ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 26
№ 136
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 26, № 136, 2021

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России (распоряжение от 28 декабря 2018 г. № 90-р) по физико-математическим наукам

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Редактор М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26, № 136. – 84 с. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-136

Подписано в печать 13.12.2021. Дата выхода в свет 21.12.2021
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 10,5. Усл. печ. л. 10,2. Тираж 1000 экз. Заказ № 21271. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 26, no. 136, 2021

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order from December 28, 2018 no. 90-p)

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru, vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC "Ural-Press" is 83372
Distribution territory: Russian Federation, foreign countries

Editor M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2021. – Vol. 26, no. 136. – 84 p. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2021-26-136

Signed for printing 13.12.2021. Release date 21.12.2021
Format A4 (60×84 1/8). Typeface "Times New Roman". Printed on risograph.
Pr. sheet 10,5. Conv. pr. sheet 10,2. Copies printed 1000. Order no. 21271. Free price

Publisher: FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347
УДК 517.927.4

О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка

Гусен Эльдерханович АБДУРАГИМОВ,
Патимат Эльдерхановна АБДУРАГИМОВА,
Мадина Магомедрасуловна КУРАМАГОМЕДОВА
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный университет»
367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а

Аннотация. В настоящей статье рассматривается краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка, которая, очевидным образом, имеет тривиальное решение. Получены достаточные условия существования и единственности положительного решения данной задачи. С помощью линейных преобразований Ц. На [T. Y. Na, Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Acad. Press, NY, 1979, ch. 7] граничная задача сводится к задаче Коши, начальные условия которой позволяют однозначно определить параметр преобразования. Показано, что преобразования Ц. На единственным образом определяют решение исходной задачи. Кроме того, на основе доказательства единственности положительного решения краевой задачи получен достаточно эффективный неитерационный численный алгоритм построения такого решения. Приведен соответствующий пример.

Ключевые слова: краевая задача, положительное решение, существование, единственность

Для цитирования: *Абдурагимов Г.Э., Абдурагимова П.Э., Курамагомедова М.М.* О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 341–347. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order

Gusen E. ABDURAGIMOV, Patimat E. ABDURAGIMOVA, Madina M. KURAMAGOMEDOVA
Dagestan State University
33 M. Hajiyev St., Makhachkala 367025, Russian Federation

Abstract. In the article, we consider a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order which, obviously, has a trivial solution. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a positive solution to this problem are obtained. With the help of linear transformations of T. Y. Na [T. Y. Na, Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems, Acad. Press, NY, 1979, ch. 7], the boundary value problem is reduced to the Cauchy problem, the initial conditions of which make it possible to uniquely determine the transformation parameter. It is shown that the transformations of T. Y. Na uniquely determine the solution of the original problem. In addition, based on the proof of the uniqueness of a positive solution to the boundary value problem, a sufficiently effective non–iterative numerical algorithm for constructing such a solution is obtained. A corresponding example is given.

Keywords: boundary value problem, positive solution, existence, uniqueness

Mathematics Subject Classification: 34A34, 34B18.

For citation: Abduragimov G.E., Abduragimova P.E., Kuramagomedova M.M. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya krayevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya chetnogo poryadka [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 341–347. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-341-347. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Посвящается памяти
Эльдерхана Исрапиловича Абдурагимова

Введение

Краевым задачам для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений посвящена многочисленная литература (см., например, монографию [1], статьи [2–4] и библиографические списки этих работ). В связи с данным исследованием отметим работы [5–7] и другие работы цитируемых авторов, в которых рассмотрены вопросы существования и численного нахождения положительных решений краевых задач для дифференциального уравнения четвертого порядка. Данная работа продолжает исследования [7–10]. Здесь с помощью линейных преобразований Ц. На (см. [11, гл. 7]) получены достаточные условия существования и единственности положительного решения граничной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка, а также на основе этих преобразований получен численный неитерационный алгоритм построения такого решения.

1. Постановка задачи

Пусть заданы $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$, а также определенная на $(0,\infty)$ положительная, непрерывная и однородная степени $\tau \geq 0$ функция $p(t)$ (т. е. при любых $\lambda > 0$ выполнено $p(\lambda t) = \lambda^\tau p(t)$, $t \in (0,\infty)$). Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(2n)}(t) + p(t)|x(t)|^\gamma = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1.1}$$

$$x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(2n-1)}(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$x(1) = 0. \tag{1.3}$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *положительным решением задачи* (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{C}^{2n}_{[0,1]}$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

Наряду с краевой задачей для уравнения (1.1) рассмотрим также задачу Коши

$$x^{(2n)}(t) + p(t)|x(t)|^\gamma = 0, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

$$x'(0) = x''(0) = \ldots = x^{(2n-1)} = 0, \tag{1.5}$$

$$x(0) = \theta, \tag{1.6}$$

где θ — некоторый положительный параметр. Как известно (см., например, [12, гл. 7, § 14]), решение задачи (1.4)–(1.6) существует и единственно. Проинтегрировав уравнение (1.4) с учетом начальных условий (1.5), (1.6), получим

$$\begin{aligned}
x^{(2n-1)}(t) &= -\int_0^t p(s)|x(s)|^\gamma\,ds,\\
x^{(2n-2)}(t) &= -\int_0^t \frac{t-s}{1!}p(s)|x(s)|^\gamma\,ds,\\
&\;\ldots\ldots\\
x'(t) &= -\int_0^t \frac{(t-s)^{2n-2}}{(2n-2)!}p(s)|x(s)|^\gamma\,ds,\\
x(t) &= \theta - \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}p(s)|x(s)|^\gamma\,ds.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Используем эти соотношения для доказательства следующего утверждения о достижении решением задачи Коши (1.4)–(1.6) нулевого значения.

Лемма 1.1. *Для решения $x(t)$ задачи (1.4)–(1.6) существует единственная точка $t_* > 0$ такая, что $x(t_*) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенств (1.7) следует, что $x''(t) < 0$ и $x'(t) < 0$. Таким образом, решение $x(t)$ задачи (1.4)–(1.6) является выпуклой вверх и строго убывающей на $(0, \infty)$ функцией. А так как $x(0) = \theta > 0$, существует единственная точка t_*, в которой $x(t_*) = 0$ (очевидно выполнено $x(t) > 0$ при $t \in [0, t_*)$ и $x(t) < 0$ при $t > 0$). □

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для установления существования и единственности положительного решения задачи (1.1)–(1.3) воспользуемся следующей линейной группой преобразований Ц. На (см. [11, гл. 7]):

$$\begin{cases} t = \theta^\alpha \tilde{t}, \\ x = \theta^\beta \tilde{x}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где α и β — неизвестные постоянные. После подстановки соотношений (2.1) в уравнение (1.1) с учетом однородности функции $p(t)$ получим

$$\theta^{\beta - 2n\alpha} \tilde{x}^{(2n)} + p(\tilde{t}) \theta^{\alpha\tau + \beta\gamma} |\tilde{x}|^\gamma = 0. \tag{2.2}$$

Положим

$$\beta - 2n\alpha = \tau\alpha + \beta\gamma. \tag{2.3}$$

Тогда уравнение (2.2) примет соответственно вид

$$\tilde{x}^{(2n)} + p(\tilde{t}) |\tilde{x}|^\gamma = 0.$$

Следовательно, уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразования (2.1).

Выберем теперь параметр θ так, чтобы решение задачи Коши (1.4)–(1.6) удовлетворяло граничному условию (1.3) (т. е. чтобы для существующего в силу леммы 1.1 значения было выполнено $t_* = 1$). Запишем условие (1.3) в новых обозначениях:

$$\theta^\beta \tilde{x} = \theta.$$

Выбрав $\beta = 1$, получим

$$\tilde{x}(0) = 1.$$

При $\beta = 1$ из соотношения (2.3) имеем

$$\alpha = \frac{1 - \gamma}{\tau + 2n}. \tag{2.4}$$

Окончательно в новых переменных с учетом начальных условий (1.5) получаем следующую задачу Коши

$$\tilde{v}^{(2n)} + p(\tilde{t})|\tilde{v}|^{\gamma} = 0, \tag{2.5}$$

$$v'(0) = v''(0) = \ldots = v^{(2n-1)}(0) = 0, \tag{2.6}$$

$$v(0) = 1, \tag{2.7}$$

где $v(\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t})$.

Требование $t = 1$ позволяет однозначно определить параметр θ с помощью (2.1):

$$\theta = \tilde{t}^{-\dfrac{1}{\alpha}}, \tag{2.8}$$

где α определено формулой (2.4).

Таким образом, преобразования (2.1) единственным образом определяют решение краевой задачи (1.1)–(1.3). $\square$

На основании изложенной схемы доказательства теоремы 2.1 сформулируем алгоритм численного построения единственного решения краевой задачи (1.1)–(1.3) (являющегося в силу леммы 1.1 положительным).

1. Полагаем $\beta = 1$, а параметр α определим по формуле (2.4).
2. Численно решим задачу Коши (2.5)–(2.7) на промежутке от $\tilde{t} = 0$ до выполнения равенства $\tilde{x}(\tilde{t}) = 0$.
3. Вычислим θ по формуле (2.8).
4. По формулам (2.1) найдем искомое решение.

В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу

$$x''(t) + x^2(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{2.9}$$

$$x'(0) = 0, \tag{2.10}$$

$$x(1) = 0. \tag{2.11}$$

В данном случае $p(t) \equiv 1$, $n = 1$, $\tau = 0$ и $\gamma = 2$. Из соотношений (2.4) и (2.3) получим, соответственно, $\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\beta = 1$. В соответствии с приведенным выше алгоритмом при численной реализации методом Рунге–Кутта 4-го порядка точности соответствующей задачи Коши получим следующее положительное решение краевой задачи (2.9)–(2.11).

Таблица 1

Положительное решение задачи (2.9)–(2.11)

t	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
x	2,95	2,91	2,78	2,57	2,30	1,99	1,62	1,23	0,82	0,41	0,00

References

[1] A. Granas, R. Guenther, J. Lee, *Nonlinear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, National Scientific Publishers, Warszawa, 1985, 132 pp.

[2] А. И. Булгаков, "Интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения к краевым задачам дифференциальных включений", *Математический сборник*, **183**:10 (1992), 63–86; англ. пер.:A. I. Bulgakov, "Integral inclusions with nonconvex images, and their applications to boundary value problems for differential inclusions", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **77**:1 (1994), 193–212.

[3] С. Бенараб, "Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 216–220. [S. Benarab, "Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 216–220 (In Russian)].

[4] А. Н. Пчелинцев, А. А. Полуновский, И. Ю. Юханова, "Метод гармонического баланса для отыскания приближённых периодических решений системы Лоренца", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 187–203. [A. N. Pchelintsev, A. A. Polunovskiy, I. Yu. Yukhanova, "The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 187–203 (In Russian)].

[5] He. Ying, "Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems", *Advance in Pure Mathematics*, **4** (2014), 480–486.

[6] Y. Liu, "Miltiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations", *Advances Mathematics Letters*, **4** (2004), 747–757.

[7] Э. И. Абдурагимов, "Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения", *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, **2**:76 (2010), 5–12. [E. I. Abduragimov, "Positive solution of a two-point boundary value problem for one fourth-order ODE and a numerical method for its consruction", *Samara University Reports. Natural Science Series*, **2**:76 (2010), 5–12 (In Russian)].

[8] Э. И. Абдурагимов, "Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка", *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*, **10**:121 (2014), 9–16. [E. I. Abduragimov, "Existence of a positive solution to a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE", *Samara University Reports. Natural Science Series*, **10**:121 (2014), 9–16 (In Russian)].

[9] Э. И. Абдурагимов, Т. Ю. Гаджиева, Р. К. Магомедова, "Численный метод построения положительного решения двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка", *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия Естественные науки*, **6** (2015), 85–92. [E. I. Abduragimov, T. Yu. Hajiyeva, R. K. Magomedova, "A numerical method for construction a positive solution to a two-point boundary value problem for one nonlinear fourth-order ODE", *Dagestan University Reports. Series: Natural Sciences*, **6** (2015), 85–92 (In Russian)].

[10] Э. И. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, Т. Ю. Гаджиева, "Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения", *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия Естественные науки*, **3** (2019), 79–85. [E. I. Abduragimov, P. E. Abduragimova, T. Yu. Hajiyeva, "Two - point boundary value problem for one nonlinear ODE of the 4 order. Existence, uniqueness of a positive solution and a numerical method for its consruction", *Dagestan University Reports. Series: Natural Sciences*, **3** (2019), 79–85 (In Russian)].

[11] T. Y. Na, *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1979, 296 pp.

[12] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976. [E. Kamke, *Handbook of Ordinary Differential Equations*, Science Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

Информация об авторах

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация. E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Абдурагимова Патимат Эльдерхановна, аспирант, кафедра прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация.
E-mail: abpatuka@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9050-0209

Курамагомедова Мадина Магомедрасуловна, аспирант, кафедра прикладной математики. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Российская Федерация.
E-mail: madina19.12@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6424-9348

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Курамагомедова Мадина Магомедрасуловна
E-mail: madina19.12@mail.ru

Поступила в редакцию 07.08.2021 г.
Поступила после рецензирования 01.10.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the authors

Gusen E. Abduragimov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation.
E-mail: gusen_e@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7095-932X

Patimat E. Abduragimova, Post-Graduate Student, Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: abpatuka@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9050-0209

Madina M. Kuramagomedova, Post-Graduate Student, Applied Mathematics Department. Dagestan State University, Makhachkala, Russian Federation. E-mail: madina19.12@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6424-9348

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Madina M. Kuramagomedova
E-mail: madina19.12@mail.ru

Received 07.08.2021
Reviewed 01.10.2021
Accepted for press 27.11.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362
УДК 517.922, 517.988

О задаче Коши для неявных дифференциальных уравнений высших порядков

Арам Владимирович АРУТЮНОВ[1] **,**
Елена Александровна ПЛУЖНИКОВА[2]
[1] ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Статья посвящена исследованию неявных дифференциальных уравнений на основе утверждений о накрывающих отображениях произведений метрических пространств. Сначала рассмотрена система уравнений

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\Phi_i : X_i \times X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_i$, $y_i \in Y_i$, X_i и Y_i — метрические пространства, $i = \overline{1,n}$. Предполагается, что отображение Φ_i является накрывающим по первому аргументу и липшицевым по каждому из остальных аргументов начиная со второго. Получены условия разрешимости этой системы и оценки расстояния от произвольного заданного элемента $x_0 \in X$ до множества решений. Далее в статье получено утверждение о действии оператора Немыцкого в пространствах суммируемых функций и установлена взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции. Перечисленные результаты применены к исследованию системы неявных дифференциальных уравнений, для которой доказано утверждение о локальной разрешимости задачи Коши с ограничениями на производную решения. Такие задачи возникают, в частности, в моделях управляемых систем. В заключительной части статьи аналогичными методами исследовано дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешенное относительно старшей производной. Получены условия существования решения задачи Коши.

Ключевые слова: неявные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения высших порядков, задача Коши, накрывающее отображение, метрическое пространство, оператор Немыцкого, функциональное пространство

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Арутюнов А.В., Плужникова Е.А.* О задаче Коши для неявных дифференциальных уравнений высших порядков // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 348–362. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362

On the Cauchy problem for implicit differential equations of higher orders

Aram V. ARUTYUNOV[1] **, Elena A. PLUZHNIKOVA**[2]

[1] Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklouho-Maclay St., Moscow 117198, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the study of implicit differential equations based on statements about covering mappings of products of metric spaces. First, we consider the system of equations

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n},$$

where $\Phi_i : X_i \times X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_i$, $y_i \in Y_i$, X_i and Y_i are metric spaces, $i = \overline{1,n}$. It is assumed that the mapping Φ_i is covering in the first argument and Lipschitz in each of the other arguments starting from the second one. Conditions for the solvability of this system and estimates for the distance from an arbitrary given element $x_0 \in X$ to the set of solutions are obtained. Next, we obtain an assertion about the action of the Nemytskii operator in spaces of summable functions and establish the relationship between the covering properties of the Nemytskii operator and the covering of the function that generates it. The listed results are applied to the study of a system of implicit differential equations, for which a statement about the local solvability of the Cauchy problem with constraints on the derivative of a solution is proved. Such problems arise, in particular, in models of controlled systems. In the final part of the article, a differential equation of the n-th order not resolved with respect to the highest derivative is studied by similar methods. Conditions for the existence of a solution to the Cauchy problem are obtained.

Keywords: implicit differential equations, differential equations of higher orders, the Cauchy problem, covering map, metric space, the Nemytsky operator, functional space

Mathematics Subject Classification: 34A09, 47H14, 47H30.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131).

For citation: Arutyunov A.V., Pluzhnikova E.A. O zadache Koshi dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy vysshikh poryadkov [On the Cauchy problem for implicit differential equations of higher orders]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 348–362. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-348-362. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В статье рассматриваются системы неявных дифференциальных уравнений первого порядка и неявные дифференциальные уравнения высших порядков. Исследование основано на результатах об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими в метрических пространствах и обладающими свойством накрывания. Идея применения результатов о накрывающих отображениях к исследованию различных классов функциональных уравнений была предложена в работе [1]. В этой работе и в работах [2–4] были получены утверждения о нелинейных липшицевых возмущениях накрывающих отображений и на их основе определены условия существования и непрерывной зависимости от параметров решений интегральных уравнений и задачи Коши для скалярного неявного дифференциального уравнения первого порядка. В связи с исследованием краевых задач для неявных дифференциальных уравнений в работах [5, 6] начато исследование накрывающих отображений в произведениях метрических пространств. Системы абстрактных уравнений с «векторно накрывающими» отображениями, действующими в произведениях метрических пространств (включая системы, описывающие кратные точки совпадения и задачи о липшицевых возмущениях), подробно рассмотрены в [7–9]. С использованием утверждений о векторно накрывающих отображениях в [10] были получены условия управляемости для дифференциальной системы неявного вида.

В данной работе предлагается уточнение утверждений работ [5, 6, 10] о системах уравнений с отображениями произведений метрических пространств. Предполагается, что эти отображения по диагональным переменным являются накрывающими, а по остальным аргументам обладают свойством липшицевости. На основании полученного утверждения о системах операторных уравнений рассматривается система неявных дифференциальных уравнений первого порядка и скалярное неявное дифференциальное уравнение n-го порядка, $n \geq 2$.

Статья разбита на четыре части. В секции 1. приведены определения основных понятий и получено утверждение о разрешимости системы операторных уравнений. С целью применения этих результатов к конкретным классам функциональных уравнений в секции 2. сформулированы утверждение о действии оператора Немыцкого и утверждение, устанавливающее взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции. В секции 3. доказано утверждение о локальной разрешимости системы неявных дифференциальных уравнений. В секции 4. исследован вопрос разрешимости дифференциального уравнения n-го порядка.

1. Разрешимость системы операторных уравнений

Напомним определение свойства накрываемости отображений, действующих в метрических пространствах.

Пусть X и Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, соответственно. Замкнутый шар пространства X с центром в $x \in X$ радиуса $r \geq 0$ будем обозначать через $B_X(x, r)$ (аналогичное обозначение будем использовать и для других метрических пространств). Пусть задано отображение $\Phi : X \to Y$, множество $V \subset Y$ и положительное число α.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем говорить, что отображение Φ является *α-накрывающим множество* V (или *α-накрывает множество* V), если для любых $r > 0$ и $u \in X$ справедливо включение

$$V \cap B_Y\big(\Phi(u), \alpha r\big) \subset \Phi\big(B_X(u,r)\big).$$

В случае $V = Y$ отображение Φ будем называть *α-накрывающим* (без упоминания множества). Такие отображения исследованы в [11–13] в связи с задачей о существовании и свойствах точек совпадения. В работах [1–3] исследованы вопросы разрешимости уравнений с накрывающими отображениями метрических пространств. Отметим, что приведенное определение 1.1 свойства α-накрывания множества V равносильно следующему соотношению

$$\forall y \in V \quad \forall u \in X \quad \exists x \in X \quad \Phi(x) = y, \quad \rho_X(x,u) \le k\rho_Y(y, \Phi(u)),$$

где $k = \alpha^{-1}$. Это соотношение в случае $V = Y$ называют *k-метрической регулярностью отображения* Φ (см. [14, 15]).

Пусть для $i, j = \overline{1,n}$ заданы метрические пространства (X_j, ρ_{X_j}), (Y_i, ρ_{Y_i}), множества $V_i \subset Y_i$, элементы $y_i \in V_i$ и отображения $\Phi_i : X_i \times \prod_{j=1}^{n} X_j \to Y_i$. Рассмотрим систему n операторных уравнений с n неизвестными $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\ldots$, $x_n \in X_n$ вида

$$\Phi_i(x_i, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Обозначим $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$, $Y = \prod_{i=1}^{n} Y_i$, $V = \prod_{i=1}^{n} V_i$. Систему (1.1) нам удобно будет рассматривать как операторное уравнение с отображением, действующим из X в Y, относительно неизвестного вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$. Произведение X можно метризовать: метрика в X может быть задана равенством

$$\begin{aligned} &\rho_X(x,u) = \big|\big(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \rho_{X_2}(x_2,u_2), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n)\big)\big|_{\mathbb{R}^n}, \\ &x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ — любая монотонная норма в $\mathbb{R}^n$. Аналогично может быть задана метрика в произведении Y. Определим отображение $\Phi : X \times X \to Y$ соотношением

$$\Phi(u,x) = \big(\Phi_i(u_i, x)\big)_{i=\overline{1,n}}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X, \quad u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in X.$$

В принятых обозначениях система уравнений (1.1) записывается в виде операторного уравнения

$$\Phi(x,x) = y, \tag{1.3}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V$.

Если отображение Φ по первому аргументу является α-накрывающим, а по второму аргументу — β-липшицевым, то при $\alpha > \beta$ разрешимость уравнения (1.3) может быть установлена на основании утверждений цитируемых выше работ [1–3]. Возникает вопрос об определении чисел α, β и проверке неравенства $\alpha > \beta$, если известны константы накрывания и липшицевости для компонент Φ_i по первому и второму аргументам, соответственно. В случае $V_i = Y_i$ подходы к исследованию данной проблемы предложены в [5, 6]. Здесь мы применим близкие идеи, которые позволят исследовать разрешимость векторного операторного уравнения (1.3) при правых частях $y \in V$.

Пусть заданы числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Определим матрицы

$$A = \operatorname{diag}(\alpha_i)_{n \times n}, \qquad B = (\beta_{ij})_{n \times n}, \qquad C = A^{-1}B = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n \times n}. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\varrho(C)$ — спектральный радиус матрицы C.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть метрические пространства X_j, $j = \overline{1, n}$, являются полными и выполнены условия:*

при всех $i = \overline{1, n}$, для любого $x \in X$ отображение $\Phi_i(\cdot, x) : X_i \to Y_i$ является α_i-накрывающим множество V_i;

при всех $i, j = \overline{1, n}$, для любых $u_i \in X_i$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_{j-1} \in X_{j-1}, x_{j+1} \in X_{j+1}, \ldots, x_n \in X_n$ отображение $\Phi_i(u_i, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : X_j \to Y_i$ является β_{ij}-липшицевым;

для любых $\{u^k\} \subset X$, $u \in X$, $y \in V$ из сходимостей $u_i^k \to u_i$ (в пространстве X_i) и $\Phi_i(u_i^k, u) \to y_i$ (в пространстве Y_i) при всех $i = \overline{1, n}$ следует равенство $\Phi(u, u) = y$.

Тогда если для матрицы C, определенной формулой (1.4), выполнено $\varrho(C) < 1$, то при любом $y \in V$ система операторных уравнений (1.1) разрешима и, более того, для любого $\varepsilon > 0$ можно так задать монотонную норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^n}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, что для любого $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0) \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ системы (1.1), удовлетворяющее оценке

$$\left| \big(\rho_{X_i}(\xi_i, u_i^0)\big)_{i=\overline{1,n}} \right|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\frac{1}{1 - \varrho(C)} + \varepsilon \right) \left| \left(\frac{\rho_{Y_i}\big(y_i, \Phi_i(u_i^0, u^0)\big)}{\alpha_i} \right)_{i=\overline{1,n}} \right|_{\mathbb{R}^n}.$$

Схема доказательства теоремы 1.1 в основном повторяет схему доказательства теоремы 1 о разрешимости системы уравнений с условно накрывающими отображениями в произведении метрических пространств из [5], поэтому здесь не приводится.

Отметим, что для случая $V = Y$ близкие теореме 1.1 условия накрывания отображений, действующих в произведении метрических пространств, получены в работе [6].

2. Оператор Немыцкого в пространствах измеримых функций

Предлагаемое в этой секции исследование свойств оператора суперпозиции (называемого в литературе оператором Немыцкого) требуется для получения основанных на теореме 1.1 условий разрешимости неявных дифференциальных уравнений. Здесь будут сформулированы утверждение о действии оператора Немыцкого и утверждение, устанавливающее взаимосвязь свойств накрывания оператора Немыцкого и накрывания порождающей его функции.

Обозначим через $\operatorname{cl}(\mathbb{R}^n)$ совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Для измеримого многозначного отображения $\Xi : [a, b] \to \operatorname{cl}(\mathbb{R})$ определим следующие полные метрические пространства: $L_\infty([a, b], \Xi)$ — пространство существенно ограниченных функций $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$ с метрикой $\rho_{L_\infty}(y_1, y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} |y_1(s) - y_2(s)|$; $L_p([a, b], \Xi)$, $1 \leq p < \infty$ — пространство функций $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$, суммируемых в

p-й степени, с метрикой $\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \left(\int\limits_a^b |y_1(s) - y_2(s)|^p ds\right)^{1/p}$. Отметим, что множество $L_p([a,b], \Xi)$, $1 \le p \le \infty$, не пусто тогда и только тогда, когда $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Xi(\cdot)\big) \in L_p([a,b], \mathbb{R})$, где

$$\rho_{\mathbb{R}}\big(\Xi(t)\big) = \inf\{|\xi|,\ \xi \in \Xi(t)\}, \quad t \in [a,b].$$

Определим также пространство $AC_p([a,b], \Xi)$, $1 \le p \le \infty$, абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ таких, что $\dot{x} \in L_p([a,b], \Xi)$, с метрикой

$$\rho_{AC_p}(x_1, x_2) = \big|\big(\rho_{L_p}(\dot{x}_1, \dot{x}_2),\ x_1(a) - x_2(a)\big)\big|_{\mathbb{R}^2}.$$

Заметим, что при $\Xi(t) \equiv \mathbb{R}$ пространства $L_p([a,b], \mathbb{R})$, $AC_p([a,b], \mathbb{R})$ являются банаховыми, а определенные выше метрики стандартно выражаются через норму этих пространств: $\rho_{L_p}(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{L_p}$, $\rho_{AC_p}(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{AC_p}$. Таким образом, метрические пространства $L_p([a,b], \Xi)$, $AC_p([a,b], \Xi)$ — это подпространства «обычных» пространств $L_p([a,b], \mathbb{R})$, $AC_p([a,b], \mathbb{R})$, метрика в которых определяется через норму приведенными выше формулами.

Пусть задана измеримая функция $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ такая, что $\eta(t) \in \Xi(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$. Определим пространство $W_p\big(\eta, [a,b], \Xi\big)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций $t \in [a,b] \mapsto y(t) \in \Xi(t)$, удовлетворяющих условию $y - \eta \in L_p([a,b], \mathbb{R})$, с метрикой $\rho_{W_p}(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_{L_p}$ (очевидно, что $y_1 - y_2 = (y_1 - \eta) - (y_2 - \eta) \in L_p([a,b], \mathbb{R})$ для любых $y_1, y_2 \in W_p\big(\eta, [a,b], \Xi\big)$). Отметим, что $W_p\big(\eta, [a,b], \Xi\big)$ вложено в пространство $W_p\big(\eta, [a,b], \mathbb{R}\big)$.

Пусть заданы числа $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ и определены измеримые многозначные отображения $\Omega : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$, $\Theta : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^{l_2})$, Предположим, что $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega(\cdot)\big) \in L_{p_1}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$. Пусть, далее, задана функция $\big(t \in [a,b],\ x \in \Omega(t)\big) \mapsto g\big(t, x\big) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Зафиксируем функцию $\overline{\omega} \in L_{p_1}([a,b], \Omega)$ и определим функцию $\eta(\cdot) = g\big(\cdot, \overline{\omega}(\cdot)\big)$. В случае $p_1 \ne \infty$ относительно функции g будем предполагать, что существует $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых при почти всех $t \in [a,b]$ и всех $w \in \Omega(t)$ выполнено неравенство $|g(t,w) - \eta(t)| \le \lambda |w|^{p_1/p_2}$. Если $p_1 = \infty$, то предполагаем, что при любом $r > 0$ существует такая функция $\zeta_r \in L_{p_2}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$, что $|g(t,w) - \eta(t)| \le \zeta_r(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w \in \Omega(t)$ таких, что $|w| \le r$.

Определим оператор Немыцкого соотношением

$$\forall w \in L_{p_1}([a,b], \Omega) \ \ (N_g w)(t) = g\big(t, w(t)\big), \quad t \in [a,b]. \tag{2.1}$$

Рассмотрим также функцию $\widehat{g}(t,w) = g(t,w) - \eta(t)$ и соответствующий оператор Немыцкого

$$\forall w \in L_{p_1}([a,b], \Omega) \ \ (N_{\widehat{g}} w)(t) = \widehat{g}\big(t, w(t)\big), \quad t \in [a,b]. \tag{2.2}$$

В силу известных теорем об операторе Немыцкого в лебеговых пространствах (см., например, [16, § 17]), оператор $N_{\widehat{g}}$ действует из пространства $L_{p_1}([a,b], \Omega)$ в пространство $L_{p_2}([a,b], \mathbb{R})$ и при $p_1 \ne \infty$ является непрерывным и ограниченным, а при $p_1 = \infty$ — замкнутым и ограниченным. Поэтому, в силу определения пространства $W_{p_2}\big(\eta, [a,b], \mathbb{R}\big)$, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Определенный формулой* (2.2) *оператор* N_g *действует из пространства* $L_{p_1}([a,b],\Omega)$ *в пространство* $W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$. *В случае* $p_1\neq\infty$ *оператор* N_g *является непрерывным и ограниченным, а при* $p_1=\infty$ *— замкнутым и ограниченным.*

Теперь приведем условия накрывания оператора $N_g : L_{p_1}([a,b],\Omega)\to W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$.

Лемма 2.2. *Пусть существует такое* $\alpha_g>0$, *что при почти всех* $t\in[a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot):\Omega(t)\to\mathbb{R}$ *является* α_g*-накрывающим множество* $\Theta(t)$. *Тогда оператор Немыцкого* $N_g : L_{p_1}([a,b],\Omega)\to W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\mathbb{R}\big)$ *будет* α_N*-накрывающим множество* $W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\Theta\big)$, *где* $\alpha_N=(b-a)^{-(p_2-p_1)/(p_1p_2)}\alpha_g$, *в частности, при* $p_1=p_2$ *константы накрывания равны:* $\alpha_N=\alpha_g$, *в случае* $p_1<p_2=\infty$ *выполнено равенство* $\alpha_N=(b-a)^{-1/p_1}\alpha_g$.

Доказательство леммы 2.2 аналогично доказательству теоремы 3 из [5] о накрывании оператора Немыцкого, действующего из $L_{p_1}([a,b],\Omega)$ в $L_{p_2}([a,b],\Theta)$.

3. Система неявных дифференциальных уравнений

Полученные в секции 1. условия разрешимости системы операторных уравнений (1.1) и полученные в секции 2. утверждения о свойствах оператора Немыцкого здесь применяются к исследованию задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции.

Сформулируем рассматриваемую задачу Коши. Пусть заданы: измеримые многозначные отображения
$$\Omega_i,\Theta_i:[a,b]\to\mathrm{cl}(\mathbb{R}),\quad i=\overline{1,n},$$
удовлетворяющие условиям Каратеодори функции
$$\big(t\in[a,b],\ x\in\mathbb{R}^n,\ w_i\in\Omega_i(t)\big)\mapsto f_i(t,x,w_i)\in\mathbb{R},\quad i=\overline{1,n}$$
(т. е. функции f_i измеримы по первому аргументу и непрерывны по совокупности остальных аргументов), а также измеримые функции
$$t\in[a,b]\mapsto y_i(t)\in\Theta_i(t),\quad i=\overline{1,n},$$
и числа $\gamma_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений
$$f_i\big(t,x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t),\dot{x}_i(t)\big)=y_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in[a,b],\tag{3.1}$$
с начальными условиями
$$x_i(a)=\gamma_i,\quad i=\overline{1,n},\tag{3.2}$$
и дополнительными ограничениями на производные
$$\dot{x}_i(t)\in\Omega_i(t),\quad t\in[a,b],\quad i=\overline{1,n}.\tag{3.3}$$

Отметим, что дополнительные ограничения на искомую функцию или ее производную возникают, например, в моделях систем управления (см. [10]).

Пусть заданы числа $1\le p_{1i}\le p_{2i}\le\infty$, $i=\overline{1,n}$. Будем предполагать, что имеет место включение $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega_i(\cdot)\big)\in L_{p_{1i}}([a,b],\mathbb{R})$, $i=\overline{1,n}$. При каждом $i=\overline{1,n}$ зафиксируем функцию

$\overline{\omega}_i \in L_{p_{1i}}([a,b],\Omega_i)$ и определим функцию $\eta_i(\cdot) = f_i\big(\cdot,\gamma,\overline{\omega}_i(\cdot)\big)$. Для любого $i=\overline{1,n}$, если $p_{1i}\neq\infty$, то относительно функции f_i будем предполагать, что для некоторого $\lambda_i\in\mathbb{R}$ при почти всех $t\in[a,b]$ и любых $w_i\in\Omega_i(t)$ выполнено неравенство

$$\big|f_i(t,\gamma,w_i)-\eta_i(t)\big| \le \lambda_i |w_i|^{p_{1i}/p_{2i}}.$$

Если $p_{1i}=\infty$, то будем предполагать, что для любого $r>0$ существует такая функция $\zeta_r\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что для всех $|w_i|\le r$ выполнено неравенство

$$\big|f_i(t,\gamma,w_i)-\eta_i(t)\big| \le \zeta_r(t).$$

Будем рассматривать локальные решения задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3), то есть определенные не обязательно на всем $[a,b]$, а на некотором «меньшем» отрезке $[a,a+\tau]$, где $\tau\in(0,b-a]$. Решение задачи (3.1), (3.2), (3.3) будем искать в классе абсолютно непрерывных функций $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):[a,a+\tau]\to\mathbb{R}^n$, компоненты которых $x_i\in AC_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $i=\overline{1,n}$.

Теорема 3.1. *Предположим, что если $p_{1j}=1$ при некотором j, то $p_{1i}\neq\infty$ при всех номерах $i\neq j$. Пусть при всех $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$ существуют такие $\alpha_i>0$ и $\beta_{ij}\ge 0$, что для почти всех $t\in[a,b]$ выполнены условия:*

для любого $x\in\mathbb{R}^n$ отображение $f_i(t,x,\cdot):\Omega_i(t)\to\mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$;

для любого $w_i\in\Omega_i(t)$ отображение $f_i(t,\cdot,w_i):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j\in\mathbb{R}$ второго аргумента.

Тогда для любых $y_i\in W_{p_{2i}}\big(\eta_i,[a,b],\Theta_i\big)$, $i=\overline{1,n}$, существует $\tau\in(0,b-a]$ и существует определенное на $[a,a+\tau]$ решение $x\in\prod_{j=1}^n AC_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\tau\in(0,b-a]$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для системы

$$\dot{x}_i(t)=v_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in[a,a+\tau],$$

с начальным условием (3.3). Для любой правой части $v=(v_i)_{i=\overline{1,n}}\in\prod_{i=1}^n L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$ решением этой задачи является функция $x=(x_i)_{i=\overline{1,n}}\in\prod_{i=1}^n AC_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, определяемая формулой $x(t)=\gamma+\int_a^t v(s)\,ds$ (то есть $x_i(t)=\gamma_i+\int_a^t v_i(s)\,ds$, $i=\overline{1,n}$). Рассматриваемая вспомогательная задача позволяет представить исходную задачу Коши (3.1), (3.2), (3.3) при $t\in[a,a+\tau]$ в виде системы

$$f_i\Big(t,\,\gamma+\int_a^t v(s)\,ds,\,v_i(t)\Big)=y_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad t\in[a,a+\tau],\tag{3.4}$$

относительно неизвестного $v\in\prod_{i=1}^n L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$ — производной от искомой абсолютно непрерывной функции.

Чтобы применить к полученной системе (3.4) теорему 1.1, определим отображения Φ_i, $i=\overline{1,n}$, сопоставляющие любым $w_i \in L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $v \in \prod_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ функцию

$$\Phi_i(w_i,v)(t) = f_i\Big(t,\, \gamma + \int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\Big), \quad t \in [a,a+\tau], \tag{3.5}$$

и покажем, что $\Phi_i : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i) \times \prod_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$, $i=\overline{1,n}$.

Действительно, во-первых, согласно лемме 2.1 $f_i\big(\cdot,\gamma,w_i(\cdot)\big) \in W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$, а во-вторых, в силу предположения β_{ij}-липшицевости отображения f_i по каждой компоненте второго аргумента получаем

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^{a+\tau} \Big| f_i\big(t,\, \gamma + \int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \\ \le \Big(\int_a^{a+\tau} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \Big|\int_a^t v(s)\,ds\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \le \Big(\int_a^{a+\tau} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \|v_i\|_{L_{p_{1i}}} \tau^{1-1/p_{1i}}\,dt\Big)^{1/p_{2i}} \\ \le \Big(\sum_{j=1}^{n} \tau\beta_{ij} \|v_i\|_{L_{p_{1i}}} \tau^{1-1/p_{1i}}\Big)^{1/p_{2i}} < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^{a+\tau} \Big| f_i\big(t,\, \gamma + \int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - \eta(t)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \le \Big(\int_a^{a+\tau} \Big| f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big) - \eta(t)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} \\ + \Big(\int_a^{a+\tau} \Big| f_i\big(t,\, \gamma + \int_a^t v(s)\,ds,\, w_i(t)\big) - f_i\big(t,\gamma,w_i(t)\big)\Big|^{p_{2i}} dt\Big)^{1/p_{2i}} < \infty,\end{aligned}$$

то есть $\Phi_i(w_i,v) \in W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$.

Итак, система функциональных уравнений (3.4) записывается в виде следующей системы операторных уравнений

$$\Phi_i(v_i,v_1,v_2,\ldots,v_n) = y_i, \quad i=\overline{1,n}. \tag{3.6}$$

Осталось проверить условия теоремы 1.1 для заданных формулой (3.5) отображений $\Phi_i : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i) \times \prod_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$. Рассмотрим только ситуацию $1 \le p_{1i} \le p_{2i} < \infty$, в случае $1 \le p_{1i} \le p_{2i} = \infty$ доказательство аналогичное.

Согласно лемме 2.2 отображение $\Phi_i(\cdot,v) : L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i) \to W_{p_{2i}}\big(\eta,[a,a+\tau],\mathbb{R}\big)$ при любом $v \in \prod_{j=1}^{n} L_{p_{1j}}([a,a+\tau],\Omega_j)$ является накрывающим с константой $\tau^{-(p_{2i}-p_{1i})/(p_{1i}p_{2i})}\alpha_i$.

Далее, для всех $w_i \in L_{p_{1i}}([a,a+\tau],\Omega_i)$, $v \in \prod_{l=1}^{n} L_{p_{1l}}([a,a+\tau],\Omega_l)$, произвольного $j=\overline{1,n}$

и любого $\tilde{v}_j \in L_{p_{1i}}([a, a+\tau], \Omega_j)$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\rho_{W_{p_{2i}}}\big(\Phi_i(w_i, v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n),\ \Phi_i(w_i, v_1, \ldots, \tilde{v}_j, \ldots, v_n)\big) \\
&\le \beta_{ij}\bigg(\int_a^{a+\tau}\bigg(\int_a^t \big|v_j(s) - \tilde{v}_j(s)\big|\, ds\bigg)^{p_{2i}} dt\bigg)^{1/p_{2i}} \\
&\le \beta_{ij}\bigg(\int_a^{a+\tau}\bigg(\int_a^{a+\tau} |v_j(s) - \tilde{v}_j(s)|^{p_{1j}}\, ds\bigg)^{p_{2i}/p_{1j}} (t-a)^{(p_{1j}-1)p_{2i}/p_{1j}}\, dt\bigg)^{1/p_{2i}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{\beta_{ij}\tau^{(p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/(p_{1j}p_{2i})}}{\big((p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/p_{1j}\big)^{1/p_{2i}}}\rho_{L_{p_{1j}}}(v_j, \tilde{v}_j).
\end{aligned}$$

Итак, отображение $\Phi_i(w_i, v_1, \ldots, v_{j-1}, \cdot, v_{j+1}, \ldots, v_n)$ удовлетворяет условию Липшица с константой

$$\big((p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/p_{1j}\big)^{-1/p_{2i}}\tau^{(p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})/(p_{1j}p_{2i})}\beta_{ij}.$$

Используя вычисленные значения, определяем для системы (3.6) матрицу (1.4):

$$C = \left(\frac{\tau^{(p_{1i}p_{1j}-p_{1i}+p_{1j})/(p_{1i}p_{1j})}{p_{1j}}^{1/p_{2i}}\beta_{ij}}{(p_{1j}p_{2i}-p_{2i}+p_{1j})^{1/p_{2i}}\alpha_i}\right)_{n\times n}. \tag{3.7}$$

Оценим элементы этой матрицы.

Покажем, что при основании τ показатель степени $\varsigma_{ij} = (p_{1i}p_{1j} - p_{1i} + p_{1j})/(p_{1i}p_{1j})0$ при любых i, j является положительным числом. Очевидно, что $\varsigma_{ij} > 0$, если $p_{1i} < \infty$ и $p_{1j} < \infty$. Пусть теперь конечно только одно из этих чисел. Если $p_{1i} = \infty$, то, согласно принятым предположениям, $p_{1j} > 1$, и поэтому $\varsigma_{ij} = (p_{1j} - 1)/p_{1j} > 0$. Если же $p_{1j} = \infty$, то $\varsigma_{ij} = (p_{1i} + 1)/p_{1i} > 0$. Наконец, при $p_{1i} = p_{1j} = \infty$ получаем $\varsigma_{ij} = 1$. Из доказанных оценок следует, что если определить $\varsigma = \min\{\varsigma_{ij}\}$, то $\varsigma > 0$.

Теперь для элементов матрицы (3.7) докажем конечность выражений

$$q_{ij} = (p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j})^{-1/p_{2i}}{p_{1j}}^{1/p_{2i}}$$

при всех $i, j = \overline{1, n}$. При конечных значениях p_{1i}, p_{1j} выполнено $p_{1j}p_{2i} - p_{2i} + p_{1j} > 0$ и поэтому $q_{ij} < \infty$. Далее, легко проверяется, что:

$$\begin{aligned}
&p_{2i} < \infty,\quad p_{1j} = \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = (p_{2i} + 1)^{-1/p_{2i}}; \\
&p_{2i} = \infty,\quad p_{1j} < \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = 1; \\
&p_{2i} = \infty,\quad p_{1j} = \infty \ \Rightarrow\ q_{ij} = 1.
\end{aligned}$$

Положим $q = \max\{q_{ij}\}$. Из приведенных выше рассуждений следует, что $q < \infty$. При всех $i, j = \overline{1, n}$ для элементов c_{ij} матрицы (3.7) выполнено $0 \le c_{ij} \le \tau^{\varsigma} qK$, где $K = \max\{{\alpha_i}^{-1}\beta_{ij}\}$. Из этой оценки следует, что $c_{ij} \to 0$ при $\tau \to 0$. Поэтому можно выбрать $\tau > 0$ так, чтобы $\varrho(C) < 1$.

Итак, все условия теоремы 1.1 выполнены. □

В теореме 3.1 предположения накрывания отображением $f_i(t, x, \cdot)$ множества $\Theta_i(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x \in \mathbb{R}^n$ и предположение липшицевости отображения $f_i(t, \cdot, w_i)$ на всем $\mathbb{R}^n$ при любых $w_i \in \Omega_i(t)$ можно ослабить. Можно потребовать выполнение этих условий для второго аргумента, принадлежащего не всему пространству $\mathbb{R}^n$, а только множеству $D = \prod_{j=1}^{n} [\gamma_j - \sigma_j, \gamma_j + \sigma_j]$, $\sigma_j > 0$. Отметим, что подобные ослабленные условия использовались в работах [1–3, 5].

Итак, будем считать, что функция $f_i(t, x, w_i)$ определена для аргументов $t \in [a, b]$, $x \in D$, $w_i \in \Omega_i(t)$. Предположим, что при почти всех $t \in [a, b]$ для любого $x \in D$ отображение $f_i(t, x, \cdot) : \Omega_i(t) \to \mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, для любого $w_i \in \Omega_i(t)$ отображение $f_i(t, \cdot, w_i) : D \to \mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j \in \mathbb{R}$ второго аргумента, а также выполнены остальные условия теоремы 3.1. Определим отображение

$$\big(t \in [a, b],\, x \in \mathbb{R}^n,\, w_i \in \Omega_i(t)\big) \mapsto \widehat{f}_i(t, x, w_i) \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, n}$$

соотношением

$$\widehat{f}_i(t, x, w_i) = f(t, \Pi(x), w_i), \quad \Pi(x) = (\widehat{x}_i)_{i=\overline{1,n}}, \quad \widehat{x}_i = \begin{cases} x_i, & \text{если} \ \ x_i \in D, \\ \gamma_j - \sigma_j, & \text{если} \ \ x_i < \gamma_j - \sigma_j, \\ \gamma_j + \sigma_j, & \text{если} \ \ x_i > \gamma_j + \sigma_j. \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными использовавшимся в [1, 2, 5], доказывается, что для определенных здесь функций $\widehat{f}_i$, $i = \overline{1, n}$, выполнены все условия теоремы 3.1. Таким образом, для любых $y_i \in W_{p_{2i}}\big(\eta_i, [a, b], \Theta_i\big)$, $i = \overline{1, n}$, существует $\tau \in (0, b - a]$ и существует определенное на $[a, a + \tau]$ решение $x \in \prod_{j=1}^{n} AC_{p_{1j}}([a, a + \tau], \Omega_j)$ задачи Коши для системы

$$\widehat{f}_i\big(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_i(t)\big) = y_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [a, b],$$

с условиями (3.2), (3.3). Для достаточно малого положительного $\tau' < \tau$ будет выполнено $x(t) \in D$ при $t \in [a, a + \tau']$. Следовательно, сужение функции x на отрезок $[a, a + \tau']$ будет решением исходной задачи Коши.

Итак, из теоремы 3.1 выводится следующие более общие условия разрешимости задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

Следствие 3.1. *Предположим, что если $p_{1j} = 1$ при некотором j, то $p_{1i} \neq \infty$ при всех номерах $i \neq j$. Пусть при всех $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ существуют такие $\alpha_i > 0$ и $\beta_{ij} \geq 0$, что для почти всех $t \in [a, b]$ выполнены условия:*

для любого $x \in D$ отображение $f_i(t, x, \cdot) : \Omega_i(t) \to \mathbb{R}$ является α_i-накрывающим множество $\Theta_i(t)$;

для любого $w_i \in \Omega_i(t)$ отображение $f_i(t, \cdot, w_i) : D \to \mathbb{R}$ является β_{ij}-липшицевым по каждой компоненте $x_j \in \mathbb{R}$ второго аргумента.

Тогда для любых $y_i \in W_{p_{2i}}\big(\eta_i, [a, b], \Theta_i\big)$, $i = \overline{1, n}$, существует $\tau \in (0, b - a]$ и существует определенное на $[a, a + \tau]$ решение $x \in \prod_{j=1}^{n} AC_{p_{1j}}([a, a + \tau], \Omega_j)$ задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3).

4. Дифференциальное уравнение n-го порядка

Здесь на основании полученных в секции 3. результатов о системе (3.1) неявных дифференциальных уравнений получены условия разрешимости дифференциального уравнения n-го порядка, не разрешенного относительно старшей производной.

Пусть заданы векторы $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n_+$. Обозначим $D_i = [\gamma_i - \sigma_i, \gamma_i + \sigma_i]$, $i = \overline{1, n}$, $D = \prod\limits_{i=1}^{n} D_i$. Пусть также определены измеримые многозначные отображения $\Omega, \Theta : [a, b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая условиям Каратеодори (измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция

$$\big(t \in [a, b],\, x \in D_1,\, w_1 \in D_2,\, \dots,\, w_{n-1} \in D_n,\, w_n \in \Omega(t)\big) \mapsto g(t, x, w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R},$$

а также измеримая функция $t \in [a, b] \mapsto y(t) \in \Theta(t)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$g\big(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)\big) = y(t) \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x(a) = \gamma_1, \quad \dot{x}(a) = \gamma_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(a) = \gamma_n \tag{4.2}$$

и дополнительным ограничением на старшую n-ую производную искомой функции

$$x^{(n)}(t) \in \Omega(t), \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, n}. \tag{4.3}$$

Сделаем «стандартную» замену переменных, обозначив

$$x_1 = x,\ \ x_2 = \dot{x},\ \dots,\ x_n = x^{(n-1)}.$$

Относительно новых неизвестных уравнение (4.1) превращается в систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 - x_2 = 0, \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} - x_n = 0, \\ g(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_n) = y(t). \end{cases} \tag{4.4}$$

Если определить функцию

$$\Big(t \in [a, b],\, x \in D,\, u_1 \in D_2,\, \dots,\, u_{n-1} \in D_n,\, u_n \in \Omega(t)\Big) \mapsto f(t, x, u) = \begin{pmatrix} -x_2 + u_1 \\ \vdots \\ -x_n + u_{n-1} \\ g(t, x, u_n) \end{pmatrix}$$

и обозначить

$$\begin{aligned} &y_1(t) \equiv 0,\ \dots,\ y_{n-1}(t) \equiv 0,\ y_n(t) = y(t), \\ &\Omega_1(t) \equiv \mathbb{R},\ \dots,\ \Omega_{n-1}(t) \equiv \mathbb{R},\ \Omega_n(t) = \Omega(t), \\ &\Theta_1(t) \equiv \{0\},\ \dots,\ \Theta_{n-1}(t) \equiv \{0\},\ \Theta_n(t) = \Theta(t), \end{aligned}$$

то становится очевидным, что задача Коши (4.1), (4.2), (4.3) для рассматриваемого уравнения n-го порядка представима в виде задачи Коши (3.1), (3.2), (3.3) для системы уравнений первого порядка, которая рассматривалась в секции 3. Это позволяет применить к исследованию задачи (4.1), (4.2), (4.3) теорему 3.1 и следствие 3.1.

Пусть заданы числа $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Будем предполагать, что имеет место включение $\rho_{\mathbb{R}}\big(\Omega(\cdot)\big) \in L_{p_1}([a,b],\mathbb{R})$. Зададим некоторую функцию $\overline{\omega} \in L_{p_1}([a,b],\Omega)$ и определим функцию $\eta(\cdot) = g\big(\cdot,\gamma_1,\dots,\gamma_n,\overline{\omega}(\cdot)\big)$. Если $p_{1i} \ne \infty$, то относительно функции g будем предполагать, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $w \in \Omega(t)$ выполнено неравенство

$$\big|g(t,\gamma_1,\dots,\gamma_n,w) - \eta(t)\big| \le \lambda |w|^{p_1/p_2}.$$

Если $p_1 = \infty$, то будем предполагать, что для любого $r > 0$ существует такая функция $\zeta_r \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что для всех $|w| \le r$ выполнено неравенство

$$\big|g(t,\gamma_1,\dots,\gamma_n,w) - \eta(t)\big| \le \zeta_r(t).$$

Определим пространство $AC^n_{p_1}\big([a,b],\Omega\big)$ таких n раз дифференцируемых функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, что $(n-1)$-ая производная является абсолютно непрерывной функцией, а для n-й производной выполнено $x^{(n)} \in L_{p_1}([a,b],\Omega)$. Локальным решением задачи (4.1), (4.2), (4.3) будем называть функцию $x \in AC^n_{p_1}([a,a+\tau],\Omega)$, удовлетворяющую при почти всех $t \in [a,a+\tau]$ уравнению (4.1), а также начальному условию (4.2).

Применяя к задаче (4.4), (3.2), (3.3) следствие 3.1, получаем следующее утверждение о задаче Коши (4.1), (4.2), (4.3) для уравнения n-го порядка.

Теорема 4.1. *Пусть существуют такие $\alpha > 0$ и $\beta_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, что для почти всех $t \in [a,b]$ выполнены условия:*

для любых $x \in D_1$, $u_1 \in D_2$, $\dots$, $u_{n-1} \in D_n$ отображение $g(t,x,\cdot) : \Omega(t) \to \mathbb{R}$ является α-накрывающим множество $\Theta(t)$;

для любого $u_n \in \Omega(t)$ отображение $g(t,\cdot,w) : D \to \mathbb{R}$ является липшицевым по каждой компоненте $x \in D_1$, $u_1 \in D_2$, $\dots$ $u_{n-1} \in D_n$ второго аргумента с коэффициентом $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$, соответственно.

Тогда для любого $y \in W_{p_2}\big(\eta,[a,b],\Theta\big)$ существует $\tau \in (0,b-a]$ и существует определенное на $[a,a+\tau]$ решение $x \in AC^n_{p_1}([a,a+\tau],\Omega)$ задачи Коши (4.1), (4.2), (4.3).

Проиллюстрируем применение теоремы 4.1 к исследованию конкретных уравнений.

П р и м е р 4.1. Рассмотрим задачу

$$\frac{1}{t}\big|\ddot{x}(t) - 1\big| + \dot{x}^2(t)\exp x(t) = y(t), \quad \ddot{x}(t) \in [0,2], \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \gamma. \tag{4.5}$$

В принятых выше обозначениях для этой задачи имеем

$$g(t,x,w_1,w_2) = \frac{1}{t}\big|w_2 - 1\big| + w_1^2 \exp x, \quad \Omega(t) \equiv [0,2].$$

Положим $\Theta(t) = \big[\varepsilon, \frac{1}{t}\big]$, $t \in [0,1]$, где ε — любое достаточно малое положительное число. Выберем функцию $\overline{w}(t) \equiv 0$, тогда $\eta(t) = \frac{1}{t}\big|0-1\big| + 0\exp\gamma = \frac{1}{t}$, $t \in [0,1]$. Выберем также любые $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$.

Определенные здесь функция g и многозначные функции Ω, Θ удовлетворяют условиям теоремы 4.1. Следовательно, для любого γ и любой измеримой функции y такой, что $y(t) \in \left[\varepsilon, \frac{1}{t}\right]$ и $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - y(t)\right)^{p_2} dt < \infty$, существует $\tau \in (0,1]$ и существует определенное на $[0,\tau]$ решение $x \in AC_{p_1}([0,\tau],\Omega)$ задачи (4.5).

References

[1] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[2] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[3] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[4] В. Мерчела, “Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 44–54. [W. Merchela, “On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 44–54 (In Russian)].

[5] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “Covering Mappings in a Product of Metric Spaces and Boundary Value Problems for Differential Equations Unsolved for the Derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[6] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Теорема о накрывании оператора в произведении метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **16**:1 (2011), 70–72. [E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “A theorem on operator covering in the product of metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **16**:1 (2011), 70–72 (In Russian)].

[7] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств”, *Математические заметки*, **100**:3 (2016), 344–362; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces”, *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 21–37.

[8] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения векторных отображений”, *Известия вузов. Математика*, 2016, № 10, 14–28; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Coincidence Points for Vector Mappings”, *Russian Mathematics*, **60**:10 (2016), 10–22.

[9] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, “Об итерационных методах решения уравнений с накрывающими отображениями”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **19**:4 (2016), 357–369; англ. пер.:T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, “On iterative methods for solving equations with covering mappings”, *Numerical Analysis and Applications*, **9**:4 (2016), 277–287.

[10] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями”, *Автоматика и телемеханика*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations”, *Automation and Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[11] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Математический сборник*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces”, *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[12] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155. [A. V. Arutyunov, “Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki [Covering mappings in metric spaces and fixed points]”, *Doklady Akademii nauk — Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, **416**:2 (2007), 151–155 (In Russian)].

[13] А. В. Арутюнов, “Точки совпадения двух отображений”, *Функциональный анализ и его приложения*, **48**:1 (2014), 89–93; англ. пер.:A. V. Arutyunov, “Coincidence Points of Two Maps”, *Functional Analysis and Its Applications*, **48**:1 (2014), 72–75.

[14] B. S. Mordukhovich, B. Wang, “Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces”, *Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004, № 50, 2650–2683.

[15] А. Д. Иоффе, “Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление”, *Успехи математических наук*, **55**:3 (333) (2000), 103–162; англ. пер.:A. D. Ioffe, “Metric regularity and subdifferential calculus”, *Russian Mathematical Surveys*, **55**:3 (2000), 501–558.

[16] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966. [M. A. Krasnosel’skij, P. P. Zabrejko, E. I. Pustyl’nik, P. E. Sobolevskij, *Integral’nye operatory v prostranstvah summiruemyh funkcij*, Nauka, Moscow, 1966 (In Russian)].

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Плужникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7326-7492

Elena A. Pluzhnikova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2008-3275

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Плужникова Елена Александровна
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Поступила в редакцию 02.07.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.09.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Elena A. Pluzhnikova
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Received 02.07.2021
Reviewed 15.09.2021
Accepted for press 27.11.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371
УДК 51-76, 517.988

О решениях типа «кольцо» уравнений нейронного поля

Рашид АТМАНИЯ[1], **Евгений Олегович БУРЛАКОВ**[2], **Иван Николаевич МАЛЬКОВ**[1]

[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе исследуется интегро-дифференциальное уравнение с интегральным оператором типа Гаммерштейна следующего вида:

$$\partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Данное уравнение формализует динамику распределения электрических потенциалов $u(t,x)$ в плоской нейронной среде и носит название уравнения нейронного поля. Изучаются решения типа «кольцо», представляющие собой стационарные радиально симметричные решения, отвечающие состоянию активности нейронной среды в некоторой области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, и состоянию покоя нейронного поля за пределами данной области. В работе предлагаются условия существования решений-колец, а также метод их приближенного численного нахождения. Используемые подходы основываются на замене в уравнении нейронного поля вероятностной функции f активации нейронов, имеющей сигмоидальную форму, функцией типа Хевисайда. Теоретическая часть работы сопровождается примером, иллюстрирующим процедуру исследования решений типа «кольцо» уравнения нейронного поля, содержащего типично используемую в математической нейробиологии функцию межнейронной связи, позволяющую учитывать как возбуждающие, так и тормозящие взаимодействия нейронов. Подобно случаю решений-бампов (стационарных решений уравнения нейронного поля, отвечающих активации области нейронного поля, представляющей собой внутренность некоторой окружности), при высоких значениях порога активации нейронов имеет место одновременное существование двух решений — так называемых «широкого кольца» и «узкого кольца», сливающихся вместе при критическом значении порога активации нейронов, при превышении которого решений-колец не существует.

Ключевые слова: двумерное уравнение нейронного поля, решение типа «кольцо», существование решений, приближенное построение решений

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-015-00475_а).

Для цитирования: *Атмания Р., Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О решениях типа «кольцо» уравнений нейронного поля // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 363–371. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371

On ring solutions of neural field equations

Rachid ATMANIA[1], **Evgenii O. BURLAKOV**[2], **Ivan N. MALKOV**[1]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to investigation of integro-differential equation with the Hammerstein integral operator of the following form:

$$\partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\mathbb{R}^2} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \quad t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^2.$$

The equation describes the dynamics of electrical potentials $u(t,x)$ in a planar neural medium and has the name of neural field equation. We study ring solutions that are represented by stationary radially symmetric solutions corresponding to the active state of the neural medium in between two concentric circles and the rest state elsewhere in the neural field. We suggest conditions of existence of ring solutions as well as a method of their numerical approximation. The approach used relies on the replacement of the probabilistic neuronal activation function f that has sigmoidal shape by a Heaviside-type function. The theory is accompanied by an example illustrating the procedure of investigation of ring solutions of a neural field equation containing a typically used in the neuroscience community neuronal connectivity function that allows taking into account both excitatory and inhibitory interneuronal interactions. Similar to the case of bump solutions (i. e. stationary solutions of neural field equations, which correspond to the activated area in the neural field represented by the interior of some circle) at a high values of the neuronal activation threshold there coexist a broad ring and a narrow ring solutions that merge together at the critical value of the activation threshold, above which there are no ring solutions.

Keywords: two-dimensional neural field equation, ring solution, existence of solutions, approximation of solutions

Mathematics Subject Classification: 45K05, 47H30, 92B99, 33F05.

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-015-00475_a).

For citation: Atmania R., Burlakov E.O., Malkov I.N. O resheniyakh tipa «kol'tso» uravneniy neyronnogo polya [On ring solutions of neural field equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 363–371. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-363-371. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В математической нейробиологии большое внимание уделяется изучению стационарных решений уравнений нейронного поля

$$\begin{gathered} \partial_t u(t,x) = -\tau u(t,x,x_{\mathrm{f}}) + \int\limits_{\Xi} \omega(x-y) f(u(t,y))dy, \\ t \geq 0,\ x \in \Xi \subseteq \mathbb{R}^m, \end{gathered} \tag{0.1}$$

(см., например, библиографию настоящей работы). В уравнении (0.1) величина $u(t,x)$ отвечает значению трансмембранного потенциала u нейрона в позиции x нейронного поля Ξ в момент времени t; $\tau > 0$ задает скорость процессов динамики электрических потенциалов нейронного поля; функции ω и f определяют вероятностную силу связи нейронов, зависящую от их удаленности, и вероятность активации $f(u)$ нейрона u при трансмембранном потенциале $u(t,x)$, соответственно. В наиболее подробно исследованном одномерном варианте уравнения (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}$) функция межнейронной связи ω стандартно задается четной функцией, положительная ветвь которой является линейной комбинацией экспоненциально убывающих функций. Типичные способы задания функции активации f можно обобщить, например, следующим образом:

$$f(u) = \begin{cases} 0,\ u < u^0, \\ \varphi(u),\ u \in [u^0, u^1], \\ 1,\ u > u^1, \end{cases} \tag{0.2}$$

где $0 < u^0 < u^1$, а функция φ непрерывна, не убывает и удовлетворяет условиям $\varphi(u^0) = 0,\ \ \varphi(u^1) = 1$.

В исследовании стационарных решений (0.1) преобладает подход, заключающийся в замене функции f функцией Хевисайда

$$H(u) = \begin{cases} 0,\ u < \theta, \\ H_\theta \in \{0, 1/2, 1\},\ u = \theta, \\ 1,\ u > \theta, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $\theta \in (u^0, u^1)$, в предположении того, что из сходимости $u^1 - u^0 \to 0$ должна следовать сходимость соответствующих решений к решению (0.1) при $f = H$ (см, например, работы [1, 2] и приведенную в них библиографию). Однако, как было показано в [1, 2], установление вышеупомянутой сходимости решений достаточно нетривиально и требует доказательства в каждом рассматриваемом случае.

Для $\Xi = \mathbb{R}$ и $f = H$ наиболее изученными являются стационарные симметричные относительно прямой $x = 0$ решения (0.1) типов «одиночный бамп» (U^1) и «двойной бамп» (W^1), обладающие свойствами

$$U^1(x) \geq \theta \ \Leftrightarrow\ x \in [-a, a],\ a > 0,$$

и

$$W^1(x) \geq \theta \ \Leftrightarrow\ x \in [-b, -a] \cup [a, b],\ b > a > 0,$$

соответственно (см., например, статьи [3–6] и обзор [7]). Исследования решений данных типов, соответствующих непрерывным функциям активации нейронов типа (0.2), гораздо менее многочисленны (см. [8–11]). Среди этих работ следует выделить статьи [10, 11], в которых доказывается, что условие $u^1 - u^0 \to 0$ обеспечивает сходимость решений U^1 и W^1 уравнения (0.1) к соответствующим решениям (0.1) в случае $f = H$.

При рассмотрении двумерного варианта уравнения (0.1) (т. е. отвечающего случаю $\Xi = \mathbb{R}^2$), функция межнейронной связи ω, как правило, предполагается радиально симметричной, имеющей в качестве образующей $\omega(|\cdot|)$ линейную комбинацию экспоненциально убывающих функций. Типично исследуются, соответственно, радиально симметричные аналоги U^2 и W^2 решений U^1 и W^1, имеющие названия «бамп» и «кольцо». Изучению бампов и колец в случае $\Xi = \mathbb{R}^2$ и $f = H$ посвящены работы [12, 13]. Условия существования решений-бампов для функции f вида (0.2), а также непрерывная зависимость таких решений при переходе от f к H получены в работах [14, 15]. Основным объектом настоящего исследования являются стационарные радиально симметричные решения типа «кольцо» двумерных уравнений нейронного поля (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}^2$). В настоящей работе приводятся условия существования решений-колец как для функции Хевисайда (0.3), так и для непрерывных функций активации нейронов, а также условия, гарантирующие непрерывный переход между этими решениями при сходимости $u^1 - u^0 \to 0$.

1. Основные результаты

Полагая $x \in \mathbb{R}^2$, имеющим компоненты $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$, где $r \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, представим решение-бамп радиуса $a > 0$ в явном виде следующим образом (см., например, [12, 15]):

$$U^2(r) = 2\pi a \int_0^\infty \widehat{\omega}(\varrho) J_0(r\varrho) a J_1(a\varrho)\Big) d\varrho,$$

где $\widehat{\omega}$ — преобразование Ханкеля функции ω, J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν ($\nu \in \mathbb{N}$). Решение-кольцо в данном случае может быть записано в виде разности бампа радиуса $b > 0$ и бампа радиуса a, $b > a > 0$ (см., например, [13]):

$$W^2(r) = 2\pi \int_0^\infty \widehat{\omega}(\varrho) J_0(r\varrho)\Big(bJ_1(b\varrho) - aJ_1(a\varrho)\Big) d\varrho. \tag{1.1}$$

Приведем определение решения-кольца, с которым будем работать всюду ниже.

О п р е д е л е н и е 1.1. Зафиксируем $\theta > 0$, $b > a > 0$. *Решением типа «кольцо»* внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) ($\Xi = \mathbb{R}^2$) назовем гладкую функцию $W^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$), удовлетворяющую уравнению (0.1) при $\Xi = \mathbb{R}^2$ и обладающую следующими свойствами:

- $W^2(x) \equiv W^2(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $x = |x|\exp(i\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$;
- $W^2(x) = \theta$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = a\} \cup \{x \in \Xi,\ |x| = b\}$;
- $W^2(x) > \theta \ \Leftrightarrow\ a < |x| < b$.

Решение W^2 типа «кольцо» назовем *правильным*, если $W^{2\prime}(x) \neq 0$ при всех $x \in \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = a\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| = b\}$.

Определим при помощи функции (0.2) семейство функций $f_i : \mathbb{R} \to [0,1]$, полагая

$$f_i(u) = \begin{cases} 0,\ u < u_i^0, \\ \varphi(u),\ u \in [u_i^0, u_i^1], \\ 1,\ u > u_i^1, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $u_i^0 \nearrow \theta \swarrow u_i^1$ при $i \to \infty$. Тогда, очевидно, $f_i \to f_\infty = H$ по мере на $\mathbb{R}$. Будем обозначать соответствующие решения уравнения (0.1) типа «правильное кольцо» через W_i^2 и W_∞^2 (в том случае, если они существуют).

Справедливо следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть образующая функция $\omega(|\cdot|) : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ радиально симметричной функции межнейронной связи ω является суммируемой дважды непрерывно дифференцируемой функцией, такой что*

$$\int\limits_0^\infty |\widehat{\omega}(r)| r^2 dr < \infty. \tag{1.3}$$

Пусть также имеют место неравенства

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\omega}(r)\Big(J_0(\xi r)J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0^2(\xi r) - 2J_1^2(\xi r) - J_0(\xi r)J_2(\xi r)\big)\Big)dr \neq 0, \tag{1.4}$$

$$\int\limits_0^\infty \widehat{\omega}(r)J_0(\cdot\, r)\Big(J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)\big)\Big)dr \not\equiv 0, \tag{1.5}$$

при $\xi = a, b$. Пусть, наконец, выполнено

$$(1 + \tfrac{\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(b)})\tfrac{\mathcal{X}(a)}{\mathcal{Y}(b)} - \tfrac{\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(a)} - \tfrac{\mathcal{X}(a)\mathcal{X}(b)}{\mathcal{Y}(a)\mathcal{Y}(b)} \neq 1, \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{X}(\xi) = \int\limits_0^\infty \widehat{\omega}(r)J_0(\xi, r)\Big(J_1(\xi r) + \tfrac{\xi r}{2}\big(J_0(\xi r) - J_2(\xi r)\big)\Big)dr,$$

$$\mathcal{Y}(\xi) = \int\limits_0^\infty \widehat{\omega}(r) r J_1(\xi r)\big(aJ_1(ar) - bJ_1(br)\big)dr.$$

Тогда если существует решение W_∞^2 уравнения (0.1) при $\Xi = \mathbb{R}^2$, то найдутся такие $R \gg b$ и $N \in \mathbb{N}$, что для всех $i > N$ существуют решения W_i^2 уравнения (0.1) при $\Xi = \{x \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq R\}$. Кроме того, имеет место сходимость

$$\begin{cases} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2,\ |x|\leq R} |W_i^2(x) - W_\infty^2(x)| \to 0, \\ \max\limits_{x\in\mathbb{R}^2,\ |x|\leq R} |W_i^{2\prime}(x) - W_\infty^{2}{}'(x)| \to 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

при $i \to \infty$.

Доказательство данного утверждения основывается на использовании теорем 2.1 и 2.2 работы [14] для исследования решений (в смысле определения 1.1) уравнения (0.1). Выполнение условий (1.4)–(1.6) и существование решения W^2_∞ проверяются численно.

Гарантируемая соотношениями (1.7) сходимость позволяет трактовать условия предложения 1 в качестве условий, допускающих приближенное численное отыскание решений типа «кольцо» уравнения статистической физики (0.1) в случае $\Xi = \mathbb{R}^2$.

Проиллюстрируем применение предложения 1, используя следующую типичную функцию межнейронной связи:

$$\omega(x) = \frac{1}{4\pi}\exp(-|x|) - \frac{1}{8\pi}\exp(-\frac{|x|}{2}) \tag{1.8}$$

(см., например, [6, 12, 13, 15]). Условие существования решения-кольца W^2_∞, имеющего внешний радиус b и внутренний радиус a, записывается следующим образом [13]:

$$W^2_\infty(b) = W^2_\infty(a) = \theta, \; b > a > 0, \tag{1.9}$$

где $W^2_\infty(r)$ имеет вид (1.1). Результат проверки условия (1.9) в случае (1.8) представлен на рис. 1. Подобно случаю решений-бампов (подробнее см. [6, 15]), при высоких

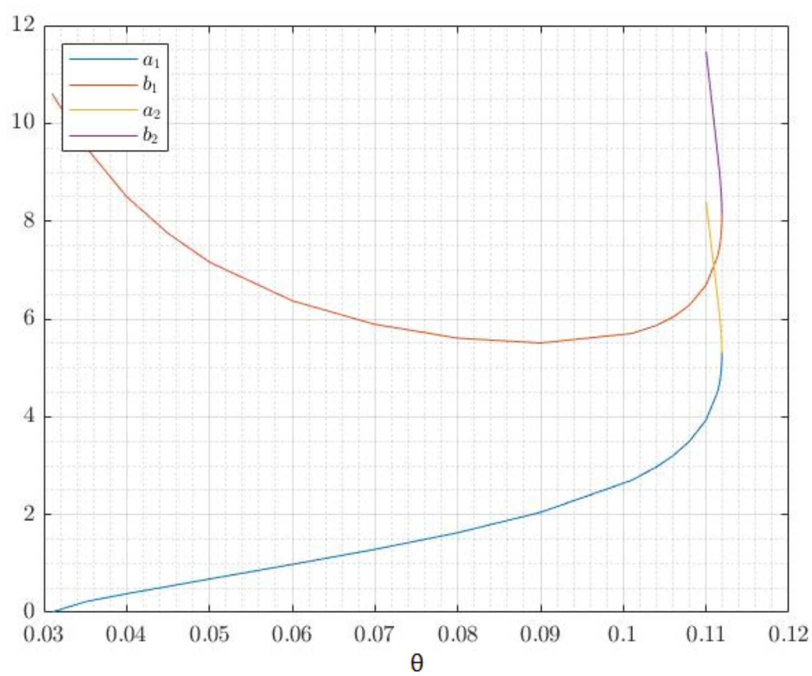

Рис. 1. Значения внутреннего и внешнего радиусов решений-колец, удовлетворяющих (1.9) при заданных порогах θ активации функции (0.3). Ветви a_1 и b_1 отвечают так называемому «широкому кольцу», ветви a_2 и b_2 – «узкому кольцу»

значениях порога функции активации наблюдается сосуществование двух решений — так называемых «широкого» и «узкого» решений-колец. Графики, отражающие зависимость радиальных образующих данных решений от порога θ функции активации (0.3) и являющихся приближениями соответствующих решений-колец W^2_i при сходимости $u^0_i \nearrow \theta \swarrow u^1_i$ $(i \to \infty)$ в (1.2), представлены на рис. 2 и 3.

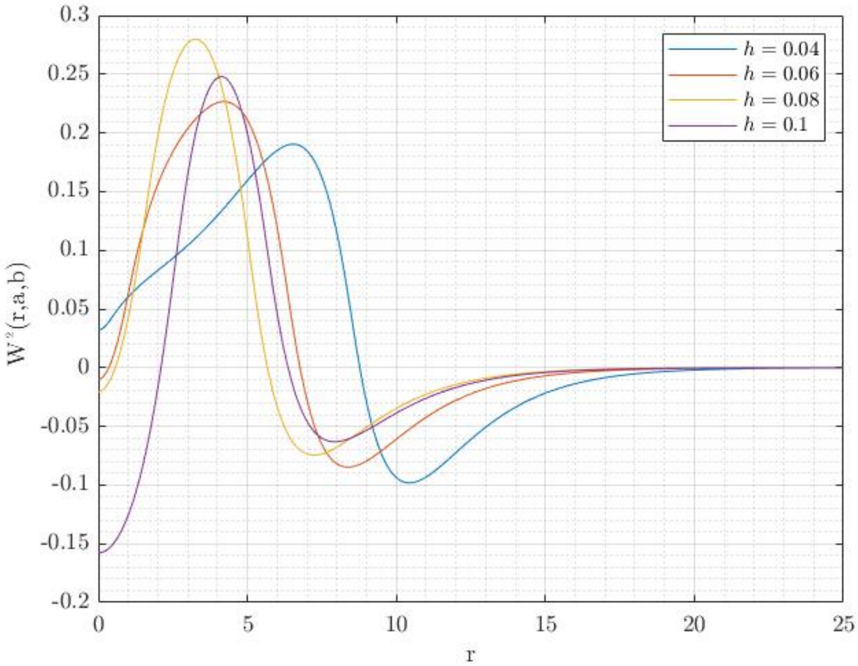

Рис. 2. Профили радиальных образующих «широкого кольца» в зависимости от порога θ функции активации (0.3)

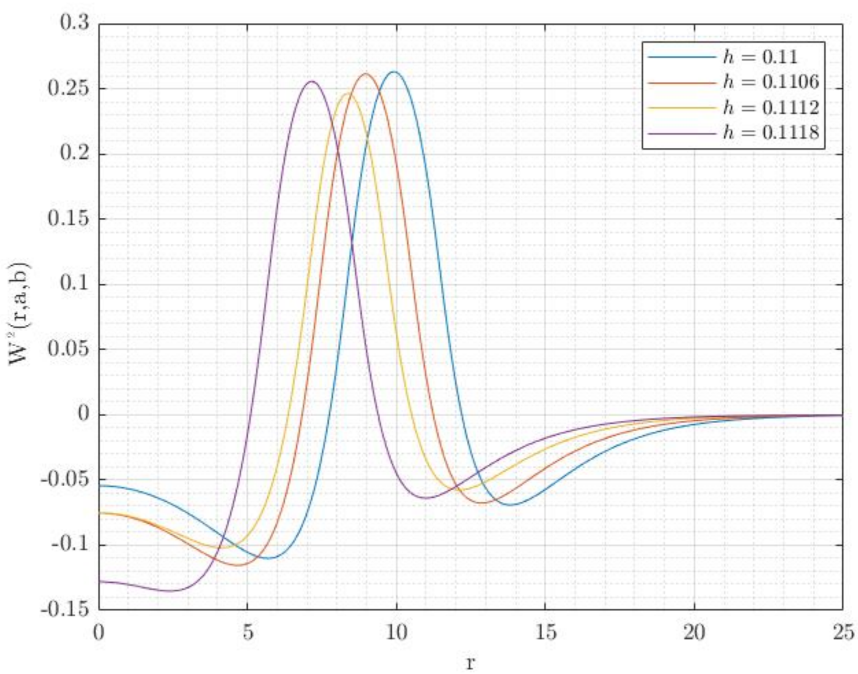

Рис. 3. Профили радиальных образующих «узкого кольца» в зависимости от порога θ функции активации (0.3)

References

[1] E. Burlakov, “On inclusions arising in neural field modeling”, *Differential Equations and Dynamical Systems*, **29** (2021), 765–787.

[2] E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, “On Continuous and Discontinuous Models of Neural Fields”, *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:3 (2021), 272–282.

[3] S. Amari, “Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields”, *Biological Cybernetics*, **27** (1977), 77–87.

[4] C. R. Laing, W. C. Troy, “Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **178** (2003), 190–218.

[5] C. R. Laing, W. C. Troy, B. Gutkin, G. B Ermentrout, “Multiple bumps in a neuronal network model of working memory”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **63** (2002), 62–97.

[6] S. Coombes, “Waves, bumps, and patterns in neural field theories”, *Biological Cybernetics*, **93** (2005), 91–108.

[7] P. Bressloff, “Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2011), 033001.

[8] C. R. Laing, W. C. Troy, “PDE methods for non-local models”, *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **2**:3 (2003), 487–516.

[9] S. Kishimoto, S. Amari, “Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields”, *Journal of Mathematical Biology*, **7** (1979), 303–318.

[10] A. Oleynik, A. Ponosov, J. Wyller, “On the properties of nonlinear nonlocal operators arising in neural field models”, *Journal Mathematical Analysis and Application*, **398** (2013), 398–351.

[11] E. Burlakov, J. Wyller, A Ponosov, “Stationary solutions of continuous and discontinuous neural field equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**:1 (2016), 47–68.

[12] S. E. Folias, P. C. Bressloff, “Breathers in two-dimensional neural media”, *Physical Review Letters*, **95** (2005), 208107.

[13] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, “Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities”, *New Journal of Physics*, **9** (2007), 378.

[14] Е. О. Бурлаков, М. А. Насонкина, “О связи непрерывных и разрывных меделей нейронных полей с микроструктурой: I. Общая теория”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 17–30. [E. O. Burlakov, M. A. Nasonkina, “On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: I. General theory”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 17–30 (In Russian)].

[15] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, “О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, “On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D (“bumps”)”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].

Информация об авторах

Атмания Рашид, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: atmania.rachid@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Information about the authors

Rachid Atmania, Post-Graduate Student. Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: atmania.rachid@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Бурлаков Евгений Олегович, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, студент, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.
Поступила после рецензирования 18.10.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Research and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Student. Institute of Mathematics and Computer Science. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5845-5591

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 02.09.2021
Reviewed 18.10.2021
Accepted for press 27.11.2021

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381
УДК 517.988.5

О проблеме существования неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ[1,2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Обсуждается остающийся до сих пор не решенным поставленный в [S. Reich, Some Fixed Point Problems, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 57:8 (1974), 194–198] вопрос о существовании в полном метрическом пространстве X неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения $\Phi : X \rightrightarrows X,$ имеющего замкнутые значения $\Phi(x) \subset X$ при всех $x \in X.$ Обобщенное сжатие понимается как естественное распространение определения Браудера–Красносельского этого свойства на многозначные отображения:

$$\forall x, u \in X \ \ h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \eta\big(\rho(x,u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ возрастает, непрерывна справа и для всех $d > 0$ выполнено $\eta(d) < d$ (символом $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве X). Приводится описание полученных в литературе утверждений, решающих проблему С. Райха при дополнительных требованиях на обобщенное сжатие $\Phi.$ В простейшем случае, когда многозначное обобщенно сжимающее отображение Φ действует в $\mathbb{R},$ без каких-либо дополнительных условий доказано существование у этого отображения неподвижной точки.

Ключевые слова: неподвижная точка, обобщенное сжатие, многозначное отображение в метрическом пространстве, теорема Браудера–Красносельского о неподвижной точке

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60524_вирусы). Результаты § 2 получены автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Жуковский Е.С.* О проблеме существования неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 372–381. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381

On the existence problem for a fixed point of a generalized contracting multivalued mapping

Evgeny S. ZHUKOVSKIY[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. We discuss the still unresolved question, posed in [S. Reich, Some Fixed Point Problems, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 57:8 (1974), 194–198], of existence in a complete metric space X of a fixed point for a generalized contracting multivalued map $\Phi : X \rightrightarrows X$ having closed values $\Phi(x) \subset X$ for all $x \in X$. Generalized contraction is understood as a natural extension of the Browder–Krasnoselsky definition of this property to multivalued maps:

$$\forall x, u \in X \quad h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \leq \eta\big(\rho(x, u)\big),$$

where the function $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is increasing, right continuous, and for all $d > 0$, $\eta(d) < d$ ($h(\cdot,\cdot)$ denotes the Hausdorff distance between sets in the space X). We give an outline of the statements obtained in the literature that solve the S. Reich problem with additional requirements on the generalized contraction Φ. In the simplest case, when the multivalued generalized contraction map Φ acts in $\mathbb{R}$, without any additional conditions, we prove the existence of a fixed point for this map.

Keywords: fixed point, generalized contraction, multivalued map in metric space, the Browder–Krasnoselsky fixed point theorem

Acknowledgements: The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-04-60524). The results § 2 were obtained by the author at the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS with the support of Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131).

Mathematics Subject Classification: 47H10, 47H04.

For citation: Zhukovskiy E.S. O probleme sushchestvovaniya nepodvizhnoj tochki obobshchenno szhimayushchego mnogoznachnogo otobrazheniya [On the existence problem for a fixed point of a generalized contracting multivalued mapping]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 372–381. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В 2022 году исполнится 100 лет опубликования С. Банахом [1] теоремы существования в полном метрическом пространстве неподвижной точки сжимающего оператора (данный результат был получен С. Банахом двумя годами раньше в его диссертации). Эта теорема, получившая название принципа Банаха, остается одним из самых широко используемых в различных разделах математики инструментов анализа, продолжает являться источником многочисленных исследований (см., например, работу [2] о связи полноты метрического и обобщенно метрических пространств с существованием в них неподвижной точки сжатий, а также работы из обширного списка литературы к этой статье).

Напомним, что отображение φ метрического пространства (X,ρ) называют сжатием, если существует $\beta \in [0,1)$ такое, что при всех $x,u \in X$ выполнено неравенство

$$\rho\big(\varphi(x),\varphi(u)\big) \le \beta\rho(x,u), \tag{0.1}$$

отображение φ в этом случае также называют β-сжимающим или β-сжатием. Согласно принципу Банаха всякое β-сжатие φ полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку — элемент $\xi \in X$ такой, что

$$\xi = \varphi(\xi),$$

к этой точке сходятся итерации $x_{i+1} = \varphi(x_i)$ с любым начальным элементом x_0, и выполнено неравенство

$$\rho(x_0,\xi) \le \frac{1}{1-\beta}\rho\big(x_0,\varphi(x_0)\big). \tag{0.2}$$

Многозначный аналог этого утверждения получен в 1969 г. С. Б. Надлером (см. [3]). Многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows X$ называют β-сжатием, $\beta \in [0,1)$, если при всех $x,u \in X$ выполнено неравенство

$$h\big(\Phi(x),\Phi(u)\big) \le \beta\rho(x,u), \tag{0.3}$$

где символом $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в X. Для β-сжимающего многозначного отображения Φ полного метрического пространства X и такого, что множество $\Phi(x) \subset X$ замкнуто при любом $x \in X$, теорема Надлера утверждает существование неподвижной точки — элемента $\xi \in X$, удовлетворяющего включению

$$\xi \in \Phi(\xi).$$

Более того, для любого $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ может быть определена последовательность итераций $x_{i+1} \in \Phi(x_i)$, которая сходится к некоторой неподвижной точке ξ, причем

$$\rho(x_0,\xi) \le \frac{1+\varepsilon}{1-\beta}\operatorname{dist}\big(x_0,\Phi(x_0)\big), \tag{0.4}$$

где $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ — расстояние от точки до множества, определяемое формулой

$$\forall x \in X \ \ \forall U \subset X \ \ \operatorname{dist}(x,U) = \inf_{u\in U}\rho(x,u).$$

Если значения многозначного отображения компактны, то оценка (0.4) справедлива при $\varepsilon = 0$. В отличие от однозначных отображений, многозначные отображения могут иметь более одной неподвижной точки (см. утверждения о мощности множества неподвижных точек и точек совпадения в [4], а также [5, теорема 2.1.3]).

1. Некоторые обобщения теоремы Банаха и теоремы Надлера

Несмотря на то, что теорема Банаха известна уже 100 лет, а теорема Надлера — более 50 лет, не утихают попытки исследователей усилить и обобщить эти утверждения, ослабить предположения сжатия или аксиомы метрики. Содержательные результаты по теории неподвижной точки можно найти в монографии [6]); этой тематике целиком посвящены несколько известных научных журналов, в том числе: Journal of Fixed Point Theory and Applications (см. сайт), Fixed Point Theory (см. сайт), Fixed Point Theory And Algorithms For Sciences And Engineering — Fixed Point Theory And Applications до 2020 года (см. сайт). Коротко остановимся только на работах, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой здесь задаче об обобщенном сжатии.

Среди многочисленных распространений теорем Банаха и и Надлера на пространства с «ослабленными» метриками выделим статьи [7–10]), в которых исследовались сжатия в различных классах квазиметрических пространств, и работу [11], в которой получены аналоги теорем Банаха и Надлера в пространствах с векторными метриками и (см. также библиографии перечисленных здесь работ).

Многочисленные работы посвящены вопросу о существовании неподвижных точек при менее ограничительных, чем (0.1) и (0.3) условиях сжатия (см., например, [6, 12, 13]). Обсудим некоторые обобщения свойства сжатия. Для однозначных отображений наиболее известны результаты, полученные Ф. Э. Браудером [12] и в 1969 г. М. А. Красносельским [13, теорема 3.4]. Отображение $\varphi : X \to X$ называется обобщенным сжатием по Браудеру, если

$$\forall x, u \in X \quad \rho\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \eta\big(\rho(x, u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и ниже $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) удовлетворяет условию

(B) *функция η возрастает, непрерывна справа и при всех $d > 0$ выполнено $\eta(d) < d$.*

Отображение $\varphi : X \to X$ называется обобщенным сжатием по Красносельскому, если для некоторой функции $\gamma : (0, \infty) \times (0, \infty) \to [0, 1)$ справедливо соотношение

$$\forall R' \ge R > 0 \ \ \forall x, u \in X \ \ R \le \rho(x, u) \le R' \ \Rightarrow \ \rho\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \gamma(R, R')\rho(x, u).$$

Определенные таким образом обобщенные сжатия согласно теоремам Браудера и Красносельского имеют единственную неподвижную точку, и к ней сходятся итерации с любым начальным элементом. В [14, теорема 8] показано, что понятия обобщенного сжатия Браудера и Красносельского эквивалентны, а соответствующие теоремы о существовании неподвижной точки равносильны. Примерно одновременно с работами Ф. Э. Браудера и М. А. Красносельского аналогичную теорему о неподвижной точке обобщенного сжатия получили Д. В. Бойд и Дж. С. В. Вонг в [15].

Отметим, что в этих утверждениях не была предъявлена оценка отклонения неподвижной точки от произвольного $x_0 \in X$. Соответствующая оценка, совпадающая для «классического» сжатия с неравенством (0.2), получена в [16]. Распространению теорем Браудера и Красносельского на пространства с обобщенными метриками посвящены работы [17–19]. Теорема об обобщенном сжатии в f-квазиметрических пространствах, т. е. в пространствах с наименее ограничительными требованиями на расстояние, получена в [18].

Проблема распространения теорем об обобщенных сжатиях на многозначные отображения метрических пространств была рассмотрена С. Райхом в работах [20–22]. Многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows X$ называется обобщенным сжатием, если

$$\forall x, u \in X \quad h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \leq \eta\big(\rho(x,u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (В). В [20] показано, что если обобщенно сжимающее многозначное отображение Φ полного метрического пространства X имеет компактные значения $\Phi(x)$ при любом $x \in X$, то неподвижная точка существует. В [21, 22] С. Райхом поставлен вопрос о существовании неподвижной точки отображения Φ, если его значения замкнуты. В [23] существование неподвижной точки замкнутозначного отображения доказано при дополнительном условии на функцию η, в [24] также используются более обременительные условия на функцию η, а значения $\Phi(x)$ предполагаются замкнутыми и ограниченными. Полностью данная проблема до сих пор не решена, т.е. в общем случае не доказана и не опровергнута гипотеза о существовании в полном метрическом пространстве неподвижной точки обобщенно сжимающего отображения с замкнутыми значениями.

Ниже дается положительный ответ на вопрос, поставленный С. Райхом, в простейшей ситуации, когда $X = \mathbb{R}$, но без дополнительных ограничений на функцию η и для случая замкнутости значений многозначного отображения. Также целью данной статьи является привлечение исследователей к решению задачи об обобщенном многозначном сжатии в общей постановке.

2. Существование неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения в $\mathbb{R}$

Приведем вначале необходимое для исследования одно простое свойство функций $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию (В) (уточним, что в этом условии возрастание понимается в широком смысле: $\eta(d) \geq \eta(r)$ при $d > r$). Обозначим через $\mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ совокупность таких функций.

С в о й с т в о 2.1. *Для произвольной функции $\eta \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ и любых $R' \geq R > 0$ существует неотрицательное $\beta < 1$, при котором для всех $r \in [R, R']$ справедливо неравенство*

$$\frac{\eta(r)}{r} \leq \beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть утверждение не верно. Тогда для некоторой последовательности $\{r_i\} \subset [R, R']$ выполнено

$$\frac{\eta(r_i)}{r_i} > \frac{i-1}{i}.$$

Из этой последовательности можно извлечь сходящуюся монотонную подпоследовательность, которую обозначим как и исходную последовательность $\{r_i\}$. Пусть эта последовательность возрастает и сходится к r. Тогда в силу возрастания функции η имеем

$$\frac{\eta(r)}{r} \geq \frac{\eta(r_i)}{r} = \frac{\eta(r_i)}{r_i}\frac{r_i}{r} > \frac{i-1}{i}\frac{r_i}{r} \;\Rightarrow\; \frac{\eta(r)}{r} \geq 1,$$

что противоречит неравенству $\eta(r) < r$. Теперь пусть последовательность $\{r_i\}$ убывает и сходится к r. Тогда в силу непрерывности справа функции η имеем

$$\frac{\eta(r)}{r} = \lim_{i\to\infty} \frac{\eta(r_i)}{r_i} = 1.$$

Снова получено противоречие с условием $\eta(r) < r$. $\square$

Пусть задано многозначное отображение $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$. Предполагаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$ множество $\Phi(x) \subset \mathbb{R}$ не пусто и замкнуто.

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ называют *обобщенно сжимающим* (или *обобщенным сжатием*), если существует функция $\eta \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad h\big(\Phi(x), \Phi(y)\big) \leq \eta\big(|x-y|\big)$$

([здесь через $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу в $\mathbb{R}$).

Теорема 2.1. *Пусть отображение $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ является обобщенным сжатием. Тогда это отображение имеет неподвижную точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать, что Φ не имеет неподвижной точки.

Определим для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_*(x) = \sup\{y \in \Phi(x) \mid y < x\}, \quad \varphi^*(x) = \inf\{y \in \Phi(x) \mid y > x\}.$$

Очевидно, при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено $-\infty \leq \varphi_*(x) < x < \varphi^*(x) \leq \infty$, по крайней мере, одно из значений $\varphi_*(x), \varphi^*(x)$ конечно и

$$\varphi_*(x) > -\infty \;\Rightarrow\; \varphi_*(x) \in \Phi(x), \quad \varphi^*(x) < \infty \;\Rightarrow\; \varphi^*(x) \in \Phi(x).$$

Далее мы рассмотрим отображения $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ и из предположения, что Φ не имеет неподвижной точки, установим свойства этих отображений, противоречащие определению значений $\varphi_*(x)$, $\varphi^*(x)$.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ и определим на $\overline{\mathbb{R}}$ «обычное» расстояние $\rho(x,y) = |y-x|$, где операции с символами $-\infty, \infty$ определены соотношениями

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty - x = -\infty, \quad \infty - x = \infty, \quad x - \infty = -\infty,$$
$$\infty - (-\infty) = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad -\infty - (-\infty) = 0, \quad \infty - \infty = 0, \quad |-\infty| = \infty.$$

Вначале покажем, что отображения $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывны. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ положим

$$\delta^*(x) = \frac{\varphi^*(x) - x}{2}.$$

Для любых $\overline{\delta} \in (0, \delta^*(x)]$, $u \in (x, x+\overline{\delta}]$ выполнено $h(\Phi(u), \Phi(x)) \leq \eta(\overline{\delta}) < \overline{\delta}$. Следовательно множество $\Phi(u)$ должно содержать по крайней мере одну точку y_* такую, что $|y_* - \varphi_*(x)| \leq \eta(\overline{\delta})$, и для этой точки выполнено

$$y_* \leq \varphi_*(x) + \eta(\overline{\delta}) < x + \eta(\overline{\delta}) < x + \overline{\delta} \leq u.$$

Далее, множество $\Phi(u)$ должно содержать по крайней мере одну точку y^* такую, что $|y^* - \varphi^*(x)| \leq \eta(\overline{\delta})$, и для этой точки выполнено

$$y^* \geq \varphi^*(x) - \eta(\overline{\delta}) > \varphi^*(x) - \overline{\delta} \geq \varphi^*(x) - \delta^*(x) = x + \delta^*(x) \geq u.$$

Очевидно, что в множестве $\Phi(u)$ нет точек из интервала $\big(\varphi_*(x)+\eta(\overline{\delta}), \varphi^*(x)-\eta(\overline{\delta})\big)$. Таким образом, установлено, что

$$|\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \leq \eta(\overline{\delta}), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \leq \eta(\overline{\delta}). \tag{2.1}$$

Если теперь определить

$$\delta_*(x) = \frac{x - \varphi_*(x)}{2},$$

то аналогично устанавливается, что для любых $\underline{\delta} \in (0, \delta_*(x)]$, $u \in [x - \underline{\delta}, x)$ выполнено

$$|\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \le \eta(\underline{\delta}), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \le \eta(\underline{\delta}). \tag{2.2}$$

Если в случае $u > x$ положить $\overline{\delta} = u - x$, а при $u < x$ положить $\underline{\delta} = x - u$, то неравенства (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$x - \delta_*(x) \le u \le x + \delta^*(x) \;\Rightarrow\; |\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \le \eta(|x - u|), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \le \eta(|x - u|). \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.3) прямо следует непрерывность отображений $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Сформулируем еще некоторые свойства отображений φ_*, φ^*, необходимые для доказательства. В силу непрерывности этих отображений замечаем, что если в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi^*(x_0) = \infty$, то $\varphi^*(x) = \infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$, а в случае $\varphi_*(x_0) = -\infty$ выполнено $\varphi_*(x) = -\infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Определим отображения $f^*, f_* : \mathbb{R} \to (0, \infty]$ формулами

$$f^*(x) = \varphi^*(x) - x, \quad f_*(x) = x - \varphi_*(x).$$

Из соотношений (2.3) следует, что отображение f^* убывает. Действительно, для любых x, u таких, что $u > x$ и $u - x \le \overline{\delta}(x)$, имеем

$$f^*(u) - f^*(x) = \varphi^*(u) - \varphi^*(x) - (u - x) \le \eta(u - x) - (u - x) < 0.$$

Аналогично легко проверить, что отображение f_* возрастает.

Теперь рассмотрим две ситуации:

(I) только одно из отображений φ_*, φ^* принимает конечные значения,

(II) оба отображения φ_* и φ^* конечны.

(I). Пусть только одно из отображений φ_*, φ^* принимает конечные значения. Для определенности полагаем $\varphi_*(x) \equiv -\infty$ и $\varphi^*(x) < \infty$ при всех x. В этом случае для любых $x, u \in \mathbb{R}$ выполнено

$$h(\Phi(x), \Phi(u)) \ge \bigl|\varphi^*(x) - \varphi^*(u)\bigr|.$$

Поэтому функция $\varphi^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является обобщенным сжатием. Согласно теореме Браудэра эта функция имеет неподвижную точку.

(II). Пусть $-\infty < \varphi_*(x) < \varphi^*(x) < \infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Определим итерации

$$u_0 = 0, \quad u_i = \frac{1}{2}\bigl(u_{i-1} + \varphi^*(u_{i-1})\bigr), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Из соотношений

$$u_i - u_{i-1} = \frac{1}{2}\bigl(\varphi^*(u_{i-1}) - u_{i-1}\bigr) = \frac{1}{2} f^*(u_{i-1}) > 0$$

следует, что последовательность $\{u_i\}$ возрастает, а последовательность $\{u_i - u_{i-1}\}$ убывает.

Покажем, что $u_i - u_{i-1} \to 0$ при $i \to \infty$. В противном случае, существует $c > 0$ такое, что $u_i - u_{i-1} \geq c$. В то же время

$$u_i - u_{i-1} < u_1 - u_0 = \frac{1}{2} f^*(0).$$

Определим функцию $\overline{\eta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равенством

$$\overline{\eta}(r) = \frac{1}{2}\big(r + \eta(r)\big).$$

Функция $\overline{\eta}$ непрерывна справа, возрастает и $\overline{\eta}(r) < r$ при любом $r > 0$, т. е. $\overline{\eta} \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$. Согласно свойству 2.1 существует $\beta \in [0,1)$, при котором для всех $r \in [c, 2^{-1} f^*(0)]$ справедливо неравенство

$$\frac{\eta(r)}{r} \leq \beta.$$

В силу соотношений (2.3) получаем

$$\begin{aligned} u_i - u_{i-1} &= \frac{1}{2}\big(u_{i-1} - u_{i-2} + \varphi^*(u_{i-1}) - \varphi^*(u_{i-2})\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(u_{i-1} - u_{i-2} + \eta(u_{i-1} - u_{i-2})\big) = \overline{\eta}(u_{i-1} - u_{i-2}) \leq \beta(u_{i-1} - u_{i-2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_i - u_{i-1} \leq \beta^{i-1}(u_1 - u_0) = \frac{\beta^{i-1}}{2} f^*(0),$$

следовательно, $u_i - u_{i-1} \to 0$ при $i \to \infty$.

Итак, определена возрастающая последовательность $\{u_i\}$, для которой $\varphi^*(u_i) - u_i \to 0$. Если эта последовательность ограничена, то она сходится $u_i \to u$, а вследствие непрерывности функции φ^* для ее предела выполнено $\varphi^*(u) = \lim_{i\to\infty} \varphi^*(u_i) = \lim_{i\to\infty} u_i = u$.

Пусть последовательность $\{u_i\}$ является неограниченной. В силу ее возрастания последовательность $\{f_*(u_i)\}$ также возрастает. Следовательно, $f_*(u_i) \geq f_*(0)$. Определим положительные числа

$$d = \frac{1}{2} f_*(0), \quad \varepsilon_0 = d - \eta(d).$$

Существует натуральное i_0, при котором выполнено $\varphi^*(u_{i_0}) - u_{i_0} \leq \varepsilon_0$. Для аргумента $x = u_{i_0} + d$ множество $\Phi(x)$ должно содержать точку y такую, что

$$|y - \varphi^*(u_{i_0})| \leq \eta(d) \tag{2.4}$$

(это прямое следствие обобщенного сжатия многозначного отображения Φ). Из неравенства (2.4) получаем

$$\begin{aligned} &y \leq \varphi^*(u_{i_0}) + \eta(d) \leq u_{i_0} + \varepsilon_0 + \eta(d) = u_{i_0} + d = x; \\ &y \geq \varphi^*(u_{i_0}) - \eta(d) \geq u_{i_0} - \eta(d) = u_{i_0} + d - d - \eta(d) = x - d - \eta(d) = x - 2d - \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Следовательно, для некоторого $y \in \Phi(x)$ выполнено

$$x \geq y > x - f_*(0) \geq x - f_*(x) = \varphi_*(x),$$

но существование такого y противоречит определению значения $\varphi_*(x)$. □

References

[1] S. Banach, “Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales”, *Fund. Math.*, **3** (1922), 133–181.

[2] С. Кобзаш, “Неподвижные точки и полнота в метрических и обобщённых метрических пространствах”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**:1 (2018), 127–215. [S. Kobzash, “Fixed points and completeness in metric and generalized metric spaces”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **22**:1 (2018), 127–215 (In Russian)].

[3] S. B. Nadler, “Multi-valued contraction mappings”, *Pacific Journal of Mathematics*, **30**:2 (1969), 475–488.

[4] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the cardinality of the coincidence set for mappings of metric, normed and partially ordered spaces”, *Sb. Math.*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[5] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, 2-е изд., Либроком, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel’man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multi-valued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Librokom, Moscow, 2011 (In Russian)].

[6] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Monograph, Springer–Verlag, New York, 2003.

[7] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.

[8] И. А. Бахтин, “Принцип сжатых отображений в почти метрических пространствах”, *Функциональный анализ*, **30** (1989), 26–37. [I. A. Bakhtin, “The principle of contracted mappings in almost metric spaces”, *Functional Analysis*, **30** (1989), 26–37 (In Russian)].

[9] D. Panthi, K. Jha, G. Porru, “A fixed point theorem in dislocated quasi-metric space”, *American Journal of Mathematics and Statistics*, **3**:3 (2013), 153–156.

[10] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, “О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 18–24. [T. V. Zhukovskaya, W. Merchela, A. I. Shindyapin, “On coincidence points of mappings in generalized metric spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 18–24 (In Russian)].

[11] Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко, “О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой”, Выпуск посвящен 70-летнему юбилею Александра Георгиевича Ченцова, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 93–105; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko, “On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S191–S203.

[12] F. E. Browder, “On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **71** (1968), 27–35.

[13] М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969. [M. A. Krasnoselsky, G. M. Vainiko, P. P. Zabreiko, Ya. B. Rutitskiy, V. Ya. Stetsenko, *Approximate Solution of Operator Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[14] J. Jachymski, “Around Browder’s fixed point theorem for contractions”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5**:1 (2009), 47–61.

[15] D. W. Boyd, J. S. W. Wong, “On nonlinear contractions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **89** (1968), 458–464.

[16] Е. С. Жуковский, “Замечание к теоремам об обобщенном сжатии”, *Матем. заметки*, **111**:2, (в печати) (2022), 211–218. [E. S. Zhukovsky, “A note on generalized compression theorems”, *Mat. notes*, **111**:2, (to appear) (2022), 211–218 (In Russian)].

[17] А. И. Перов, “Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского”, *Функциональный анализ и его приложения*, **44**:1 (2010), 83–87; англ. пер.:A. I. Perov,

"Multidimensional version of M. A. Krasnosel'skii's generalized contraction principle", *Funct. Anal. Appl.*, **44**:1 (2010), 69–72.

[18] Е. С. Жуковский, "Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств", *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces", *Siberian Math. J.*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

[19] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об одном квазиметрическом пространстве", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1285–1292. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, "About one quasi-metric space", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1285–1292 (In Russian)].

[20] S. Reich, "Fixed points of contractive functions", *Italian Mathematical Union. Bulletin*, **5**:4 (1972), 26–42.

[21] S. Reich, "Some fixed point problems", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **57**:8 (1974), 194–198.

[22] S. Reich, "Some problems and results in fixed point theory", *Contemporary Mathematics AMS*, **21** (1983), 179–187.

[23] П. В. Семенов, "О неподвижных точках многозначных сжатий", *Функц. анализ и его прил.*, **36**:2 (2002), 89–92; англ. пер.:P. V. Semenov, "Fixed points of multivalued contractions", *Funct. Anal. Appl.*, **36**:2 (2002), 159–161.

[24] P. Z. Daffer, H. Kaneko, W. Li, "On a conjecture of S. Reich", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**:10 (1996), 3159–3162.

Информация об авторе

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Поступила в редакцию 03.10.2021 г.
Поступила после рецензирования 20.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the author

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov; Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Received 03.10.2021
Reviewed 20.11.2021
Accepted for press 27.11.2021

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-382-393
УДК 517.929, 517.927.6

О необходимом и достаточном условии отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения

Сергей Михайлович ЛАБОВСКИЙ

ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова»

117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36

Аннотация. Рассматриваются условия отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи

$$\mathcal{L}_\lambda u := u^{(n)} - \lambda \int_0^l u(s) d_s r(x,s) = f(x), \quad x \in [0,l], \quad B^k(u) = \alpha,$$

где $B^k(u) = (u(0), \dots, u^{(n-k-1)}(0), u(l), -u'(l), \dots, (-1)^{(k-1)} u^{(k-1)}(0))$, $n \geq 3$, $0 < k < n$, k нечетно. Функция $r(x,s)$ предполагается неубывающей по второму аргументу. Получено необходимое и достаточное условие неотрицательности решения этой краевой задачи на множестве E функций, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \dots = u^{(n-k-2)}(0) = 0, \quad u(l) = \dots = u^{(k-2)}(l) = 0,$$

$u^{(n-k-1)}(0) \geq 0$, $u^{(k-1)}(l) \geq 0$, $f(x) \leq 0$. Это условие заключается в терминах докритичности краевых задач с вектор-функционалами B^{k-1} и B^{k+1}. Пусть k четно, и λ^k — наименьшее положительное значение λ, при котором задача $\mathcal{L}_\lambda u = 0$, $B^k u = 0$ имеет нетривиальное решение. Тогда пара условий $\lambda < \lambda^{k-1}$ и $\lambda < \lambda^{k+1}$ необходима и достаточна для положительности решения задачи.

Ключевые слова: функция Грина, положительность, функционально-дифференциальное уравнение

Для цитирования: *Лабовский С.М.* О необходимом и достаточном условии отрицательности функции Грина двухточечной краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 382–393. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-382-393.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-382-393

On a necessary and sufficient condition for the negativeness of the Green's function of a two-point boundary value problem for a functional differential equation

Sergey M. LABOVSKIY
Plekhanov Russian University of Economics
36 Stremyanny lane, Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. Conditions of negativity for the Green's function of a two-point boundary value problem

$$\mathcal{L}_\lambda u := u^{(n)} - \lambda \int_0^l u(s) d_s r(x,s) = f(x), \quad x \in [0,l], \quad B^k(u) = 0,$$

where $B^k(u) = (u(0), \ldots, u^{(n-k-1)}(0), u(l), -u'(l), \ldots, (-1)^{(k-1)} u^{(k-1)}(0))$, $n \geq 3$, $0<k<n$, k is odd, are considered. The function $r(x,s)$ is assumed to be non-decreasing in the second argument. A necessary and sufficient condition for the nonnegativity of the solution of this boundary value problem on the set E of functions satisfying the conditions

$$u(0) = \cdots = u^{(n-k-2)}(0) = 0, \quad u(l) = \cdots = u^{(k-2)}(l) = 0,$$

$u^{(n-k-1)}(0) \geq 0$, $u^{(k-1)}(l) \geq 0$, $f(x) \leq 0$ is obtained. This condition lies in the subcriticality of boundary value problems with vector functionals B^{k-1} and B^{k+1}. Let k be even and λ^k be the smallest positive value of λ for which the problem $\mathcal{L}_\lambda u = 0$, $B^k u = 0$ has a nontrivial solution. Then the pair of conditions $\lambda < \lambda^{k-1}$ and $\lambda < \lambda^{k+1}$ is necessary and sufficient for positivity of the solution of the problem.

Keywords: Green's function, positivity, functional differential equation

Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B27, 34K10.

For citation: Labovskiy S.M. O neobkhodimom i dostatochnom uslovii otritsatel'nosti funktsii Grina dvukhtochechnoy krayevoy zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [On a necessary and sufficient condition for the negativeness of the Green's function of a two-point boundary value problem for a functional differential equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 382–393. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-382-393. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Знакоопределенность функций Грина

Пусть $L(0,l)$ — пространство интегрируемых на $[0,l]$ по Лебегу функций. Определим функционально-дифференциальный оператор (символ $:=$ означает *равно по определению*) равенством $\mathcal{L}u(x) := u^{(n)}(x) - \int\limits_0^l u(s)d_s r(x,s)$, $n \geq 3$. Пусть $Qu(x) := \int\limits_0^l u(s)d_s r(x,s)$, $x \in [0,l]$. Функцию $r(x,\cdot)$ считаем неубывающей при почти всех $x \in [0,l]$, $r(x,0) = 0$, $r(\cdot,l) \in L([0,l])$. Поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - Q$, где $\mathcal{L}_0 u := u^{(n)}$, Q — положительный в обычном смысле оператор. Оператор $\mathcal{L}$ будем рассматривать в пространстве AC^{n-1} функций, имеющих абсолютно непрерывную на $[0,l]$ производную $u^{(n-1)}$, с обычной нормой. Решение задачи о знакоопределенности функции Грина $(n-k,k)$-задачи для уравнения $\mathcal{L}u = f$ с краевыми условиями

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-k-1)}(0) = 0, \quad u(l) = u'(l) = \cdots = u^{(k-1)}(l) = 0. \tag{1.1}$$

($0 < k < n$) существенно зависит от знака оператора Q. В простом случае получаем классическую схему, заключающуюся в следующем. Краевая задача $\mathcal{L}u = f$, $Bu = \alpha$, где $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - Q$ базируется на краевой задаче $\mathcal{L}_0 u = z$, $Bu = \alpha$. Ее решение имеет вид $u = G_0 z + U\alpha$, и исходная задача преобразуется к уравнению $z - QG_0 z = QU\alpha + f$. Если G_0 положителен, то и QG_0 положителен. В этом случае условие $r(QG_0) < 1$ становится необходимым и достаточным условием положительности оператора Грина G. В случае отрицательности G_0 ситуация сложней.

Пусть $G_0(x,s)$ — функция Грина задачи с условиями (1.1) для уравнения $u^{(n)} = z$, т. е. ее решение имеет вид $u(x) = \int_0^l G_0(x,s)z(s)\,ds$. Из интерполяционной формулы следует, что $(-1)^k G_0(x,s) > 0$ внутри квадрата $0 < x,s < l$. Этого же мы ожидаем от функции Грина задачи с краевыми условиями (1.1) для уравнения $\mathcal{L}u = f$.

Считаем k нечетным. Поэтому речь пойдет об отрицательности функции Грина.

Краевые условия (1.1) могут быть записаны в виде $B^k u = 0$ с помощью вектор-функционала с верхним индексом k (который не является показателем степени, конечно)

$$B^k u := (u(0), u'(0), \ldots, u^{(n-k-1)}(0), u(l), -u'(l), u''(l), \ldots, (-1)^{k-1}u^{(k-1)}(l)).$$

Решение однородной задачи $u^{(n)} = 0$, $Bu = \alpha \geq\not\equiv 0$ (неравенство понимается покомпонентно) строго положительно в $(0,l)$. Это решение — полином степени не выше $n-1$. Неоднородная краевая задача примет вид

$$\mathcal{L}u = f, \quad B^k u = \alpha. \tag{1.2}$$

Основной целью настоящей статьи является установление теоремы 4.1. С помощью оценки характеристических чисел она позволяет находить эффективные условия отрицательности функции Грина. В частном случае $k = 1$ это утверждение получено в [1].

2. Оценка спектрального радиуса положительного компактного оператора

Наш основной инструмент — уравнение с положительным компактным оператором. Понятия в данной секции хорошо известны (см., например, книгу [2]). Пусть K почти воспроизводящий конус (конус K называется почти воспроизводящим, если замыкание его линейной оболочки совпадает со всем пространством E) в пространстве Банаха E, и $A\colon E\to E$ — линейный компактный оператор, положительный относительно K, т. е. $AK\subset K$. Пусть $r(A)$ — спектральный радиус оператора A.

Теорема 2.1 (М. Крейн, М. Рутман [3])**.** *Если спектр A содержит точки, отличные от нуля, то $r=r(A)$ является собственным числом оператора A и его сопряженного. Оператор A имеет положительный собственный вектор $v_0\in K$, $Av_0=rv_0$, и сопряженный A^* имеет положительный собственный вектор $\psi\in K^*$, $A^*\psi=r\psi$.*

О п р е д е л е н и е 2.1. Оператор $A\colon E\to E$ называется u_0-ограниченным сверху, если для любого $x\in E$ существует $\beta>0$ такое, что $Ax\le\beta u_0$.

Нам потребуется простая лемма [4]:

Лемма 2.1. *Пусть A является u_0-ограниченным сверху, где $u_0\in K$, и существует $v\in K$, удовлетворяющий неравенству $v-Av\ge\gamma u_0$ для некоторого $\gamma>0$. Тогда* $r(A)<1$.

3. Двухточечные и трехточечная задача в классическом случае

3.1. Классическая двухточечная

Мы изучаем задачу (1.2) при нечетном k. Нам потребуется эта же задача как вспомогательная при четном значении k, которое будем обозначать другой буквой m, чтобы избежать недоразумений.

$$\mathcal{L}u=f,\quad B^m u=\alpha. \tag{3.1}$$

Для четного m проходит классическая схема. Эта задача изучена в [5], причем в сингулярном случае. Здесь мы кратко приводим основные утверждения, которые потребуются для исследования основной задачи (1.2).

Особые ситуации — псевдо-задачи Коши — возникают в случаях $m=0$ и $m=n$. Это уже не двухточечные задачи. Называем их псевдо-задачами, так как в случае произвольного отклонения аргумента нельзя априори гарантировать их однозначную разрешимость.

Неотрицательность функции Грина эквивалентна неотрицательности решения задачи (1.2) для $f\ge0$ и $\alpha=0$. Естественно рассмотреть и ненулевые краевые условия α.

О п р е д е л е н и е 3.1. Назовем задачу (3.1) *положительно разрешимой*, если из $f\ge0$, $\alpha\ge0$ следует $u\ge0$.

З а м е ч а н и е 3.1. Неравенства для функций понимаются поточечно, причем для измеримых почти всюду, а для конечномерных векторов покомпонентно. Конечно, это частные случаи неравенств относительно конусов.

3.1.1 Базисная задача

Решение задачи $u^{(n)}=z$, $B^m u=\alpha$ имеет вид

$$u=H^m z+V\alpha, \tag{3.2}$$

(m — верхний индекс, не степень), где $H^m z(x)=\int_0^l H^m(x,s)z(s)\,ds$ — решение задачи $\{u^{(n)}=z,\ B^m u=0\}$, $V\alpha(x)$ — решение задачи $\{u^{(n)}=0,\ B^m u=\alpha\}$ (т. е. полином).

Пусть $u_0(x):=x^{n-m}(l-x)^m$.

Лемма 3.1. *Пусть* $u = H^m z$, *причем* $z \geq\not\equiv 0$. *Тогда*

1. *если* $0 < m < n$, *то* $u(x) \geq \varepsilon u_0(x)$, $x \in [0,l]$, *для некоторого* $\varepsilon > 0$,

2. *если* $m = 0$, *то* $u^{(i)}(x) \geq 0$, $\quad i = 0, \ldots, n-1$, $x \in [0,l]$,

3. *если* $m = n$, *то* $(-1)^i u^{(i)}(x) \geq 0$, $\quad i = 0, \ldots, n-1$, $x \in [0,l]$.

Лемма 3.2. *Пусть* $u = V\alpha$, $\alpha \geq\not\equiv 0$. *Тогда для некоторого* $\varepsilon > 0$

1. *в случае* $0 < m < n:$ $u(x) \geq \varepsilon u_0(x)$,

2. *если* $m = 0$, *то* $u(x) \geq \varepsilon x^{n-1}$,

3. *если* $m = n$, *то* $u(x) \geq \varepsilon (l-x)^{n-1}$.

3.1.2 Положительная разрешимость

Подставляя (3.2) в (3.1), получим

$$z - QH^m z = QV\alpha + f.$$

Оператор $K := QH^m$ интегральный с ядром

$$K(x,s) := \int_0^l H^m(t,s) d_t r(x,t).$$

Действительно, $QH^m(x) = \int_0^l d_t r(x,t) \int_0^l H^m(t,s) z(s)\, ds = \int_0^l K(x,s) z(s)\, ds$.

Пусть $r(K)$ — спектральный радиус оператора K.

Лемма 3.3. *Пусть* $r(QH^m) < 1$. *Тогда* (3.1) *положительно разрешима, причем, если* $(f,\alpha) \geq\not\equiv (0,0)$, *то*

1. *если* $0 < m < n$, *то* $u(x) \geq \varepsilon x^{n-m}(l-x)^m$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

2. *если* $m = 0$ *и* $\alpha \geq\not\equiv 0$, *то* $u(x) \geq \varepsilon x^{n-1}$,

3. *если* $m = n$, *и* $\alpha \geq\not\equiv 0$, *то* $u(x) \geq \varepsilon (l-x)^{n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение (3.1) есть $u = H^m z + V\alpha$, где

$$z = (I - QH^m)^{-1}(f + QV\alpha).$$

По лемме 3.2 $QV\alpha \geq 0$. Поэтому $z \geq f$. Теперь ссылаемся на леммы 3.1 и 3.2. □

З а м е ч а н и е 3.2. В условиях леммы 3.3 в случае $\alpha \neq 0$ решение u имеет в точках 0 и l не более $n-1$ нулей (считая нули вместе с кратностями).

3.1.3 Характеристические числа

Однородная задача с параметром λ

$$u^{(n)} - \lambda Qu = 0, \quad B^m u = 0 \tag{3.3}$$

сводится, как и задача (3.1), к уравнению

$$z - \lambda QH^m z = 0. \tag{3.4}$$

Наименьшее положительное значение λ, при котором задача (3.3) имеет нетривиальное решение, обозначим через λ^m (m — верхний индекс, не степень). Если таких чисел нет, то по определению $\lambda^m = +\infty$. Отрицательные значения λ оставим без внимания.

Следствие 3.1. $\lambda^m = 1/r(QH^m)$. *При* $\lambda = \lambda^m$ *задача* (3.3) *имеет нетривиальное неотрицательное решение.*

Доказательство. Спектральный радиус оператора λQH^m равен $\lambda r(QH^m)$. Отсюда в силу уравнения (3.4) следует первое утверждение. Существование неотрицательного решения следует из теоремы 2.1. □

3.1.4 Теоремы о дифференциальных неравенствах

Эффективные условия положительной разрешимости можно получить, используя теоремы об оценке спектрального радиуса положительного оператора. Инструментом является лемма 2.1. Напомним, что m считается четным.

Теорема 3.1. *Пусть* $0 < m < n$, *и существует неотрицательное решение неравенств* $\mathcal{L}u = \psi \geq 0$, $B^m u = \alpha \geq 0$, $(\psi, \alpha) \neq (0,0)$. *Тогда* $r(QH^m) < 1$.

Доказательство. Отметим, что спектральные радиусы операторов QH^m и $H^m Q$ совпадают. Имеем $u^{(n)} = Qu + \psi = z$, $u = H^m z + V\alpha$,

$$u - H^m Qu = H^m \psi + V\alpha,$$

и $H^m\psi + V\alpha \geq \varepsilon u_0$, где $u_0(x) = x^{n-m}(l-x)^m$ (леммы 3.1 и 3.2). Так как $H^m Q$ u_0-ограничен сверху, по лемме 2.1 $r(H^m Q) < 1$. □

Теорема 3.2. *Пусть* $m = 0$ *или* $m = n$, *и существует неотрицательное решение неравенств* $\mathcal{L}u = \psi \geq 0$, $B^m u = \alpha \geq\not\equiv 0$. *Тогда* $r(QH^m) < 1$.

Доказательство. Пусть $m = 0$. Имеем, как и в предыдущей теореме,

$$u - H^0 Qu = H^0 \psi + V\alpha.$$

Так как $\mathcal{L}u = \psi \geq 0$, $\alpha \geq\not\equiv 0$, то (лемма 3.2) для некоторого $\varepsilon > 0$ правая часть $H^0\psi + V\alpha \geq V\alpha \geq \varepsilon x^{n-1}$.

Обратимся к лемме 2.1. Так как конус неотрицательных функций является почти воспроизводящим в AC^{n-1}, и оператор $H^0 Q$ u_0-ограничен сверху, где $u_0(x) = x^{n-1}$, то $r(QH^0) < 1$.

Случай $m = n$ рассматривается идентично (в силу симметрии). □

3.2. Трехточечная задача

Пусть $\xi \in (0,l)$, $n \geq 3$, и $k < n$ — нечетно. Рассмотрим BVP

$$\mathcal{L}u = f, \quad B_\xi u = 0, \tag{3.5}$$

где вектор-функционал B_ξ определяется равенством

$$B_\xi u := (u(0), u'(0), \dots, u^{(n-k-2)}(0), u(\xi), u'(\xi), u(l), -u'(l), u''(l), \dots, (-1)^{k-2}u^{(k-2)}(l)). \tag{3.6}$$

Если $k = n-1$, группа условий на левом конце отсутствует. Аналогично при $k = 1$ отсутствует группа условий при $x = l$.

Пусть H_ξ — оператор Грина BVP $u^{(n)} = z$, $B_\xi u = 0$, т. е. решение этой задачи $u = H_\xi z$.

Лемма 3.4. *Пусть $u = H_\xi z$, и $z \geq\not\equiv 0$. В случае $k = 1$ предположим дополнительно, что $z \not\equiv 0$ на $[0,\xi]$, а если $k = n-1$, то предположим дополнительно, что $z \not\equiv 0$ на $[\xi, l]$. Тогда $u(x) \geq \varepsilon x^{n-k-1}(x-\xi)^2(l-x)^{k-1}$, $x \in [0,l]$, для некоторого $\varepsilon > 0$.*

Отметим, что в крайних случаях $k = 1$ или $k = n-1$, когда на одном из концов условия пропадают, решение может обращаться тождественно в нуль между оставшимися нулями даже при $z \geq\not\equiv 0$. Подстановка $u = H_\xi z$ в (3.5) дает

$$z - QH_\xi z = f. \tag{3.7}$$

Оператор $K_\xi := QH_\xi$ интегральный с ядром

$$K_\xi(x,s) := \int_0^l H_\xi(t,s) d_t r(x,t).$$

Действительно, $QH_\xi(x) = \int_0^l d_t r(x,t) \int_0^l H_\xi(t,s) z(s)\, ds = \int_0^l K_\xi(x,s) z(s)\, ds$. Пусть $r(K_\xi)$ — спектральный радиус оператора K_ξ.

Лемма 3.5. *Пусть $r(K_\xi) < 1$. Тогда BVP (3.5) имеет единственное решение $u(x)$. Если $f \geq\not\equiv 0$, причем в случае $k = 1$ имеет место $f \not\equiv 0$ на $[0,\xi]$, а в случае $k = n-1$ неравенство $f \not\equiv 0$ имеет место на $[\xi, l]$, то для некоторого $\varepsilon > 0$, $u(x) \geq \varepsilon x^{n-k-1}(x-\xi)^2(l-x)^{k-1}$, $x \in [0,l]$.*

Доказательство. Решение (3.5) есть $u = H_\xi z$, где $z = (I - K_\xi)^{-1} f$ (см. уравнение (3.7)). Поэтому $z \geq f$. Теперь ссылаемся на лемму 3.4. □

Замечание 3.3. Если задача (3.5) однозначно разрешима при любом $\xi \in (0,l)$, то всякое нетривиальное решение $\mathcal{L}u = 0$, имеющее $(n-k-1)$-кратный нуль в точке $x = 0$ и $(k-1)$-кратный нуль в точке $x = l$, не может иметь кратных нулей при $0 < x < l$. Действительно, в противном случае имеем ненулевое решение однородной задачи (3.5).

Однородная задача с параметром λ

$$u^{(n)} - \lambda Q u = 0, \ B_\xi u = 0 \tag{3.8}$$

сводится к уравнению

$$z - \lambda Q H_\xi z = 0. \tag{3.9}$$

Наименьшее положительное значение λ, при котором задача (3.8) имеет нетривиальное решение, обозначим через λ_ξ. Если таких чисел нет, то по определению $\lambda_\xi = +\infty$. Опираясь на уравнение (3.9), получаем

Следствие 3.2. $\lambda_\xi = 1/r(QH_\xi)$. *При $\lambda = \lambda_\xi$ задача (3.8) имеет нетривиальное неотрицательное решение.*

3.3. Сравнение характеристических чисел

Лемма 3.6. *При любом* $\xi \in (0,l)$ *справедливо* $\lambda_\xi \geq \min\{\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}\}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_\xi < \lambda_{k-1}$ и $\lambda_\xi < \lambda_{k+1}$. В дальнейшем для простоты будем считать, что $\lambda_\xi = 1$. В таком случае в силу следствия 3.2 существует неотрицательное нетривиальное решение $\mathcal{L}u = 0$, $B_\xi u = 0$. Рассмотрим два решения u_1 и u_2 уравнения $\mathcal{L}u = 0$, оба удовлетворяющие условиям

$$u(0) = \cdots = u^{(n-k-2)}(0) = 0,\ u(l) = \cdots = u^{(k-2)}(l) = 0, \tag{3.10}$$

а также $u_1^{(n-k-1)}(0) = 1$, $u_1^{(n-k)}(0) = 0$, $u_2^{(n-k-1)}(0) = 0$, $u_2^{(n-k)}(0) = 1$. В силу леммы 3.3 (при $m = k-1$) оба решения положительны на $(0,l)$, причем $u_1^{(k-1)}(l) > 0$, $u_2^{(k-1)}(l) > 0$.

Любое нетривиальное решение уравнение $\mathcal{L}u = 0$ с точностью до множителя равно $u = u_1 + Cu_2$. При некотором $C = C_1$ будет $u^{(k-1)}(l) = 0$. Тогда $u^{(k)}(l) \neq 0$, так как в противном случае это решение было бы тривиальным решением задачи $\mathcal{L}u = 0$, $B^{k+1}u = 0$. Это решение $u(x)$ сохраняет знак (положительно) на $(0,l)$ в силу леммы 3.3 при $m = k+1$.

При $C > C_1$ решение тоже положительно, а при $C < C_1$ решение меняет знак. Эти три случая противоречат свойствам нетривиального решения задачи $\mathcal{L}u = 0$, $B_\xi u = 0$. □

4. Основная задача

Для задачи (1.2) положительная разрешимость может не иметь места даже при знакоопределенной функции Грина. В то же время удобно использовать суженное понятие положительной разрешимости, как будет видно из дальнейшего. Пусть $E \subset AC^{n-1}$ — множество функций, удовлетворяющих условиям (3.10).

Определение 4.1. Назовем задачу (3.1) E-положительно разрешимой, если из $f \leq 0$, $\alpha \geq 0$, $u \in E$ следует $u \geq 0$.

Собственно, только на множестве E будем рассматривать задачу (1.2).

Нам будет нужна неполная неосцилляция в интервале $[0,l]$.

Определение 4.2. Уравнение $\mathcal{L}u = 0$ является E-неосцилляционным в интервале $[0,l]$, если любое его решение из E имеет не более $n-1$ нулей в интервале $[0,l]$, считая кратные нули столько раз, какова их кратность.

Замечание 4.1. Так как решение $u \in E$ уже имеет $n-2$ нулей, считая кратности, оно может иметь только один простой нуль в $(0,l)$. В этом случае, сумма кратностей нулей в точках 0 и l равна $n-2$.

Основной целью настоящей статьи является установление следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Эквивалентны следующие утверждения.*

1. *Задача (1.2) E-положительно разрешима, причем если $(f,\alpha) \geq (0,0)$, $u \in E$, $u \not\equiv 0$, то $u(x) \geq \varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ для некоторого $\varepsilon > 0$.*
2. *Уравнение $\mathcal{L}u = 0$ E-неосцилляционно на $[0,l]$.*
3. $\lambda^{k-1} > 1$ *и* $\lambda^{k+1} > 1$.

Третье условие является критерием положительной разрешимости задачи (1.2). Оно эффективно проверяется с помощью теорем о дифференциальных неравенствах 3.1, 3.2.

4.1. Доказательство необходимости

Мы здесь противопоставляем условия 1 и 2 условию 3.

Теорема 4.2. *Пусть задача* (1.2) *является* E-положительно разрешимой, *причем если* $(f,\alpha)\geq(0,0)$, $u\in E$, $u\not\equiv 0$, *то* $u(x)\geq\varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ *для некоторого* $\varepsilon>0$. *Тогда* $\lambda^{k-1}>1$ *и* $\lambda^{k+1}>1$.

Доказательство. В силу симметрии задачи достаточно доказать одно из неравенств, например, $\lambda^{k+1}>1$. Пусть u — решение задачи

$$\mathcal{L}u=0,\ u(0)=\ldots=u^{(n-k-2)}(0)=0, u^{(n-k-1)}(0)=1, u(l)=\ldots=u^{(k-1)}(l)=0.$$

Это решение положительно на $(0,l)$, и $(-1)^k u^{(k)}(l)>0$ (по условию).

Если $k<n-1$, т. е. $n-k\geq 2$, то по теореме 3.1 для $m=k+1$ имеем $r(QH^{k+1})<1$. В случае $k=n-1$ ссылаемся на теорему 3.2. □

Теорема 4.3. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}u=0$ *является* E*-неосцилляционным на* $[0,l]$. *Тогда* $r(QH^{k-1})<1$ *и* $r(QH^{k+1})<1$.

Доказательство. E-неосцилляция влечет однозначную разрешимость задачи (3.1) при $m=k-1$ и $m=k+1$, так как нетривиальное решение этой задачи имеет n нулей.

Сначала предположим, что $2\leq k\leq n-2$. Пусть u — решение задачи $\mathcal{L}u=0$, $u\in E$, $u^{(n-k-1)}(0)=0$, $u^{(n-k)}(0)=1$. По предположению u не имеет нулей в $(0,l)$. По теореме 3.1 $r(QH^{k-1})<1$.

Аналогично, пусть теперь u — решение $\mathcal{L}u=0$, $u\in E$, $u^{(k-1)}(l)=0$, $u^{(k)}(l)=-1$. По предположению u не имеет нулей в $(0,l)$. По теореме 3.1 $r(QH^{k+1})<1$.

Случаи $k=1$ и $k=n-1$ рассматриваются аналогично с применением теоремы 3.2. □

4.2. Достаточность

Однозначную разрешимость гарантирует одно из неравенств $\lambda^{k-1}>1$ или $\lambda^{k+1}>1$.

Лемма 4.1. *Пусть* $\lambda^{k-1}>1$ *или* $\lambda^{k+1}>1$. *Тогда задача* (1.2) *однозначно разрешима.*

Доказательство. В силу фредгольмовости достаточно показать, что однородная задача $\mathcal{L}u=0$, $B^k u=0$ имеет только тривиальное решение. Нетривиальное решение имеет не менее n нулей в точках 0 и l. Однако в силу замечания к лемме 3.3 это невозможно в условиях леммы. □

Теорема 4.4 (E-неосцилляция)**.** *Если* $\lambda^{k-1}>1$ *и* $\lambda^{k+1}>1$, *то любое решение однородного уравнения* $\mathcal{L}u=0$, *удовлетворяющее условиям*

$$u^{(i)}(0)=0\ (i=0,\ldots,n-k-2),\ u^{(j)}(l)=0\ (j=0,\ldots,k-2) \tag{4.1}$$

имеет не более одного простого нуля в интервале $(0,l)$ *(суммарное количество нулей в* $[0,l]$ *не больше* $n-1$, *считая кратности).*

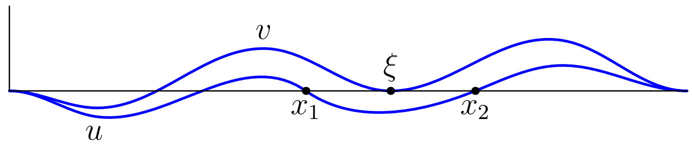

Рис. 1. К теореме 4.4

Доказательство. Соглашение: для краткости ниже в доказательстве рассматриваются только решения $\mathcal{L}u = 0$, удовлетворяющие (4.1). Пусть $u_1(x)$ — решение $(n-k-1, k+1)$-задачи (3.1) при $m = k+1$

$$\mathcal{L}u = 0,\ u^{(k-1)}(l) = 0,\ (-1)^k u^{(k)}(l) = -1.$$

По лемме 3.3 $u_1(x) < 0$, $x \in (0, l)$, $u_1^{(n-k-1)}(0) < 0$.

С точностью до множителя любое решение (см. соглашение выше) можно представить в виде

$$u(x) = u_1(x) + Cu_2(x),$$

где C — константа, и $u_2(x)$ — решение $(n-k+1, k-1)$-задачи (3.1) при $m = k-1$

$$\mathcal{L}u = 0,\ u^{(n-k-1)}(0) = 0,\ u^{(n-k)}(0) = 1. \tag{4.2}$$

По лемме 3.3 решение $u_2(x) > 0$ на $(0, l)$, и $(-1)^{k-1}u_2^{(k-1)}(l) > 0$.

Если $C \leq 0$, то $u(x)$ не имеет нулей в $(0, l)$, так как в этом случае $u(x) = u_1(x) + Cu_2(x) \leq u_1(x) < 0$.

Пусть теперь $C > 0$. Тогда

$$u^{(k-1)}(l) = u_1^{(k-1)}(l) + Cu_2^{(k-1)}(l) = Cu_2^{(k-1)}(l) > 0,$$

но $u^{(n-k-1)}(0) = u_1^{(n-k-1)}(0) < 0$. Поэтому $u(x)$ имеет нули в $(0, l)$. Пусть x_2 — наибольший нуль (первый справа) (рис. 1). Этот нуль может быть простой или кратный. Сначала рассмотрим случай простого нуля, когда $u'(x_2) > 0$. Покажем, что в этом случае нет других нулей. Предположим, напротив, что они имеются, и $x_1 < x_2$ — ближайший к x_2. Пусть $v(x) = u(x) + Du_2(x)$, где

$$D = \max_{x \in [x_1, x_2]} \left(-\frac{u(x)}{u_2(x)} \right) = -\frac{u(\xi)}{u_2(\xi)},\ \xi \in (x_1, x_2).$$

Тогда на $[x_1, x_2]$ имеем $v(x) \geq 0$, поэтому $v(x)$ есть нетривиальное решение задачи $\mathcal{L}v = 0$, $B_\xi v = 0$. А это противоречит $\lambda_\xi > 1$ (по лемме 3.6 $\lambda_\xi > 1$). В случае кратного x_2 полагаем $\xi = x_2$. □

Лемма 4.2. *Пусть $\lambda^{k-1} > 1$, $\lambda^{k+1} > 1$, и функция $u(x)$ — решение задачи*

$$\mathcal{L}u = f,\ B^k u = 0. \tag{4.3}$$

Если $f(x) \geq\not\equiv 0$, то $u^{(n-k)}(0) < 0$ и $u^{(k)}(l) > 0$.

Доказательство. По лемме 4.1 задача (4.3) имеет единственное решение. Оно является также и ненулевым решением задачи (3.1) при $m = k-1$, с условиями $u \in E$, $u^{(n-k)}(0) = c$. Предположим, что $u^{(n-k)}(0) \geq 0$. По лемме 3.3, $u^{(k-1)}(l) < 0$, что противоречит (4.3). Противоречие показывает, что $u^{(n-k)}(0) < 0$.

Неравенство $u^{(k)}(l) > 0$ доказывается аналогично. □

Теорема 4.5. *Пусть* $\lambda^{k-1} > 1$, $\lambda^{k+1} > 1$. *Если* $f(x) \geq\not\equiv 0$, *то задача* (4.3) *однозначно разрешима, ее решение отрицательно в* $(0, l)$, *и* $u(x) \leq -\varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ — решение задачи (4.3). По лемме 4.2 $u(x) < 0$ в окрестностях точек 0 и l.

Предположим, что $u(x_0) \geq 0$ в некоторой точке $x_0 \in (0, l)$. Можно считать, что x_0 — точка максимума: $u(x_0) = \max\{u(x) \colon x \in [0, l]\}$. Построим неположительное решение задачи (3.5), т. е. решение, имеющее кратный нуль в некоторой точке $\xi \in (0, l)$.

Если $u(x_0) = 0$, то x_0 — кратный нуль, так как x_0 — точка максимума. В этом случае, сама u является нужным решением. Если же $u(x_0) > 0$, можно построить неположительное решение $\mathcal{L}u = f$ с кратным нулем (рис. 2). Пусть $v(x) = u(x) - Cu_2(x)$, где $u_2(x)$ — решение задачи (4.2), и

$$C = \max_{(0,l)} \frac{u(x)}{u_2(x)} = \frac{u(\xi)}{u_2(\xi)},\ \xi \in (0, l).$$

Этот максимум существует, так как $u(l) = 0$ и $u(x) < 0$ в некоторых окрестностях точек $x = 0$, $x = l$.

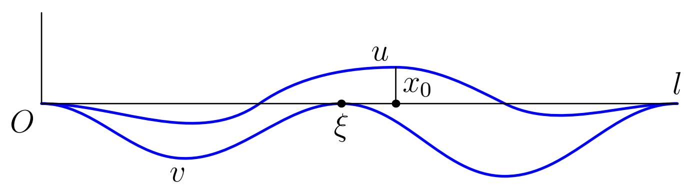

Рис. 2. К теореме 4.5

Функция $v(x)$ неположительна, так как

$$v(x) = u(x) - Cu_2(x) = u(x) - \frac{u(\xi)}{u_2(\xi)} u_2(x) \leq u(x) - \frac{u(x)}{u_2(x)} u_2(x) = 0.$$

Итак, $v(\xi) = v'(\xi) = 0$, и функция $v(x)$ — решение задачи (3.5).

По лемме 3.6 $\lambda_\xi > 1$. По лемме 3.5 $v(x) \geq 0$. Но это противоречит $v(x) \leq u(x)$ и отрицательности u в окрестностях концов интервала. Противоречие показывает, что $u(x) < 0$ в $(0, l)$.

Неравенство $u(x) < -\varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ для некоторого $\varepsilon > 0$ следует из леммы 4.2. □

Теорема 4.6. *Пусть* $\lambda^{k-1} > 1$, $\lambda^{k+1} > 1$. *Тогда нетривиальное решение* $u(x)$ *задачи*

$$\mathcal{L}u = 0, u \in E, u^{(n-k-1)}(0) = c_1 \geq 0, u^{(k-1)}(l) = c_2 \geq 0, (c_1 + c_2 > 0)$$

положительно на $(0, l)$, *и* $u(x) > \varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть два случая: $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. В первом случае

$$u(x) = \frac{1}{u_1^{(n-k)}(0)} u_1(x),$$

где $u_1(x)$ — решение задачи $\mathcal{L}u = 0$, $u \in E$, $u^{(k-1)}(l) = 0$, $u^{(k)}(l) = -1$. По лемме 3.3 $u(x) > 0$ в $(0, l)$. Неравенства $u^{(n-k-1)}(0) > 0$, $u^{(k)}(l) < 0$ обеспечивают неравенство $u(x) > \varepsilon x^{n-k}(l-x)^k$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Во втором случае

$$u(x) = \frac{1}{u_2^{(k-1)}(l)} u_2(x),$$

где $u_2(x)$ — решение $\mathcal{L}u = 0$, $u \in E$, $u^{(n-k-1)}(0) = 0$, $u^{(n-k)}(0) = 1$. Теперь ссылаемся на лемму 3.3 и неравенства $u^{(n-k)}(0) > 0$, $u^{(k-1)}(l) > 0$. □

Список литературы

[1] С. Лабовский, "О положительности функций Грина функционально-дифференциального уравнения", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **20**:5 (2015), 1246–1249. [S. Labovskiy, "On positivity of Green's functions of a functional-differential equation", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **20**:5 (2015), 1246–1249 (In Russian)].

[2] M. Krasnosel'skii, E. Lifshits, A. Sobolev, *Positive Linear Systems, the Method of Positive Operators*, Heldermann–Verlag, Berlin, 1989, 354 pp.

[3] М. Крейн, М. Рутман, "Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха", *УМН*, **3**:1(23) (1948), 3–95. [M. Kreĭn, M. Rutman, "Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space", *Uspekhi Mat. Nauk*, **3**:1(23) (1948), 3–95 (In Russian)].

[4] С. М. Лабовский, "О положительных решениях линейных функционально-дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **20**:4 (1984), 578–584; англ. пер.:S. M. Labovskiĭ, "Positive solutions of linear functional differential equations", *Differential Equations*, **20** (1984), 428–434.

[5] С. М. Лабовский, "О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения", *Дифференциальные уравнения*, **24**:10 (1988), 1695–1704; англ. пер.:S. M. Labovskiĭ, "Positive solutions of a two-point boundary value problem for a linear singular functional-differential equation", *Differential Equations*, **24**:10 (1988), 1116–1123.

Информация об авторе

Лабовский Сергей Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Российская федерация. E-mail: labovski@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7305-4630

Поступила в редакцию 15.06.2021 г.
Поступила после рецензирования 21.08.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the author

Sergey M. Labovskiy, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russian Federation. E-mail: labovski@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7305-4630

Received 15.06.2021
Reviewed 21.08.2021
Accepted for press 27.11.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403
УДК 519.6

Об одной некорректно поставленной краевой задаче для метагармонического уравнения в круговом цилиндре

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Виктор Александрович АНИСИМОВ, Полина Александровна ЛЕСИК, Виктория Ивановна РЕМЕЗОВА, Андрей Андреевич РОМАНОВ, Анна Георгиевна ХЕГАЙ
ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Аннотация. Рассматривается смешанная по краевым условиям задача для метагармонического уравнения в области, представляющей собой часть кругового цилиндра. Эту цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области свободна. На боковой поверхности цилиндрической области заданы однородные краевые условия первого рода. Задача некорректно поставлена и ее приближенное решение, устойчивое к погрешности в данных Коши, построено с применением методов регуляризации. Рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения, полученного в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге, построено явное представление точного решения поставленной задачи. Устойчивое решение интегрального уравнения построено методом регуляризации Тихонова. В качестве приближенного решения интегрального уравнения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в ранней диагностике в медицине.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, метагармоническое уравнение, функции Бесселя, интегральное уравнение первого рода, метод регуляризации Тихонова

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Анисимов В.А., Лесик П.А., Ремезова В.И., Романов А.А., Хегай А.Г.* Об одной некорректно поставленной краевой задаче для метагармонического уравнения в круговом цилиндре // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 394–403. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403

On an ill-posed boundary value problem for a metaharmonic equation in a circular cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Viktor A. ANISIMOV, Polina A. LESIK, Viktoriya I. REMEZOVA, Andrey A. ROMANOV, Anna G. KHEGAI

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for a metaharmonic equation in a domain in a circular cylinder. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i. e. the function and its normal derivative are set. The other border of the cylindrical area is free. On the lateral surface of the cylindrical domain, homogeneous boundary conditions of the first kind are given. The problem is ill-posed and its approximate solution, stable to errors in the Cauchy data, is constructed using regularization methods. The problem is reduced to a first kind Fredholm integral equation. Based on the solution of the integral equation obtained in the form of a Fourier series by the eigenfunctions of the first boundary value problem for the Laplace equation in a circle, an explicit representation of the exact solution of the problem is constructed. A stable solution of the integral equation is obtained by the method of Tikhonov regularization. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem as a whole is constructed. A theorem on convergence of the approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is matched with the error in the data, is given. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in early diagnostics in medicine.

Keywords: ill-posed problem, metaharmonic equation, Bessel function, integral equation of the first kind, method of Tikhonov

Mathematics Subject Classification: 35R25, 35R30.

For citation: Laneev E.B., Anisimov V.A., Lesik P.A., Remezova V.I., Romanov A.A., Khegai A.G. Ob odnoy nekorrektno postavlennoy krayevoy zadache dlya metagarmonicheskogo uravneniya v krugovom tsilindre [On an ill-posed boundary value problem for a metaharmonic equation in a circular cylinder]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 394–403. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-394-403. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для метагармонического уравнения в круговом цилиндре с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных [1] с целью выявления патологий у пациента, которые могут быть сопоставлены аномальным стационарным источникам тепла в теплопроводящей среде со стационарным распределением температуры, удовлетворяющим стационарному уравнению теплопроводности, т. е. уравнению Лапласа. Учет влияния кровотока приводит к метагармоническому уравнению [2]. Функция температуры на поверхности тела, регистрируемая как термограмма, дает представление о плотности распределения источников тепла внутри тела. Как правило, такое представление сильно искажено за счет удаленности источников тепла от поверхности исследуемого тела. Уточненную информацию об источниках можно получить, анализируя распределение температуры вблизи источников, решая задачу продолжения метагармонической функции с границы в сторону источников по известной функции и нормальной производной на границе. Следуя работам [3, 4, 5], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения [3, 4] и в области кругового цилиндра [5], краевая задача для метагармонического уравнения приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [6]. Рассматриваемая здесь задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоской поверхности [7].

1. Постановка задачи

Имеется цилиндрическая область кругового сечения

$$D(F,H)=\{(r,\varphi,z):\,0<r<a,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad F(r,\varphi)<z<H\},$$

ограниченная поверхностью общего вида

$$S=\{(r,\varphi,z):\,0<r<a,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad z=F(r,\varphi)<H\}.$$

В этой области рассмотрим краевую задачу для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned}
&\Delta u(M)-k^2u(M)=0,\quad M\in D(F,H),\ \ k=const,\\
&u|_S=f,\\
&\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S=g,\\
&u|_{r=a}=0,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

включающую условия Коши на поверхности S и однородные условия первого рода на боковой поверхности цилиндра. Граница $z=H$ открыта.

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u\in C^2(D(F,H))\bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$.

Смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g.

2. Точное решение краевой задачи

Пусть $\varphi(M,P)$ — функция источника первой краевой задачи для метагармонического уравнения

$$\begin{aligned}&\Delta v(P)-k^2v(P)=-\rho(P),\quad P\in D^\infty,\\&v|_{r=a}=0,\\&v\to 0\ \text{ при }\ |z|\to\infty\end{aligned}$$

в бесконечном круговом цилиндре

$$D^\infty=\{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad -\infty<z<\infty\}.$$

Функция источника есть сумма фундаментального решения метагармонического уравнения и метагармонической по P функции $W(M,P)$

$$\varphi(M,P)=\frac{\exp\{-kr_{MP}\}}{4\pi r_{MP}}+W(M,P), \tag{2.1}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P, и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.1) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в круге радиуса a

$$\varphi(M,P)=\frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\epsilon_n\exp\{-k_{nm}|z_M-z_P|\}\frac{J_n(\mu_n^m\frac{r_M}{a})J_n(\mu_n^m\frac{r_P}{a})}{k_{nm}[J_n'(\mu_n^m)]^2}\cos n(\varphi_M-\varphi_P),$$
$$\epsilon_0=0.5,\quad \epsilon_n=1\ \text{ при }\ n\neq 0.$$

Здесь J_n — функция Бесселя, μ_n^m, $m=1,2,3,\dots$ — нули функции J_n, а также введено обозначение

$$k_{nm}=\sqrt{\left(\frac{\mu_n^m}{a}\right)^2+k^2}. \tag{2.2}$$

Пусть $M\in D(F,H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции источника $\varphi(M,P)$, получим

$$u(M)=\int\limits_{\partial D(F,H)}\Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P)-u(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P,\quad M\in D(F,H). \tag{2.3}$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковой поверхности цилиндрической области $D(F,H)$, получим

$$\begin{aligned}u(M)=&\int\limits_S\Big[g(P)\varphi(M,P)-f(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P\\&+\int\limits_{\Pi(H)}\Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P)-u(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P,\end{aligned} \tag{2.4}$$

где второй интеграл берется по кругу

$$\Pi(H)=\{(r,\varphi,z):\ 0<r<a,\quad 0<\varphi<2\pi,\quad z=H\}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \qquad z_M < H, \tag{2.6}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.7}$$

тогда решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F,H), \tag{2.8}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g.

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned}
&\Delta v(M) - k^2 v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H),\\
&v|_{z=H} = v_H,\\
&v|_{r=a} = 0,\\
&v \to 0 \ \text{ при } \ z \to -\infty.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(z_M - H)\} J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\big[(\tilde v_H)^c_{nm}\cos n\varphi + (\tilde v_H)^s_{nm}\sin n\varphi\big], \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}
(\tilde v_H)^c_{nm} = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^m \frac{r}{a})\cos n\varphi,\\
\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0,\\
(\tilde v_H)^s_{nm} = \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^m \frac{r}{a})\sin n\varphi,
\end{gathered} \tag{2.10}$$

причем ряд (2.9) сходится равномерно области $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\big|(\tilde v_H)^c_{nm}\exp\{k_{nm}(z_M - H)\} J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\cos n\varphi\big| \leqslant \big|(\tilde v_H)^c_{nm}\big|\exp\{-k_{nm}\varepsilon\}.$$

Аналогичная оценка справедлива и для $(\tilde v_H)^s_{nm}$.

Таким образом, из представления (2.8) решения задачи (1.1) и (2.9) следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H в (2.9) через заданные функции f и g.

Из (2.9), (2.10) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) r_P dr_P d\varphi_P, \quad M \in D(-\infty, H), \tag{2.11}$$

где

$$G(M,P) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\epsilon_n \exp\{k_{nm}(z_M - H)\}\frac{J_n\big(\mu_n^m \frac{r_M}{a}\big) J_n\big(\mu_n^m \frac{r_P}{a}\big)}{a^2[J_n'(\mu_n^m)]^2}\cos n(\varphi_M - \varphi_P),$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0. \tag{2.12}$$

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(r, \varphi, z):\ 0 < r < a,\quad 0 < \varphi < 2\pi,\quad -\infty < z < F(r,\varphi)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F,H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции $\varphi(M,P)$ вида (2.1), аналогично (2.3) получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.6) и (2.7) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \tag{2.13}$$

Пусть $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi)$ и $M \in \Pi(b)$, где $\Pi(b)$ — область вида (2.5) при $z = b$, тогда из (2.13) и (2.11) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M,P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(b). \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.14) с учетом разложения (2.12) при $z_M = b$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$\begin{aligned} -(\tilde v_H)^c_{nm} \exp\{-k_{nm}(H-b)\} = \tilde\Phi^c_{nm}(b),\\ -(\tilde v_H)^s_{nm} \exp\{-k_{nm}(H-b)\} = \tilde\Phi^s_{nm}(b), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\tilde\Phi^c_{nm}(b), \tilde\Phi^s_{nm}(b)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$(\tilde\Phi)^c_{nm}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^m)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\cos n\varphi,$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{ при } \ n \neq 0,$$

$$(\tilde\Phi)^s_{nm}(b) = \frac{2}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^m)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\sin n\varphi.$$

Отметим, что формулы (2.15) характеризуют убывание коэффициентов Фурье $\tilde\Phi_{nm}(b)$ с ростом n и k, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, функции v_H вида (2.9). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde v_H)_{nm}$ из (2.15) в ряд (2.9), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \exp\{k_{nm}(H-b)\} J_n\big(\mu_n^m \frac{r}{a}\big)\big[(\tilde\Phi)^c_{nm}(b)\cos n\varphi + (\tilde\Phi)^s_{nm}(b)\sin n\varphi\big]. \tag{2.16}$$

Ряд (2.16), как и ряд (2.9), сходится равномерно в $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g.

Формула (2.8), где функции v и Φ вида (2.16) и (2.6) соответственно, дает явное выражение для решения задачи 1.1.

3. Построение приближенного задачи в случае приближенных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \to 0$. Функция Φ вида (2.6) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta(P)\varphi(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.6) при $M \in \Pi(b)$, $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi)$, получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.14)

$$|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)|_{M\in\Pi(b)} \leqslant \max_{M\in\Pi(b)} \big(\int\limits_S \varphi^2(M,P)d\sigma_P\big)^{1/2}\|g^\delta - g\|_{L_2(S)}$$
$$+ \max_{M\in\Pi(b)} \big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\big)^{1/2}\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C\delta.$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.14) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [6] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \big\|Gw + \Phi^\delta\big\|^2_{L_2(\Pi(b))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))}, \quad \alpha > 0. \tag{3.2}$$

Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.2)

$$G^*Gw + \alpha w = -G^*\Phi^\delta,$$

которое, в свою очередь, с использованием разложения (2.12) ядра интегрального оператора G может быть представлено в виде алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\exp\{-2k_{nm}(H-b)\}\tilde{w}_{nm} + \alpha\tilde{w}_{nm} = -\exp\{-k_{nm}(H-b)\}\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b), \tag{3.3}$$

где $\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b)$ — в одном случае косинус-коэффициенты, в другом — синус-коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(b)}$

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nm}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J'_n(\mu^m_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b)J_n\big(\mu^m_n\frac{r}{a}\big)\cos n\varphi,$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0,$$
$$\tilde{\Phi}^\delta_{nm}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nm}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J'_n(\mu^m_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b)J_n\big(\mu^m_n\frac{r}{a}\big)\sin n\varphi.$$

Решая алгебраические уравнения относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя их вместо коэффициентов Фурье функции v_H в ряд (2.9), найдем приближение v_α^δ к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v_\alpha^\delta(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp\{k_{nm}(z_M - b)\} J_n(\mu_n^m \frac{r}{a})[(\tilde{\Phi}^\delta)_{nm}^c(b)\cos n\varphi + (\tilde{\Phi}^\delta)_{nm}^s(b)\sin n\varphi]}{1 + \alpha\exp\{2k_{nm}(H - b)\}}, \quad (3.4)$$

где k_{nm} определено формулой (2.2). Функция (3.4) отличается от точной функции v вида (2.16) регуляризирующим множителем $\big(1 + \alpha\exp\{2k_{nm}(H - b)\}\big)^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствие с (2.8) приближенное решение задачи (1.1) построим в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) + \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (3.5)$$

где v_α^δ и Φ^δ — функции вида (3.4) и (3.1) соответственно.

Для построенного приближенного решения (3.5) задачи (1.1) имеет место следующая теорема сходимости к точному решению.

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи* (1.1) *существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *функция* $u_{\alpha(\delta)}$ *вида* (3.5) *равномерно сходится при* $\delta \to 0$ *к точному решению в* $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $\quad 0 < \varepsilon < 0,5(H - \max\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi))$.

Доказательство теоремы 3.1 повторяет доказательство соответствующей теоремы в [3].

Формулы (3.5), (3.4) и (3.1) дают, таким образом, приближенное решение поставленной задачи (1.1).

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [8] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [1]. При моделировании участка тела пациента к задаче (1.1) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего стационарные источники тепла. С учетом кровотока [2] стационарное распределение температуры внутри тела описывается метагармоническим уравнением. На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура, что соответствует первому краевому условию в (1.1), а на поверхности S имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона. В этом случае поток тепла через поверхность S, т. е. нормальная производная, прямо пропорционален разности температур внутри тела и снаружи, что соответствует третьему краевому условию. Если распределение температуры на поверхности S (термограмма) может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках описанной модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче (1.1) восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями внутренних органов пациента. Кроме того, след функции распределения температуры на плоскости $z = H$, более близкой к источникам, чем поверхность S, может рассматриваться как скорректированная термограмма, более точно передающая изображение тепловыделяющей структуры, связанной с патологиями.

References

[1] Г. Р. Иваницкий, “Тепловидение в медицине”, *Вестник РАН*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, “Thermovision in medicine”, *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

[2] J. P. Agnelli, A. A. Barrea, C. V. Turner, “Tumor location and parameter estimation by thermography”, *Mathematical and Computer Modelling*, **53**:7-8 (2011), 1527–1534.

[3] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, “Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа”, *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, № 1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan, “On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation”, *PFUR Reports. Series: Applied mathematics and computer science*, 1999, № 1, 128–133 (In Russian)].

[4] Е. Б. Ланеев, “О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа”, *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, “Construction of a Carleman Function Based on the Tikhonov Regularization Method in an Ill-Posed Problem for the Laplace Equation”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.

[5] Е. Б. Ланеев, Д. Ю. Быков, А. В. Зубаренко, О. Н. Куликова, Д. А. Морозова, Е. В. Шунин, “Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 35–43. [E. B. Laneev, D. Yu. Bykov, A. V. Zubarenko, O. N. Kulikova, D. A. Morozova, E. V. Shunin, “On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 35–43 (In Russian)].

[6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for Solving Ill-posed Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[7] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, “О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации”, *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, № 1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, “On the continuation of the potential towards the perturbing masses based on the regularization method”, *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, № 1, 30–48 (In Russian)].

[8] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, “Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе”, *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov,, “An inverse problem to a boundary value problem for the Laplace equation with a condition of the third kind on an inexactly specified boundary”, *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Анисимов Виктор Александрович, студент магистратуры, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of S. M. Nikol’skii Mathematical Institute. Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Viktor A. Anisimov, Master’s Degree. S. M. Nikol’skii Mathematical Institute. Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Лесик Полина Александровна, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: polinalesik@yandex.ru

Polina A. Lesik, Post-Graduate Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: polinalesik@yandex.ru

Ремезова Виктория Ивановна, студент, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: remezova.98@mail.ru

Viktoriya I. Remezova, Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: remezova.98@mail.ru

Романов Андрей Андреевич, аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: an1romanov@gmail.com

Andrey A. Romanov, Post-Graduate Student. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: an1romanov@gmail.com

Хегай Анна Георгиевна, студент магистратуры, Математический институт им. С. М. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: annhegay98@gmail.com

Anna G. Khegai, Master's Degree. S. M. Nikol'skii Mathematical Institute. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation.
E-mail: annhegay98@gmail.com

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.08.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Received 30.08.2021
Reviewed 15.11.2021
Accepted for press 27.11.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413

УДК 517.988.6, 517.922

Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения

Вассим МЕРЧЕЛА[1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7/9

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача с линейными краевыми условиями общего вида для скалярного дифференциального уравнения

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t),$$

не разрешенного относительно производной $\dot{x}$ искомой функции. Предполагается, что функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, функция $\widehat{y}$ является измеримой. Предлагаемый метод исследования такой краевой задачи основан на результатах об операторном уравнении с отображением, действующим из метрического пространства в множество с расстоянием (это расстояние удовлетворяет только одной аксиоме метрики: оно равно нулю тогда и только тогда, когда элементы совпадают). В терминах множества накрывания функции $f(t, x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и множества липшицевости функции $f(t, \cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ получены условия существования решений и условия устойчивости решений к возмущению функции f, порождающей дифференциальное уравнение, а также к возмущениям правых частей краевой задачи: функции $\widehat{y}$ и значения краевого условия.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение, линейные краевые условия, существование решений краевой задачи, накрывающее отображение метрических пространств

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075–15–2019–1619.

Для цитирования: *Мерчела В.* Один метод исследования разрешимости краевых задач для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 404–413. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413

One method for investigating the solvability of boundary value problems for an implicit differential equation

Wassim MERCHELA[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] St. Petersburg University
7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg 1990342, Russian Federation

Abstract. The article concernes a boundary value problem with linear boundary conditions of general form for the scalar differential equation

$$f\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}(t),$$

not resolved with respect to the derivative $\dot{x}$ of the required function. It is assumed that the function f satisfies the Caratheodory conditions, and the function $\widehat{y}$ is measurable. The method proposed for studying such a boundary value problem is based on the results about operator equation with a mapping acting from a metric space to a set with distance (this distance satisfies only one axiom of a metric: it is equal to zero if and only if the elements coincide). In terms of the covering set of the function $f(t, x_1, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and the Lipschitz set of the function $f(t, \cdot, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conditions for the existence of solutions and their stability to perturbations of the function f generating the differential equation, as well as to perturbations of the right-hand sides of the boundary value problem: the function $\widehat{y}$ and the value of the boundary condition, are obtained.

Keywords: implicit differential equation, linear boundary conditions, existence of solutions to a boundary value problem, covering mapping of metric spaces

Acknowledgements: The work is supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 075–15–2019–1619.

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34B15, 47J05, 47N20.

For citation: Merchela W. Odin metod issledovaniya razreshimosti krayevykh zadach dlya neyavnogo differentsial'nogo uravneniya [One method for investigating the solvability of boundary value problems for an implicit differential equation]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 404–413. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-404-413. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В настоящей работе предлагаются достаточные условия существования и непрерывной зависимости от параметров решений краевой задачи для скалярного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной искомой абсолютно непрерывной функции (неявного ДУ). Предлагаемые утверждения основаны на результатах [1–3] об операторных уравнениях с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием (удовлетворяющим только одной из трех аксиом метрики: нулевое расстояние между элементами означает их совпадение) и обладающими некоторым аналогом свойства накрывания. Идея исследования неявных ДУ методами теории накрывающих отображений метрических пространств была предложена в [4, 5]. На основании результатов о липшицевых возмущениях накрывающих отображений и о точках совпадения накрывающего и липшицева отображений в этих работах рассмотрена задача Коши, для которой были получены условия разрешимости, продолжаемости решений, оценки решений, условия непрерывной зависимости решений от параметров. Аналогичными методами, использующими результаты о векторных накрывающих отображениях, действующих в произведениях метрических пространств, в работах [6, 7] были исследованы вопросы разрешимости краевых задач для неявных ДУ.

В настоящей работе благодаря применению более общих результатов об операторных уравнениях (в которых ослаблены и требования к расстоянию, и к свойствам отображений) получены утверждения о более широком классе краевых задач.

Статья содержит два раздела. В разделе 1. сформулированы необходимые определения свойств отображений, действующих из метрического пространства в пространство с расстоянием, и сформулированы два утверждения о существовании решений операторного уравнения и непрерывной зависимости множества его решений от порождающих это уравнение отображений. В разделе 2. показано, как краевая задача для неявного ДУ приводится к интегральному уравнению, которое может быть исследовано на основании результатов раздела 1. В результате формулируются теорема существования и теорема о непрерывной зависимости от параметров решений рассматриваемых краевых задач.

1. Операторное уравнение

Будем обозначать $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ и полагать для любого $r \in \mathbb{R}_+$ выполненными «естественные» соотношения: $r < +\infty$, $+\infty + r = +\infty$, $+\infty + (+\infty) = +\infty$.

Пусть задано метрическое пространство X с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (о метриках, которые могут принимать бесконечное значение см. [8]), и пусть задано непустое множество Y, на котором определено расстояние $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию $d(y,z) = 0 \ \Leftrightarrow \ y = z$, $y, z \in Y$. Сходимость $y_i \to y$ последовательности $\{y_i\}$ в пространстве (Y,d) будем определять соотношением $d(y, y_i) \to 0$. Важно заметить, что в пространстве с расстоянием предел последовательности не обязан быть единственным, а сходимости $d(y, y_i) \to 0$ и $d(y_i, y) \to 0$ не равносильны (более подробно о сходимости относительно расстояния, не являющегося метрикой, и о свойствах пространства (Y,d) см., например, [9, 10]).

Рассмотрим уравнение

$$F(x,x) = \widehat{y} \tag{1.1}$$

относительно $x \in X$, где отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y} \in Y$ считаем известными. Отметим, что в этом уравнении наличие двух аргументов у отображения F, принимающих равные значения x, формально лишено смысла, достаточно определить отображение $G : X \to Y$ формулой $G(x) := F(x,x)$ при $x \in X$. Но в дальнейшем будут предполагаться выполненными разные условия на F по этим аргументам. Как отображение первого аргумента отображение F будет обладать «хорошим» свойством накрывания, а по второму аргументу F будет испытывать возмущения. В следующем разделе будет показано, что краевая задача для неявного ДУ может быть сведена к операторному уравнению именно такого вида. Что касается отображения G, то оно также будет использоваться в формулируемых ниже условиях разрешимости уравнения (1.1).

Определение 1.1 (см. [1]). Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$, множество $U \subset X$ и отображение $f : X \to Y$. Следующие множества

$$\operatorname{Cov}_\alpha[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \exists u \in U \;\; f(u) = y,\;\; \rho(u,x) \leq \alpha^{-1} d(y, f(x)),\;\; \rho(u,x) < \infty\big\},$$
$$\operatorname{Lip}_\beta[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \;\; f(u) = y \;\Rightarrow\; d(y,f(x)) \leq \beta \rho(u,x)\big\},$$
$$\operatorname{Cl}[f;U] := \big\{(x,y) \in X \times Y \mid \forall \{x_n\} \subset U \;\; x_n \to x,\;\; f(x_n) \to y \;\Rightarrow\; f(x) = y\big\}$$

будем называть, соответственно, *множеством α-накрывания, множеством β-липшицевости и множеством замкнутости отображения f относительно U.*

Отметим, что отображение f обладает «классическим» свойством [11] α-накрывания (или β-липшицевости, или замкнутости) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Cov}_\alpha[f;X] = X \times Y$ (соответственно $\operatorname{Lip}_\beta[f;X] = X \times Y$, или $\operatorname{Cl}[f;X] = X \times Y$).

Теорема 1.1 (теорема 2.1 [1])**.** *Пусть метрическое пространство X является полным, $x_0 \in X$, $\alpha > \beta \geq 0$ и $R := (\alpha - \beta)^{-1} d(\widehat{y}, F(x_0,x_0)) < +\infty$. Предположим, что для любого $x \in U := \big\{x \in X \mid \rho(x,x_0) \leq R\big\}$ выполнены включения*

$$(x,\widehat{y}) \in \operatorname{Cov}_\alpha[F(\cdot,x);X], \quad (x,\widehat{y}) \in \operatorname{Lip}_\beta[F(x,\cdot);U], \quad (x,\widehat{y}) \in \operatorname{Cl}[G;U].$$

Тогда во множестве U существует решение уравнения (1.1).

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости решений уравнения (1.1) к изменениям отображения F и правой части $\widehat{y}$.

Предположим, что известно решение $\widehat{x} \in X$ уравнения (1.1). Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы отображение $F_n \colon X \times X \to Y$ и элемент $\widehat{y}_n \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$F_n(x,x) = \widehat{y}_n. \tag{1.2}$$

Сформулируем условия сходимости решений уравнения (1.2) при $n \to \infty$ к решению $\widehat{x}$ уравнения (1.1). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим отображение $G_n : X \to Y$ формулой $G_n(x) := F_n(x,x)$, $x \in X$.

Теорема 1.2 (теорема 1.1 [3])**.** *Пусть метрическое пространство X является полным, при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы числа $0 \leq \beta_n < \alpha_n$. Положим*

$$r_n := \frac{1}{\alpha_n - \beta_n} d\big(\widehat{y}_n, G_n(\widehat{x})\big), \quad U_n := \big\{x \in X \mid \rho(x,\widehat{x}) \leq r_n\big\}.$$

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ при любом $x \in U_n$ выполнено

$$(x,\widehat{y}_n) \in \operatorname{Cov}_{\alpha_n}\big[F_n(\cdot,x);X\big], \;\; (x,\widehat{y}_n) \in \operatorname{Lip}_{\beta_n}\big[F_n(x,\cdot);U_n\big], \;\; (x,\widehat{y}_n) \in \operatorname{Cl}\big[G_n;U_n\big].$$

Если $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ уравнение (1.2) *разрешимо и существует такое его решение $\widehat{x}_n \in X$, что при $n \to \infty$ имеет место сходимость $\widehat{x}_n \to \widehat{x}$ в X.*

2. Краевая задача для неявного ДУ

В этом разделе предлагается исследование неявного ДУ с краевыми условиями достаточно общего вида. Исследование основано на представлении рассматриваемой краевой задачи в виде интегрального уравнения с отображением, действующим из полного метрического пространства суммируемых (по Лебегу) функций в пространство измеримых функций, которое мы наделяем расстоянием. К такому интегральному уравнению удается применить теоремы 1.1, 1.2.

Определим вначале функциональные пространства, используемые в данном исследовании. Элементами всех рассматриваемых ниже пространств будут функции, определенные на отрезке $[0,\tau]$, $\tau>0$, и имеющие значения в $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathbb{S}$ — пространство измеримых (по Лебегу) функций $u:[0,\tau]\to\mathbb{R}$. Определим в $\mathbb{S}$ расстояние следующим образом. Пусть задана функция двух аргументов $\theta:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, являющаяся *суперпозиционно измеримой*, т.е. $\theta(z_1,z_2)\in\mathbb{S}$ для любых $z_1,z_2\in\mathbb{S}$ (это предположение выполнено, например, если функция θ непрерывна по каждому аргументу; более общие условия суперпозиционной измеримости см. в [12, 13]). Пусть также выполнено

У с л о в и е 2.1. При любом фиксированном $z\in\mathbb{R}$ функция $\theta(\cdot,z):\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ непрерывна в точке z, справедливо равенство $\theta(z,z)=0$ и

$$\forall\delta>0\ \exists\gamma=\gamma(z,\delta)>0\ \forall\upsilon\in\mathbb{R}\quad |\upsilon-z|\geq\delta\ \Rightarrow\ \theta(\upsilon,z)\geq\gamma.$$

Зададим расстояние $d^\theta:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ соотношением

$$\forall\upsilon,z\in\mathbb{S}\ \ d^\theta(\upsilon,z)=\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]}\ \theta(\upsilon(t),z(t)),\tag{2.1}$$

а соответствующее пространство $(\mathbb{S},d^\theta)$ будем обозначать через $\mathbb{S}^\theta$.

Примером функции, удовлетворяющей условию 2.1, является $\theta_0(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$. Соответствующее этой функции расстояние $d^{\theta_0}:\mathbb{S}\times\mathbb{S}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ является метрикой в $\mathbb{S}$. Будем обозначать $\rho=d^{\theta_0}$, а пространство измеримых функций с такой метрикой — через $\mathbb{S}^{\theta_0}=(\mathbb{S},\rho)$. Заметим, что метрическое пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным.

В пространстве $\mathbb{S}$ измеримых функций выделим подпространство $\mathbb{L}$ суммируемых функций и пространство $\mathbb{L}_\infty$ существенно ограниченных функций. Пространство $\mathbb{L}$ с определенным формулой (2.1) расстоянием d^θ обозначим $\mathbb{L}^\theta$. Отображение $\rho=d^{\theta_0}$ является метрикой в $\mathbb{L}$, соответствующее метрическое пространство $\mathbb{L}^{\theta_0}$ является полным. Обозначим $\mathbb{AC}$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,\tau]\to\mathbb{R}$, имеющих п. в. на $[0,\tau]$ производную $\dot{x}\in\mathbb{L}$.

Пусть заданы измеримая функция $\widehat{y}:[0,\tau]\to\mathbb{R}$ и функция $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим неявное ДУ

$$f\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big)=\widehat{y}(t),\quad t\in[0,\tau].\tag{2.2}$$

Получим условия существования решения $x\in\mathbb{AC}$ этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию

$$\mathfrak{L}x:=\lambda x(0)+\int_0^\tau\Lambda(s)\dot{x}(s)ds=A.\tag{2.3}$$

Здесь $\lambda, A \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. Рассматриваемое краевое условие является линейным условием общего вида, поскольку любой линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $\mathbb{AC}$, $\|x\|_{\mathbb{AC}} = |x(0)| + \|\dot{x}\|_{\mathbb{L}}$, $\|v\|_{\mathbb{L}} = \int_0^\tau |v(s)|ds$, представим в виде $\mathfrak{L}$ с единственными $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$ (см. [14, § 2.1]).

Покажем, что краевая задача (2.2), (2.3) может быть записана в виде эквивалентного интегрального уравнения, которое можно рассматривать как операторное уравнение (1.1) с отображением F, действующим из $\mathbb{L}^{\theta_0}$ в $\mathbb{S}^\theta$. Таким образом, к исследованию краевой задачи (2.2), (2.3) применимы теоремы 1.1, 1.2, что позволит сформулировать условия ее разрешимости.

Пусть функция Λ не нулевая (иначе краевое условие превратится в начальное). Рассмотрим две возможные ситуации: $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$, в каждой из которых для редукции к интегральному уравнению воспользуемся W-подстановкой заменой переменных, определяемой Н. В. Азбелевым (подробнее см. [14, с. 53]).

I. Пусть $\lambda \neq 0$. Определим «модельное» дифференциальное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) = v(t), \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.4}$$

Для любой функции $v \in \mathbb{L}$ и любого числа A краевая задача с условием (2.3) для уравнения (2.4) однозначно разрешима, ее решение записывается в виде

$$x(t) = \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds. \tag{2.5}$$

Подставляя соотношение (2.5) в уравнение (2.2), получим интегральное уравнение

$$f\big(t, \frac{A}{\lambda} - \int_0^\tau \frac{\Lambda(s)}{\lambda} v(s)ds + \int_0^t v(s)ds, \, v(t)\big) = \widehat{y}(t). \tag{2.6}$$

Для существования решения $x \in \mathbb{AC}$ краевой задачи (2.2), (2.3) необходимо и достаточно, чтобы существовало решение $v \in \mathbb{L}$ уравнения (2.6). При этом формула (2.5) позволяет выразить решение $x \in \mathbb{AC}$ задачи (2.2), (2.3) через решение $v \in \mathbb{L}$ уравнения (2.6).

Определим функции

$$\mathrm{f}(t, v, u) = f(t, \frac{A}{\lambda} + v, u); \tag{2.7}$$

$$\mathrm{K}(t, s) = \begin{cases} 1 - \Lambda(s)/\lambda & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ -\Lambda(s)/\lambda & \text{при } 0 \le t < s \le \tau, \end{cases} \tag{2.8}$$

используя которые представим интегральное уравнение (2.6) в виде

$$\mathrm{f}\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t, s)\, v(s)ds, \, v(t)\big) = \widehat{y}(t), \quad t \in [0, \tau]. \tag{2.9}$$

Полученное уравнение (2.9) — это уравнение (1.1), в котором отображение $F : \mathbb{L}^{\theta_0} \to \mathbb{S}^\theta$ определено формулой $F(u, v)(t) = \mathrm{f}\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t, s)\, v(s)ds, \, v(t)\big)$, $u, v \in \mathbb{L}^{\theta_0}$, и если это отображение удовлетворяет предположениям теоремы 1.1, то исследуемая краевая задача окажется разрешимой. Соответствующее утверждение будет приведено ниже после рассмотрения второй ситуации.

II. Пусть $\lambda = 0$, т. е. краевое условие (2.3) теперь принимает вид

$$\mathfrak{L}x := \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A, \tag{2.10}$$

где $A \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. В этом случае уравнение (2.4) нельзя выбрать в качестве «модельного», так как для него краевая задача с условием (2.10) не является однозначно разрешимой. В данном случае рассмотрим следующее «модельное» дифференциальное уравнение:

$$(\mathcal{L}x)(t) := \dot{x}(t) - \Lambda(t)x(t) = v(t), \quad t \in [0,\tau]. \tag{2.11}$$

Задача (2.11), (2.10) для каждого набора правых частей $v \in \mathbb{L}$, $A \in \mathbb{R}$, однозначно разрешима, ее решением является функция

$$x(t) = \frac{AM(t)}{\Delta(0)} - \int_0^\tau \frac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)}\, v(s)ds - \int_0^\tau \frac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)}\, v(s)ds + \int_0^t \frac{M(t)}{M(s)}\, v(s)ds,$$

где $M(t) = \exp\Big(\int_0^t \Lambda(s)ds\Big)$, $\Delta(t) = \int_t^\tau \Lambda(\nu)^2 M(\nu)d\nu$, $t \in [0,\tau]$, причем $\Delta(0) \neq 0$, поскольку $\Lambda(t) \not\equiv 0$ и $M(t) > 0$ на $[0,\tau]$. После подстановки приведенной формулы в уравнение (2.2) получим эквивалентное рассматриваемой краевой задаче интегральное уравнение (2.9), где

$$\mathrm{f}(t,x,v) = f(t,\, \frac{AM(t)}{\Delta(0)} + x,\, v + \frac{A\Lambda(t)M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x). \tag{2.12}$$

$$\mathrm{K}(t,s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le s \le t \le \tau, \\ -\dfrac{M(t)\Lambda(s)}{\Delta(0)} - \dfrac{M(t)\Delta(s)}{M(s)\Delta(0)} & \text{при } 0 \le t < s \le \tau. \end{cases} \tag{2.13}$$

Итак, и в случае $\lambda \neq 0$, и в случае $\lambda = 0$ краевая задача (2.2), (2.3) записывается в виде интегрального уравнения (2.9). В первом случае в этом уравнении функции f, K определяются соотношениями (2.7), (2.8), во втором — соотношениями (2.12), (2.13).

Для формулировки утверждения о разрешимости краевой задачи (2.2), (2.3) (а фактически, о разрешимости полученного интегрального уравнения) введем следующие дополнительные обозначения.

Определим пространства $\mathbb{R}^\theta := (\mathbb{R}, \theta)$ и $\mathbb{R}^{\theta_0} := (\mathbb{R}, \theta_0)$, первое из которых — это вещественная прямая с «нестандартным» расстоянием $\theta(r_1, r_2)$ между числами $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, а второе — это вещественная прямая с «обычной» метрикой $|r_1 - r_2|$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Для любого $v \in \mathbb{L}$ обозначим $(\mathbf{K}v)(t) = \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds$. Далее, положим

$$\mathrm{k}_0 = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \int_0^\tau |\mathrm{K}(t,s)|ds.$$

Отметим, что в силу определения функции K формулами (2.12) или (2.13), функция K существенно ограничена, следовательно, значение k_0 конечно. Для любого $v \in \mathbb{L}$ определим функции $\mathrm{g}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ и $\mathrm{h}^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{g}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t,u,v(t)),$$

$$\forall t \in [0,\tau] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \mathrm{h}^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)v(s)ds, u).$$

Теорема 2.1. *Пусть существует функция* $v_0 \in \mathbb{L}$ *такая, что*

$$R_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}(t),\, \mathrm{f}(t, u_0(t), v_0(t))\big) < \infty, \quad \text{где } u_0(t) := (\mathbf{K}v_0)(t).$$

Пусть заданы $\alpha > 0$, $\sigma \in (0,\alpha)$. *Положим* $R = R_0/\sigma$ *и определим многозначные отображения* $\Omega, \Xi : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$ *соотношениями*

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \Omega(t) := [u_0(t) - \mathrm{k}_0 R, u_0(t) + \mathrm{k}_0 R], \quad \Xi(t) := [v_0(t) - R, v_0(t) + R].$$

Пусть при любом $v \in \mathbb{L}$, *таком, что* $v(t) \in \Xi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$, *выполнены включения*

$$\big(v(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\mathrm{h}^{[v]}(t,\cdot);\Omega(t)\big], \quad t \in [0,\tau],$$

где $\beta := (\alpha - \sigma)/\mathrm{k}_0$. *Тогда существует решение* $x \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2), (2.3) *такое, что* $(\mathcal{L}x)(t) \in \Xi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$.

Доказательство этого утверждения состоит в проверке для интегрального уравнения (2.9) условий теоремы 1.1.

Аналогично, из теоремы 1.2 в качестве следствия выводятся условия устойчивости решения краевой задачи (2.2), (2.3) к возмущениям правых частей $\widehat{y} \in \mathbb{S}^\theta$, $A \in \mathbb{R}^\theta$ и функции f, определяющей дифференциальное уравнение.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ заданы: функция $f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, являющаяся измеримой по первому аргументу и непрерывной по совокупности второго и третьего аргументов, измеримая функция $\widehat{y}_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и число A_n. Для уравнения

$$f_n\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \widehat{y}_n(t), \quad t \geq 0, \tag{2.14}$$

рассмотрим краевую задачу с условием

$$\mathfrak{L}x := \lambda x(0) + \int_0^\tau \Lambda(s)\dot{x}(s)ds = A_n. \tag{2.15}$$

Здесь $\lambda, A_n \in \mathbb{R}$, $\Lambda \in \mathbb{L}_\infty$. Пусть задано решение $\widehat{x}$ задачи (2.2), (2.3). Сформулируем достаточные условия существования при любом $n \in \mathbb{N}$ решения $\widehat{x}_n$ задачи (2.14), (2.15) такого, что последовательность $\{\widehat{x}_n\}$ некоторым образом сходится к $\widehat{x}$.

Чтобы представить краевую задачу (2.14), (2.15) в виде эквивалентного интегрального уравнения, определим функцию f_n соотношениями

$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t, \frac{A_n}{\lambda} + x, v), \;\; \text{если } \lambda \neq 0,$$
$$\mathrm{f}_n(t,x,v) = f_n(t, \frac{A_n M(t)}{\Delta(0)} + x,\, v + \frac{A_n \Lambda(t) M(t)}{\Delta(0)} + \Lambda(t)x), \;\; \text{если } \lambda = 0.$$

В этих обозначениях краевая задача (2.14), (2.15) относительно функции $v = \dot{x} \in \mathbb{L}$ эквивалентна интегральному уравнению

$$\mathrm{f}_n\big(t, \int_0^\tau \mathrm{K}(t,s)\, v(s)ds,\, v(t)\big) = \widehat{y}_n(t).$$

Применим к этому уравнению теорему 1.1.

Для любого $v \in \mathbb{L}$ определим функции $\mathrm{g}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$, $\mathrm{h}_n^{[v]} : [0,\tau] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \mathbb{R}^\theta$ соотношениями

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\;\; \mathrm{g}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t,u,v(t)),$$
$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \forall u \in \mathbb{R} \;\;\; \mathrm{h}_n^{[v]}(t,u) = \mathrm{f}_n(t,(\mathbf{K}v)(t),u).$$

Теорема 2.2. *Пусть задано решение* $\widehat{x} \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.2), (2.3)*. Обозначим* $\widehat{v}(t) := (\mathcal{L}\widehat{x})(t)$, $\widehat{u}(t) := (\mathbf{K}\widehat{v})(t)$, $t \in [0,\tau]$*. Предположим, что при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *существует такое* $\sigma_n > 0$, *что при* $n \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$R_n := \frac{1}{\sigma_n} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,\tau]} \theta\big(\widehat{y}_n(t),\, \mathrm{f}_n(t, \widehat{u}(t), \widehat{v}(t))\big) \to 0.$$

Определим многозначные отображения $\Omega_n, \Xi_n : [0,\tau] \rightrightarrows \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *соотношениями*

$$\forall t \in [0,\tau] \;\; \Omega_n(t) := [\widehat{u}(t) - \mathrm{k}_0 R_n,\, \widehat{u}(t) + \mathrm{k}_0 R_n], \quad \Xi_n(t) := [\widehat{v}(t) - R_n,\, \widehat{v}(t) + R_n].$$

Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ *существует* $\alpha_n > \sigma_n$ *такое, что для любой функции* $v \in \mathbb{L}$, *если* $v(t) \in \Xi_n(t)$ *при п.в.* $t \in [0,\tau]$, *то выполнены включения*

$$\big(v(t), \widehat{y}_n(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_n}\big[\mathrm{g}_n^{[v]}(t,\cdot);\mathbb{R}\big], \quad \big((\mathbf{K}v)(t), \widehat{y}_n(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_n}\big[\mathrm{h}_n^{[v]}(t,\cdot);\Omega_n(t)\big], \quad t \in [0,\tau],$$

где $\beta_n := (\alpha_n - \sigma_n)/\mathrm{k}_0$*. Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует решение* $\widehat{x}_n \in \mathbb{AC}$ *краевой задачи* (2.14), (2.15) *такое, что последовательность* $\{\mathcal{L}\widehat{x}_n\}$ *при* $n \to \infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{L}^{\theta_0}$ *к функции* $\widehat{v} = \mathcal{L}\widehat{x}$.

References

[1] Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений”, *Уфимский математический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations”, *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 41–54.

[2] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, “Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskii, W. Merchela, “Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 52–63 (In Russian)].

[3] В. Мерчела, “Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 44–54. [W. Merchela, “On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 44–54 (In Russian)].

[4] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations not solved with respect to the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[5] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, S. E. Zhukovskii, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[6] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “Covering Mappings in a Product of Metric Spaces and Boundary Value Problems for Differential Equations Unsolved for the Derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[7] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Теорема о накрывании оператора в произведении метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **16**:1 (2011), 70–72. [E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “A theorem on operator covering in the product of metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **16**:1 (2011), 70–72 (In Russian)].

[8] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных иссследований, Москва–Ижевск, 2004; англ. пер.:D. Burago, Yu. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, **33**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[9] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.

[10] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f –квазиметрических пространств”, *Сибирский математический журнал*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **59**:6 (2018), 1063—-1072.

[11] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады Академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155. [A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, **416**:2 (2007), 151–155 (In Russian)].

[12] И. В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, “Superpositional measurability under generalized Caratheodory conditions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[13] И. Д. Серова, “Суперпозиционная измеримость многозначной функции при обобщенных условиях Каратеодори”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 305–314. [I D. Serova, “Superpositional measurability of a multivalued function under generalized Caratheodory conditions”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 305–314 (In Russian)].

[14] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1991. [N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russian)].

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург. Российская Федерация. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov; St. Petersburg University, St. Petersburg, Russian Federation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Поступила в редакцию 29.09.2021 г.
Поступила после рецензирования 15.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Received 29.09.2021
Reviewed 15.11.2021
Accepted for press 27.11.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420
УДК 517.922

Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В статье рассматривается алгебро-дифференциальное уравнение второго порядка. Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка описывается работа схемы электронного триода с обратной связью, вращение жесткого тела с полостью, считывание информации с диска и т. д. Перед старшей производной находится необратимый оператор. Этот оператор фредгольмов с нулевым индексом, обладающий ядром произвольной размерности и цепочками Жордана произвольной длины. Уравнения с необратимыми операторами при старшей производной называются алгебро-дифференциальными. В связи с этим решение задачи существует при определенных условиях на компоненты искомой функции. Для разрешения уравнения относительно производной применяется метод каскадной декомпозиции уравнения, заключающегося в пошаговом расщеплении уравнения на уравнения в подпространствах уменьшающихся размерностей. Рассмотрены случаи одношагового и двухшагового расщепления. При расщеплении используется результат о решении линейного уравнения с фредгольмовым оператором. В каждом случае получен результат, сформулированный в виде теоремы. Для иллюстрации полученного результата в случае одношагового расщепления приводится иллюстрирующий пример задачи Коши.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, фредгольмов оператор, каскадная декомпозиция, задача Коши

Для цитирования: *Усков В.И.* Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 414–420. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420

Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. We consider a second-order algebro-differential equation. Equations and systems of second-order differential equations describe the operation of an electronic triode circuit with feedback, rotation of a rigid body with a cavity, reading information from a disk, etc. The highest derivative is preceded by an irreversible operator. This is a Fredholm operator with index zero, kernel of arbitrary dimension, and Jordan chains of arbitrary lengths. Equations with irreversible operators at the highest derivative are called algebro-differential. In this case, the solution to the problem exists under certain conditions on the components of the desired function. To solve the equation with respect to the derivative, the method of cascade splitting of the equation is used, which consists in the stepwise splitting of the equation into equations in subspaces of decreasing dimensions. Cases of one-step and two-step splitting are considered. The splitting uses the result on the solution of a linear equation with Fredholm operator. In each case, the corresponding result is formulated as a theorem. To illustrate the result obtained in the case of one-step splitting, an illustrative example of the Cauchy problem is given.

Keywords: second-order algebro-differential equation, Banach space, Fredholm operator, cascade splitting, Cauchy problem

Mathematics Subject Classification: 34A12.

For citation: Uskov V.I. Razresheniye algebro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka otnositel'no proizvodnoy [Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 414–420. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-414-420. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Уравнениями и системами дифференциальных уравнений второго порядка описывается работа схемы электронного триода с обратной связью (уравнение Рэлея) [1], вращение жесткого тела с полостью (уравнение Ламе) [2], считывание информации с диска [3] и т. д.

Уравнения с вырожденным оператором при старшей производной называют алгебро-дифференциальными. Задача Коши решалась в работе [4], где этот оператор — нормально разрешимый фредгольмов с n-мерным ядром, имеющий относительно некоторой оператор-функции полный биканонический жорданов набор; в работе [5] операторные коэффициенты являются $n\times n$-матрицами, для краевой задачи применялся метод сеток. Используемый здесь метод каскадной декомпозиции применялся в работе [6] при исследовании возмущений, вызываемых наличием малого параметра у алгебро-дифференциального уравнения первого порядка.

В настоящей работе рассматривается уравнение

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = Bu(t) + F(t), \tag{0.1}$$

где $A, B : E_1 \to E_2$ — замкнутые линейные операторы, E_1, E_2 — банаховы пространства, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$, $\overline{\operatorname{dom} B} = E_1$; A — фредгольмов оператор с нулевым индексом; $F(t)$ — заданная функция со значениями в E_2.

Здесь оператор A имеет более сложную структуру — каждый элемент ядра имеет присоединенные элементы различной длины.

Фредгольмов оператор A вполне определяется следующими свойствами.

С в о й с т в о A (см. [7]).

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$ в E_1, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Сужение $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$.

Обозначим через $Q(A)$ проектор на $\operatorname{Coker} A$, $P(A)$ — проектор на $\operatorname{Ker} A$ и через I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. Введем полуобратный оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A))$.

С в о й с т в о B (см. [8]). Равенство $Av = w$, $v \in E_1 \cap \operatorname{dom} A$, $w \in E_2$, равносильно системе

$$\begin{aligned} &v = A^- w + Pv \quad \text{для всех} \quad Pv \in \operatorname{Ker} A,\\ &Qw = 0. \end{aligned}$$

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &A_0 = A, \quad Q_i = Q(A_i), \quad P_i = P(A_i), \quad i = 0,1,2,\\ &A_i = S_{i-1}P_{i-1}, \quad A_i^- = \tilde{A}_i^{-1}(I - Q_i), \quad i = 1,2,\\ &T_0 = A_0^- B, \quad S_0 = Q_0 B, \quad K_0 = Q_0, \quad L_0 = A_0^-, \quad R_0 = S_0 T_0, \quad G_0 = S_0 L_0 + \frac{d^2}{dt^2} K_0,\\ &T_1 = T_0 - A_1^- R_0, \quad S_1 = Q_1 A_1^- R_0, \quad L_1 = L_0 - A_1^- G_0, \quad K_1 = Q_1 A_1^- G_0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Цель работы: разрешить уравнение (0.1) относительно производной, для чего применяется метод каскадного расщепления уравнения на уравнения в подпространствах уменьшающихся размерностей. Рассматривается случай обратимости оператора A_1 (один шаг расщепления) и случай обратимости оператора A_2 (два шага расщепления, A_1 в этом случае полагается необратимым).

Приводится иллюстрирующий пример задачи Коши.

1. Случай обратимости оператора A_1

В силу свойства B из работы [8] уравнение (0.1) равносильно системе

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_0u + L_0F(t) + P_0\frac{d^2u}{dt^2}, \tag{1.1}$$

$$S_0u(t) + K_0F(t) = 0 \tag{1.2}$$

с искомым элементом $P_0\dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A_0$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1.1. Функция $K_0F(t)$ дважды дифференцируема.

Дифференцирование дважды равенства (1.2) и подстановка в него выражения (1.1) приводит к уравнению

$$A_1(P_0\frac{d^2u}{dt^2}) = -R_0u(t) - G_0F(t). \tag{1.3}$$

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1.2. Оператор $A_1 : \operatorname{Ker} A_0 \to \operatorname{Coker} A_0$ обратим.

Тогда обращение уравнения (1.3) и подстановка в (1.1) влекут уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_1u + L_1F(t). \tag{1.4}$$

Тем самым, получено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия 1.1, 1.2. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (1.4), (1.2) *в обозначениях* (0.2).

2. Случай обратимости оператора A_2

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.3. Оператор A_1 фредгольмов с нулевым индексом.

З а м е ч а н и е 2.1. Теперь имеют место следующие разложения в прямые суммы:

$$\operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_1, \quad \operatorname{Coker} A_0 = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Coker} A_1.$$

Сделаем второй шаг расщепления уравнения (0.1). Применением свойства B уравнение (1.3) сводится к равносильной системе

$$P_0\frac{d^2u}{dt^2} = -A_1^- R_0u(t) - A_1^- G_0F(t) + P_1P_0\frac{d^2u}{dt^2}, \tag{2.1}$$

$$S_1u(t) + K_1F(t) = 0 \tag{2.2}$$

с искомым элементом $P_1P_0\dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A_1$.

Наложим следующее условие.

У с л о в и е 2.4. Функция $K_1F(t)$ дважды дифференцируема.

Аналогично, продифференцировав равенство (2.2) и подставив в него последовательно выражения (1.1), (2.1), получим уравнение

$$A_2(P_1P_0\frac{d^2u}{dt^2}) = -S_1(T_0 - A_1^-R_0)u(t) - S_1(L_0F(t) - A_1^-G_0F(t)) - \frac{d^2}{dt^2}K_1F(t). \tag{2.3}$$

Теперь пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 2.5. Оператор $A_2 : \operatorname{Ker} A_1 \to \operatorname{Coker} A_1$ обратим.

Выразив элемент $P_1P_0\dfrac{d^2u}{dt^2}$ из (2.3), подставив его в (2.1), а затем — в (1.1), приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = T_2u + L_2F(t). \tag{2.4}$$

Тем самым, получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия 2.3, 2.4, 2.5. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (2.4), (1.2), (2.2) *в обозначениях* (0.2).

3. Вспомогательное утверждение

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Du(t), \tag{3.1}$$

где D – замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E; $\overline{\operatorname{dom} D} = E$.

Под решением уравнения подразумевается дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая (3.1).

Имеет место следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть число* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и вектор* h *таковы, что*

$$(D - \lambda^2 I)h = 0 \;\Rightarrow\; h \neq 0.$$

Тогда функция

$$u(t) = \exp(\lambda t)h \tag{3.2}$$

является частным решением уравнения (3.1).

Это утверждение доказывается подстановкой функции (3.2) в уравнение (3.1).

4. Пример

Рассмотрим задачу Коши на $\mathfrak{T} = [0; t_k]$:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{d^2u_3}{dt^2} = u_1(t) + 2u_2(t) + 3u_3(t),\\
2\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\frac{d^2u_2}{dt^2} + 2\frac{d^2u_3}{dt^2} = u_1(t) + 3u_2(t) + 2u_3(t),\\
3\frac{d^2u_1}{dt^2} + 3\frac{d^2u_2}{dt^2} + 3\frac{d^2u_3}{dt^2} = 2u_1(t) + 3u_2(t) + u_3(t),
\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$u_1(0) = a_1, \quad u_2(0) = a_2, \quad u_3(0) = a_3, \tag{4.2}$$

$$u_1'(0) = b_1, \quad u_2'(0) = b_2, \quad u_3'(0) = b_3, \tag{4.3}$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 — заданные скаляры из $\mathbb{R}$.

Здесь $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ — искомая функция, $u^0 := u(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $u^1 := u'(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ — начальные векторы, $F(t) \equiv 0$.

Для оператора A имеем:

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma \\ 2\gamma \\ 3\gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Coim} A = \{0\}$, $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Coker} A = \{0\}$, отображение $\operatorname{Coim} A$ в $\operatorname{Im} A$ взаимно однозначно, P, Q идемпотентны.

Из уравнения $A(Pv) = Qw$, где $Pv \in \operatorname{Ker} A$, $Qw \in \operatorname{Coker} A$, следует, что оператор $A_1 = QBP$ обратим в $\operatorname{Ker} A$ и

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/6 & 1/2 \\ 0 & 7/6 & -1/2 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь задачу Коши (4.1), (4.2), (4.3). В силу непрерывной зависимости от начальных условий требуется наложить условия согласования, вытекающие из (1.2) и продифференцированного выражения:

$$S_0 u^0 + S_0 F(0) = 0, \quad S_0 u^1 + S_0 F'(0) = 0,$$

то есть

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + 4a_3 = 0, \quad a_1 + 3a_2 + 8a_3 = 0, \\ b_1 + b_2 + 4b_3 = 0, \quad b_1 + 3b_2 + 8b_3 = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Вычисления с применением теоремы 1.1, предложения 3.1 и (4.4) приводят к искомому решению

$$u(t) = (a_3 \operatorname{ch} t + b_3 \operatorname{sh} t) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

References

[1] Дж. Стокер, *Нелинейные колебания в механических и электрических схемах.* Т. 2, Чистая и прикладная математика, Издательство иностранной литературы, М., 1952, 273 с.; англ. пер.:J. Stoker, *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems.* V. II, Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, Geneva, 1957, 273 pp.

[2] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи*, Наука, М., 1989. [N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, Ngo Zuy Kan, *Operator Methods in Linear Hydrodynamics. Evolutionary and Spectral Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[3] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Marquette University Faculty, USA, 1998.

[4] С. С. Орлов, "Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах", *Известия Иркутского государственного университета*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, "Continuous solutions of a degenerate integro-differential equation in Banach spaces", *Izvestiya of Irkutsk State University*, **2**:1 (2009), 328–332 (In Russian)].

[5] М. Н.Ботороева, О. С. Будникова, Л. С. Соловарова, "О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка", *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2019, № 3, 32–41. [M. N. Botoroeva, O. S. Budnikova, L. S. Solovarova, "On the choice of boundary conditions for differential-algebraic equations of the second order", *Bulletin of Buryat State University. Mathematics, Computer Science*, 2019, № 3, 32–41 (In Russian)].

[6] В. И. Усков, "Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 172–181. [V. I. Uskov, "Study of rigidity of a first-order differential system with perturbation in the right-hand side", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 172–181 (In Russian)].

[7] С. М. Никольский, "Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, "Linear equations in normed linear spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[8] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 392–403; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case", *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
Поступила после рецензирования 30.10.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 17.08.2021
Reviewed 30.10.2021
Accepted for press 27.11.2021