), & \text{если } h(s) < t_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Зададим

$$r = 1 + \max\big\{ \max_{t \in [0, t_0]} |x(t)|, \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in (-\infty, 0)} |\varphi(s)| \big\}$$

и для определенной формулой (1.2) функции $\widehat{f}_r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ найдем такое $\Delta > 0$, что

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta} \widehat{f}_r(t)\, dt \le 1.$$

Рассмотрим действующий в пространстве $C_{[t_0, t_0+\Delta]}$ непрерывных на отрезке $[t_0, t_0+\Delta]$ функций интегральный оператор $(Fx)(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t f\big(s, (S_h x)(s)\big)\, ds$. Так как функция $f$ удовлетворяет условиям Каратеодори и ее мажоранта — функция $\widehat{f}_r$ суммируема, оператор $F : C_{[t_0, t_0+\Delta]} \to C_{[t_0, t_0+\Delta]}$ непрерывен. Шар $B_C(0, r)$ с центром в нулевой функции радиуса $r$ отображается этим оператором в себя. Кроме того, для любой функции $x \in B_C(0, r)$ и любых $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$ выполнено

$$\big|(Fx)(t_2) - (Fx)(t_1)\big| = \Big| \int_{t_1}^{t_2} f\big(s, (S_h x)(s)\big)\, ds \Big| \le \int_{t_1}^{t_2} \widehat{f}_r(s)\, ds,$$

поэтому множество $F\big(B_C(0, r)\big)$ является равностепенно непрерывным, следовательно, компактным. Согласно теореме Шаудера, оператор $F$ имеет в шаре $B_C(0, r)$ неподвижную точку, обозначим ее $\widetilde{x}_\Delta$. Полученная непрерывная функция $\widetilde{x}_\Delta$ является решением уравнения (2.3), следовательно, эта функция абсолютно непрерывна, и эта функция есть локальное решение задачи (2.2), определенное на $[t_0, t_0 + \Delta]$. Соответственно, решением исходной задачи (1.1), (1.5) является функция $x_{t_0+\Delta}$ со значениями $x_{t_0}(t)$ при $t \in [0, t_0)$ и $\widetilde{x}_\Delta(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$.

Для нахождения продолжения этого решения надо рассмотреть дифференциальное уравнение на интервале $[t_0 + \Delta, \infty)$, соответствующее уравнению (1.1), с функцией «предыстории»

$$\widetilde{\varphi} : (-\infty, t_0 + \Delta) \to R, \quad \widetilde{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi(s) & \text{при } s \in (-\infty, 0), \\ x_{t_0+\Delta}(s) & \text{при } s \in [0, t_0 + \Delta]. \end{cases}$$

На множестве $[t_0+\Delta, \infty)$ у функции $h$ нет критических точек. Поэтому, рассуждениями, примененными при доказательстве теоремы 2.1, устанавливается, что для любого значения $T > t_0 + \Delta$ существует $\tau > 0$ такое, что при п. в. $t \in [t_0 + \Delta, T]$ выполнено неравенство $h(t) \le t - \tau$. Согласно теореме 1.2 на всем $[t_0 + \Delta, \infty)$ задача Коши для рассматриваемого уравнения имеет единственное решение $x(\cdot)$, и любое другое локальное решение этой задачи совпадает с решением $x(\cdot)$ на пересечении их областей определения.

Если продолжение решения $x_{t_0}$ на множество $[0, t_0 + \Delta]$ единственно (в том смысле, что любое локальное решение совпадает с $x_{t_0}$ на пересечении областей определения этих решений), то и построенное определенное на $\mathbb{R}_+$ решение также единственно. Утверждение теоремы в этом случае выполнено.

Предположим теперь, что существует локальное решение $u(\cdot)$, отличающееся на некотором множестве от решения $x(\cdot)$. Тогда значения этих функций должны отличаться на множестве $[t_0, t_0 + \delta]$ при любом $\delta > 0$ (если на этом множестве решения совпадают, то вследствие отсутствия критических точек, больших чем $t_0 + \delta$, решения совпадут и на всем пересечении их областей определения). Согласно [22, предложение 6] множество сужений на $[t_0, t_0 + \delta]$ решений интегрального уравнения (2.3) при достаточно малых значениях $\delta > 0$ есть связное подмножество пространства $C_{[t_0, t_0+\delta]}$ непрерывных на $[t_0, t_0 + \delta]$ функций. Поэтому, кроме решений $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$, задача имеет еще бесконечное множество решений, и каждое из них имеет единственное продолжение на $[t_0, \infty)$. □

Для иллюстрации теорем 2.1, 2.2 приведем примеры дифференциальных уравнений вида (1.1), функция запаздывания которых имеет лишь одну критическую точку $t_0$, и если она левая (в примере 2.1), среди решений задачи Коши есть непродолжаемые на всю полуось $\mathbb{R}_+$, а если правая (в примере 2.2), множество решений задачи Коши бесконечно. Примеры также демонстрируют, что изменения начального условия либо параметров уравнения могут привести к тому, что соответствующие задачи Коши становятся однозначно разрешимыми на всей полуоси, несмотря на то, что функция запаздывающего аргумента остается неизменной (конечно, как и ее критическая точка).

П р и м е р 2.1. Пусть функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ задана формулой

$$h(t) = \begin{cases} 2t - 1 & \text{при } t \in [0, 1], \\ t - 1 & \text{при } t \in (1, \infty). \end{cases}$$

Эта функция имеет левую критическую точку $t_0 = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = \frac{\sqrt[3]{16}}{3} \big(x(h(t))\big)^4, \quad t \ge 0; \quad x(s) = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - s}}, \quad s < 0, \tag{2.4}$$

с начальным условием
$$x(0)=1.$$
Несложно проверить, что решением этой задачи Коши является функция
$$x(t)=\frac{1}{\sqrt[3]{1-t}},\quad t\in[0,1).$$
Иных решений у рассматриваемой задачи нет. Интервал $[0,1)$ есть максимальный интервал определения этого решения.

Отметим, что для рассматриваемого уравнения (2.4) решение задачи Коши с любым начальным условием
$$x(0)=\alpha$$
имеет такой же максимальный интервал определения. При таком начальном условии решением является функция
$$x(t)=\alpha-1+\frac{1}{\sqrt[3]{1-t}},\quad t\in[0,1).$$

Теперь изменим в уравнении (2.4) функцию предыстории на нулевую, т. е. будем полагать $x(s)=0$ при $s<0$. В таком случае решение задачи Коши с любым начальным условием $x(0)=\alpha$ единственно, продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$ и определяется соотношением $x(t)=u_i(t)$, $t\in(i\tau,(i+1)\tau]$, где
$$\begin{aligned}
&u_0(t)=\alpha \ \text{ при } \ t\in(0,1];\\
&u_1(t)=\alpha+\frac{\sqrt[3]{16}}{3}\alpha^4(t-1) \ \text{ при } \ t\in(1,2];\\
&u_i(t)=u_{i-1}(i)+\frac{\sqrt[3]{16}}{3}\int_i^t \big(u_{i-1}(s-1)\big)^4\,ds \ \text{ при } \ t\in(i,i+1],\quad i=2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

П р и м е р 2.2. Пусть функция $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ задана формулой
$$h(t)=\begin{cases} t^2 & \text{при} \quad t\in[0,1/2],\\ t-1/2 & \text{при} \quad t\in(1/2,\infty).\end{cases}$$
Эта функция имеет правую критическую точку $t_0=0$.

Рассмотрим уравнение
$$\dot{x}(t)=3\sqrt[3]{x(h(t))},\quad t\ge 0. \tag{2.5}$$
Заметим, что рассматриваемое уравнение не нуждается в определении «функции предыстории», так как $h(t)\ge 0$ на $\mathbb{R}_+$. На всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решением уравнения (2.5) с начальным условием
$$x(0)=0$$
является нулевая функция, а также функция $x(\cdot)$, значения которой $x(t)=u_i(t)$ при $t\in(i/2,(i+1)/2]$, $i=0,1,\ldots,$ определяются следующими соотношениями
$$\begin{aligned}
&u_0(t)=t \ \text{ при } \ t\in\Big(0,\frac12\Big];\\
&u_1(t)=\frac12+\frac94\Big(t-\frac12\Big)^{4/3} \ \text{ при } \ t\in\Big(\frac12,1\Big];\\
&u_i(t)=u_{i-1}\Big(\frac{i}{2}\Big)+3\int_{i/2}^t\sqrt[3]{u_{i-1}\Big(s-\frac12\Big)}\,ds \ \text{ при } \ t\in\Big(\frac{i}{2},\frac{i+1}{2}\Big],\quad i=2,3,\ldots.
\end{aligned}$$

Согласно теореме 2.2, кроме предъявленных выше двух решений задача имеет еще бесконечное множество решений, и каждое из них единственным образом продолжаемо на всю полуось $\mathbb{R}_+$.

Отметим, что для рассматриваемого в этом примере уравнения (2.5) решение задачи Коши с любым отличным от нуля начальным значением имеет единственное определенное на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ решение $x(\cdot)$, и любое локальное решение является частью этого решения.

Теоремы 2.1, 2.2 позволяют исследовать дифференциальное уравнение (1.1) также и в случае, когда критические точки являются одновременно левыми и правыми. Такую ситуацию описывает следующее утверждение, прямо вытекающее из этих теорем.

**Следствие 2.1.** *Пусть в уравнении* (1.1) *функция* $h$ *имеет одну критическую точку* $t_0 > 0$, *причем, эта критическая точка является и левой, и правой. Тогда на интервале* $[0, t_0)$ *задача Коши* (1.1), (1.5) *имеет единственное решение* $x(\cdot)$, *и любое другое локальное решение совпадает с решением* $x(\cdot)$ *на пересечении их областей определения. Кроме того, имеет место следующая альтернатива: либо для сужения решения* $x(\cdot)$ *на произвольный отрезок* $[0, T]$, $T < t_0$ *выполнено* $\lim_{T\to t_0-0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} = \infty$, *и в этом случае максимальным интервалом определения решений задачи* (1.1), (1.5) *является интервал* $[0, t_0)$, *либо* $\lim_{T\to t_0-0} \|x(\cdot)\|_{AC_{[0,T]}} < \infty$. *Во втором случае, если для некоторого* $\delta > 0$ *при п. в.* $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ *функция* $f(t, \cdot)$ *непрерывна, то любое локальное решение уравнения* (1.1), *включая решение* $x(\cdot)$, *продолжаемо на всю полуось* $\mathbb{R}_+$, *это продолжение либо единственно, либо решений, определенных на полуоси бесконечно много, но при этом для произвольного* $\sigma > 0$ *любое решение, определенное на интервале* $[0, t_0 + \sigma)$, *имеет единственное продолжение на* $\mathbb{R}_+$.

## 3. Зависимость решений задачи Коши от запаздывающего аргумента

Здесь мы рассмотрим следующую задачу.

Пусть заданы такие удовлетворяющие требованиям теоремы 1.2 (поэтому не имеющие критических точек) функции $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, что при п. в. $t \in \mathbb{R}_+$ последовательность $\{h_n(t)\}$ сходится к $h(t)$ слева, т. е. $h_n(t) \le h(t)$ на $\mathbb{R}_+$, причем, предельная функция $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ обладает критической точкой. Рассмотрим последовательность задач Коши

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(h_n(t))\big), \quad t \ge 0; \quad x(s) = \varphi(s), \quad s < 0; \quad x(0) = \alpha. \tag{3.1}$$

При любом натуральном $n$ задача (3.1) имеет единственное определенное на $\mathbb{R}_+$ решение $x_n$, продолжающее любое локальное решение. Нас интересует вопрос, сходится ли (в каком-либо либо смысле) последовательность $\{x_n\}$ к решению $x$ предельного уравнения (1.1) с начальным условием (1.5). Напомним, что согласно теоремам 2.1 и 2.2 решение $x$ предельного уравнения может быть не единственным и, возможно, имеет конечный максимальный интервал определения.

Будем предполагать, что функция «предыстории» $\varphi : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и ограничена, функция $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям Каратеодори, т. е. измерима по первому и непрерывна по второму аргументам. Кроме того, как и выше, полагаем, что определяемая формулой (1.2) функция $\widehat{f_r} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ при любом $r > 0$ является суммируемой на каждом конечном отрезке. Но в отличие от предыдущих параграфов, где начальное значение $\alpha$ было любым, здесь его положим равным $\alpha = \varphi(0)$. Таким образом, в данном параграфе предполагается «непрерывная стыковка» решения с начальной функцией. Существенность этого условия для сходимости $x_n \to x$ демонстрируется ниже в примере 3.1. Сначала сформулируем два утверждения о непрерывной зависимости решения задачи Коши от функции запаздывания в случаях наличия у предельной функции запаздывания левой и правой критических точек.

**Теорема 3.1.** *Пусть предельная функция $h$ имеет одну критическую точку $t_0 > 0$, являющуюся левой критической точкой. Тогда для любого $T \in (0, t_0)$ последовательность сужений $x_{nT}$ на замкнутый отрезок $[0, T]$ максимально продолженных решений $x_n$ задач (3.1) равномерно сходится к сужению $x_T$ на тот же отрезок $[0, T]$ максимально продолженного решения $x$ задачи (1.1), (1.5).*

Доказательство. Выберем любое $T \in (0, t_0)$. На отрезке $[0, T]$ у функции $h$ нет критических точек и, как показано при доказательстве теоремы 2.1, для некоторого $\tau > 0$ при п. в. $t \in [0, T]$ выполнено $h(t) \le t - \tau$. Следовательно, $h_n(t) \le h(t) \le t - \tau$, $n = 1, 2, \ldots,$ п. в. на $[0, T]$. Вследствие полученного неравенства решение $x_{nT}$ на $[0, T]$ задачи (3.1) при любом натуральном $n$ определяется равенством

$$x_{nT}(t) = u_{i_0+1}(t),$$

где $i_0$ — целая часть действительного числа $T/\tau$, а значения $u_{i_0+1}(t)$, вычисляются по формулам:

$$u_0(t) = \varphi(t) \ \text{ при } \ t < 0;$$

$$u_1(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{при } \ t < 0, \\ \alpha + \int_0^t f\big(s, u_0(h_n(s))\big)\, ds & \text{при } \ t \in [0, \tau]; \end{cases}$$

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i-1}(t) & \text{при } \ t \le (i-1)\tau, \\ u_{i-1}((i-1)\tau) + \int_{(i-1)\tau}^t f\big(s, u_{i-1}(h_n(s))\big)\, ds & \text{при } \ t \in ((i-1)\tau, i\tau], \end{cases} \quad i = 2, \ldots, i_0;$$

$$u_{i_0+1}(t) = \begin{cases} u_{i_0}(t) & \text{при } \ t \le i_0\tau, \\ u_{i_0}(i_0\tau) + \int_{i_0\tau}^t f\big(s, u_{i_0}(h_n(s))\big)\, ds & \text{при } \ t \in (i_0\tau, t_0]. \end{cases}$$

Используя приведенные соотношения, покажем ограниченность последовательностей решений $\{x_{nT}\}$ и их производных $\{\dot{x}_{nT}\}$.

В этих соотношениях значения функций $u_i(t)$, $i = 1, \ldots, i_0 + 1$, при $t \le i\tau$ удовлетворяют неравенствам $|u_i(t)| \le r_i$, где

$$r_0 = \max\big\{|\alpha|, \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in(-\infty,0)} |\varphi(t)|\big\}, \quad r_i = r_{i-1} + \int_0^\tau \widehat{f}_{r_{i-1}}(s)\, ds.$$

Таким образом, на отрезке $[0, T]$ при любом натуральном $n$ выполнено

$$|x_{nT}(t)| \le r_{i_0+1}, \quad |\dot{x}_{nT}(t)| \le \widehat{f}_{r_{i_0+1}}(t),$$

ограниченность последовательностей решений задачи (3.1) и их производных установлена.

Вследствие ограниченности на отрезке $[0, T]$ последовательности производных $\dot{x}_{nT}(\cdot)$ одной суммируемой функцией, все функции $x_{nT}(\cdot)$ равностепенно непрерывны на этом отрезке. Согласно теореме Арцела–Асколи последовательность $\{x_{nT}\}$ относительно компактна в пространстве $C_{[0,T]}$. Пусть $\tilde{x}_T$ — предельная точка этой последовательности, т. е. некоторая подпоследовательность $\{x_{n_jT}\}$ равномерно сходится к $\tilde{x}_T$.

Покажем, что для п. в. $t \in [0,T]$ имеет место сходимость $(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) \to (S_h\widetilde{x}_T)(t)$ при $j \to \infty$. Для этого рассмотрим каждое слагаемое в правой части неравенства

$$\big|(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\big| \le \big|(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) - (S_h x_{n_jT})(t)\big| + \big|(S_h x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\big|.$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку функции $x_{n_jT}$, $n = 1, 2, \ldots,$ равностепенно непрерывны, а функция $\varphi$ равномерно непрерывна, существует такое $\sigma > 0$, что при любых $t_1, t_2 \in [0,T]$ из $|t_1 - t_2| < \sigma$ следует $|x_{n_jT}(t_1) - x_{n_jT}(t_2)| < 2^{-1}\varepsilon$ и $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < 2^{-1}\varepsilon$. Для п. в. $t \in [0,T]$ определим натуральное $j_0$ такое, что при всех $j > j_0$ справедливо неравенство $|h_{n_j}(t) - h(t)| < \sigma$. Таким образом, для п. в. $t \in [0,T]$ при $j > j_0$ получаем

$$\big|(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) - (S_h x_{n_jT})(t)\big| < 2^{-1}\varepsilon. \tag{3.2}$$

Вследствие равномерной сходимости $x_{n_jT} \to \widetilde{x}_T$ существует натуральное $j_1$ такое, что при любом $j > j_1$ для всех $t \in [0,T]$ справедливо неравенство $|x_{n_jT}(t) - \widetilde{x}_T(t)| < 2^{-1}\varepsilon$. Таким образом, при $j > j_1$ для всех $t \in [0,T]$ получаем

$$\big|(S_h x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\big| < 2^{-1}\varepsilon. \tag{3.3}$$

Из неравенств (3.2), (3.3) следует, что для п. в. $t \in [0,T]$ при всех $j > \max\big\{j_0, j_1\big\}$ выполнено

$$\big|(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) - (S_h\widetilde{x}_T)(t)\big| < \varepsilon.$$

Итак, доказана сходимость $(S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t) \to (S_h\widetilde{x}_T)(t)$ (при $j \to \infty$) для п. в. $t \in [0,T]$.

Теперь докажем, что $\widetilde{x}_T$ является решением задачи (1.1), (1.5), определенным на $[0,T]$.

При п. в. $t \in [0,T]$ из непрерывности функции $f(t,\cdot)$ следует, что последовательность $\big\{f\big(t, (S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t)\big)\big\}$ сходится к $f\big(t, (S_h\widetilde{x}_T)(t)\big)$. А так как к тому же функции $f\big(t, (S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(t)\big)$, $n = 1, 2, \ldots,$ в совокупности ограничены одной суммируемой функцией, согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$x_{n_jT}(t) = \alpha + \int_0^t f\big(s, (S_{h_{n_j}} x_{n_jT})(s)\big)\,ds \to \alpha + \int_0^t f\big(s, (S_h\widetilde{x}_T)(s)\big)\,ds \ \text{ для всех } \ t \in [0,T].$$

В то же время, $x_{n_jT}(t) \to \widetilde{x}_T(t)$. Поэтому получаем равенство

$$\widetilde{x}_T(t) = \alpha + \int_0^t f\big(s, (S_h\widetilde{x}_T)(s)\big)\,ds, \quad t \in [0,T],$$

которое означает, что $\widetilde{x}_T$ — решение задачи (1.1), (1.5).

Итак, любая предельная точка компактной в пространстве $C_{[0,T]}$ последовательности $\{x_{nT}\}$ есть единственное решение $\tilde{x}_T$ на $[0,T]$ задачи (1.1), (1.5). Так как предельная точка единственная, эта компактная последовательность является сходящейся. □

**Теорема 3.2.** *Пусть предельная функция $h$ имеет одну критическую точку $t_0 \geq 0$, являющуюся правой критической точкой. Тогда*

- *при $n \to \infty$ последовательность сужений $x_{n\,t_0}$ на замкнутый отрезок $[0, t_0]$ максимально продолженных решений $x_n$ задач (3.1) равномерно сходится к сужению $x_{t_0}$ на тот же отрезок $[0, t_0]$ любого максимально продолженного решения $x$ задачи (1.1), (1.5);*

- *для любого $T \in (t_0, \infty)$ последовательность сужений $x_{n\,T}$ на замкнутый отрезок $[0, T]$ максимально продолженных решений $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$, задач (3.1) компактна в пространстве $C_{[0,T]}$, и любая ее предельная точка есть сужение $x_T$ на $[0, T]$ некоторого максимально продолженного решения $x$ задачи (1.1), (1.5).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как на отрезке $[0, t_0]$ функция $h$ не имеет критических точек, то существует $\tau > 0$ такое, что $h(t) \leq t - \tau$ при п. в. $t \in [0, t_0]$. Повторяя рассуждения, применявшиеся для доказательства теоремы 3.1, установим, что на этом отрезке решение $x_{n\,t_0}$ задачи (3.1) при каждом $n$ единственно, а также, что существует и единственно решение $x_{t_0}$ краевой задачи (1.1), (1.5), и имеет место равномерная сходимость $x_{n\,t_0} \to x_{t_0}$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения зафиксируем произвольное $T \in (t_0, \infty)$. Согласно теореме 2.2 любое локальное решение задачи (3.1) при любом $n$ продолжаемо на отрезок $[0, T]$. Докажем, что производные всех таких решений ограничены в совокупности одной суммируемой функцией.

Из равномерной на $[0, t_0]$ сходимости $x_{n\,t_0} \to x_{t_0}$ следует, что все непрерывные функции $x_{n\,t_0}$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены, т. е. существует такое $A > 0$, что $|x_{n\,t_0}(t)| \leq A$ при любых $n = 1, 2, \ldots$ и всех $t \in [0, t_0]$. Положим

$$r_0 = 2 + \max\Big\{A, \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in (-\infty, 0)} |\varphi(s)|\Big\}$$

и для определенной формулой (1.2) функции $\widehat{f}_{r_0} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ найдем такое $\Delta > 0$, что

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\, dt \leq 1.$$

Заметим, что вследствие неотрицательности функции $\widehat{f}_{r_0}$ при любом $\delta \in [0, \Delta]$ выполнено

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\, dt \leq \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \widehat{f}_{r_0}(t)\, dt \leq 1.$$

Покажем, что при любом $n$ любое определенное на $[0, t_0 + \Delta]$ решение $x_{n\,t_0+\Delta}$ задачи (3.1) удовлетворяет неравенству $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| \leq r_0$ при всех $t$. При $t \in [0, t_0]$ это неравенство, очевидно, выполнено, более того, на этом отрезке $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| \leq r_0 - 2$. Поэтому, если требуемое неравенство нарушается, то $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_1)\big| > r_0$ в некоторой точке $t_1 \in (t_0, t_0 + \Delta]$. В силу непрерывности функции $x_{n\,t_0+\Delta}$ найдется точка $\bar{t}_1 \in (t_0, t_1) \subset (t_0, t_0 + \Delta]$ такая, что $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(\bar{t}_1)\big| = r_0$ и $\big|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\big| < r_0$ при всех $t < \bar{t}_1$. Но эти два соотношения противоречат друг другу, так как

$$\begin{aligned} r_0 = \big|x_{n\,t_0+\Delta}(\bar{t}_1)\big| &\leq \big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_0 + \Delta)\big| + \int_{t_0+\Delta}^{\bar{t}_1} \big|f(s, (S_{h_n} x_{n\,t_0+\Delta})(s)\big|\, ds \\ &\leq \big|x_{n\,t_0+\Delta}(t_0 + \Delta)\big| + \int_{t_0+\Delta}^{\bar{t}_1} \widehat{f}_{r_0}(s)\, ds \leq (r_0 - 2) + 1. \end{aligned}$$

Итак, доказано, что при любом $n$ для решения $x_{n\,t_0+\Delta}$ задачи (3.1) выполнено

$$\left|x_{n\,t_0+\Delta}(t)\right| \le r_0, \quad t \in (t_0, t_0+\Delta],$$

а следовательно, его производная оценивается неравенством

$$\left|\dot{x}_{n\,t_0+\Delta}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_0}(t), \quad t \in (t_0, t_0+\Delta].$$

Теперь при любом $T > t_0+\Delta$ получим аналогичные оценки для определенных на $[0,T]$ решений $x_{nT}$, $n = 1, 2, \ldots.$ задачи (3.1).

Функция $h$ на отрезке $[t_0+\Delta, T]$ не имеет критических точек, поэтому существует $\tau > 0$ такое, что при всех $n$ на этом отрезке справедливы неравенства $h_n(t) \le h(t) \le t-\tau$. Учитывая эти неравенства, рассуждениями, примененными в доказательстве теоремы 3.1, установим, что при любом $n$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\left|x_{nT}(t)\right| \le r_i, && \left|\dot{x}_{nT}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_i}(t), \quad t \in (t_0+\Delta+\tau(i-1), t_0+\Delta+\tau i], \quad i = 1, 2, \ldots, i_0,\\ &\left|x_{nT}(t)\right| \le r_{i_0+1}, && \left|\dot{x}_{nT}(t)\right| \le \widehat{f}_{r_{i_0+1}}(t), \quad t \in (t_0+\Delta+\tau i_0, T], \end{aligned}$$

где $r_i = r_{i-1} + \int_0^\tau \widehat{f}_{r_{i-1}}(s)\,ds$, а натуральное $i_0$ есть целая часть числа $(T-t_0-\Delta)/\tau$.

Таким образом, на отрезке $[0,T]$ последовательность производных $\dot{x}_{nT}(\cdot)$ решений задачи (3.1) ограничена одной суммируемой функцией $\widehat{f}_{r_{i_0+1}}(\cdot)$. Следовательно, функции $x_{nT}(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$, равностепенно непрерывны на этом отрезке. Согласно теореме Арцела–Асколи последовательность $\{x_{nT}\}$ относительно компактна в пространстве $C_{[0,T]}$. Повторяя рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 3.1, докажем, что любая предельная точка $\tilde{x}_T$ этой последовательности является решением задачи (1.1), (1.5). □

Следующий пример демонстрирует существенность условия «непрерывной стыковки» в теоремах 3.1, 3.2.

П р и м е р 3.1. Пусть функции $h, h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ заданы формулой

$$h(t) = \begin{cases} t-1 & \text{при} \quad t \in [0,1],\\ 0 & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases} \qquad h_n(t) = \begin{cases} t-1-n^{-1} & \text{при} \quad t \in [0,1],\\ -n^{-1} & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

Рассмотрим задачи

$$\dot{x}(t) = (x(h_n(t)), \quad t \ge 0; \quad x(s) = 1, \quad s < 0, \quad x(0) = 0, \ \text{где} \ n = 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

$$\dot{x}(t) = (x(h(t)), \quad t \ge 0; \quad x(s) = 1, \quad s < 0, \quad x(0) = 0. \tag{3.5}$$

Очевидно, здесь при любом $n$ выполнено $h_n(t) \le h(t)$, а при $n \to \infty$ имеет место сходимость $h_n(t) \to h(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Функция $h$ не имеет критических точек, тем не менее последовательность решений $x_n$ задач (3.4) не сходится к решению $x$ предельной задачи (3.5). Действительно, эти решения определяются формулами:

$$x_n(t) = t, \quad x(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad t \in [0,1],\\ 1 & \text{при} \quad t \in (1,\infty). \end{cases}$$

## References


[1] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М., 2002. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rahmatullina, *Elements of the Modern Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Institute for Computer Research, Moscow, 2002 (In Russian)].

[3] В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды.*, ПГУ ПСИ ПССГК, Пермь, 2003. [V. P. Maksimov, *Questions of the General Theory of Functional Differential Equations. Selected Works.*, PGU PSI PSSGK, Perm', 2003 (In Russian)].

[4] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Theory of functional differential equations and applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.

[5] Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра", *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 33–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, "Continuous dependence on parameters of solutions to Volterra's equations", *Sb. Math.*, **197**:10 (2006), 1435–1457.

[6] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами", *Изв. вузов. Матем.*, 2010, №8, 16–29; англ. пер.:E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, "The continuous dependence of solutions to Volterra equations with locally contracting operators on parameters", *Russian Mathematics*, **54**:8 (2010), 12–23.

[7] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "О корректности краевых задач и непрерывной зависимости периодических решений управляемых систем от параметров", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2010, №1, 11–21. [E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, "On a correctness of boundary value problems and continuous dependence of periodic solutions of controllable systems on parameters", *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Matem. Mekh. Komp'yut. nauki*, 2010, №1, 11–21 (In Russian)].

[8] E. Burlakov, E. Zhukovskiy, A. Ponosov, J. Wyller, "Existence, uniqueness and continuous dependence on parameters of solutions to neural field equations", *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, **65** (2015), 35–55.

[9] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Накрывающие отображения, действующие в нормированные пространства, и точки совпадения", *Оптимальное управление и дифференциальные игры*, Сборник статей, Труды МИАН, **315**, МИАН, М., 2021, 19–25; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings acting into normed spaces and coincidence points", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315** (2021), 13–18.

[10] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Об устойчивой разрешимости нелинейных уравнений относительно вполне непрерывных возмущений", *Функциональные пространства, теория приближений и смежные вопросы анализа*, Сборник статей. К 115-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского, Труды МИАН, **312**, МИАН, М., 2021, 7–21; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Stable Solvability of Nonlinear Equations under Completely Continuous Perturbations", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **312** (2021), 1–15.

[11] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, "On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[12] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[13] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций", *Дифференциальные уравнения*, **58**:93–104 (2022); англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions", *Differential Equations*, **58**:92–103 (2022).

[14] С. Бенараб, Е. А. Панасенко, “Об одном включении с отображением, действующим из частично упорядоченного пространства в множество с рефлексивным бинарным отношением”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32**:3 (2022), 361–382. [S. Benarab, E. A. Panasenko, “Ob odnom vklyuchenii s otobrazheniem, dejstvuyushchim iz chastichno uporyadochennogo prostranstva v mnozhestvo s refleksivnym binarnym otnosheniem”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*, **32**:3 (2022), 361-382 (In Russian)].

[15] В. И. Арнольд, *Теория катастроф*, Наука, М., 1990. [V. I. Arnold, *Catastrophe Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russian)].

[16] И. А. Богаевский, “Неявные обыкновенные дифференциальные уравнения: перестройки и усиление эквивалентности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 5–20; англ. пер.:I. A. Bogaevsky, “Implicit ordinary differential equations: bifurcations and sharpening of equivalence”, *Izv. Math.*, **78**:6 (2014), 1063–1078.

[17] А. А. Давыдов, “Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **250**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2005, 79–94; англ. пер.:A. A. Davydov, “Generic profit singularities in Arnold's model of cyclic processes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 70–84.

[18] А. А. Давыдов, Е. Мена Матош, “Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 21–42; англ. пер.:A. A. Davydov, H. Mena Matos, “Generic phase transitions and profit singularities in Arnol'd's model”, *Sb. Math.*, **198**:1 (2007), 17–37.

[19] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[20] И. Д. Серова, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I. D. Serova, “Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[21] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, 2-е изд., Либроком, М., 2011, 224 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obuhovskij, *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Librocom Publ., Moscow, 2011 (In Russian), 224 pp.]

[22] Е. С. Жуковский, “О связности множеств решений включений”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 82–110; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “Connectedness of the solution sets of inclusions”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 836–861.

**Информация об авторах**

**Борзов Никита Сергеевич**, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: borzov-nikita@mail.ru
**ORCID:** http://orcid.org/0009-0005-7439-0405

**Жуковская Татьяна Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

**Information about the authors**

**Nikita S. Borzov**, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: borzov-nikita@mail.ru
**ORCID:** http://orcid.org/0009-0005-7439-0405

**Tatiana V. Zhukovskaia**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

**Серова Ирина Дмитриевна**, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**
Серова Ирина Дмитриевна
E-mail: irinka_36@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 05.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

**Irina D. Serova**, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: irinka_36@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-4224-1502

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**
Irina D. Serova
E-mail: irinka_36@mail.ru

Received 20.05.2023
Reviewed 05.06.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-155-168

# Hermite functions and inner product in Sobolev space

**Mohamed Ahmed BOUDREF**

University of Bouira,

10000, Drissi Yahia Bouira St., Bouira, Algeria

**Abstract.** Let us consider the orthogonal Hermite system $\{\varphi_{2n}(x)\}_{n\geq 0}$ of even index defined on $(-\infty, \infty)$, where

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^n} H_{2n}(x),$$

by $H_{2n}(x)$ we denote a Hermite polynomial of degree $2n$. In this paper, we consider a generalized system $\{\psi_{r,2n}(x)\}$ with $r > 0$, $n \geq 0$ which is orthogonal with respect to the Sobolev type inner product on $(-\infty, \infty)$, i.e.

$$\langle f, g\rangle = \lim_{t\to-\infty} \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(t)g^{(k)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx$$

with $\rho(x) = e^{-x^2}$, and generated by $\{\varphi_{2n}(x)\}_{n\geq 0}$. The main goal of this work is to study some properties related to the system $\{\psi_{r,2n}(x)\}_{n\geq 0}$,

$$\psi_{r,n}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, r-1,$$

$$\psi_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^b (x-t)^{r-1}\varphi_n(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

We study the conditions on a function $f(x)$, given in a generalized Hermite orthogonal system, for it to be expandable into a generalized mixed Fourier series as well as the convergence of this Fourier series. The second result of the paper is the proof of a recurrent formula for the system $\{\psi_{r,2n}(x)\}_{n\geq 0}$. We also discuss the asymptotic properties of these functions, and this concludes our contribution.

**Keywords:** inner product, Sobolev space, Hermite polynomials

**Mathematics Subject Classification:** 42C10.

**For citation:** Boudref M.A. Hermite functions and inner product in Sobolev space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 155–168. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-155-168.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-155-168
УДК 517.518.36

# Функции Эрмита и скалярное произведение в пространстве Соболева

**Мохамед Ахмед БУДРЕФ**
Университет Буира,
Алжир, г. Буира, ул. Дрисси Яхья Буира, 10000

**Аннотация.** Рассмотрим ортогональную систему Эрмита $\{\varphi_{2n}(x)\}_{n\geq 0}$ четного индекса, определенную на $(-\infty,\infty)$ формулой

$$\varphi_{2n}(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^n}H_{2n}(x),$$

где через $H_{2n}(x)$ обозначен полином Эрмита степени $2n$. В данной работе рассматривается обобщенная система $\{\psi_{r,2n}(x)\}$ с $r>0$, $n\geq 0$, ортогональная относительно скалярного произведения Соболевского типа на $(-\infty,\infty)$

$$\langle f,g\rangle=\lim_{t\to-\infty}\sum_{k=0}^{r-1}f^{(k)}(t)g^{(k)}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx$$

с $\rho(x)=e^{-x^2}$, и порожденная системой $\{\varphi_{2n}(x)\}_{n\geq 0}$. Основной целью работы является изучение некоторых свойств, связанных с системой $\{\psi_{r,2n}(x)\}_{n\geq 0}$,

$$\psi_{r,n}(x)=\frac{(x-a)^n}{n!},\quad n=0,1,2,\dots,r-1,$$
$$\psi_{r,r+n}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b(x-t)^{r-1}\varphi_n(t)dt,\quad n=0,1,2,\dots .$$

Изучаются условия на функцию $f(x)$, заданную в обобщенной ортогональной системе Эрмита, достаточные для ее разложения в обобщенный смешанный ряд Фурье, а также сходимость этого ряда Фурье. Второй результат статьи — доказательство рекуррентной формулы для системы $\{\psi_{r,2n}(x)\}_{n\geq 0}$. Также обсуждаются асимптотические свойства этих функций, что составляет заключительную часть работы.

**Ключевые слова:** скалярное произведение, пространство Соболева, многочлены Эрмита

**Для цитирования:** *Будреф М.А.* Функции Эрмита и скалярное произведение в пространстве Соболева // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 155–168. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-155-168.
(In Engl., Abstr. in Russian)

## Introduction

Consider an orthogonal system $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 0}$ on $(-\infty,\infty)$ with $\rho(x)$ as a weight function, and let $r>0$. We construct a new orthogonal system $\{\psi_{r,n}(x)\}_{n\geq 0}$ by following the Sobolev type inner product:

$$\langle f,g\rangle_S=\lim_{t\to-\infty}\sum_{v=0}^{r-1}f^{(v)}(t)g^{(v)}(t)+\int_{-\infty}^{\infty}f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)dx. \tag{0.1}$$

Quite a few authors have presented this type of construction. For example, I. I. Sharapudinov, in his works [1–4] on the construction of mixed Fourier series, considered some particular cases of systems generated by classes of orthogonal functions, namely, those of Jacobi, Legendre, Chebychev, Laguerre, and Haar. The case of the Gegenbauer system is covered in [5].

Hermite polynomials are widely used in mechanics and physics, and are of particular interest for applications. In this work, we reconstruct the orthogonal system $\{\psi_{r,n}(x)\}_{n\geq 0}$ generated by Hermite polynomials of even index, and this approach is different from that used by M. A. Boudref.

Denote by $L^p_\rho(a,b)$ the space of measurable functions $f(x)$, $x\in(a,b)$, such that

$$\int_a^b|f(x)|^p\rho(x)dx<\infty.$$

It is clear that $L^p_\rho(a,b)$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{p,\rho}=\left(\int_a^b|f(x)|^p\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

When $\rho(x)=1$, we write $L^p_\rho(a,b)=L^p(a,b)$.

We can define functions of the system $\{\psi_{r,n}(x)\}_{n\geq 0}$ for $r>0$ as follows [4]:

$$\begin{aligned}\psi_{r,n}(x)&=\frac{(x-a)^n}{n!},\quad n=0,1,2,\dots,r-1,\\ \psi_{r,r+n}(x)&=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b(x-t)^{r-1}\varphi_n(t)dt,\quad n=0,1,2,\dots.\end{aligned}\tag{0.2}$$

From (0.2), we have for a. e. $x\in(a,b)$

$$\psi^{(v)}_{r,n}(x)=\begin{cases}\psi_{r-v,n-v}(x), & \text{if } 0\leq v\leq r-1,\ r\leq n,\\ \varphi_{n-v}(x), & \text{if } v=r\leq n,\\ \psi_{r-v,n-v}(x), & \text{if } v\leq n<r,\\ 0, & \text{if } n<v\leq r.\end{cases}$$

Denote by $W^r_{L^p_\rho(a,b)}$ the Sobolev weighted space. This space consists of all functions $f(x)$ which are $r-1$ times continuously differentiable on the closed interval $[a,b]$ and such that $f^{(r-1)}(x)$ is absolutely continuous on $[a,b]$ and $f^{(r)}(x)\in L^p_\rho(a,b)$.

For $p=2$, we define in $W^r_{L^2_\rho(a,b)}$ the inner product by (0.1). For any function $f\in W^r_{L^2_\rho(a,b)}$, we can set the norm by

$$\|f\|_{W^r_{L^2_\rho(a,b)}}=\sqrt{\langle f,f\rangle_S},$$

which allows us to deduce that $\left(W^r_{L^2_\rho(a,b)},\|\cdot\|_{W^r_{L^2_\rho(a,b)}}\right)$ is a Banach space, and $\left\langle W^r_{L^2_\rho(a,b)},\langle\cdot,\cdot\rangle_S\right\rangle$ is a Hilbert space.

The system $\{\psi_{r,n}(x)\}_{n\geq 0}$ is said to be Sobolev-orthogonal with respect to the inner product (0.1) generated by the system $\{\varphi_n(x)\}_{n\geq 0}$.

## 1. Some properties of Hermite polynomials

Let $\psi_{r,n}(x)$ be Sobolev-orthogonal polynomials with respect to the inner product

$$\langle f,g\rangle = \lim_{t\to-\infty}\sum_{v=0}^{r-1} f^{(v)}(t)g^{(v)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)w(x)dx,$$

where $w(x)=e^{-x^2}$.

Here are some properties of Hermite polynomials:

- The Hermite polynomials are given by [6]

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right), \quad x\in\mathbb{R},$$

where

$$H_0(x)=1, \quad H_1(x)=2x, \quad H_2(x)=4x^2-2.$$

- Recurrence formula [7, p. 106]:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1}^{'}(x) = 2(n+1)H_n(x),$$
$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H_{n-1}^{'}(x).$$

- Orthogonality formula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx = \delta_{nm}c_n, \quad \text{where} \quad c_n = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

A Hermite function is defined by

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x).$$

- We define a Hermite function of even index by

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^n}H_{2n}(x),$$

where $H_{2n}(x)$ is a Hermite polynomial of even index, in particular,

$$H_{2n}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = (-1)^n\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}.$$

- Relation to Legendre functions:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} L_n^{-\frac{1}{2}}\left(x^2\right).$$

So if

$$L_n^{-\frac{1}{2}}\left(x^2\right) = x^{-1}e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2\left(-\frac{1}{2}+n\right)}e^{-x^2}\right),$$

then

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} x^{-1} e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{2\left(-\frac{1}{2}+n\right)}e^{-x^2}\right).$$

- Asymptotic formula for $\varphi_{2n}(x)$ [8, p. 594]:

$$\varphi_{2n}(x)=\varphi_{2n}(0)\left[\cos\left(\sqrt{4n+1}x\right)+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n(x)\right],\quad \text{where}\quad -1<\theta_n(x)<1.$$

It is clear that

$$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\sqrt{4n+1}x\right)+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt[4]{4n+1}}\theta_n(x)\right]=0,\quad \text{for each } x.$$

So, the asymptotic formula for $H_{2n}(x)$ is

$$H_{2n}(x)=(-1)^n2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)e^{\frac{1}{2}x^2}\left[\cos\left(\sqrt{4n+1}x\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)\right].$$

- The system $\{\varphi_{2n}(x)\}_{n\geq 1}$ is orthogonal on $(-\infty,\infty)$, i. e.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{2n}(x)\varphi_{2m}(x)dx=\delta_{nm}.$$

- Some particular cases:

$$\varphi_0(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt[4]{\pi}}H_0(x),\quad \varphi_2(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}H_2(x).$$

### 1.1. Sobolev-orthogonal functions generated by Hermite functions $\varphi_{2n}(x)$

D e f i n i t i o n 1.1. For $r>0$, we define the functions $\psi_{r,2n}(x)$ $(n=0,1,\ldots)$ by

$$\psi_{r,2n}(x)=\frac{(x)^{2n}}{(2n)!},\quad n=0,1,\ldots,r-1,$$
$$\psi_{r,r+2n}(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt,\quad n\geq 0.$$

We will calculate the functions $\psi_{r,r+2n}(x)$ for any $n\in\mathbb{N}$ and $x\in(-\infty,\infty)$.

**Theorem 1.1** (Fisrt aim result)**.** *For $n\geq 1$ and $r>0$, we have the following relations:*

***1.*** $\psi_{r,r+2n}(x)=-r\sqrt{\dfrac{2}{2n-1}}\psi_{r+1,r+2n}(x)+x\sqrt{\dfrac{2}{2n-1}}\psi_{r,r+2n-1}(x)-\sqrt{\dfrac{2n-1}{2n}}\psi_{r,r+2n-2}(x).$

***2.*** $\psi_{r+1,r+1+2n}(x)=\dfrac{x}{r}\psi_{r,r+2n}(x)+\dfrac{1}{r}\psi_{r-1,r+2n-1}(x)+\dfrac{2\sqrt{n}}{r}\psi_{r,r+2n-1}(x).$

***3.*** *For $n=0$:*

$$\psi_{r,r}(x)=\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\psi_{r+1,r+2}(x)+\frac{x\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\psi_{r,r+1}(x).$$

To prove this theorem, we need the following lemma.

**Lemma 1.1.** *The formulas for the derivations of the Hermite functions of even index are:*

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}} x\varphi_{2n-1}(x) - \sqrt{1-\frac{1}{2n}}\varphi_{2n-2}(x), \tag{1.1}$$

$$\varphi'_{2n}(x) = -x\varphi_{2n}(x) + 2\sqrt{n}\varphi_{2n-1}(x). \tag{1.2}$$

P r o o f. First, for the Hermite functions, we put for $n \geq 1$

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n}(x), \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n-1)!\pi^{\frac{1}{4}}2^{n-\frac{1}{2}}}} H_{2n-1}(x),$$

$$\varphi_{2n-2}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n-2)!\pi^{\frac{1}{4}}2^{n-1}}} H_{2n-2}(x).$$

Use these formulas to prove (1.1), (1.2).

a) We have (see [7, p. 106])

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Multiplying both sides by $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}}$, we get

$$\begin{aligned}\varphi_{2n}(x) &= \frac{2xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n-1}(x) - 2(2n-1)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n-2}(x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{2n-1}}x\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n-1)!\pi^{\frac{1}{4}}2^{n-\frac{1}{2}}}} H_{2n-1}(x) - \sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n-2)!\pi^{\frac{1}{4}}2^{n-1}}} H_{2n-2}(x),\end{aligned}$$

and so we have (1.1).

b) For the second relation, we differentiate

$$\varphi_{2n}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n}(x)$$

with respect to $x$, and get

$$\varphi'_{2n}(x) = -x\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n}(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H'_{2n}(x).$$

Using the fact that $H'_{2n}(x) = 4nH_{2n-1}(x)$, we get

$$\begin{aligned}\varphi'_{2n}(x) &= -x\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H_{2n}(x) + \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}} H'_{2n}(x) \\ &= -x\varphi_{2n}(x) + \frac{2^{\frac{3}{2}}ne^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{n}\sqrt{(2n-1)!\pi^{\frac{1}{4}}2^{n-\frac{1}{2}}}} H_{2n-1}(x),\end{aligned}$$

so $\varphi'_{2n}(x) = -x\varphi_{2n}(x) + 2\sqrt{n}\varphi_{2n-1}(x)$. □

P r o o f. (of Theorem 1.1)

***1.*** First of all, it is clear that

$$\psi_{0,2n}(x) = \varphi_{2n}(x), \quad \psi_{1,0}(x) = 1, \quad \psi_{1,1}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt.$$

We have

$$\psi_{r,r+2n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt, \quad \text{where} \quad \varphi_{2n}(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!\pi^{\frac{1}{4}}2^n}}H_{2n}(t). \tag{1.3}$$

Then, from Lemma 1.1 and (1.3), it follows that

$$\begin{aligned}\psi_{r,r+2n}(x) =& \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}\sqrt{\frac{2}{2n-1}}t(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt - \frac{\sqrt{\frac{2n-1}{2n}}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-2}(t)dt\\ =& \frac{\sqrt{\frac{2}{2n-1}}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t\,(x-t)^{r-1}\,\varphi_{2n-1}(t)dt - \frac{\sqrt{\frac{2}{2n-1}}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\,\varphi_{2n-2}(t)dt.\end{aligned}$$

In the second term of this expression, we have

$$\psi_{r,r+n-2}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-2}(t)dt.$$

Let us calculate

$$J \doteq \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt.$$

We get

$$\begin{aligned}J &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(t-x+x)(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt\\ &= -\frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r}\varphi_{2n-1}(t)dt + \frac{x}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt\\ &= -r\psi_{r+1,r+2n}(x) + x\psi_{r,r+2n-1}(x).\end{aligned}$$

Then

$$\psi_{r,r+2n}(x) = -r\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\psi_{r+1,r+2n}(x) + x\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\psi_{r,r+2n-1}(x) - \sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\psi_{r,r+2n-2}(x).$$

***2.*** By Lemma 1.1 (formula (1.2)), we have

$$-x\varphi_{2n}(t) = \varphi_{2n}^{'}(x) - 2\sqrt{n}\varphi_{2n-1}(x),$$

so

$$\begin{aligned}-\frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt =& \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}^{'}(t)dt\\ &-\frac{2\sqrt{n}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt.\end{aligned}$$

Let us calculate

$$H_1 \doteq \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt, \quad H_2 \doteq \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}^{'}(t)dt,$$

$$H_3 \doteq \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt.$$

First,

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(t-x+x)\,(x-t)^{r-1}\,\varphi_{2n}(t)dt \\ &= -\frac{r}{r!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r}\varphi_{2n}(t)dt + \frac{x}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt = -r\psi_{r+1,r+2n}(x) + x\psi_{r,r+2n}(x). \end{aligned}$$

For $H_2$, integrating by parts we get

$$H_2 = \frac{1}{(r-1)!}\left[(x-t)^{r-1}\,\varphi_{2n}(t)\right]_{-\infty}^{x} + \frac{1}{(r-2)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-2}\,\varphi_{2n}(t)dt.$$

Since

$$\lim_{t\to-\infty}(x-t)^{r-1}\,\varphi_{2n}(t) = \lim_{t\to-\infty}(x-t)^{r-1}\,\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n}} = 0,$$

then

$$H_2 = \frac{1}{(r-2)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-2}\,\varphi_{2n}(t)dt = \psi_{r-1,r+2n-1}(x).$$

Regarding $H_3$, we have

$$H_3 = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n-1}(t)dt = \psi_{r,r+2n-1}(x).$$

Finally,

$$\psi_{r,r+1+2n}(x) = \frac{x}{r}\psi_{r,r+2n}(x) + \frac{1}{r}\psi_{r-1,r+2n-1}(x) + \frac{2\sqrt{n}}{r}\psi_{r,r+2n-1}(x).$$

So we obtain the second formula.

***3.*** For this part, it is easy to see that for $n=0$, $\varphi_0(x) = x\sqrt{2}\varphi_1(x) + \sqrt{2}\varphi_2(x)$. Then

$$\begin{aligned} \psi_{r,r}(x) &= \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_0(t)dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x} t(x-t)^{r-1}\varphi_1(t)dt + \frac{\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_0(t)dt \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t-x)(x-t)^{r-1}\varphi_1(t)dt + \frac{\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_0(t)dt, \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} \psi_{r,r}(x) = \frac{-\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r}\varphi_1(t)dt &+ \frac{\sqrt{2}x}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_1(t)dt \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_0(t)dt, \end{aligned}$$

$$\psi_{r,r}(x) = -\sqrt{2}\psi_{r+1,r+2}(x) + x\sqrt{2}\psi_{r,r+1}(x) + \sqrt{2}\psi_{r,r}(x).$$

Then $\psi_{r,r}(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\psi_{r+1,r+2}(x) + \dfrac{x\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\psi_{r,r+1}(x).$ $\square$

### 1.2. Problem of mixed Fourier series

Let $f \in W^r_{L^2_\rho(-\infty,\infty)}$. If this function is given in the generalized Hermite orthogonal system $\{\psi_{r,2n}(x)\}_{n\geq 0}$, then

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_{r,k}\psi_{r,2k}(x). \tag{1.4}$$

This Fourier series will have the form:

$$f(x) \sim \lim_{t\to-\infty}\sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=r}^{\infty} C_{r,k}\psi_{r,2k}(x), \tag{1.5}$$

with

$$C_{r,k} = \hat{f}_{r,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\psi_{r,2k}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\varphi_{2k-r}(t)dt$$

called the Fourier coefficient. For $r = 0$, we have

$$f(x) \sim \sum_{k=r}^{\infty} C_{0,k}\psi_{0,2k}(x) \sim \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{0,k}\psi_{0,2k}(x) \tag{1.6}$$

with

$$\hat{f}_{0,2k} = \int_{-\infty}^{1} f(t)\varphi_{2k}(t)dt.$$

In this section, we will give the expressions of (1.5) and (1.6) taking into account the expression of $\varphi_{2n}(t)$. Also we will prove the convergence of the series (1.4). The following result is similar to the one given in [5].

**Theorem 1.2.** *For $n \geq 0$, $r > 0$, the system of functions $\{\psi_{r,2n}(x)\}$ generated by Hermite functions $\varphi_{2n}(x)$ by the formula*

$$\psi_{r,r+2n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt, \quad n \geq 0,$$

*is complete in $W^r_{L^2_\rho(-\infty,\infty)}$ and orthonormal via Sobolev's inner product*

$$\langle f, g\rangle = \lim_{t\to-\infty}\sum_{v=0}^{r-1} f^{(v)}(t)g^{(v)}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)g^{(r)}(t)w(t)dt.$$

*It follows from the formulas*

$$\psi_{r,r+2n}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt, \quad n \geq 0,$$

$$\psi_{r,2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad n = 0, 1, \ldots, r-1,$$

*that for all $x \in (-\infty, \infty)$,*

$$(\psi_{r,2n}(x))^{(v)} = \begin{cases} \psi_{r-v,2n-v}(x), & 0 \leq v \leq r-1,\ r \leq 2n, \\ \varphi_{2n-v}(x), & v = r \leq 2n, \\ \psi_{r-v,2n-v}(x), & v \leq 2n < r, \\ 0, & 2n < v \leq r, \end{cases}$$

*with $\psi_{0,2n}(x) = \varphi_{2n}(x)$.*

### 1.3. Study of the convergence of the series (1.5)

Let $f \in W^r_{L^2_\rho(-\infty,\infty)}$, then $f^{(r)} \in L^p$ with

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{C}_{r,k}\varphi_k(x), \quad \text{where} \quad \hat{C}_{r,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)\varphi_k(t)dt, \quad \text{for all } k \geq 0.$$

**Theorem 1.3** (Second aim result). *For $x \in [A,B]$ $(A < B < \infty)$ and $f \in W^r_{L^p}$, where $\frac{4}{3} < p < 4$, the Fourier series*

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} \lim_{t\to-\infty} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=r}^{\infty} C_{r,k}\psi_{r,2k}(x)$$

*converges uniformly to the function $f$.*

P r o o f. We note the following partial sums:

$$S_{r,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} \lim_{t\to-\infty} f^{(k)}(t)\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=r}^{n} C_{r,k}\psi_{r,2k}(x), \quad S^*_{r,n}\left(f^{(r)},x\right) = \sum_{k=0}^{n} \hat{C}_{r,k}\varphi_{2k}(x).$$

Then

$$\left|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)\right| = \left|\frac{1}{(r-1)!}\int_A^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \sum_{k=r}^{r+n} C_{r,k}\psi_{r,2k}(x)\right|$$

with

$$\psi_{r,r+2k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_A^x (x-t)^{r-1}\varphi_{2n}(t)dt,$$

so

$$\psi_{r,2k}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_A^x (x-t)^{r-1}\varphi_{2k-r}(t)dt.$$

Hence,

$$|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| = \left|\frac{1}{(r-1)!}\int_A^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)dt - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=r}^{r+n} C_{r,k}\int_A^x (x-t)^{r-1}\varphi_{2k-r}(t)dt\right|$$
$$= \frac{1}{(r-1)!}\left|\int_A^x (x-t)^{r-1}\left(f^{(r)}(t) - \sum_{k=r}^{r+n} C_{r,k}\varphi_{2k-r}(t)\right)dt\right|$$

with

$$\sum_{k=r}^{r+n} C_{r,k}\varphi_{2k-r}(t) = S^*_{r,n}\left(f^{(r)},x\right).$$

Then

$$|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| \leq \frac{1}{(r-1)!}\int_A^x (x-t)^{r-1}\left|f^{(r)}(t) - S^*_{r,n}\left(f^{(r)},t\right)\right| dt.$$

Using Hölder's inequality, we get:

$$|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| \leq \frac{1}{(r-1)!}\left(\int_A^x (x-t)^{(r-1)q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_A^x \left|f^{(r)}(t) - S^*_{r,n}\left(f^{(r)},t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Calculate

$$\int_A^x (x-t)^{(r-1)q} dt = (-1)^{q(r-1)} \frac{(t-x)^{q(r-1)+1}}{q(r-1)+1}\Bigg|_A^x$$
$$= (-1)^{q(r-1)} \frac{(A-x)^{q(r-1)+1}}{q(r-1)+1} = \frac{(B-A)^{q(r-1)+1}}{q(r-1)+1} < \infty.$$

Then

$$|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| \le \frac{1}{(r-1)!} \left( \frac{(B-A)^{q(r-1)+1}}{q(r-1)+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left\| f^{(r)}(x) - S^*_{r,n}\left(f^{(r)},x\right) \right\|_{L^p},$$

and since $\left\| f^{(r)}(x) - S^*_{r,n}\left(f^{(r)},x\right) \right\|_{L^p} \to 0$ as $n \to \infty$, it results that $|f(x) - S_{r,r+n}(f,x)| \to 0$, uniformly on $[A,B]$. □

## 2. Asymptotic forms of the functions $\psi_{1,1+2n}(x)$

We say that

$$\psi_{1,1+2n}(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{2n}(t)dt = \frac{1}{2^n\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2n}(t)dt.$$

Integrating by parts and using the first formula of Lemma 1.1, we will have:

$$\varphi_{1,1+2n}(x) = \left| \begin{matrix} u = e^{-\frac{t^2}{2}} & du = -te^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ dv = H_{2n}(t)dt & v = \frac{1}{2(2n+1)}H_{2n+1}(t) \end{matrix} \right|,$$

so

$$\psi_{1,1+2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\,(2n+1)} H_{2n+1}(x) + \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^n} \int_{-\infty}^x te^{-\frac{t^2}{2}} H_{2n+1}(t)dt,$$

$$\psi_{1,1+2n}(x) = \left| \begin{matrix} u = e^{-\frac{t^2}{2}} & du = \left(e^{-\frac{t^2}{2}} - t^2e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt \\ dv = H_{2n+1}(t)dt & v = \frac{1}{2(2n+2)}H_{2n+2}(t) \end{matrix} \right|.$$

Then

$$\psi_{1,1+2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+1}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2n+2)} H_{2n+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+1}} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{(2n+2)} H_{2n+1}(x) + R_n(x),$$

where

$$R_n(x) = \frac{1}{2^{n+3}(2n+1)(n+1)\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{-\infty}^x \left(1-t^2\right)^{-\frac{t^2}{2}} H_{2n+2}(t)dt. \tag{2.1}$$

**Theorem 2.1** (Third aim result)**.** *The following asymptotic formula holds:*

$$\psi_{1,1+2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+1}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(2n+2)} H_{2n+1}(x) - \frac{1}{\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+1}} \frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{(2n+2)} H_{2n+1}(x) + R_n(x),$$

*where* $R_n(x)$ *is given by* (2.1) *and satisfies the estimate* $R_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

P r o o f. By the relationship between Hermite and Laguerre functions

$$H_{2n}(x) = C_n L_n^{-\frac{1}{2}}(x^2), \quad \text{where } C_n = (-1)^n 2^{2n},$$

we have

$$R_n(x) = \eta_n C_{n+1} \int_{-\infty}^{x} \left(1-t^2\right)^{-\frac{t^2}{2}} L_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(t^2)dt,$$

where

$$\eta_n = \frac{1}{(2n+1)(n+1)\sqrt{(2n)!}\pi^{\frac{1}{4}}2^{n+3}}, \qquad L_n^{\alpha} \text{ is a Laguerre function.}$$

Introducing a new variable $u \doteq t^2$, we get

$$R_n(x) = \frac{\eta_n C_{n+1}}{2} \int_0^{x^2} \frac{1-u}{\sqrt{u}} e^{-\frac{u}{2}} L_{n+1}^{-\frac{1}{2}}(u)du.$$

To estimate the residue $R_n(x)$, we must consider two cases:

**1.** First case: $0 \le x^2 \le \frac{1}{n}$. For this case, we can use the weight estimate [9,10]

$$e^{-\frac{x}{2}} \left|L_n^{\alpha}(x)\right| \le c(\alpha) A_n^{\alpha}(x), \quad \alpha > -1,$$

and

$$A_n^{\alpha}(x) = \begin{cases} \theta_n^{\alpha}, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta_n} \\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta_n} < x < \frac{\theta_n}{2} \\ \left[\theta_n\left(\theta_n^{\frac{1}{3}} + |x-\theta_n|\right)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta_n}{2} < x \le \frac{3\theta_n}{2} \\ e^{-\frac{1}{4}}, & \frac{3\theta_n}{2} < x, \end{cases}$$

where $\theta_n = \theta_n^{\alpha} = 4n + 2\alpha + 2$. So

$$e^{-\frac{x}{2}} \left|L_n^{-\frac{1}{2}}(x)\right| \le \frac{c\left(-\frac{1}{2}\right)}{4(n+1)+5},$$

then

$$|R_n(x)| \le \frac{\eta_n C_{n+1}}{2} \int_0^{x^2} \left|\frac{1-u}{\sqrt{u}}\right| \frac{\left|c\left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{4n+5} du \le \frac{\eta_n C_{n+1}}{2} \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} + \sqrt{u}\right) du$$
$$< \frac{2}{4n+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(4n+1)^3}.$$

So $R_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

**2.** Second case: $\frac{1}{n} \le x^2 \le \omega$. We have

$$|R_n(x)| \le \frac{\eta_n C_{n+1}}{2} \int_0^{x^2} \left|\frac{1-u}{\sqrt{u}}\right| \left|L_n^{-\frac{1}{2}}(u)\right| du.$$

For this case, we use the following estimate:

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(x) = N^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_{\alpha}\big(2\,(Nx)^{\frac{1}{2}}\,\big) + o\big(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\big),$$
$$N = n + \frac{\alpha+1}{2}, \quad x > 0, \quad \alpha > -1.$$
$$J_{\alpha}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\big(x^{-\frac{3}{2}}\big), \quad x \to +\infty.$$

We have

$$R_n(x) = \frac{\eta_n C_{n+1}}{2}\Big\{\int_0^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{u}{2}}\,\frac{1-u}{\sqrt{u}}\,L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du + \int_{\frac{1}{n}}^{x^2} e^{-\frac{u}{2}}\,\frac{1-u}{\sqrt{u}}\,L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\Big\},$$

so

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &\leq o\Big(\frac{1}{n}\Big) + \frac{\eta_n C_{n+1}}{2}\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} e^{-\frac{u}{2}}\left(\frac{1-u}{\sqrt{u}}\right)L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg|.\\ &\leq o\Big(\frac{1}{n}\Big) + \frac{\eta_n C_{n+1}}{2}\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{u}}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg| + \frac{\eta_n C_{n+1}}{2}\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} e^{-\frac{u}{2}}\sqrt{u}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg|.\end{aligned}$$

Calculate

$$\begin{aligned}A &= \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{u}}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg| = \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}u^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{u}{2}}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg|\\ &= \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}\left(N^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!}J_{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{Nu}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)du\bigg|\\ &\leq \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!}J_{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{Nu}\right)du\bigg| + \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} o\left(\frac{1}{n}\right)u^{-\frac{1}{4}}du\bigg|\\ &= N^{\frac{1}{4}}\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(n+1)!}\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}J_{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{Nu}\right)du\bigg| + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}du\bigg|.\end{aligned}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{1}{\pi\sqrt{Nu}}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(2\sqrt{Nu}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) + o\Big(\left(2\sqrt{Nu}\right)^{-\frac{3}{2}}\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}N^{\frac{1}{4}}u^{\frac{1}{4}}}\cos\left(2\sqrt{Nu}\right) + o\bigg(\frac{1}{(Nu)^{\frac{3}{4}}}\bigg).\end{aligned}$$

So

$$\varepsilon = \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{4}}J_{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{Nu}\right)du\bigg| = \frac{1}{\sqrt{\pi}N^{\frac{1}{4}}}\bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} u^{-\frac{1}{2}}\cos\left(2\sqrt{Nu}\right)du + \frac{1}{\sqrt{u}}\,o\bigg(\frac{1}{(Nu)^{\frac{3}{4}}}\bigg)\bigg|.$$

Set a new variable as

$$t=\sqrt{Nu} \implies u=\frac{t^2}{N},\quad du=\frac{2t}{N}dt,\quad \sqrt{\frac{N}{u}}\leq t\leq x\sqrt{N}.$$

Then

$$\varepsilon \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}N^{\frac{3}{4}}}\int_{\sqrt{\frac{N}{u}}}^{x\sqrt{N}} |\cos 2t|\,dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}N^{\frac{3}{4}}}\int_{\sqrt{\frac{N}{u}}}^{x\sqrt{N}} dt + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

and

$$A = \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} \frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{u}}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg| \leq o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

For

$$B = \bigg|\int_{\frac{1}{n}}^{x^2} e^{-\frac{u}{2}}\sqrt{u}L_n^{-\frac{1}{2}}(u)du\bigg|,$$

in the same way, we get

$$B \le o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Then

$$R_n(x) \le o\Big(\frac{1}{n}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) + o\Big(\frac{1}{n}\Big) = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Finally, we have the desired estimate. □

## References


[1] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions of variable smoothness by Fourier–Legendre sums", *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 759–777.

[2] I. Sharapudinov, *Mixed Series of Orthogonal Polynomials*, Daghestan Sientific Centre Press, Makhachkala, 2004.

[3] I. I. Sharapudinov, "Approximation properties of mixed series in terms of Legendre polynomials on the classes $W^r$", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 433–452.

[4] I. I. Sharapudinov, "Sobolev orthogonal systems of functions associated with an orthogonal system", *Izv. Math.*, **82**:1 (2018), 212–244.

[5] M. A. Boudref, "Inner product and Gegenbauer polynomials in Sobolev space", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 150–163.

[6] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 1-st ed., Dover Publications, USA, 1964.

[7] G. Szegö, *Orthogonal Plynomials.* V. 23, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975, 432 pp.

[8] V. Smirnov, *Higher Mathematics Courses.* V. III, Mir Publ., Moscow, 1972 (In French).

[9] R. Askey, S. Wainger, "Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series", *American Journal of Mathematics*, **87** (1965), 698–708.

[10] B. Muckenhoupt, "Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II", *Transactions of the American Mathematical Society*, **147**:2 (1970), 433–460.


### Information about the author


**Mohamed Ahmed Boudref**, PhD of Mathematics, Director of the LIMPAF Mathematics and Computer Science Laboratory, Lecturer of the High Mathematics Department. University of Bouira, Algeria. E-mail: m.boudref@univ-bouira.dz



Received 08.02.2023
Reviewed 26.05.2023
Accepted for press 09.06.2023


### Информация об авторе


**Будреф Мохамед Ахмед**, доктор философии по математике, директор лаборатории математики и компьютерных наук LIMPAF, преподаватель кафедры высшей математики. Университет Буира, Алжир. E-mail: m.boudref@univ-bouira.dz



Поступила в редакцию 08.02.2023 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181
УДК 517.95+517.983

# О дискретной краевой задаче в четверти плоскости

**Владимир Борисович ВАСИЛЬЕВ, Анастасия Александровна МАШИНЕЦ**
ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»)
308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85

**Аннотация.** Мы изучаем разрешимость дискретного аналога модельного псевдодифференциального уравнения в четверти плоскости в дискретных пространствах Соболева–Слободецкого. Используя понятие периодической волновой факторизации для эллиптического периодического символа, мы описываем условия разрешимости этого уравнения и одной связанной с ним краевой задачи. В частности, для определенных значений индекса периодической волновой факторизации получена формула общего решения модельного дискретного псевдодифференциального уравнения, в котором содержатся некоторые произвольные функции. Для их однозначного определения вводятся дополнительные условия — дискретный аналог интегральных условий на сторонах угла. Доказана теорема существования и единственности полученной дискретной краевой задачи и получены априорные оценки решения. Дается также сравнение дискретных и непрерывных решений краевых задач при специального выбора дискретных объектов.

**Ключевые слова:** эллиптический символ, обратимость, дискретный псевдодифференциальный оператор, дискретное уравнение, периодическая волновая факторизация

**Для цитирования:** *Васильев В.Б., Машинец А.А.* О дискретной краевой задаче в четверти плоскости // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 169–181. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181

# On a discrete boundary value problem in a quarter-plane

**Vladimir B. VASILYEV, Anastasia A. MASHINETS**
Belgorod National Research University
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation

**Abstract.** We study the solvability of a discrete analogue of a model pseudo-differential equation in a quarter-plane in discrete Sobolev–Slobodetskii spaces. Using a concept of periodic wave factorization for elliptic periodic symbol, we describe solvability conditions for the equation and for a certain boundary value problem related to this equation. In particular, for certain values of the index of periodic wave factorization, a formula for a general solution of the model discrete pseudo-differential equation is obtained, there are some arbitrary functions in the formula. For their unique determination, we introduce certain additional conditions such as a discrete analogues of integral conditions on angle sides. The existence and uniqueness theorem for the stated boundary value problem is proved and a priori estimates for the solution are obtained. A comparison between discrete and continuous solutions for a special choice of discrete objects is also given.

**Keywords:** elliptic symbol, invertibility, digital pseudo-differential operator, discrete equation, periodic wave factorization

**Mathematics Subject Classification:** 35S15, 65T50.

**For citation:** Vasilyev V.B., Mashinets A.A. On a discrete boundary value problem in a quarter-plane. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 169–181. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-169-181 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Мы изучаем дискретные псевдодифференциальные уравнения и их разрешимость в соответствующих дискретных функциональных пространствах. Существуют определенные подходы к исследованию дискретных краевых задач для уравнений в частных производных, в том числе метод конечных разностей и метод разностных потенциалов (см. [1, 2]), однако они неприменимы к изучению дискретных краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. С учетом этого факта первый автор с коллегами начал развивать дискретную теорию эллиптических псевдодифференциальных уравнений [3]. Мы начали исследование с модельных операторов и канонических областей. Первые результаты были связаны с дискретным $m$-мерным пространством и полупространством, здесь мы рассматриваем дискретный квадрант.

## 1. Дискретные операторы и уравнения

Пусть $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ — первый квадрант, $\mathbb{Z}^2$ — целочисленная решетка на плоскости, $K_d = h\mathbb{Z}^2 \cap K$, $h > 0$, $u_d(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2$ — функция дискретной переменной.

Обозначим $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi]^2$, $\hbar = h^{-1}$. Функцию, определенную в $\hbar\mathbb{T}^2$, мы трактуем как периодическую функцию в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$.

Можно определить дискретное преобразование Фурье для функции $u_d$

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} e^{-i\tilde{x}\cdot\xi} u_d(\tilde{x}) h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2,$$

если последний ряд сходится и $\tilde{u}_d(\xi)$ — периодическая функция в $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Это дискретное преобразование Фурье сохраняет все свойства интегрального преобразования Фурье, а обратное дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$(F_d^{-1}\tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2.$$

Дискретное преобразование Фурье осуществляет взаимно однозначное соответствие между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^2)$ и $L_2(\hbar\mathbb{T}^2)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left( \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2} |u_d(\tilde{x})|^2 h^2 \right)^{1/2}, \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left( \int\limits_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Нам понадобятся более общие дискретные функциональные пространства, которые мы введем, используя разделенные разности [1].

Разделенные разности первого порядка выглядят следующим образом

$$(\Delta_1^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(\tilde{x}_1 + h, \tilde{x}_2) - u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)), \quad (\Delta_2^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1}(u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 + h) - u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)),$$

а их дискретные преобразования Фурье даются формулами

$$(\widetilde{\Delta_k^{(1)} u_d})(\xi) = h^{-1}(e^{-ih\cdot\xi_k} - 1)\tilde{u}_d(\xi), \quad k = 1, 2.$$

Разделенная разность второго порядка — это разделенная разность первого порядка от разделенной разности первого порядка

$$(\Delta_1^{(2)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(\tilde{x}_1 + 2h, \tilde{x}_2) - 2u_d(\tilde{x}_1 + h, \tilde{x}_2) + u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)),$$

$$(\Delta_2^{(2)}u_d)(\tilde{x}) = h^{-2}(u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2+2h) - 2u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2+h) + u_d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)),$$

с преобразованием Фурье

$$(\widetilde{\Delta_k^{(2)}u_d})(\xi) = h^{-2}(e^{-ih\cdot\xi_k}-1)^2\tilde{u}_d(\xi), \quad k=1,2.$$

Дискретный аналог оператора Лапласа имеет следующий вид

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = (\Delta_1^{(2)}u_d)(\tilde{x}) + (\Delta_2^{(2)}u_d)(\tilde{x}),$$

так что его преобразование Фурье выглядит как

$$(\widetilde{\Delta_d u_d})(\xi) = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1}-1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2}-1)^2)\tilde{u}_d(\xi).$$

Мы используем эти дискретные объекты для построения дискретных пространств Соболева–Слободецкого для изучения широкого класса дискретных уравнений.

Сначала введем дискретный аналог пространства Шварца $S(h\mathbb{Z}^2)$ как набор дискретных функций с конечными полунормами

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}^2}(1+|\tilde{x}|)^l|\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x})|$$

для произвольного $l\in\mathbb{N}$, $\mathbf{k}=(k_1,k_2)$, $k_r\in\mathbb{N}$, $r=1,2$,

$$\Delta^{(\mathbf{k})}u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1}\Delta_2^{k_2}u_d(\tilde{x}).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Дискретной обобщенной функцией называется линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $S(h\mathbb{Z}^2)$.

Множество таких дискретных обобщенных функций будем обозначать через $S'(h\mathbb{Z}^2)$, и значение дискретной обобщенной функции $f_d$ на тестовой дискретной функции $u_d\in S(h\mathbb{Z}^2)$ будет обозначаться $(f_d,u_d)$. Аналогично [4] мы можем определить стандартные операции в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$, но дифференцирование будет заменено на разделенную разность первого порядка. Эти операции подробно описаны в [3], под сходимостью понимается слабая сходимость в пространстве $S'(h\mathbb{Z}^2)$.

Пусть $\zeta^2 = h^{-2}((e^{-ih\cdot\xi_1}-1)^2 + (e^{-ih\cdot\xi_2}-1)^2)$. Введем следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1.2. Пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ состоит из (обобщенных) функций дискретного аргумента и является замыканием пространства $S(h\mathbb{Z}^2)$ относительно нормы

$$\|u_d\|_s = \left(\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^s|\tilde{u}_d(\xi)|^2d\xi\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Изменяя параметр $h$ в (1.1), мы получим различные нормы, которые эквивалентны $L_2$-норме, но константы в этой эквивалентности зависят от $h$. В наших конструкциях ниже все константы не зависят от $h$ — это важный факт для сравнения дискретных и непрерывных решений.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пространство $H^s(K_d)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций из $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ таких, что их носители принадлежат множеству $\overline{K_d}$. Норма в пространстве $H^s(K_d)$ индуцируется нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Пространство $H_0^s(K_d)$ состоит из дискретных (обобщенных) функций $f_d\in S'(h\mathbb{R}^2)$ с носителями внутри $K_d$, и эти дискретные (обобщенные) функции должны допускать продолжение в пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$. Норма в пространстве $H_0^s(K_d)$ задается формулой

$$\|f_d\|_s^+ = \inf \|\ell f_d\|_s,$$

где инфимум берется по всем продолжениям $\ell$.

Фурье образ пространства $H^s(K_d)$ будет обозначаться $\widetilde{H}^s(K_d)$.

Пусть $\widetilde{A}_d(\xi)$ — измеримая периодическая функция $\mathbb{R}^2$ с основным квадратом периодов $\hbar\mathbb{T}^2$. Такие функции мы называем символами.

Определение 1.4. Дискретным псевдодифференциальным оператором $A_d$ с символом $A_d(\xi)$ в дискретном квадранте $K_d$ называется оператор следующего вида

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^2} h^2 \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} \widetilde{A}_d(\xi) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y})\cdot\xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in K_d.$$

Мы говорим, что оператор $A_d$ является эллиптическим, если

$$ess \inf_{\xi \in \hbar\mathbb{T}^2} |A_d(\xi)| > 0.$$

Мы рассматриваем символы, удовлетворяющие условию

$$c_1(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \le |A_d(\xi)| \le c_2(1 + |\zeta^2|)^{\alpha/2} \tag{1.2}$$

с константами $c_1, c_2$, не зависящими от $h$. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком дискретного псевдодифференциального оператора $A_d$.

Легко доказывается следующий простой результат.

**Лемма 1.1.** *Дискретный псевдодифференциальный оператор $A_d$ с символом $\widetilde{A}_d(\xi)$ является линейным ограниченным оператором $H^s(h\mathbb{Z}^2) \to H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$ с нормой, не зависящей от $h$.*

Далее мы исследуем разрешимость дискретного уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in K_d, \tag{1.3}$$

в пространстве $H^s(K_d)$ при условии, что $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$.

Мы будем использовать некоторую специальную область в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$. Область типа $\mathcal{T}_h(K) = \hbar\mathbb{T}^2 + iK$ называется трубчатой областью над квадрантом $K$, и будем рассматривать аналитические функции $f(x+i\tau)$ в области $\mathcal{T}_h(K)$.

Введем периодическое ядро Бохнера аналогично [4]

$$B_h(z) = \sum_{\tilde{x} \in K_d} e^{i\tilde{x}\cdot(\xi+i\tau)} h^2, \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau \in K,$$

и соответствующий интегральный оператор

$$(B_h \tilde{u}_d)(\xi) = \lim_{\tau \to 0, \tau \in K} \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} B_h(\xi + i\tau - \eta) \tilde{u}_d(\eta) d\eta.$$

**Лемма 1.2.** *Для квадранта $K$ оператор $B_h$ имеет следующий вид*

$$(B_h\tilde{u}_d)(\xi) = \frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta + \lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta$$
$$+\lim_{\tau\to 0+}\frac{ih}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta$$
$$-\lim_{\tau\to 0+}\frac{h^2}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\operatorname{ctg}\frac{h(\xi_1-\eta_1+i\tau_1)}{2}\cot\frac{h(\xi_2-\eta_2+i\tau_2)}{2}\tilde{u}_d(\eta)d\eta,$$

*и $B_h$ — линейный ограниченный оператор в $H^s(\hbar\mathbb{T}^2)\to H^s(\hbar\mathbb{T}^2)$ для $|s|<1/2$. Более того, оператор $B_h$ является проекцией $\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)\to\widetilde{H}^s(K_d)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соответствующие вычисления для одномерного дискретного конуса были проведены в [5]. Мы используем эти результаты, адаптируя их к нашему двумерному случаю. Поскольку

$$\sum_{\tilde{x}_k\in h\mathbb{Z}_+} e^{-i\tilde{x}_k z_k}h = \frac{h}{2}-\frac{ih}{2}\cot\frac{hz_k}{2},\quad z_k=\xi_k+i\tau_k,\quad k=1,2,$$

то, перемножая $e^{-\tilde{x}\cdot\tau}$ с $u_d(\tilde{x})$ и применяя соответствующее свойство преобразования Фурье о произведении и свертке образов Фурье, получаем утверждение.

Ограниченность одномерного оператора с ядром $h\operatorname{ctg}\frac{hz}{2}$ для $|s|<1/2$ доказывается переходом к ядру Коши с помощью экспоненциальной замены и использованием соответствующего результата из [6]; двумерный случай получается повторным применением этих рассуждений. □

Отметим, что оператор $B_h$ является так называемым периодическим бисингулярным оператором. Используя классические результаты для интеграла типа Коши [7, 8], можно аккуратно вычислить граничное значение, но в данном исследовании это не играет принципиальной роли. Поскольку формулы довольно громоздки, можно сделать некоторые упрощения, не теряя общности. Так, например, мы можем рассмотреть пространство $S_1(h\mathbb{Z}^2)\subset S(h\mathbb{Z}^2)$ с нулевыми значениями на осях координат и ввести пространство $H^s(h\mathbb{Z}^2)$ как замыкание множества $S_1(h\mathbb{Z}^2)$. В этом случае первые три слагаемые в выражении для $B_h$ будут равны нулю.

**Лемма 1.3.** *Если $|s|<1/2$, то пространство $\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)$ однозначно представляется в виде прямой суммы*

$$\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2)=\widetilde{H}^s(K_d)\oplus\widetilde{H}^s(h\mathbb{Z}^2\setminus K_d).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это простое следствие леммы 1.2. Действительно, единственное представление функции $\tilde{f}\in\widetilde{H}(h\mathbb{Z}^2)$ будет выглядеть следующим образом

$$\tilde{f}=B_h\tilde{f}+(I-B_h)\tilde{f}.$$

Единственность такого представления возможна только при $|s|<1/2$. □

Для описания картины разрешимости дискретного уравнения (1.3) понадобятся некоторые дополнительные элементы многомерного комплексного анализа. Мы рассмотрим эти вопросы в следующем разделе.

## 2. Периодическая волновая факторизация

Рассматриваемое здесь понятие является периодическим аналогом волновой факторизации [9]. Некоторые первые предварительные соображения и результаты были описаны в [10–13].

О п р е д е л е н и е 2.1. Периодической волновой факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi) \in E_\alpha$ называется его представлением в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,\neq}(\xi) A_{d,=}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\neq}(\xi)$, $A_{d,=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в трубчатые области $\mathcal{T}_h(K)$, $\mathcal{T}_h(-K)$, соответственно, с оценками

$$c_1(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}} \leq |A_{d,\neq}(\xi + i\tau)| \leq c_1'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{æ}{2}},$$

$$c_2(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}} \leq |A_{d,=}(\xi - i\tau)| \leq c_2'(1+|\hat{\zeta}^2|)^{\frac{\alpha-æ}{2}},$$

и константами $c_1, c_1', c_2, c_2'$, не зависящими от $h$, где

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left((e^{-ih(\xi_1+i\tau_1)} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_2+i\tau_2)} - 1)^2\right), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \hbar\mathbb{T}^2, \quad \tau - (\tau_1, \tau_2) \in K.$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической волновой факторизации.

К сожалению, у нас нет алгоритма построения такой факторизации. Но есть некоторые примеры периодических символов, которые допускают такую факторизацию. Приведем один из них.

Пусть $f$ — произвольная функция дискретной переменной, $f \in S(h\mathbb{Z}^2)$, $supp\ f \subset K_d \cup (-K_d)$. Тогда имеем

$$f = \chi_+ f + \chi_- f,$$

где $\chi_\pm$ является характеристической функцией квадранта $\pm K_d$. Применяя дискретное преобразование Фурье, получаем представление $\tilde{f} = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$, и функции $\tilde{f}_\pm$ допускают аналитическое продолжение в $\mathcal{T}_h(\pm K)$ согласно лемме 1.2. Таким образом, можем записать $\exp \tilde{f} = \exp \tilde{f}_+ \cdot \exp \tilde{f}_-$, и мы получаем периодическую волновую факторизацию с нулевым индексом для функции $\exp \tilde{f}$.

*Везде ниже предполагается существование такой периодической волновой факторизации для символа $A_d(\xi)$ с индексом $æ$.*

Сейчас мы рассмотрим наиболее простой случай, когда решение уравнения (1.3) существует и единственно.

**Теорема 2.1.** *Пусть $|æ - s| < 1/2$. Тогда уравнение (1.3) имеет единственное решение для произвольной правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$; решение дается формулой*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi) B_h(A^{-1}_{d,=}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \tag{2.1}$$

*где $\ell v_d$ — произвольное продолжение $v_d$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\ell v_d$ — произвольное продолжение $v_d \in H_0^{s-\alpha}(K_d)$ в $H^{s-\alpha}(h\mathbb{Z}^2)$. Введем функцию

$$w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}) - (A_d u_d)(\tilde{x}),$$

так, что $w(\tilde{x}) = 0$ для $\tilde{x} \notin K_d$.

Теперь запишем (1.3) в виде

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + w_d(\tilde{x}) = (\ell v_d)(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^2,$$

и после применения дискретного преобразования Фурье и периодической волновой факторизации получаем

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2. \tag{2.2}$$

Имеем следующие включения согласно лемме 1.1 и лемме 1.2

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(K_d), \quad A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d), \quad A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2),$$

и тогда по лемме 1.3 правая часть уравнения (2.2) однозначно представима суммой

$$A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) = f_d^+(\xi) + f_d^-(\xi),$$

где

$$f_d^+(\xi) = B_h(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \quad f_d^-(\xi) = (I - B_h)(A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)).$$

Далее перепишем равенство (2.2) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - f_d^+(\xi) = f_d^-(\xi) - A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi)$$

и, используя единственность представления в виде прямой суммы

$$\widetilde{H}^{s-æ}(K_d) \oplus \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d),$$

получаем, что и левая, и правая части должны быть равны нулю. Таким образом, справедливо равенство (2.1). □

## 3. Дискретная краевая задача

В этом разделе мы рассмотрим более интересный случай, когда уравнение (1.3) имеет множество решений. Здесь будут использованы некоторые результаты из [3] относительно формы дискретной (обобщенной) функции, сосредоточенной в начале координат.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $æ - s = n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. *Тогда общее решение уравнения* (1.3) *имеет следующий вид*

$$\tilde{u}_d(\xi) = A_{d,\neq}^{-1}(\xi)Q_n(\xi)B_h(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)) + A_{d,\neq}^{-1}(\xi)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(\xi_1)\hat{\zeta}_2^k + \tilde{d}_k(\xi_2)\hat{\zeta}_1^k\right),$$

*где* $Q_n(\xi)$ *— произвольный многочлен степени* $n$ *от переменных* $\zeta_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, 2$, *удовлетворяющий условию* (1.2) *с* $\alpha = n$; $\tilde{c}_k(\xi_1)$ *и* $\tilde{d}_k(\xi_2)$ *— произвольные функции из* $H^{s_k}(h\mathbb{T})$, $s_k = s - æ + k + 1/2$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

*Имеет место априорная оценка*

$$\|u_d\|_s \leq const\left(\|f\|_{s-\alpha}^+ + \sum_{k=0}^{n-1}([c_k]_{s_k} + [d_k]_{s_k})\right),$$

*где* $[\cdot]_{s_k}$ *обозначает норму в* $H^{s_k}(h\mathbb{R})$, *и* $const$ *не зависит от* $h$.

Доказательство. Начнем с уравнения (2.2). Пусть $Q_n(\xi)$ — произвольный многочлен степени $n$ от переменных $\zeta_k = \hbar(e^{-ih\xi_k}-1)$, $k=1,2$, удовлетворяющий условию (1.2) с $\alpha = n$. Умножим уравнение (2.2) на $Q_n^{-1}(\xi)$

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi), \quad \xi \in \hbar\mathbb{T}^2. \tag{3.1}$$

По лемме 1.1 имеем

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(h\mathbb{Z}^2),$$

а так как $s - æ + n = -\delta$, то по лемме 1.3 запишем единственное разложение

$$Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi) = F_d^+(\xi) + F_d^-(\xi),$$

где

$$F_d^+(\xi) = B_h(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)), \quad F_d^-(\xi) = (I - B_h)(Q_n^{-1}(\xi)A_{d,=}^{-1}(\xi)\widetilde{(\ell v_d)}(\xi)).$$

Учитывая данный факт, перепишем равенство (3.1) в виде

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) + A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi) = Q_n(\xi)F_d^+(\xi) + Q_n(\xi)F_d^-(\xi),$$

далее,

$$A_{d,\neq}(\xi)\tilde{u}_d(\xi) - Q_n(\xi)F_d^+(\xi) = Q_n(\xi)F_d^-(\xi) - A_{d,=}^{-1}(\xi)\tilde{w}_d(\xi).$$

Поскольку $F_d^+(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(K_d)$, $F_d^-(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ+n}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$, то по лемме 1.1 выполнено $Q_n(\xi)F_d^+(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(K_d)$, $Q_n(\xi)F_d^-(\xi) \in \widetilde{H}^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2 \setminus K_d)$. Применяя обратное дискретное преобразование Фурье получаем равенство для двух дискретных (обобщенных) функций. Левая часть обращается в нуль при одном из условий $\tilde{x}_1 < 0$ или $\tilde{x}_2 < 0$, а правая часть обращается в нуль при условии $\tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_2 > 0$. Таким образом, это должна быть дискретная (обобщенная) функция, сосредоточенная на сторонах дискретного квадранта $\{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in h\mathbb{Z}^2 : \{\tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_2 = 0\} \cup \{\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 > 0\}\}$. Используя соответствующий результат из [3], мы получаем следующий вид этого распределения

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(c_k(\tilde{x}_1)(\Delta_2^{(k)}\delta_d)(\tilde{x}_2) + d_k(\tilde{x}_2)(\Delta_1^{(k)}\delta_d)(\tilde{x}_1)\right),$$

где все слагаемые должны быть элементами пространства $H^{s-æ}(h\mathbb{Z}^2)$.

Остается уточнить, сколько слагаемых нам нужно в правой части. Исходим из того, что каждое слагаемое должно принадлежать пространству $\widetilde{H}^s(\hbar\mathbb{T}^2)$.

Рассмотрим слагаемое $c_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Учитывая, что порядок $A_{d,+}^{-1}(\xi)$ равен $-æ$, нам нужно проверить конечность $H^{s-æ}$-нормы для $c_k(\xi_1)\zeta_2^k$. Имеем

$$\begin{aligned}
||c_k(\Delta_2^{(k)}\delta_d)||_{s-æ}^2 &= \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^{s-æ}||c_k(\xi_1)\zeta_2^k|^2 d\xi \\
&= \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2}(1+|\zeta^2|)^{s-æ}||c_k(\xi_1)|^2|\zeta_2^k|^2 d\xi \le a_1\hbar^{2(s-æ+k+1/2)}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}|c_k(\xi_1)|^2 d\xi_1 \\
&\le a_2\int\limits_{\hbar\mathbb{T}}(1+|\zeta_1{}^2|)^{s-æ+k+1/2}|c_k(\xi_1)|^2 d\xi_1,
\end{aligned}$$

и константы $a_1, a_2$ не зависят от $h$.

Последнее слагаемое должно быть $(n-1)$-м, потому что для $n$-го слагаемого мы получаем положительный рост: для $k=n$ имеем

$$s_n = s - æ - n + 1/2 = -n - \delta + n + 1/2 = -\delta + 1/2 > 0.$$

Априорные оценки можно получить так же, как описано в [3]. □

Теперь рассмотрим для уравнения (1.3) случай $n=1$, т. е. $æ - s = 1+\delta$, $|\delta| < 1/2$. Из теоремы 3.1 следует, что общим решением уравнения (1.3) является

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\big(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_2)\big), \tag{3.2}$$

где $c_0, d_0 \in H^{s-æ+1/2}(\hbar\mathbb{Z})$ являются произвольными функциями. Для их однозначного определения добавим к уравнению (1.3) следующие условия

$$\sum_{\tilde{x}_1\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = f_d(\tilde{x}_2), \quad \sum_{\tilde{x}_2\in h\mathbb{Z}_+} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h = g_d(\tilde{x}_1), \quad \sum_{\tilde{x}\in h\mathbb{Z}_{++}} u_d(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)h^2 = 0. \tag{3.3}$$

Эти дополнительные условия помогут однозначно определить неизвестные функции $c_0, d_0$ в решении (3.2). Действительно, с помощью дискретного преобразования Фурье перепишем условия (3.3) в виде

$$\tilde{u}_d(0,\xi_2) = \tilde{f}_d(\xi_2), \quad \tilde{u}_d(\xi_1,0) = \tilde{g}_d(\xi_1), \quad \tilde{u}_d(0,0) = 0. \tag{3.4}$$

Теперь подставим формулы (3.4) в (3.2). Первые две формулы дадут равенства

$$\tilde{u}_d(0,\xi_2) = A^{-1}_{d,\neq}(0,\xi_2)(\tilde{c}_0(0) + \tilde{d}_0(\xi_2)) = \tilde{f}_d(\xi_2),$$

$$\tilde{u}_d(\xi_1,0) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi_1,0)(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(0)) = \tilde{g}_d(\xi_1).$$

Из этих равенств, согласно третьему условию, следует соотношение $\tilde{f}_d(0) = \tilde{g}_d(0)$, из которого получаем $\tilde{c}_0(0) + \tilde{d}_0(0) = 0$, и, значит, $\tilde{c}_0(0) = \tilde{d}_0(0) = 0$.

Таким образом, получаем

$$\tilde{u}_d(\xi) = A^{-1}_{d,\neq}(\xi)\left(A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1) + A_{d,\neq}(0,\xi_2)\tilde{f}_d(\xi_2)\right). \tag{3.5}$$

Остается сформулировать и доказать следующий результат.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $f_d, g_d \in H^{s+1/2}(h\mathbb{Z}), v_d \equiv 0$. *Тогда дискретная задача* (1.3), (3.3) *имеет единственное решение, которое дается формулой* (3.5).

*Справедлива априорная оценка*

$$\|u_d\|_s \le const(\|f_d\|_{s+1/2} + \|g_d\|_{s+1/2}),$$

*где const не зависит от* $h$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно доказать только априорную оценку. Рассмотрим первое слагаемое

$$\|A^{-1}_{d,\neq}(\xi)A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1)\|^2_s = \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} |A^{-1}_{d,\neq}(\xi_1,\xi_2)A_{d,\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}_d(\xi_1)|^2(1+|\zeta^2|)^s d\xi_1 d\xi_2$$

$$\le C\hbar^{2s}\int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} |g_d(\xi_1)|^2 d\xi \le C_1\hbar^{2s+1}\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} |g_d(\xi_1)|^2 d\xi_1$$

$$\le C_2\int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} |g_d(\xi_1)|^2(1+|\zeta_1^2|)^{s+1/2} d\xi_1 = \|g_d\|^2_{s+1/2}.$$

Второе слагаемое оценивается аналогично. □

## 4. Сравнение дискретных и непрерывных решений

Непрерывный аналог дискретной краевой задачи (1.3), (3.3) описан в [14]. Здесь мы рассматриваем однородное дискретное уравнение (1.3), $v_d \equiv 0$.

Пусть $A$ — псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1+|\xi|)^\alpha$$

и допускающим волновую факторизацию по квадранту $K$ с индексом æ. Рассмотрим уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K, \tag{4.1}$$

со следующими дополнительными условиями

$$\int\limits_0^{+\infty} u(x_1,x_2)dx_1 = f(x_2), \quad \int\limits_0^{+\infty} u(x_1,x_2)dx_2 = g(x_1), \quad \int\limits_{-K} u(x)dx = 0. \tag{4.2}$$

Решение задачи (4.1), (4.2) разыскивается в пространстве $H^s(K)$ [9], а граничные функции берутся из пространства $H^{s+1/2}(\mathbb{R}_+)$. Такая задача рассматривалась в [14], она имеет решение

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\left(A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1) + A_{\neq}(0,\xi_2)\tilde{f}(\xi_2)\right) \tag{4.3}$$

при условии, что символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [9] относительно $K$

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi)$$

с индексом æ таким, что $æ - s = 1 + \delta$, $|\delta| < 1/2$.

Для построения дискретной краевой задачи, которая является достаточно точным приближением к (4.1), (4.2), следует выбрать $A_d(\xi)$ и $f_d, g_d$ специальным образом. Введем оператор $l_h$, который действует следующим образом. Для функции $u$, заданной на $\mathbb{R}$, берется ее преобразование Фурье $\tilde{u}$, затем его сужение на $\hbar T$ и периодическое продолжение на $\mathbb{R}$. Наконец, берется его обратное дискретное преобразование Фурье и получается функция дискретного переменного $(l_h u)(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in h\mathbb{R}$. Таким образом,

$$f_d = l_h f, \quad g_d = l_h g.$$

Далее, аналогично строим символ дискретного оператора $A_d$. Если имеется волновая факторизация символа $A(\xi)$, мы определяем сужения сомножителей на $\hbar\mathbb{T}^2$ с последующим периодическим продолжением на $\mathbb{R}^2$, а периодический символ $A_d(\xi)$ является произведением этих сомножителей. Для таких $f_d, g_d$ и символа $A_d(\xi)$ получаем следующий результат.

**Теорема 4.1.** *Пусть $f, g \in S(\mathbb{R})$, $æ > 1$. Тогда имеем следующую оценку для решений $u$ и $u_d$ непрерывной задачи (4.1), (4.2) и дискретной задачи (1.3), (3.3)*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq C(f,g)h^\beta,$$

*где константа $C(f,g)$ зависит от функций $f, g$, число $\beta > 0$ может быть произвольным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам нужно сравнить две функции (3.5) и (4.3), точнее их обратное дискретное преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье в точках $\tilde{x} \in K_d$. Имеем

$$u_d(\tilde{x}) - u(\tilde{x}) = \frac{1}{4\pi^2}\left( \int\limits_{\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}_d(\xi)d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}\tilde{u}(\xi)d\xi \right)$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} A_{\neq}^{-1}(\xi) \left( A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1) + A_{\neq}(0,\xi_2)\tilde{f}(\xi_2) \right) d\xi,$$

так как, согласно нашему выбору $A_d, f_d, g_d$, функции $\tilde{u}_d$ и $\tilde{u}$ совпадают в точках $\xi \in \hbar\mathbb{T}^2$.

Оценим одно слагаемое. Так как $\tilde{g} \in S(\mathbb{R})$ имеем

$$\left| \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\hbar\mathbb{T}^2} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} A_{\neq}^{-1}(\xi) A_{\neq}(\xi_1,0)\tilde{g}(\xi_1)d\xi \right| \le C \int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{(1+|\xi_1|+|\xi_2|)^{æ}} \int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty} |\xi_1|^{-\gamma}d\xi_1.$$

Отсюда следует требуемая оценка. □

## 5. Заключение

В этой статье мы рассмотрели только двумерный конус и специфические граничные условия, однако авторы продолжают работу в этом направлении и намерены рассмотреть дискретные краевые задачи с классическими условиями Дирихле и Неймана.

В качестве первых практических приложений авторы планируют изучить дискретный вариант задачи в четверти плоскости, возникающей в теории дифракции и теории упругости [9], в надежде, что это будет полезным следствием разработанной теории.

## References


[1] А. А. Самарский, *Теория разностных систем*, Наука, М., 1977; англ. пер.:A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, CRC Press, Boca Raton, 2001.

[2] В. С. Рябенький, *Методы разностных потенциалов и его приложения*, Физматлит, М., 2010; англ. пер.:V. S. Ryaben'kii, *Method of Difference Potentials and its Applications*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2002.

[3] A. Vasilyev, V. Vasilyev, "Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space", *Mathematical Modelling and Analysis*, **23**:3 (2018), 492–506.

[4] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1978; англ. пер.:V. S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, Mir Publ., Moscow, 1979.

[5] A. Vasilyev, V. Vasilyev, "Discrete singular operators and equations in a half-space", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **3**:1 (2013), 84–93.

[6] Г. И. Эскин, *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений*, Наука, М., 1973; англ. пер.:G. I. Eskin, *Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations*, AMS, Providence, 1981.

[7] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 3-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер.:F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, 3rd ed., Dover Publications, Mineola, 1981.

[8] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, 3-е изд., Наука, М., 1968; англ. пер.:N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, 3rd ed., North Holland, Amsterdam, 1976.

[9] V. B. Vasil'ev, *Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publ., Dordrecht–Boston–London, 2000.

[10] V. Vasilyev, "The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, discrete pseudo-differential operators", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applications (ICNAAM-2016) (Rhodes, Greece, September 19–25), **1863**, AIP Publishing, New York, 2017, 140014.

[11] V. Vasilyev, "Discrete equations and periodic wave factorization", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2016) (Almaty, Kazakhstan, September 7–10), **1759**, AIP Publishing, New York, 2016, 020126.

[12] V. Vasilyev, "On discrete boundary value problems", *AIP Conference Proceedings*, Proceedings of the International Conference "Functional Analysis in Interdisciplinary Applications" (FAIA2017) (Astana, Kazakhstan, October 2–5), **1880**, AIP Publishing, New York, 2017, 050010.

[13] V. B. Vasilyev, "Discreteness, periodicity, holomorphy, and factorization", *Integral Methods in Science and Engineering*. V. 1: *Theoretical Technique*, eds. C. Constanda, M. Dalla Riva, P. D. Lamberti, P. Musolino, Springer International Publ., New York, 2017, 315–324.

[14] V. B. Vasil'ev, "On Some new boundary-value problems in nonsmooth domains", *Journal of Mathematical Sciences*, **173**:2 (2011), 225–230.



**Информация об авторах**

**Васильев Владимир Борисович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и компьютерного моделирования. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация. E-mail: vbv57@inbox.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-9351-8084

**Машинец Анастасия Александровна**, аспирант, кафедра прикладной математики и компьютерного моделирования. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация. E-mail: anastasia.kho@yandex.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-2440-8556


Конфликт интересов отсутствует.


**Для контактов:**
Васильев Владимир Борисович
E-mail: vbv57@inbox.ru



Поступила в редакцию 19.04.2023 г.
Поступила после рецензирования 31.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.



**Information about the authors**

**Vladimir B. Vasilyev**, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Applied Mathematics And Computer Modeling Department. Belgorod National Research University, Belgorod, Russian Federation. E-mail: vbv57@inbox.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-9351-8084

**Anastasia A. Mashinets**, Post-Graduate Student, Applied Mathematics and Computer Modeling Department. Belgorod National Research University, Belgorod, Russian Federation. E-mail: anastasia.kho@yandex.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0003-2440-8556


There is no conflict of interests.


**Corresponding author:**
Vladimir B. Vasilyev
E-mail: vbv57@inbox.ru



Received 19.04.2023
Reviewed 31.05.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192
УДК 517.55

# Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$

**Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ**
ГАПОУ «Подмосковный колледж «Энергия»
142450, Российская Федерация, Московская обл., г. Старая Купавна, ул. Большая Московская, 190

**Аннотация.** В работе найдены точные неравенства для наилучшего приближения произвольной аналитической в единичном круге функции $f$ алгебраическими комплексными полиномами через модуль непрерывности $m$-го порядка производной $r$-го порядка $f^{(r)}$ в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Также через модуль непрерывности $m$-го порядка производной $f^{(r)}$ введен класс аналитических в единичном круге функций $W_m^{(r)}(h,\Phi)$, определяемый заданной монотонно возрастающей на положительной полуоси мажорантой $\Phi$, $h \in (0,\pi/n]$, $n > r$. При определенных условиях на мажоранту $\Phi$ для введенного класса функций вычислены точные значения некоторых известных $n$-поперечников. В работе используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций, а также метод оценки снизу $n$-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах, разработанный В. М. Тихомировым. Изложенные в данной работе результаты являются продолжением и обобщением некоторых ранее полученных результатов о наилучших приближениях и значениях поперечников в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$.

**Ключевые слова:** аналитическая функция, наилучшее приближение, модуль непрерывности высших порядков, весовое пространство Бергмана, поперечники

**Для цитирования:** *Лангаршоев М.Р.* Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 182–192. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192

# The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$

**Mukhtor R. LANGARSHOEV**
College near Moscow "Energia"
190 Bolshaya Moskovskaya St., Staraya Kupavna 142450, Moscow Region, Russian Federation

**Abstract.** In the paper, exact inequalities are found for the best approximation of an arbitrary analytic function $f$ in the unit circle by algebraic complex polynomials in terms of the modulus of continuity of the $m$ th order of the $r$ th order derivative $f^{(r)}$ in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Also using the modulus of continuity of the $m$-th order of the derivative $f^{(r)}$, we introduce a class of functions $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ analytic in the unit circle and defined by a given majorant $\Phi$, $h \in (0,\pi/n]$, $n > r$, monotonically increasing on the positive semiaxis. Under certain conditions on the majorant $\Phi$, for the introduced class of functions, the exact values of some known $n$-widths are calculated. We use methods for solving extremal problems in normed spaces of functions analytic in a circle, as well as the method for estimating from below the $n$-widths of functional classes in various Banach spaces developed by V. M. Tikhomirov. The results presented in this paper are a continuation and generalization of some earlier results on the best approximations and values of widths in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$.

**Keywords:** analytic function, best approximation, modulus of higher-order continuity, weighted Bergman space, widths

**Mathematics Subject Classification:** 30E05, 30E10, 42A10.

**For citation:** Langarshoev M.R. The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 182–192. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-182-192 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

В последние годы в теории приближений интенсивно изучаются неравенства, оценивающие величину наилучшего приближения функции посредством модулей непрерывности высших порядков в различных пространствах аналитических функций. Наиболее полно вопросы приближения аналитических функций и вычисления поперечников классов функций изучены в пространствах Харди. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций получены в работах [1–3]. Именно результаты [1] стали отправным пунктом при получении точных значений колмогоровских поперечников в работах [3, 4]. В развитие этой тематики в работах [5, 6] были получены точные значения колмогоровских $n$-поперечников (определенных в [7]) в метрике пространства Харди для некоторых классов аналитических в единичном круге функций, граничные значения которых допускают представление сверткой, либо усредненные модули непрерывности или гладкости их граничных значений мажорируются заданными функциями. Эта тематика была продолжена во многих работах, в том числе в [8–13]. В пространстве Бергмана исследование указанных вопросов было начато в [14, 15], а первые результаты в весовом пространстве Бергмана $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ были получены в [16]. Дальнейшие исследования в этом направлении проводились, например, в работах [17–23].

В настоящей работе приведем обобщение результатов, полученных в [16], и вычислим значения поперечников классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана.

## 1. Основные понятия

Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество аналитических в $U$ функций. Для произвольной функции $f \in A(U)$ символом $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ обозначим банахово пространство Бергмана с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{(U)} \gamma(|z|)|f(z)|^2\,d\sigma\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулю функция, суммируемая на множестве $U$, $d\sigma$ — элемент площади, а интеграл в (1.1) понимается в смысле Лебега. Отметим, что $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением, определенным для любых $f, g \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$ формулой

$$(f, g) = \iint\limits_{D} \gamma(|z|)f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma.$$

Переходя к полярным координатам $z = \rho e^{it}$, $0 \le \rho < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, норму (1.1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\gamma} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^2\,d\rho\,dt\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)M_2^2(f;\rho)\,d\rho\right)^{1/2},$$

где

$$M_2(f;\rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Обозначим через

$$\mathscr{P}_n = \Big\{p_n(z): \ p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C}\Big\}$$

совокупность всех алгебраических комплексных полиномов степени $n$. Определим формулой

$$E_n(f)_{2,\gamma} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma}: \ \ p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}\} \tag{1.2}$$

величину наилучшего приближения функции $f(z) \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$ подпространством $\mathscr{P}_{n-1}$. Легко доказать, что среди произвольных полиномов $p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}$ наименьшее значение нормы $\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma}$ в (1.2) доставляет частная сумма Тейлора

$$T_{n-1}(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$$

в разложении $f(z)$ в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_n(f)_{2,\gamma} = \|f - T_{n-1}(f; z)\|_{2,\gamma} = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)\, d\rho\right\}^{1/2}. \tag{1.3}$$

Далее, для произвольного множества $\mathfrak{M} \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ обозначим

$$\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_{2,\gamma} := \sup\{E_n(f)_{2,\gamma}: \ f \in \mathfrak{M}\}.$$

Положим

$$M_2(\Delta_m(f; \cdot, \cdot, u), \rho) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\Delta_m(f; \rho, t, u)|^2 dt\right)^{1/2},$$

где символом

$$\Delta_m(f; \rho, t, u) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(t+ku)}\right)$$

обозначена разность $m$-го порядка функции $f(z) = f\left(\rho e^{i(t+ku)}\right)$ по аргументу $t$. Введем в рассмотрение модуль непрерывности, который определим соотношением

$$\omega_m(f; \rho, \delta)_2 = \sup\{M_2(\Delta_m(f; \cdot, \cdot, u), \rho): \ |u| \le \delta\}. \tag{1.4}$$

Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ производную $r$-го порядка функции $f(z)$ обозначим

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r}, \quad \alpha_{k,r} = k!\left[(k-r)!\right]^{-1}, \ \ k \ge r.$$

Всюду далее через $\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, будем обозначать множество функций $f \in A(U)$, у которых $z^r f^{(r)} \in \mathscr{B}_{2,\gamma}$.

Пусть $S$ — единичный шар в пространстве $\mathscr{B}_{2,\gamma}$, $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из $\mathscr{B}_{2,\gamma}$, $\Lambda_n \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ — $n$-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathscr{B}_{2,\gamma}$ — подпространство коразмерности $n$; пусть $\mathcal{L}: \ \mathscr{B}_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, а

$\mathcal{L}^{\perp}:\mathscr{B}_{2,\gamma}\to\Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ на подпространство $\Lambda_n$.

Величины

$$b_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0:\ \varepsilon S\cap\Lambda_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_{n+1}\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\cap\Lambda^n\right\}:\Lambda^n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-\varphi\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ \varphi\in\Lambda_n\right\}:f\in\mathfrak{M}\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \mathcal{L}\mathscr{B}_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\mathcal{L}^{\perp}f\|_{\mathscr{B}_{2,\gamma}}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\mathcal{L}^{\perp}\mathscr{B}_{2,\gamma}\subset\Lambda_n\right\}:\Lambda_n\subset\mathscr{B}_{2,\gamma}\right\}$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным $n$-поперечниками в пространстве $\mathscr{B}_{2,\gamma}$. Поскольку $\mathscr{B}_{2,\gamma}$ является гильбертовым пространством, для перечисленных $n$-поперечников выполняются следующие соотношения (см. [24, с. 239]):

$$b_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})\le d^n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})\le d_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\lambda_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma})=\Pi_n(\mathfrak{M},\mathscr{B}_{2,\gamma}). \tag{1.5}$$

Пусть задана непрерывная возрастающая на полусегменте $0\le h<\infty$ функция $\Phi(h)$ такая, что $\Phi(0)=0$. Через $W_m^{(r)}(h,\Phi)$, где $m,r\in\mathbb{N}$, $0<h\le\pi/n$, обозначим класс функций $f\in\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1\int_0^h\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^rf^{(r)};\rho,t\right)_2\sin^{\nu}\frac{\beta}{h}t\,d\rho\,dt\le\Phi^2(h),$$

$0<\beta\le\pi$, $0<\nu\le 2n\ln[n/(n-r)]$, $n>r$. Для этого класса функцию $\Phi(h)$ будем называть мажорантой.

Положим

$$(1-\cos nt)_*^m=\begin{cases}(1-\cos nt)^m, & \text{если}\quad nt<\pi,\\ 2^m, & \text{если}\quad nt\ge\pi.\end{cases}$$

## 2. Основные результаты

**Теорема 2.1.** *Пусть $m,n,r\in\mathbb{N}$, $n>r$, $0<h\le\pi/n$ и $\varphi(t)$ — неотрицательная суммируемая на отрезке $[0,h]$ не эквивалентная нулю функция. Тогда для произвольной функции $f(z)\in\mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ имеет место точное неравенство*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\left(\int_0^1\int_0^h\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^rf^{(r)};\rho,t\right)_2\varphi(t)\,d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}. \tag{2.1}$$

*Равенство в соотношении (2.1) реализуется функцией $f_0(z)=z^n\in\mathscr{B}_{2,\gamma}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной аналитической функции $f(z) \in \mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, согласно определению модуля непрерывности (1.4), получаем

$$\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 = 2^m \sup_{|u| \leq t} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \left(1 - \cos ku\right)^m \rho^{2k}. \tag{2.2}$$

В силу соотношения (2.2) имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \\ &\qquad \geq 2^m \int_0^1 \rho\gamma(\rho) \Bigg[ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos kt)^m \rho^{2k} \varphi(t)\, d\rho\, dt \Bigg] \\ &\qquad = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left( \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos kt)^m \varphi(t) dt \right) |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение функцию натурального аргумента

$$y(k) = \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos kt)^m \varphi(t) dt.$$

Это функция, как нами было показано в работе [22], для любого $k \geq n > r$ и неотрицательного $\varphi(t)$, является строго возрастающей. Поэтому

$$\inf\{y(k) :\, k \geq n\} = y(n),$$

и из (2.3) получим

$$\int_0^1 \int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \geq 2^m \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos nt)^m \varphi(t)\, dt \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1} \gamma(\rho)\, d\rho.$$

С учетом равенства (1.3) отсюда следует

$$\int_0^1 \int_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2 \left(z^r f^{(r)}; \rho, t\right)_2 \varphi(t)\, d\rho\, dt \geq 2^m \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos nt)^m \varphi(t)\, dt\, E_n^2(f)_{2,\gamma}. \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) вытекает неравенство (2.1).

Чтобы доказать точность неравенства (2.1), рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Для этой функции, с одной стороны, согласно соотношению (1.2) непосредственным вычислением получим

$$E_n(f_0)_{2,\gamma} = \left\{ \int_0^1 \rho^{2n+1} \gamma(\rho)\, d\rho \right\}^{1/2}.$$

С другой стороны, из правой части неравенства (2.1) и соотношения (1.4) получим

$$\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f_0^{(r)};\rho,t\right)_2\varphi(t)d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}=\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)2^m\alpha_{n,r}^2\rho^{2n}(1-\cos nt)^m\varphi(t)d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right)^{1/2}\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\varphi(t)\,dt\right)^{1/2}}=\left\{\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right\}^{1/2},$$

т. е. правая и левая части неравенства (2.1) совпадают. Таким образом точность (2.1) установлена, и тем самым теорема 2.1 доказана. □

Из теоремы 2.1 вытекает следующий полученный М. Ш. Шабозовым и О. Ш. Шабозовым в работе [16] результат.

**Следствие 2.1.** *В условиях теоремы 2.1 при* $\varphi(t)=\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t,\ \ 0<\nu\le 2\ln[n/(n-r)]$ *имеет место соотношение*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^h \rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f^{(r)};\rho,t\right)_2\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,d\rho\,dt\right)^{1/2}}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^h(1-\cos nt)^m\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}. \tag{2.5}$$

*В частности, из соотношения (2.5), при* $\nu=1,\ \ \beta=\pi$ *и* $h=\pi/n$ *получаем*

$$E_n(f)_{2,\gamma}\le\frac{\sqrt{m+1}}{2^{m+1/2}\alpha_{n,r}}\left(n\int\limits_0^1\int\limits_0^{\pi/n}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2\left(z^r f^{(r)};\rho,t\right)_2\sin nt\,d\rho\,dt\right)^{1/2}.$$

**Теорема 2.2.** *Если для любого заданного* $0<\mu\le 1$ *и для всех* $\lambda>0,\ \ 0<\beta\le\pi,$ $0<\nu\le 2n\ln[n/(n-r)],\ \ 0<h\le\pi/n$ *функция* $\Phi(h)$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi^2(\mu h)\int\limits_0^{\lambda\pi}(1-\cos v)_*^m\sin^\nu\frac{\beta v}{\lambda\pi}\,dv\le\Phi^2(\lambda h)\int\limits_0^{\mu\pi}(1-\cos v)^m\sin^\nu\frac{\beta v}{\mu\pi}\,dv, \tag{2.6}$$

*то имеет место равенство*

$$\sigma_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big)=\frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\int\limits_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\dfrac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n), \tag{2.7}$$

*где* $m,n,r\in\mathbb{N},$ *а* $\sigma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* $n$*-поперечников.*

Доказательство. Из неравенства (2.5) при $h = \mu\pi/n$, соотношения (1.5) и определения класса $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ получаем оценки сверху для проекционного $n$-поперечника

$$\sigma_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) \le \mathscr{E}_n\big(W_m^{(r)}(h,\Phi)\big)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n). \tag{2.8}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского поперечника класса $W_m^{(r)}(h,\Phi)$ для произвольного полинома $p_n(z)=\sum_{k=0}^n a_k(f)z^k \in \mathscr{P}_n$ оцениваем $\omega_m(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2$. На множестве $\mathscr{P}_n\cap\mathscr{B}_{2,\gamma}$ введем в рассмотрение $(n+1)$-мерную сферу комплексных полиномов

$$S_{n+1}=\left\{p_n(z)\in\mathscr{P}_n:\,\|p_n\| = \frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\gamma\frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n)\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(h,\Phi)$.

Согласно определению (1.4) модуля непрерывности $m$-го порядка, с учетом равенства

$$\|p_n(z)\|_{2,\gamma} = \left(\sum_{k=0}^n|a_k(f)|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)\,d\rho\right)^{1/2}$$

для произвольного $p_n(z)\in S_{n+1}$ будем иметь

$$\omega_m^2(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2 \le 2^m\alpha_{n,r}^2(1-\cos nt)_*^m\sum_{k=0}^n|a_k(f)|^2\rho^{2k}.$$

Отсюда следует

$$\int_0^1\int_0^{\lambda h}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,d\rho\,dt \le 2^m\alpha_{n,r}^2\sum_{k=0}^n|a_k(f)|^2\int_0^1\rho^{2k+1}\gamma(\rho)\,d\rho\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,dt$$
$$= 2^m\alpha_{n,r}^2\|p_n\|^2\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}\,dt. \tag{2.9}$$

Заменив в (2.9) норму полинома по формуле радиуса сферы, получим неравенство

$$\int_0^1\int_0^{\lambda h}\rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}d\rho dt \le \frac{\Phi^2(\mu\pi/n)\displaystyle\int_0^{\lambda h}(1-\cos nt)_*^m\sin^\nu\frac{\beta t}{\lambda h}dt}{\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m\sin^\nu\frac{n\beta t}{\mu\pi}tdt}.$$

В правой части последнего неравенства сделаем замену переменной $nt = v$, затем введем обозначение $h = \pi/n$ и, используя условие (2.6), получим неравенство

$$\int_0^1\int_0^{\lambda h} \rho\gamma(\rho)\omega_m^2(z^r p_n^{(r)};\rho,t)_2 \sin^\nu \frac{\beta t}{\lambda h}\,d\rho\,dt \le \frac{\Phi^2(\mu h)\displaystyle\int_0^{\lambda\pi}(1-\cos v)_*^m \sin^\nu \frac{\beta v}{\lambda\pi}\,dv}{\displaystyle\int_0^{\mu\pi}(1-\cos v)^m \sin^\nu \frac{\beta v}{\mu\pi}\,dv} \le \Phi^2(\lambda h).$$

Это означает, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(h,\Phi)$.

Учитывая соотношения (1.5), согласно определению бернштейновского $n$-поперечника запишем оценки снизу всех $n$-поперечников

$$\begin{aligned}\sigma_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) &\ge b_n\Big(W_m^{(r)}(h,\Phi),\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big) \ge b_n\Big(S_{n+1},\mathscr{B}_{2,\gamma}\Big)\\ &\ge \frac{1}{\left(2^m\alpha_{n,r}^2\displaystyle\int_0^{\mu\pi/n}(1-\cos nt)^m \sin^\nu \frac{\beta}{h}t\,dt\right)^{1/2}}\Phi(\mu\pi/n).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Равенство (2.7) получаем путем сопоставления оценки сверху (2.8) с оценкой снизу (2.10), чем и завершаем доказательство теоремы 2.2. □

## References


[1] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].

[2] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.:L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.

[3] Л. В. Тайков, “Некоторые неравенства в теории приближения”, *Analysis Mathematica*, **2**:1 (1976), 77–85. [L. V. Taikov, “Some exact inequalities in the theory of approximation of functions”, *Analysis Mathematica*, **2**:1 (1976), 77–85 (In Russian)].

[4] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.:V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **15**:3 (1960), 75-111.

[5] Л. В. Тайков, “Поперечники некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **22**:2 (1977), 285–295; англ. пер.:L. V. Taikov, “Diameters of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **22**:2 (1977), 650–656.

[6] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351; англ. пер.:N. Ainulloev, L. V. Taikov, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, **40**:3 (1986), 699–705.

[7] A. Kolmogoroff, “Uber Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse”, *Annals of Mathematics*, **37**:1 (1936), 107–111.

[8] S. D. Fisher, C. A. Micchelli, “The $n$-widths of sets analytic function”, *Duke Math. J.*, **47** (1980), 789–801.

[9] М. З. Двейрин, И. В. Чебаненко, “О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций”, *Теория отображений и приближение функций*, Наукова думка, Киев, 1983, 62–73. [M. Z. Dveyrin, I. V.Chebanenko, “On polynomial approximation in Banakh spaces of analytic functions”, *Mapping Theory and Funktion Approximation*, Naukova Dumka Publ., Kiev, 1983, 62–73 (In Russian)].

[10] Ю. А. Фарков, “О поперечниках некоторых классов аналитических функций”, *УМН*, **39**:1(235) (1984), 161–162; англ. пер.:Yu. A. Farkov, “On diameters of some classes of analytic functions”, *Russian Math. Surveys*, **39**:1 (1984), 153–154.

[11] A. Pinkus, *$n$-width in Approximation Theory*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

[12] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.

[13] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций”, *ДАН России*, **382**:6 (2002), 747–749. [M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Best approximation and values of the widths of some classes of analytical functions”, *Doklady Mathematics*, **382**:6 (2002), 747–749 (In Russian)].

[14] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7 (1990), 873–881; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classses of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:7 (1990), 769–778.

[15] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. II”, *Укр. матем. журн.*, **42**:8 (1990), 1019–1026; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classses of functions analytic in the unit disc. II”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:8 (1990), 907–914.

[16] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *Доклады Академии наук*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.

[17] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–21; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Sbornik Mathematics*, **201**:8 (2010), 1091–1110.

[18] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве бергмана”, *Доклады Академии наук*, **450**:5 (2013), 518–521; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “The best linear methods and values of widths for some classes of analytic functions in the Bergman weight space”, *Doklady Mathematics*, **87**:3 (2013), 338–341.

[19] Р. Р. Акопян, М. С. Саидусайнов, “Три экстремальные задачи в пространствах Харди и Бергмана аналитических функций в круге”, Тр. ИММ УрО РАН, **23**, №3, 2017, 22–32; англ. пер.:R. R. Akopyan, M. S. Saidusajnov, “Three extremal problems in the Hardy and Bergman spaces of functions analytic in a disk”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **303** (2018), 25–35.

[20] С. Б. Вакарчук, “Оценки значений $n$-поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$”, *Матем. заметки*, **108**:6 (2020), 803–822; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Estimates of the values of $n$-widths of classes of analytic functions in the weight spaces $H_{2,\gamma}(D)$”, *Mathematical Notes*, **108**:6 (2020), 775–790.

[21] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в $L_2$”, *Изв. вузов. Матем.*, **64**:6 (2020), 65–72; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusaynov, “Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in $L_2$”, *Russian Mathematics*, **64**:6 (2020), 56–62.

[22] М. Р. Лангаршоев, “Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Чебышевский сборник*, **22**:2 (2021), 135–144. [M. R. Langarshoev, “Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space”, *Chebyshevskii Sbornik*, **22**:2 (2021), 135–144 (In Russian)].

[23] М. Р. Лангаршоев, “О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 339–350. [M. R. Langarshoev, “On the best approximation and the values

of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 339–350 (In Russian)].

[24] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

**Информация об авторе**

**Лангаршоев Мухтор Рамазонович**, кандидат физико-математических наук, преподаватель математики. Подмосковный колледж «Энергия», г. Старая Купавна, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Поступила в редакцию 03.05.2023 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

**Information about the author**

**Mukhtor R. Langarshoev**, Candidate of Physics and Mathematics, Mathematics Teacher. College near Moscow "Energia", Staraya Kupavna, Moscow Region, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru

**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Received 03.05.2023
Reviewed 03.06.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

УДК 517.968

# Об исследовании задачи Неймана для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости

**Джасур Музофирович ОДИНАБЕКОВ**

ГОУ «Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе»

734002, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1

**Аннотация.** Как известно, на основе применения методов теории сингулярных интегральных уравнений были получены тонкие результаты в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе изучается вопрос о разрешимости задачи Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка с двумя независимыми переменными по ограниченной области. При исследовании данной задачи используется метод, разработанный Б. Боярским, суть которого заключается в построении матричной функции по главной части системы и разбиении полиномов на гомотопические классы. С помощью этого подхода нами показана эллиптичность рассматриваемой системы. Также показано, что в соответствии с гомотопическими классами эллиптическая система двух уравнений с двумя независимыми переменными шестого порядка эквивалентным образом приводится к сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области. Методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению найдены эффективные условия нетеровости и получена формула для вычисления индекса изучаемой задачи.

**Ключевые слова:** эллиптическая система, задача Неймана, сингулярные интегральные уравнения, нетеровость, индекс задачи

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

**Для цитирования:** *Одинабеков Д.М.* Об исследовании задачи Неймана для эллиптических систем двух уравнений шестого порядка на плоскости // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 193–202. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

# On the study of the Neumann problem for elliptic system of two sixth order equations on the plane

**Jasur M. ODINABEKOV**
Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe
35/1 Bokhtar St., Dushanbe 734002, Tajikistan

**Abstract.** As it is known, on the basis of the methods of the theory of singular integral equations, fine results were obtained in the theory of partial differential equations. In this paper, we study the question of solvability of the Neumann problem for an elliptic system of two six order equations with two independent variables in a bounded domain. During the study of this problem, the method developed by Boyarsky is used. The essence of this method is to construct a matrix function on base of the main part of the given system and split polynomials into homotopy classes. Using this approach, the ellipticity of the system under consideration is proved. It is also shown that, in accordance with homotopy classes, an elliptic system of two sixth order equations with two independent variables can be equivalently reduced to a singular integral equation over a bounded domain. Using the method of passing to an equivalent singular integral equation over a bounded domain, effective Noetherian conditions are found, and a formula for calculating the index of the problem is obtained.

**Keywords:** elliptic system, Neumann problem, singular integral equations, Noetherian conditions, problem index

**Acknowledgements:** The work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation within the framework of program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics under the agreement no. 075-15-2022-284.

**Mathematics Subject Classification:** 35J58, 45F15.

**For citation:** Odinabekov J.M. On the study of the Neumann problem for elliptic system of two sixth order equations in the plane. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 193–202.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-193-202

## Введение

В работе [1] в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ было изучено дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^j \partial y^{2-j}} + b_1(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + b_2(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial\omega} + b_0(x,y)\omega = g(x,y), \tag{0.1}$$

где $a_j(x,y), b_j(x,y)$ $(j = 0,1,2)$ — квадратные матрицы размера $2\times 2$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ — неизвестная вектор-функция переменных $x$ и $y$, $g = (g_1, g_2)$ — заданная вектор-функция.

Оператор, стоящий в левой части (0.1), называется эллиптическим в области $\overline{D} = D \cup \Gamma$ с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, если в любой точке $(x,y) \in \overline{D}$ выполняется условие

$$\det \sum_{j=0}^{2} a_j(x,y) \neq 0.$$

Для уравнения (0.1) *задача Дирихле* ставится следующим образом: в области $D$ с границей $\Gamma$ требуется найти регулярное решение уравнения (0.1), принадлежащее классу $C(D)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\omega|_\Gamma = g(x,y). \tag{0.2}$$

Из работы М. И. Вишика [2] следует, что если система (0.1) сильно эллиптическая (система (0.1) называется сильно эллиптической в точке $(x,y)$, если матрица $\sum_{j=0}^{2} a_j(x,y)\xi^j$ является положительной для любых действительных чисел $\xi^0, \xi^1, \xi^2$, не обращающихся одновременно в нуль), то задачи Дирихле для (0.1) и сопряженной системы образуют фредгольмову пару граничных задач. Общие эллиптические системы этим свойством, вообще говоря, не обладают. Как показывают примеры А.В. Бицадзе (см. [3]), однородная задача (0.1), (0.2) для эллиптической системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial x\partial y} = 0, \\ 2\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2\omega_2}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

может допускать бесконечное число линейно независимых решений.

Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (0.1), (0.2) и более общие граничные задачи изучены в работах А. В. Бицадзе [4–6], И. Н. Векуа [7, 8], Б. В. Боярского [9, 10]. Задачи, рассмотренные в этих работах, приведены к эквивалентному интегральному уравнению нормального типа, доказана нетеровость этих задач и найден их индекс. Тесная связь между теорией эллиптических дифференциальных уравнений и теорией функций комплексного переменного стала очевидной на примере уравнения Лапласа. Это классическое направление в теории функций, восходящее к работам Эйлера и, особенно, Римана. В последнее время усиливается внимание выявлению связей теории функций с более общими дифференциальными уравнениями с частными производными вида (0.1).

В работе [11] А. И. Вольперт исследовал систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(a\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(b\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(c\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(a'\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) = 0, \tag{0.3}$$

где

$$a = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} q & s-1 \\ s+1 & -q \end{pmatrix}, \qquad b = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} -s+1 & q \\ q & s+1 \end{pmatrix},$$
$$c = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} s+1 & -q \\ -q & -s+1 \end{pmatrix}, \qquad a' = \frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix} q & s+1 \\ s-1 & -q \end{pmatrix},$$

$\triangle = 1 - s^2 - q^2$, $s, q$ — полиномы: $s = \lambda Rez^n$, $q = \lambda Imz^n$ ($z = x + iy$, $0 < \lambda < 1$); $\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$; $n$ — произвольное натуральное число ($'$ означает транспонирование). В [11] показано, что система (0.3) эллиптическая в единичном круге, так как

$$\det\Big(a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\alpha\beta + a'\beta^2\Big) = \frac{1}{\triangle}\Big(\alpha^2 + \beta^2\Big)^2.$$

Рассмотрены следующие сопряженные задачи:

*Задача* 1. Найти в круге $|z| < 1$ решение $\omega$ из класса $K$ (где $K$ — класс функций, непрерывных вместе с первыми производными в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ и имеющих вторые непрерывные производные в $D$) системы (0.3), удовлетворяющее граничному условию $\omega|_\Gamma = 0$.

*Задача* $1^*$. Найти в круге $|z| < 1$ решение $\omega$ из класса $K$ системы

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(a'\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(b\frac{\partial\omega}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(c\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(a\frac{\partial\omega}{\partial y}\Big) = 0,$$

удовлетворяющее граничному условию $\omega|_\Gamma = 0$.

Показано, что имеют место следующие утверждения:

1. *Столбцы*

$$\omega_{kl} = \begin{pmatrix} ReP_{kl} \\ ImP_{kl} \end{pmatrix} \ (k = 1, 2, ....., n;\ l = 0, 1)$$

*образуют полную систему линейно независимых решений задачи* 1, *где*

$$P_{1l} = i^l\Big[\overline{z}^{n-1}(1 - r^2)(n + 1 - \lambda^2) - (-1)^l\lambda z(1 - r^{2n})\Big],$$
$$P_{kl} = i^l\Big[\lambda\overline{z}^{n-k}(1 - r^{2k}) - (-1)^l k\overline{z}^{k-2}(1 - r^2)\Big]$$

($\overline{z} = x - iy$, $r = |z|$, $k \geq 2$).

2. *Задача* $1^*$ *не имеет отличных от нуля решений.*

Из этих утверждений следует, что *индекс задачи* 1 *равен* $2n$.

В работе [12] для равномерно эллиптической системы $m$ уравнений

$$\mathcal{U}\Big(x, \frac{\partial}{\partial x}\Big)\omega \equiv \sum_{k,j=1}^{n} A_{kj}(x)\frac{\partial^2\omega}{\partial x_k \partial x_j} + \ldots = 0 \qquad (0.4)$$

(точками обозначены члены младших порядков по $\omega$) с достаточно гладкими вещественными коэффициентами рассматриваются краевые задачи Дирихле

$$\omega|_\Gamma = f$$

и Неймана

$$\frac{\partial\omega}{\partial\nu}|_\Gamma = g$$

($\nu$ — внутренняя нормаль) в классических предположениях.

Известно, что в случае $m = 2$ так же, как для одного уравнения, задачи Дирихле и Неймана для системы (0.4) при $n > 2$ поставлены корректно и имеют нулевой индекс (см. [9,13]). Однако, как показывает пример (см. [14]), уже для эллиптических систем трех уравнений задача Дирихле, а вместе с ней задача Неймана (см. [15]), вообще говоря, не корректны. При $m > 2$ для обеспечения нетеровости краевой задачи Дирихле необходимо потребовать выполнение условия регуляризуемости Я. Б. Лопатинского (см. [16]): ранг матрицы

$$\int_D \Big\{\mathcal{U}^{-1}\Big(y, \lambda\nu+\tau\Big), \lambda\mathcal{U}^{-1}\Big(y, \lambda\nu+\tau\Big)\Big\}d\lambda, \quad y \in \Gamma,$$

должен быть максимален. Всюду в дальнейшем оно предполагается выполненным. Но тогда условие регуляризуемости будет выполнено и для задачи Неймана, поскольку обе задачи регуляризуемы или нет одновременно (см. [15]), так что задача Неймана тоже будет нетеровой. В [12] показано, что индексы задач Дирихле и Неймана совпадают и задача Неймана фредгольмова в следующих двух случаях: $p < n$ или $n$ нечетно.

## 1. Постановка задачи. Основной результат

Следует отметить, что теория двумерных сингулярных интегральных операторов находится в тесной связи с теорией граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости (см. [7, 8, 17]). В последнее время Г. Джангибековым были получены (см. например, [18–25]) эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости и формулы для подсчета индекса некоторых классов двумерных сингулярных операторов по ограниченной области. Использование этих результатов позволило, в частности, получить в работах [1, 22, 25] теорию разрешимости задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем уравнений второго и четвертого порядка на плоскости, и вычислить индекс этих задач через коэффициенты системы.

В этом пункте изучается вопрос разрешимости задачи Неймана для эллиптической системы двух уравнений шестого порядка на плоскости методом перехода к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по ограниченной области.

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости $z = x + iy$. Рассмотрим дифференциальное уравнение шестого порядка

$$a(z)\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + b(z)\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} + \sum_{k+j=0}^{5}\left[a_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\omega}{\partial\overline{z}^k\partial z^j} + b_{k,j}(z)\frac{\partial^{k+j}\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^k\partial z^j}\right] = g(z), \tag{1.1}$$

где $\omega(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, коэффициенты уравнения $a(z)$, $b(z)$ будем считать непрерывными в $\overline{D}$, $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

По главной части системы (1.1) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}(z, \sigma) = \begin{pmatrix} \dfrac{a(z)}{b(z)\sigma^6} & \dfrac{b(z)\overline{\sigma}^6}{a(z)} \end{pmatrix}.$$

Эллиптичность системы (1.1) означает, что для любой точки $z \in \overline{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ должно выполняться неравенство

$\det \mathcal{G}(z,\sigma) \neq 0.$ Очевидно, что

$$\det \mathcal{G}(z,\sigma) \equiv |a(z)|^2 - |b(z)|^2 \neq 0$$

для всех $z \in \overline{D}$. Отметим, что в работе [26] рассматривается эллиптическая система шестого порядка общего вида, однако применительно к (1.1) полученные результаты охватывают только случай сильно эллиптической системы, т. е. когда $|a(z)| > |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$.

Множество всех полиномиальных матриц вида $\mathcal{G}(z,\sigma)$, удовлетворяющих условию

$$\det \mathcal{G}(z,\sigma) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2 > 0\,(< 0) \ \text{ для всех } \ z \in \overline{D},$$

обозначим через $\mathcal{G}^+\,(\mathcal{G}^-)$.

Две матрицы $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2$ из класса $\mathcal{G}^+$ назовем гомотопными $\mathcal{G}^1 \sim \mathcal{G}^2$, если существует семейство полиномиальных матриц $\mathcal{G}^+(\tau)$ из $\mathcal{G}^+$, непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau:\ 0 \leq \tau \leq 1$, такое, что

$$\mathcal{G}^+(0) \equiv \mathcal{G}^1, \quad \mathcal{G}^+(1) \equiv \mathcal{G}^2.$$

Две эллиптические системы из множества всех эллиптических систем (9) с одинаковой главной частью такой, что $\mathcal{G}(z,\sigma) \in \mathcal{G}^+$ можно тогда и только тогда соединить непрерывным путем в $\mathcal{G}^+$, если характеристические матричные полиномы этих систем гомотопны. Таким образом, соотношение гомотопии разбивает $\mathcal{G}^+$ на два класса гомотопии — связные открытые множества:

класс $\varepsilon^+$, в котором выполняется неравенство $|a(z)| > |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$;

класс $\varepsilon^-$, в котором выполняется неравенство $|a(z)| < |b(z)|$ для всех $z \in \overline{D}$.

Эти классы образуют полную систему множества $\mathcal{G}^\pm$, т. е. $\mathcal{G}^1$ и $\mathcal{G}^2$ из $F^+$ принадлежат некоторому классу $\varepsilon^\pm$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^1 \sim \mathcal{G}^2$.

**Задача Неймана** состоит в нахождении функции $\omega(z)$ из класса $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющей внутри области $D$ уравнению (1.1), а на ее границе $\Gamma$ следующим краевым условиям

$$\omega(z)\big|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}\bigg|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2}\bigg|_\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ — производная по направлению внутренней нормали в точках контура $\Gamma$.

Известно (см. [8, 17]), что любая комплекснозначная функция класса $W_p^6(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющая на границе $\Gamma$ однородным краевым условиям (1.2), представляется в виде

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D G_6(z,\zeta) f(\zeta) ds_\zeta,$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, где $G_6(z,\zeta)$ функция Грина бигармонического уравнения в области $D$ :

$$G_6(z,\zeta) = |\zeta - z|^4 \ln\left|\frac{1 - z\overline{\zeta}}{\zeta - z}\right|^2 - |\zeta - z|^2(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2) + \frac{1}{2}(1 - |z|^2)^2(1 - |\zeta|^2)^2.$$

Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по $z$ и $\overline{z}$ до пятого порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)\,(1 < p < \infty)$ операторами.

Непосредственный подсчет показывает, что $\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^6} = \iint_D K(z,\overline{\zeta})f(\zeta)ds_\zeta(z), \tag{1.3}$$

где

$$K(z,\overline{\zeta}) = -\frac{3}{\pi}\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4} + K_1(z,\overline{\zeta}), \quad K_1(z,\overline{\zeta}) = \frac{3(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{\pi(1-z\overline{\zeta})^4}.$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial^6\omega}{\partial z^3\partial\overline{z}^3} = f(z). \tag{1.4}$$

Здесь следует отметить, что интегральный оператор с ядром $K(z,\overline{\zeta})$ во внутренных точках области $D$ имеет особенность порядка 2, поэтому интеграл нужно понимать в смысле главного значения по Коши. Что касается точек границы, т. е. когда $\zeta \in \Gamma$, то нетрудно проверить, что в этом случае $K(z,\overline{\zeta}) = 0$.

Подставляя значения производных из (1.3), (1.4) в исходное дифференциальное уравнение (1.1), для определения функции $f(z)$ получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$a(z)f(z) + b(z)(S^*f)(z) + (Tf)(z) = g(z), \tag{1.5}$$

где $T$ — вполне непрерывный в $L^p(D)$, $p > 2$ оператор,

$$(S^*f)(z) = -\frac{3}{\pi}\iint_D\Big(\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2}{(\zeta-z)^4} - \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^2\overline{\zeta}^4}{(1-z\overline{\zeta})^4}\Big)f(\zeta)ds_\zeta.$$

Интегральное уравнение (1.5) относится к двумерным сингулярным интегральным уравнениям с четными характеристиками по ограниченной области, которые изучены в работе [20]. Далее к сингулярным интегральным уравнениям (1.5) применяется результаты из [20], и в зависимости от гомотопических классов $\varepsilon^\pm$ для задачи Неймана (1.2) эллиптической системы (1.1) получим следующее утверждение.

**Теорема.** *Для того, чтобы задача (1.2) для эллиптической системы (1.1) в классе $W_p^6(D)$, $2 < p < \infty$ была нетеровой, необходимо и достаточно выполнения условий*

$$|a(z)| \neq |b(z)| \text{ для всех } z \in \overline{D}, \quad a(t) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \Gamma,$$

*причем, если $|a(z)| > |b(z)|$, то индекс задачи равен 0, а если $|a(z)| < |b(z)|$, то индекс задачи равен*

$$\varkappa = -\frac{3}{\pi}\Big[\arg a(t)\Big]_\Gamma.$$

**Пример.** В качестве примера рассмотрим следующее дифференциальное уравнение

$$z^n\frac{\partial^6\omega}{\partial\overline{z}^3\partial z^3} + \lambda\frac{\partial^6\overline{\omega}}{\partial\overline{z}^6} = g(z),$$

где $\lambda$ — комплексный параметр, удовлетворяющий неравенству $|\lambda| \geq 1$, $n$ — произвольное натуральное число. Устанавливается, что соответствующее сингулярное интегральное уравнение задачи (1.2) методом разложения искомой функции $f(z)$ в ряд Фурье по полярному углу, относительно коэффициентов Фурье сводится к системам интегральных уравнений с ядрами, однородными порядка $-1$. Доказывается, что однородная задача (1.1), (1.2) имеет ровно $6n$ линейно независимых решений (над полем вещественных чисел), а сопряженная однородная задача ненулевых решений не имеет. Отсюда следует, что индекс задачи равен $6n$.

## References


[1] Г. Джангибеков, “Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости”, *Докл. РАН*, **330**:4 (1993), 415–419; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “On a class of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations on the plane”, *Dokl. Math.*, **47**:3 (1993), 498–503.

[2] М. И. Вишик, “О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **29(71)**:3 (1951), 615–676. [M. I. Vishik, “On strongly elliptic system of differential equations”, *Mat. Sb. (N.S.)*, **29(71)**:3 (1951), 615–676 (In Russian)].

[3] А. В. Бицадзе, “Об единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными”, *УМН*, **3**:6(28) (1948), 211–212. [A. V. Bitsadze, “On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem for elliptic partial differential equations”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **3**:6(28) (1948), 211–212 (In Russian)].

[4] А. В. Бицадзе, “Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка”, *Докл. АН СССР*, **112**:6 (1957), 983–986. [A.V. Bitsadze, “On elliptical systems of second order partial differential equations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **112**:6 (1957), 983–986 (In Russian)].

[5] А. В. Бицадзе, “Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа”, *Сообщения АН ГрузССР*, **5**:8 (1944), 761–770. [A. V. Bitsadze, “Boundary value problems for systems of linear differentiation alternate equations of elliptical type”, *Communications of Academy of Sciences of Georgia*, **5**:8 (1944), 761–770 (In Russian)].

[6] А. В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1959. [A. V. Bitsadze, *Mixed Type Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1959 (In Russian)].

[7] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1959. [I. N. Vekua, *Generalized Analytic Functions*, FIZMATGIZ, Moscow, 1959 (In Russian)].

[8] И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*, ГОСТЕХИЗДАТ, М., 1959. [I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, GOSTEXIZDAT, Moscow, 1959 (In Russian)].

[9] Б. В. Боярский, “О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве”, *Бюлл. Польской АН. Серия матем. астр. и физ. наук*, **8**:1 (1960), 1050–1052. [B. V. Boyarskiy, “On the Dirichlet problem for the system of elliptic equations of a type in space”, *Polands Bull. Mathem., Astr. and Phusicz Series*, **8**:1 (1960), 1050–1052 (In Russian)].

[10] Б. В. Боярский, “Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа”, *Докл. АН СССР*, **124**:1 (1959), 1–4. [B. V. Boyarskiy, “Some boundary value problems for a system of equations of elliptic type”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **124**:1 (1959), 1–4 (In Russian)].

[11] А. И. Вольперт, “Об индексе задачи Дирихле”, *Изв. вузов. Матем.*, 1960, № 5, 40–42. [A. I. Vol’pert, “On the index of the Dirichlet problem”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1960, № 5, 40–42 (In Russian)].

[12] В. И. Шевченко, “О совпадении индексов задач Дирихле и Неймана для эллиптических систем”, *Докл. АН СССР*, **221**:5 (1975), 1050–1052. [V. I. Shevchenko, “On the coincidence of the indices of the Dirichlet and Neumann problems for elliptic systems”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **221**:5 (1975), 1050–1052 (In Russian)].

[13] В. И. Шевченко, “Об одной краевой задаче для вектора, голоморфного в полупространстве”, *Докл. АН СССР*, **154**:2 (1964), 276–278. [V. I. Shevchenko, “A boundary-value problem for a vector which is holomorphic in a half-space”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **154**:2 (1964), 276–278 (In Russian)].

[14] В. И. Шевченко, “Об эллиптических системах трех уравнений с четырьям независимыми переменными”, *Докл. АН СССР*, **210**:6 (1973), 1300–1302. [V. I. Shevchenko, “On elliptic systems of three equations in four independent variables”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **210**:6 (1973), 1300–1302 (In Russian)].

[15] В. И. Шевченко, “Об одном интегральном представлении вектора, голоморфного в шаре”, *Докл. АН СССР*, **153**:6 (1963), 1276–1279. [V. I. Shevchenko, “An integral representation of a vector which is holomorphic in a sphere”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **153**:6 (1963), 1276–1279 (In Russian)].

[16] Я. Б. Лопатинский, “Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям”, *Укр. матем. журн.*, **5**:123 (1953), 1127–1131. [Ya. B. Lopatinskiy, “On one method of reducing boundary value problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations”, *Ukr. Mathem. Journal*, **5**:123 (1953), 1127–1131 (In Russian)].

[17] А. Д. Джураев, *Метод сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1987. [A. D. Dzuraev, *Method of Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].

[18] Г. Джангибеков, “О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах”, *Матем. заметки*, **46**:5 (1989), 91–93. [G. Dzhangibekov, “Some two-dimensional singular integral operators”, *Mat. Zametki*, **46**:5 (1989), 91–93 (In Russian)].

[19] Г. Джангибеков, “Нётеровость и индекс некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, № 1, 19–28; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “The Noethericity and the index of some two-dimensional singular integral operators”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **35**:1 (1991), 21–31.

[20] Г. Джангибеков, “О нётеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 1992, № 9, 25–37; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **36**:9 (1992), 22–33.

[21] Г. Джангибеков, “О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области”, *Докл. РАН*, **383**:1 (2002), 7–9; англ. пер.:G. Dzhangibekov, “Some two-dimensional singular integral operators in a bounded domain”, *Dokl. Math.*, **65**:2 (2002), 149–151.

[22] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, “К теории нетера двумерных сингулярных операторов и ее приложения к краевым задачам для эллиптических систем уравнений четвертого порядка”, *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **26**:1 (2020), 7–13. [G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, “On the Noether theory of two-dimensional singular operators and applications to boundary value problems for system of fourth-order elliptic equations”, *Bulletin of Samara University. Natural Science Series*, **26**:1 (2020), 7–13 (In Russian)].

[23] Г. Джангибеков, Д. М. Одинабеков, Г. Х. Худжаназарова, “Об условиях нётеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, № 2, 9–14; англ. пер.:G. Dzhangibekov, J. M. Odinabekov, G. Kh. Khudzhanazarova, “The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:2 (2019), 49–54.

[24] Г. Джангибеков, Г. Худжаназарова, “О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области”, *Докл. РАН*, **396**:4 (2004), 449–454; англ. пер.:G. Dzhangibekov, G. Khujanazarova, “On the Noetherian property and index for some two-dimensional singular integral operators over bounded domains”, *Dokl. Math.*, **69**:3 (2004), 394–399.

[25] Г. Джангибеков, Г. Худжаназарова, “О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости”, *Докл. РАН*, **398**:2 (2004), 151–155; англ. пер.:G. Dzhangibekov, G. Khujanazarova, “On the Dirichlet problem for a fourth-order elliptic system of two equations in the plane”, *Dokl. Math.*, **70**:2 (2004), 696-700.

[26] П. Т. Дыбов, “О разрешимости первой краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа шестого порядка”, *Докл. АН СССР*, **202**:6 (1972), 1251–1253. [P. T. Dibov, “The solvability of the first boundary value problem for a sixth order differential equation of elliptic type”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **202**:6 (1972), 1251–1253 (In Russian)].

**Информация об авторе**

**Одинабеков Джасур Музофирович**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики и естественных наук. Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в городе Душанбе, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: jasur-79@inbox.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Поступила в редакцию 30.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

**Information about the author**

**Jasur M. Odinabekov**, Candidate of Physics and Mathematics, Head of Mathematics and Natural Sciences Department. Branch of Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: jasur-79@inbox.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-9851-9895

Received 30.01.2023
Reviewed 26.05.2023
Accepted for press 09.06.2023

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 142 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212

УДК 519.63

# Решение начально-краевой задачи в символьном виде

**Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ**[1] **, Михаил Анатольевич РЫБАКОВ**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

**Аннотация.** Обсуждаются алгоритмы нахождения символьно-численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды. Аналитическое решение таких уравнений, как правило, невозможно, поэтому активно разрабатываются приближенные методы решения, обеспечивающие условие аппроксимации, устойчивости и сходимости. В данной статье предлагается символьное решение, что более удобно, чем численное для использования, например, при синтезе систем управления. В основе алгоритма лежит аппроксимация частных производных по одной из переменных разностным соотношением и применение преобразования Лапласа к полученной системе дифференциально-разностных уравнений. Представлена блок-схема алгоритма. Проводится описание структуры программного комплекса на основе разработанного алгоритма. Программный комплекс разработан на языке программирования Java. Для ввода исходных данных начально-краевой задачи и вывода решения используется веб-интерфейс. В основе веб-интерфейса программного комплекса лежит фреймворк Spring. Рассматривается пример решения начально-краевой задачи с начальным и краевыми условиями при помощи данного программного комплекса.

Результаты представляют интерес для исследователей в прикладных областях, связанных с переносом теплоты по сетевому теплоносителю, транспортировкой вязких жидкостей по сетевому гидроносителю, диффузионными процессами в биофизике. Разработанный алгоритм может найти свое применение для решения некоторых задач автоматического управления.

**Ключевые слова:** начально-краевая задача, система дифференциально-разностных уравнений, преобразование Лапласа, символьно-численное решение

**Для цитирования:** *Провоторов В.В., Рыбаков М.А.* Решение начально-краевой задачи в символьном виде // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 142. С. 203–212. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212

SCIENTIFIC ARTICLES

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212

# Solution of the initial boundary value problem in symbolic form

**Vyacheslav V. PROVOTOROV**[1] **, Mikhail A. RYBAKOV**[2]
[1] Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Abstract.** Algorithms for finding a symbolic-numerical solution of the initial- boundary value problem for a continuum transport equation are discussed. Analytical solution of such equations, as a rule, is impossible; therefore, approximate methods of solution that provide the condition of approximation, stability, and convergence are being actively developed. This article proposes a symbolic solution which is more convenient than a numerical one to be used, for example, in the synthesis of control systems. The algorithm is based on the approximation of partial derivatives with respect to one of the variables by a difference relation and the application of the Laplace transform to the resulting system of differential-difference equations. A block diagram of the algorithm is presented. The description of the structure of the software package based on the developed algorithm is carried out. The software package is developed in the Java programming language. To enter the initial data of the initial boundary value problem and output the solution, a web interface is used. The web interface of the software package is based on the Spring framework. An example of solving an initial boundary value problem with initial and boundary conditions using this software package is considered.

The results are of interest to researchers in applied areas related to heat transfer through a network coolant, transportation of viscous liquids through a network hydraulic carrier, and diffusion processes in biophysics. The developed algorithm can be used to solve some problems of automatic control.

**Keywords:** initial-boundary value problem, system of differential-difference equations, Laplace transform, symbolic-numerical solution

**Mathematics Subject Classification:** 65N22.

**For citation:** Provotorov V.V., Rybakov M.A. Solution of the initial-boundary value problem in symbolic form. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 203–212. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-142-203-212 (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Современные системы компьютерной алгебры (СКА) предоставляют возможности решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды, для чего СКА содержат пакеты программ, которые базируются на различных приближенных методах. Однако, решение начально-краевой задачи в СКА носит вычислительно трудный характер. В связи с этим, одной из актуальных задач компьютерной алгебры является разработка более эффективных алгоритмов и программ решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды.

Приближенному решению начально-краевой задачи для уравнений в частных производных посвящены многочисленные работы. В частности, в [1–3] рассматривались методы, основанные на расщеплении по пространственным переменным с применением операционного исчисления, на использовании специальных разностных схем, позволяющих вычислять значения решения в узлах сеток различных типов (в частности, треугольных).

В данной статье к начально-краевой задаче для уравнения переноса сплошной среды применяется аппроксимация разностным соотношением частных производных по одной из двух переменных, в результате задача сводится к системе дифференциально-разностных уравнений. Для построения символьного решения полученной системы можно использовать, например, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на полиномиальной аппроксимации (см. [4] и библиографию этой работы). Здесь предлагается построение символьного решения системы дифференциально-разностных уравнений, основанное на преобразовании Лапласа. Преобразование Лапласа позволяет перейти от системы дифференциально-разностных уравнений к системе алгебраических уравнений, решив которую и применив обратное преобразование Лапласа, в итоге получим решение в символьном виде. Алгоритмы символьного решения с использованием преобразования Лапласа для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применялись в работах [5–7], с кусочно постоянными коэффициентами — в работе [8]. Распространению методов символьного решения обыкновенных дифференциальных уравнений на более общие классы уравнений, увеличению размерности решаемых систем без существенного увеличения машинного времени, повышению точности на основе распараллеливания вычислений посвящены работы [9–12]. На основе этих исследований разработан Программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления [13].

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма нахождения символьно-численного решения начально-краевой задачи для уравнения переноса сплошной среды.

Статья разделена на четыре параграфа. В первом параграфе сформулирована начально-краевая задача для уравнения переноса и получена ее аппроксимация в виде системы дифференциально-разностных уравнений. Алгоритм решения рассматриваемой начально-краевой задачи сформулирован и описан во втором параграфе. В третьем параграфе представлен разработанный на основе предложенного алгоритма программный комплекс решения начально-краевой задачи для уравнения переноса. В четвертом заключительном параграфе представлены результаты решения конкретной начально-краевой задачи. Проведенный вычислительный эксперимент подтверждает эффективность разработанного программного комплекса.

## 1. Постановка задачи

Для уравнения переноса сплошной среды, представляющего собой уравнение параболического типа с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \tag{1.1}$$

рассмотрим задачу с начальным условием

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.2}$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.3}$$

В рассматриваемой начально-краевой задаче полагаем заданными числа $a, b, c$, $a > 0$, и непрерывную на отрезке $[0,1]$ функцию $\phi$.

Аппроксимируем частную производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ разностным отношением вида

$$\frac{1}{\tau}(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})), \tag{1.4}$$

где $\tau = T/M$, $M$ — количество узлов, $t_k = k\tau$, $k = 0, \ldots, M$, и обозначим $u_k(x) = u(x,t_k)$, $k = 0, \ldots, M$. В результате относительно неизвестных функций $u_k(x), k = 1, \ldots, M$, получим систему дифференциально-разностных уравнений вида

$$\frac{1}{\tau}(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})) = au_k''(x) + bu_k'(x) + cu_k(x), \quad k = 1, \ldots, M, \tag{1.5}$$

где

$$u_0 = \phi(x)$$

с краевыми условиями

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(1) = 0, \quad k = 1, \ldots, M. \tag{1.6}$$

Система (1.5) есть система $M$ линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка (ЛОДУ 2-го порядка) с постоянными коэффициентами. Для каждого полученного уравнения применяем преобразование Лапласа. Отметим, что алгоритм символьного решения систем ЛОДУ $n$-го порядка с правыми частями специального вида, использующий преобразование Лапласа, рассматривался в [6–8].

## 2. Алгоритм решения начально-краевой задачи

Предлагаемый алгоритм решения в символьном виде начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) состоит из следующих пяти шагов. Отметим, что шаги со второго по четвертый выполняются итерационно в зависимости от количества $M$ точек разбиения отрезка $(0,T)$ (совпадающего с количеством ЛОДУ 2-го порядка в системе (1.5)).

Приведем краткое описание каждого шага алгоритма.

**1. Ввод данных.** Для ввода данных используется веб-интерфейс программного комплекса. Начально-краевая задача вида (1.1), (1.2), (1.3) предварительно должна быть аппроксимирована системой (1.5)) дифференциально-разностных уравнений с краевыми условиями (1.6). Ввод данных осуществляется с помощью символьных операторов. На данном шаге вводимые пользователем данные преобразуются в операторы внутреннего языка. Далее операторы преобразуются в структуры данных для дальнейшего решения задачи.

**2. Решение дифференциального-разностного уравнения.** На данном шаге определяется общее решение ЛОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Используется разработанный ранее авторами программный модуль [13] для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления. Применяемый метод построения символьного общего решения ЛОДУ основан на преобразовании Лапласа.

Метод решения ЛОДУ 2-го порядка, использующий преобразование Лапласа, состоит из трех следующих основных этапов.

**I. Прямое преобразование Лапласа.** В результате преобразования функций, содержащихся в дифференциально-разностных уравнениях системы (1.5) и в начальных условиях (1.2), получаем систему алгебраических уравнений (вид получаемой системы алгебраических уравнений см. [12, с. 554]).

**II. Решение алгебраической системы.** Для решения системы алгебраических уравнений обращается соответствующий оператор (подробнее см. [12, с. 554]).

Результатом на данном этапе является вектор дробно-рациональных функций.

**III. Обратное преобразование Лапласа.** В результате получаем общее решение системы (1.5) — вектор, имеющий компонентами функции $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, M$, которые содержат линейные комбинации двух линейно-независимых решений соответствующего однородного уравнения.

Таким образом, результатом выполнения второго шага алгоритма является построение функций $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, M$, которые зависят от двух числовых параметров $c_{2k-1}$ и $c_{2k}$.

**3. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).** Для нахождения параметров $c_{2k-1}$ и $c_{2k}$, при которых функции $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, M$, удовлетворяют краевым условиям (1.6), составляется СЛАУ. Для этого вычисляются значения каждой функции $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, M$, в точках 0 и 1. Полученная таким образом СЛАУ решается стандартным алгоритмом.

Результатом выполнения третьего шага алгоритма являются вычисленные значения параметров $c_{2k-1}$ и $c_{2k}$.

**4. Решение начально-краевой задачи.** На данном шаге в выражение для каждого общего решения $u_k(x)$, $k = 1, \ldots, M$, системы (1.5) подставляются вычисленные на предыдущем шаге значения параметров $c_{2k-1}$ и $c_{2k}$.

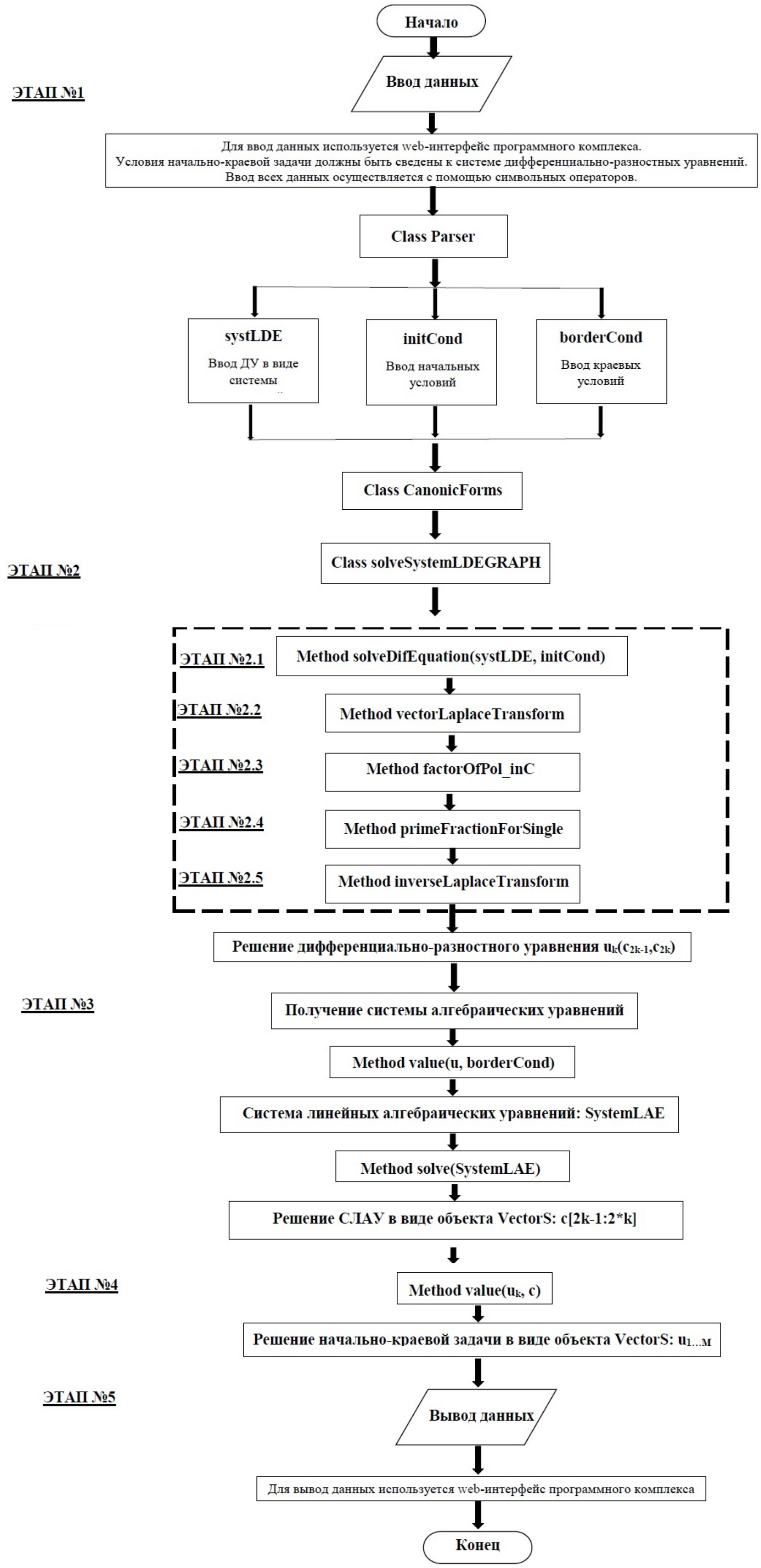
Результатом выполнения четвертого шага является функция $u_k(x)$ — решение краевой задачи (1.5), (1.6), и соответственно, решение $u(x, t_k)$ исходной начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) в точках $t_k$, определяемое формулой

$$u(x, t_k) = u_k(x), \quad k = 0, \ldots, M.$$

**5. Вывод данных.** Для вывода данных используется веб-интерфейс программного комплекса.

Блок-схема описанного алгоритма решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) приведена ниже.

## Блок-схема алгоритма



## 3. Описание программного комплекса для решения начально-краевой задачи

Для решения начально-краевой задачи (1.1), (1.2), (1.3) разработан программный комплекс, который включает в себя программный модуль [13] для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления, а также программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений.

Описание программного модуля и результаты его использования для символьного решения некоторых конкретных систем линейных дифференциальных уравнений и для расчета динамических характеристик некоторых конкретных систем автоматического управления представлены в статьях [9–12].

Комплекс включает также программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений, состоящий из программного класса **SystemLDEGRAPH**, который включает в себя программные методы, предназначенные для решения системы (1.5).

Программный метод ***solveSystemLDEGRAPH*** решает начально-краевую задачу (1.1), (1.2), (1.3) для входной системы с заданными начальными и краевыми условиями.

Метод ***borderCond*** предназначен для преобразования краевых условий во внутренний формат в виде вектора значений.

Программный метод ***borderCondValue*** предназначен для вычисления значений краевых условий в виде вектора значений.

Программный метод ***value*** предназначен для вычисления значений функций в заданной точке.

Программный метод ***solveLE*** предназначен для решения системы алгебраических уравнений.

## 4. Пример решения начально-краевой задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,1),$$

при начальном условии

$$u(x,0) = \sin(x), \quad x \in [0,\pi],$$

и краевых условиях

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,\pi) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Аппроксимируем частную производную $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ разностным отношением (1.4), где

$$\tau = \frac{1}{10} = 0.1, \quad M = 10, \quad t_k = 0.1k, \quad k = 0,\dots,M.$$

Обозначим $u_k(x) = u(x,t_k)$, $k = 0,\dots,M$. Таким образом, относительно неизвестных функций $u_k(x)$, $k = 1,\dots,M$, получим систему дифференциально-разностных уравнений

$$10(u(x,t_k) - u(x,t_{k-1})) = 9u_k''(x) + u_k(x), \quad k = 1,\dots,M,$$

где

$$u_0(x) = \sin(x),$$

с краевыми условиями

$$u_k(0) = 0, \quad u_k(\pi) = 0, \quad k = 1, \ldots, M.$$

К полученной системе применяем преобразование Лапласа.

При $k = 1$ краевая задача для дифференциально-разностного уравнения имеет вид

$$10(u_1(x) - \sin(x)) = 9u_1''(x) + u_1(x), \qquad u_1(0) = 0, \quad u_1(\pi) = 0.$$

Находим ее решение, получаем функцию $u_1(x) = 0.56\sin(x)$.

При $k = 2$ краевая задача для дифференциально-разностного уравнения имеет вид

$$10(u_2(x) - 0.56\sin(x)) = 9u_2''(x) + u_2(x), \quad u_2(0) = 0, \quad u_2(\pi) = 0.$$

Находим ее решение, получаем $u_2(x) = 0.31\sin(x)$.

Приведем полученные для остальных значений $k$ краевые задачи и их решения:

при $k = 3$ краевая задача принимает вид

$$10(u_3(x) - 0.31\sin(x)) = 9u_3''(x) + u_3(x), \quad u_3(0) = 0, \quad u_3(\pi) = 0,$$

ее решение — функция $u_3(x) = 0.17\sin(x)$;

при $k = 4$ получаем задачу

$$10(u_4(x) - 0.17\sin(x)) = 9u_4''(x) + u_4(x), \quad u_4(0) = 0, \quad u_4(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_4(x) = 0.09\sin(x)$;

при $k = 5$ получаем задачу

$$10(u_5(x) - 0.09\sin(x)) = 9u_5''(x) + u_5(x), \quad u_5(0) = 0, \quad u_5(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_5(x) = 0.05\sin(x)$;

при $k = 6$ получаем задачу

$$10(u_6(x) - 0.05\sin(x)) = 9u_6''(x) + u_6(x), \quad u_6(0) = 0, \quad u_6(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_6(x) = 0.03\sin(x)$;

при $k = 7$ получаем задачу

$$10(u_7(x) - 0.03\sin(x)) = 9u_7''(x) + u_7(x), \quad u_7(0) = 0, \quad u_7(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_7(x) = 0.02\sin(x)$;

при $k = 8$ получаем задачу

$$10(u_8(x) - 0.02\sin(x)) = 9u_8''(x) + u_8(x), \quad u_8(0) = 0, \quad u_8(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_8(x) = 0.01\sin(x)$;

при $k = 9$ получаем задачу

$$10(u_9(x) - 0.01\sin(x)) = 9u_9''(x) + u_9(x), \quad u_9(0) = 0, \quad u_9(\pi) = 0,$$

и находим ее решение $u_9(x) = 0.01\sin(x)$;

на заключительном шаге итераций при $k = 10$ получаем задачу

$$10(u_{10}(x) - 0.01\sin(x)) = 9u_{10}''(x) + u_{10}(x), \quad u_{10}(0) = 0, \quad u_{10}(\pi) = 0,$$

находим ее решение и получаем нулевую функцию $u_{10}(x) = 0$.

## 5. Заключение

Предполагается, что в дальнейшем возможности данного программного комплекса будут расширены и появится возможность решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю (задач тепломассопереноса). В качестве сетевого носителя будет взята сеть (граф).

### References


[1] В. Г. Зверев, “Об одной специальной разностной схеме для решения краевых задач тепломассообмена”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **43**:2 (2003), 265–278; англ. пер.:V. G. Zverev, “On a special difference scheme for the solution of boundary value problems of heat and mass transfer”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**:2 (2003), 255–267.

[2] Е. П. Сычугова, “Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, **85** (2013), 24 с. [E. P. Sychugova, “Solution of the transport equation by the finite element method on unstructured triangular meshes”, *Preprints of the M. V. Keldysh Institute for Problems of Materials Science*, **85** (2013) (In Russian), 24 pp.]

[3] А. С. Якимов, *Аналитический метод решения краевых задач*, 2-е изд., Издательство Томского университета, Томск, 2011, 199 с. [A. S. Yakimov, *An analytical method for solving boundary value problems*, 2nd ed., Tomsk University Press, Tomsk, 2011 (In Russian), 199 pp.]

[4] Я. А. Ромм, Г. А. Джанунц, “Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса с итерационном уточнением”, *Современные наукоемкие технологии*, **1** (2020), 21–46. [Ya. E. Romm, G. A. Dzhanunts, “The varying piecewise interpolation solution of the Cauchy problem for the transport equation with iterative refinement”, *Modern High Technologies*, **1** (2020), 21–46 (In Russian)].

[5] Д. Б. Жамбалова, С. Г. Черный, “Метод интерполяционного профиля решения уравнений переноса”, *Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии*, **10**:1 (2012), 33–54. [D. B. Zhambalova, S. G. Cherny, “Method of interpolation profile for solving transport equations”, *Vestnik NSU. Series: Information Technologies*, **10**:1 (2012), 33–54 (In Russian)].

[6] М. А. Рыбаков, “Решение систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:4 (2009), 791–792. [M. A. Ribakov, “Solving Systems of linear differential equations with constant coefficients by means of Laplace transformation”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:4 (2009), 791–792 (In Russian)].

[7] М. А. Рыбаков, “О нахождении общего и частного решений неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17**:2 (2012), 552–565. [M. A. Rybakov, “Computation general and particular solutions of the inhomogeneous system of ordinary differential equations with constant coefficients”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:2 (2012), 552–565 (In Russian)].

[8] М. А. Рыбаков, “Решение систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями с помощью преобразования Лапласа”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **15**:4 (2010), 339–341. [M. A. Rybakov, “Solving systems of linear differential equations with a piecewise continuous right-hand parts by means transformation Laplace”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **15**:1 (2010), 339–341 (In Russian)].

[9] М. А. Рыбаков, “Параллельное вычисление общего решения неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **18**:4 (2013), 1184–1188. [M. A. Rybakov, “Parallel computation of general solution of the inhomogeneous system of the ordinary differential equations with constant coefficients”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **18**:4 (2013), 1184–1188 (In Russian)].

[10] Н. А. Малашонок, М. А. Рыбаков, “Символьно-численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с требуемой точностью”, *Программирование*, **39**:3 (2013), 38–46; англ пер.:N. A. Malaschonok, M. A. Rybakov, “Symbolic-numerical solution of systems of linear ordinary differential equations with required accuracy”, *Programming and Computer Software*, **39**:3 (2013), 150–157.

[11] Г. И. Малашонок, М. А. Рыбаков, “Решение систем линейных дифференциальных уравнений и расчет динамических характеристик систем управления в веб-сервисе MathPartner”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 517–529. [G. I. Malaschonok, M. A. Rybakov, “Solving systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of control systems in a web service MathPartner”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 517–529 (In Russian)].

[12] С. А. Глазков, М. А. Рыбаков, “Алгоритмы решения простых типов обыкновенных дифференциальных уравнений в MathPartner”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1268–1276. [S. A. Glazkov, M. A. Rybakov, “The symbolic solution of ordinary differential equations in the computer algebra system MathPartner”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1268–1276 (In Russian)].

[13] М. А. Рыбаков, *Программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений и расчета динамических характеристик систем автоматического управления: программа для ЭВМ*, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619679; опубл. 15.06.2021, Бюл. № 6, (Ч. 1). 0,5 Мб. [M. A. Rybakov, *Software module for symbolic solution of systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of automatic control systems: computer program*, Certificate of state registration of the computer program No. 2021619679; publ. 06/15/2021, Bull. No. 6, (Ch. 1). 0.5 MB].

### Информация об авторах

**Провоторов Вячеслав Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

**Рыбаков Михаил Анатольевич**, старший преподаватель кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: mixail08101987@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**
Рыбаков Михаил Анатольевич
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Поступила в редакцию 10.02.2023 г.
Поступила после рецензирования 11.05.2023 г.
Принята к публикации 09.06.2023 г.

### Information about the authors

**Vyacheslav V. Provotorov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

**Mikhail A. Rybakov**, Senior Lecturer Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: mixail08101987@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0001-8152-8357

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**
Mikhail A. Rybakov
E-mail: mixail08101987@mail.ru

Received 10.02.2023
Reviewed 11.05.2023
Accepted for press 09.06.2023