ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 27
№ 140
2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 27, № 140, 2022

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория К1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Редакторы: М.И. Филатова, М.С. Жарихина
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Бударин
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2022. – Т. 27, № 140. – 104 с. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-140

Подписано в печать 12.12.2022. Дата выхода в свет 26.12.2022
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 13,0. Усл. печ. л. 12,1. Тираж 1000 экз. Заказ № 22519. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 27, no. 140, 2022

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC "Ural-Press" is 83372
Distribution territory: Russian Federation, foreign countries

Editors: M.I. Filatova, M.S. Zharikhina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2022. – Vol. 27, no. 140. – 104 p. – https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-140

Signed for printing 12.12.2022. Release date 26.12.2022
Format A4 (60×84 1/8). Typeface "Times New Roman". Printed on risograph.
Pr. sheet 13,0. Conv. pr. sheet 12,1. Copies printed 1000. Order no. 22519. Free price

Publisher: FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317

УДК 517.28+512.552+512.548.4

О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах

Андроник Арамович АРУТЮНОВ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

141701, Российская Федерация, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9

Аннотация. Работа посвящена обзору известных результатов, связанных с исследованиями дифференцирований в групповых алгебрах, бимодулях и других алгебраических структурах, а также различным обобщениям и вариациям данной задачи. Дается обзор результатов, посвященных дифференцированиям в алгебрах $L_1(G)$, в алгебрах фон Ноймана и в банаховых бимодулях. Обсуждаются алгебраические задачи, в частности дифференцирования в группах, (σ,τ)-дифференцирования и исчисление Фокса. Также дается обзор некоторых результатов связанных с приложением к псевдодифференциальным операторам и построению символьного исчисления. В заключении описываются некоторые результаты, связанные с описанием дифференцирований, как характеров на группоиде присоединенного действия. Описаны также некоторые приложения: к теории кодирования, теории концов метрических пространств и грубой геометрии.

Ключевые слова: дифференцирования, операторные алгебры, групповые алгебры, (σ,τ)-дифференцирования, алгебры фон Ноймана, банаховы бимодули

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (госзадание № 075-00337-20-03), проект № 0714-2020-0005.

Для цитирования: *Арутюнов А.А.* О дифференцированиях в групповых алгебрах и других алгебраических структурах // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 305–317. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317

On derivations in group algebras and other algebraic structures

Andronick A. ARUTYUNOV
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation
Moscow Institute of Physics and Technology
9 Inststitutskii Per., Dolgoprudny, Moscow Region 141700, Russian Federation

Abstract. The work is devoted to a survey of known results related to the study of derivations in group algebras, bimodules and other algebraic structures, as well as to various generalizations and variations of this problem. A review of results on derivations in $L_1(G)$ algebras, in von Neumann algebras, and in Banach bimodules is given. Algebraic problems are discussed, in particular, derivations in groups, (σ, τ)-derivations, and the Fox calculus. A review of some results related to the application to pseudodifferential operators and the construction of the symbolic calculus is also given. In conclusion, some results related to the description of derivations as characters on the groupoid of the adjoint action are described. Some applications are also described: to coding theory, the theory of ends of metric spaces, and rough geometry.

Keywords: derivations, operator algebras, group algebras, (σ, τ)-derivations, von Neumann algebras, Banach bimodules

Acknowledgements: The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Assignment No. 075-00337-20-03), Project No. 0714-2020-0005.

Mathematics Subject Classification: 16W25, 47B47, 46L10, 16S34.

For citation: Arutyunov A.A. O differentsirovaniyakh v gruppovykh algebrakh i drugikh algebraicheskikh strukturakh [On derivations in group algebras and other algebraic structures]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 305–317. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-305-317. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть имеем ассоциативную алгебру A (пока без дополнительного оснащения) над кольцом R. В самом общем виде нас интересует описание пространства дифференцирований, то есть линейных операторов, удовлетворяющих правилу Лейбница.

Определение 0.1. Линейный оператор $d : A \to A$ назовем дифференцированием, если для всех $u, v \in A$ выполнено правило Лейбница

$$d(uv) = d(u)v + ud(v). \tag{0.1}$$

Преимущественно мы будем рассматривать частный случай групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ для произвольной конечнопорожденной группы G.

Определение 0.2. Назовем групповой алгеброй $\mathbb{C}[G]$ пространство конечных линейных комбинаций $\sum\limits_{g \in G} \lambda_g g$, где λ_g — комплексные коэффициенты.

Одним из важнейших примеров дифференцирований являются внутренние, а именно

Определение 0.3. Для $a \in A$ линейный оператор d_a задаваемый формулой

$$d_a : x \mapsto ax - xa$$

назовем внутренним дифференцированием.

Пространство внутренних дифференцирований образует идеал в алгебре всех дифференцирований. Соответственно фактор алгебру по внутренним обычно называют алгеброй внешних дифференцирований.

Краеугольным вопросом является следующий

Проблема 1 (The derivation problem)**.** *Верно ли что все дифференцирования в данной алгебре внутренние?*

Частным случаем данного вопроса является следующий, поставленный B. Johnson

Проблема 2. *Верно ли что все дифференцирования в $L_1(G)$ — внутренние?*

Изучение данной проблемы ставит также ряд дополнительных вопросов. Прежде всего масштабирование предложенного метода на другие классы ассоциативных алгебр, при этом дифференцирования вообще говоря не образуют алгебру, только бимодуль.

Истоки задачи

Само по себе понятие дифференцирования является одним из базовых понятий математики. Не углубляясь в богатую историю развития математического анализа, отметим, что ключевую роль в исследовании различных структур, обладающих некоторой дополнительной алгебраической структурой, будь то структура бимодуля, кольца или группы, ключевую роль играет знаменитое правило Лейбница

$$d(fg) = d(f)g + fd(g).$$

В отличии от классических задач анализа и дифференциальной геометрии, в которых мы имеем непрерывную структуру и можем понимать дифференцирование как предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при работе с алгебрами и модулями такое определение не годится, и именно правило Лейбница становится необходимым требованием в определении дифференцирования.

При этом, как мы увидим ниже, само по себе правило Лейбница различными путями может модифицироваться и пониматься разными способами. Это касается и смысла умножения в слагаемых правой части, и «подкручивания» (twisting), т. е. оснащения дополнительными эндоморфизмами слагаемых. Однако, общая индуктивная структура правила сводящего вычисление $d(fg)$ к вычислению значения дифференцирования на сомножителях — всегда легко угадывается.

По всей видимости первое упоминание банаховых алгебр (названных тогда линейным метрическим кольцом) — работа 1936 года [1]. Там же впервые рассмотрено и понятие дифференцирования. Систематическое изучение общей теории банаховых алгебр было начато в 1941 году в работе И. М. Гельфанда [2], а в 1943 в [3] была доказана знаменитая теорема Гельфанда–Наймарка.

Дифференцирования в банаховых алгебрах

В послевоенные годы вырос интерес к дифференцированиям в банаховых алгебрах. Так, в работе [4] И. Капланский, исследуя автоморфизмы в банаховых алгебрах, приходит к необходимости изучения дифференцирования AW^* алгебр (частный случай C^* алгебр, введенный ранее им же в [5]) и показывает, что все они внутренние ([4], Theorem 9). Это позволяет доказать основной результат (теорема 10), что автоморфизмы некоторых банаховых алгебр, сохраняющих центральные элементы, также будут внутренними. Там же ставится другой вопрос, называемый «проблемой Капланского», о том, обязаны ли дифференцирования C^* алгебр быть непрерывными. Ответ на данный вопрос – положительный, и был получен в работе С. Сакаи [6]. Далее этот вопрос развивался в работах как самого С. Сакаи [7–9] так и в статьях других исследователей, например [10–12]. Примеры C^* алгебр в которых есть внешние дифференцирования были получены в [13].

Об отмеченной И. Капланским связи между дифференцированиями и автоморфизмами см. также [14, 15]. Отмечались и некоторые приложения, в частности к теории динамических систем [16].

Среди дальнейших результатов в этом направлении отметим работы Р. Кадисона [4, 17] и его совместные работы с Дж. Рингроузом [18, 19], в которых было продолжено исследование дифференцирований в C^* алгебрах, в т. ч. и действующих на гильбертовом пространстве, понимаемом как модуль над алгеброй.

Особое значение играл поиск условий, при которых все дифференцирования оказываются внутренними. Для групповых алгебр основной вопрос т. н. *derivation problem* формулируется следующим образом: «При каких условиях все производные в групповой алгебре являются внутренними?».

Большой вклад в исследование этого вопроса для случая алгебры $L_1(G)$ внес Б. Джонсон, и часто вопрос наличия дифференцирований, не являющихся внутренними, называют *Проблемой Джонсона.* Так, в совместной работе с Дж. Рингроузом [20] было получено простое доказательство тривиальности дифференцирований в алгебрах фон Ноймана (ранее аналогичные результаты получил Сакаи в [6]), а также для $\ell_1(G)$. Многие результаты собраны в монографии [21].

Самому Б. Джонсону удалось найти ответ на данный вопрос и для некоторых других случаев, связанных с групповой алгеброй $L_1(G)$. В таком случае проблема Джонсона играет принципиальную роль для исследований в теории меры и гармоническом анализе, теории операторов, операторных алгебр и когомологических конструкций [22, вопрос 5.6.B, с. 746]. В работе [23] им была решена указанная проблема для случая связных локально компактных групп. Наиболее полный результат был получен в [24], где упоминалось, что все дифференцирования в $L_1(G)$ являются внутренними.

В отмеченном случае алгебр фон Ноймана некоторые результаты были получены Б. Джонсоном с С. Пэрротом [25], а также заметно усилены С. Поупом в [26]. Итоговый результат (теорема Джонсона–Пэррота–Поупа) состоит в том, что все дифференцирования из алгебры фон Ноймана со значениями в пространстве компактных операторов над гильбертовым пространством — внутренние. Некоторые современные результаты получены, например в [27], наиболее полное изложение см. в [28]. Позднее в [29] был изучен и более общий случай полупростых алгебр фон Ноймана.

Задача вычисления гомологий банаховых алгебр была одной из важных мотивировок в изучении структуры дифференцирований. Отметим две важные монографии, в которых собраны достаточно полные обзоры соответствующих результатов [30, 31]. Важно отметить роль изучения дифференцирований для когомологий Хохшильда. Сам комплекс был предложен Г. Хохшильдом в [32], как инструмент для изучения свойств алгебры. Один из знаковых результатов — теорема Хохшильда–Костанта–Розенберга из [33], устанавливающая изоморфизм между, собственно, комплексом Хохшильда и производного пространства петель. О некоторых других приложениях комплекса Хохшильда см. [34].

С точки зрения исследования дифференцирований поясним, что дифференцирования соответствуют 1-коциклам комплекса Хохшильда, внутренние дифференцирования — 1-кограницам, а внешние дифференцирования, соответственно, являются одномерными когомологиями. Формула для вычисления гомологий и когомологий была получена в [35] для групповых алгебр. Из недавних отметим результаты А. С. Мищенко [36–38], в которых построены новые формулы для вычисления гомологий и когомологий.

Другим свежим направлением развития данной тематики является исследование униформных алгебр Роу и в целом развитие инструментария комплексов Хохшильда (и, в частности, дифференцирований, как 1-коциклов) на грубую геометрию. Так, в работе [39] было показано, что все ограниченные дифференцирования униформной алгебры Роу над дискретным метрическим пространством ограниченной геометрии — будут внутренними. Существенным развитием этих результатов является работа [40] в которой вычисляются ограниченные когомологии Хохшильда униформной алгебры Роу со значениями в униформных бимодулях Роу для дискретных метрических пространств.

Алгебраические дифференцирования

Большая часть упомянутых выше работ относится к исследованию банаховых алгебр и вообще к случаю, когда алгебра имеет некое топологическое оснащение. При этом, как несложно видеть, для «лобовой» проверки правила Лейбница достаточно иметь только алгебраическую структуру.

По всей видимости впервые чисто алгебраические дифференцирования и алгебраический аналог проблемы Джонсона, был исследован М. Смит в [41]. Среди дальнейших работ отметим [42], в которой изучался случай колец с целочисленными коэффициентами. Последнее обусловлено прикладными задачами, в частности криптографические. В частности применения дифференцирований к кодам Рида–Соломона, было исследовано в [43, 44].

Дальнейшее исследование дифференцирований в кольцах было связано с рассмотрением различных вариантов колец. Причем особый интерес представляет случай конечных колец. Так, в [45], рассмотрены групповые алгебры с коэффициентами в конечном кольце R, при этом на группу налагаются определенные требования (группа должна быть черниковской). Исследуются $R-$ дифференцирования, т. е. такие дифференцирования δ, что $\delta(R) = 0$. Авторами доказывается, что все $R-$ дифференцирования будут внутренними. Другие обобщенные варианты обобщенных дифференцирований рассматриваются например в [46].

Естественным обобщением являются т. н. (σ, τ)-дифференцирования. То есть дифференцирования, удовлетворяющие «подкрученному» правилу Лейбница

$$d(uv) = d(u)\sigma(v) + \tau(u)d(v), \quad u, v \in R.$$

Здесь R — некоторое унитальное кольцо, и σ, τ — его эндоморфизмы. Важным частным случаем этой общей конструкции являются (σ, id)-дифференцирования, также называемые σ-дифференцированиями. При этом сама структура таких (σ, τ)-дифференцирований достаточно сложная, в частности они вообще говоря не обладают структурой алгебры Ли или аналогичной. Даже проверка того, что в случае конечной группы все дифференцирования будут внутренними — оказывается уже нетривиальным (см. [47]).

Конструкция «подкрученных» дифференцирований возникла в связи с исследованиями расширений Оре, предложенных в [48]. Общая теория, в частности связь с теорией Галуа, изложена в [49]. Также отметим монографии [50–52], и записки лекций [53, 54].

Расширением Оре полиномиального кольца называют некоммутативное кольцо $R[x; \sigma, \delta]$ косых многочленов (skew-polynomial ring), определяемое эндоморфизмом кольца σ и соответствующем ему σ-дифференцированием δ, в котором выполнено соотношение

$$xr = \sigma(r)x + \delta(r).$$

Многие свойства, касающиеся размерностей и строения модулей, были получены в [55]. Косые полиномы находят многочисленные приложения в квантовом исчислении [56, 57], для поиска право-инвариантных полиномов и классов сопряженности [58], для исследования деформаций алгебр Ли [59] и матричных алгебр [60]. Находят свои приложения данная конструкция и в некоммутативной геометрии [61, 62], в частности для описания некоммутативных нетеровых колец [63]. Отметим также приложения к теории кодирования [64].

Одной из мотивировок исследования «подкрученных» дифференцирований является исследование Quasi–Hom–Lie алгебр, обобщающих алгебры Витта и алгебры Вирасо. Данный тип алгебр отличается от обычных алгебр Ли тем, что вместо классического тождества Якоби они удовлетворяют более общему правилу. Их описание оказывается тесно связанным с σ-дифференцированиями. Фактически они ими и описываются (см. [65, теорема 2]).

Сами (σ, τ)-дифференцирования также возникают при исследовании деформаций алгебр [60, 66, 67]. И при изучении полиномов Лорана на групповой алгебре [68]. Дальнейшее развитие связано как с упомянутыми приложениями в квантовой теории, так и с обобщениями в анализе. В частности изучался вопрос описания (σ, τ)-дифференцирований в алгебрах фон Ноймана [69].

Говоря об алгебраической задаче, нельзя не упомянуть также производные Фокса (the Fox derivative), предложенные в контексте изучения свободных групп Р. Фоксом в серии работ [70–74]. Рассматривается следующая конструкция. Пусть $F = \langle X \rangle$ — свободная группа, $\mathbb{Z}F$ — целочисленная групповая алгебра (т. е. коэффициенты — кольцо целых чисел). Тогда для каждого $x \in X$ производной Фокса называют линейный оператор $D_x : \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}F$ такой, что для $u, v \in \mathbb{Z}F$ значение $D_x(1) = 0$, справедливо свойство $D_x(y) = \delta_{xy}$ для $y \in X$, где δ_{xy} — символ Кронекера, а также выполнен следующий аналог правила Лейбница

$$D_x(uv) = D_x(u) \cdot v + u \cdot D_x(v).$$

Сам Р. Фокс применил такое исчисление среди прочего к исследованию групп узлов, групповым когомологиям и многим другим задачам. Из недавних исследований отметим работу [75] в которой исчисление Фокса применяется для изучения квази Пуассоновых структур на представлениях поверхностей.

Операторное исчисление

Исследования рядов Лорана также указывают на еще один важный аспект приложения дифференцирований в алгебрах. В работе А. Н. Паршина [76] предложена следующая конструкция. Пусть d — дифференцирование некоторого кольца R. Тогда левый модуль формальных выражений $L = \sum\limits_{i \in \mathbf{Z}} a_i d^i$ можно понимать как аналог алгебры псевдодифференциальных операторов. Дальнейшее развитие логики исследования операторных алгебр приводит нас к теории Шура–Сато. Наиболее полное и современное исследование см. в работе А. Жеглова [77].

Отметим также, что сходные идеи описания псевдодифференциальных операторов как некоммутативных степенных рядов, в которых в качестве переменных подставляются операторы дифференцирования, были ранее предложены в [78]. В частности, изучался формализм т. н. μ-исчисления и соответствующих μ-алгебр.

Теория псевдодифференциальных операторов достаточно полно изложена в [79]. Одним из самых ярких результатов является теорема Атьи–Зингера представленная в работах [80, 81].

Исследование данной задачи связано с изучением операторных алгебр, которые порождаются дифференцированиями. Одним из возникающих вопросов является выяснение условий, при которых оператор нильпотентен. В одной из первых работ по данной теме [82] была исследована связь локальной нильпотентности внутреннего дифференцирования (т. е. того, что внутреннее дифференцирования обнуляется в некоторой степени) и нильпотентности резольвенты, т. е. элемента вида $(a - \lambda)$. Эти результаты были усилены в работах В. Харченко. В частности в [83] было показано, что все дифференцирования для простых колец нулевой характеристики внутренние. Это позволило (с учетом результатов из работы [82]) доказать, что все нильпотентные дифференцирования простых колец внутренние, и порождаются нильпотентными элементами. Такие результаты, характеризующие нильпотентные дифференцирования в дальнейшем многократно обобщались и усиливались.

Так, в работе [84] были получены обобщения для случая полупростых колец конечной характеристики. Более общие результаты были получены в работе [85], в которой были исследованы более общие варианты полупростых колец.

Важной вариацией данной задачи является случай локально нильпотентных дифференцирований, т. е. таких, что для каждого элемента кольца $a \in R$ найдется такое n, что $d^n(a) = 0$. Исследование таких операторов оказывается связанным со знаменитой проблемой якобиана (см. [86]) и 14-й проблемой Гильберта. Подробнее см. работы М. Нагато, который построил контрпример к 14-й проблеме Гильберта в [87], а также более подробный разбор контекста данной задачи в [88]. В [89] было получено описание локально нильпотентных дифференцирований для коммутативных редуцированных колец без $\mathbb{Z}$-кручения. Из последних результатов отметим [90], в которой исследуются ядра локально нильпотентных дифференцирований и исследуются их приложения.

Отметим проблему коммутации дифференцирований (*the Commuting Derivations Conjecture*), состоящую в предположении о том, что пересечение ядер коммутирующих линейно независимых локально нильпотентных дифференцирований изоморфно пространству полиномов $C[f]$, где f – координата. В случае пары дифференцирований данная проблема была частично решена С. Маубахом в [91]. Предложенное решение было обобщено на случай большего числа дифференцирований в [92].

Комбинаторный подход

В работах [93, 94] был предложен метод исследования дифференцирований в групповых алгебрах при помощи характеров на группоиде присоединенного действия. Было построено описание алгебры дифференцирований для нильпотентных групп ранга 2 и, в частности, для групп Гейзенберга. В дальнейшем эти результаты были развиты на случай полугрупповых алгебр (см. [95]). Было построено описание алгебры внешних дифференцирований в терминах 2-характеров на 2-группоиде и получено описание соответствующего комплекса для n-категорий.

Суть метода состоит в том, что дифференцирования отождествляются с локально финитными характерами на группоиде присоединенного действия Γ. То есть с функциями $\chi : Hom(\Gamma) \to \mathbb{C}$ такими, что сохраняется операция композиции $\chi(\psi \circ \varphi) = \chi(\psi) + \chi(\varphi)$. В таком случае оказывается справедливым следующее утверждение [95, теорема 1]. Имеется взаимнооднозначное соответствие между дифференцированиями в групповой алгебре и локально финитными характерами, причем справедлива формула

$$d(a) = a\left(\sum_{t \in G} \chi(at, a)\right), \quad a \in G \subset \mathbb{C}[G].$$

Оказывается, что помимо идеала внутренних дифференцирований, есть содержащий его идеал квазивнутренних дифференцирований. Это дифференцирования, которые в смысле последней формулы задаются характерами тривиальными на эндоморфизмах. Данная конструкция была предложена в [96, теорема 4.1].

Развитие этих результатов дало и лучшее понимание того, как устроены дифференцирования в банаховых бимодулях, а также получены результаты по нильпотентности. Интересно, что помимо связи с классами сопряженности (которая в целом ясна из строения комплекса Хохшильда, о котором говорилось выше) — возникла связь и с другими комбинаторными свойствами группы. В частности с числом концов.

Техника работы с характерами позволяет работать не только с алгебраическими задачами, но и с аналитическими. В частности упомянутую выше проблему Джонсона можно решить для чрезвычайно широкого класса бимодулей над групповыми кольцами: а именно, для замыкания группового кольца по норме, подчиненной супремумной. В частности такой будет естественная ℓ_p норма. В таком случае удается доказать, что все дифференцирования обязаны быть квазивнутренними. Соответствующие результаты получены в [97].

Данные результаты находятся в контексте изучения псевдодифференциальных операторов на евклидовых пространствах и вычисления их индекса, начатого в работах [98, 99] и развитого в [100]. Пользуясь идеями [76] и операторным методом, который был предложен в [78], возникает следующая конструкция для псевдодифференциальных операторов на групповой алгебре. Рассмотрим полиномы Лорана, в которых в качестве переменной подставляется оператор дифференцирования. Комбинаторный подход позволяет строить явные формулы для операторов дифференцирования, а также и для обратных к ним, что делает задачу построения символов таких операторов и вычисления обратных к ним (параметрикса) корректной и обозримой. С точки зрения дальнейшего развития возникает вопрос построения теории эллиптических операторов, а также вычисления индекса для таких операторов.

References

[1] M. Nagumo, “Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen”, *Japan J. Math.*, **13** (1936), 61–80.

[2] I. Gelfand, “Normierte Ringe”, *Матем. сб.*, **9(51)**:1 (1941), 3–24.

[3] I. Gelfand, M. Neumark, “On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space”, *Матем. сб.*, **12(54)**:2 (1943), 197–217.

[4] I. Kaplansky, “Modules over operator algebras”, *Amer. J. Math.*, **75**:4 (1953), 839–858.

[5] I. Kaplansky, “Projections in banach algebras”, *Annals of Mathematics*, **53**:2 (1950), 235–249.

[6] S. Sakai, “On a conjecture of Kaplansky”, *Tohoku Math. J.*, **12**:2 (1960), 31–33.

[7] S. Sakai, “Derivations of W^*-algebras”, *Annals of Mathematics*, **83**:2 (1966), 273–279.

[8] S. Sakai, “Derivations of simple C^*-algebras”, *J. Functional Analysis*, **2**:2 (1968), 202–206.

[9] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1998.

[10] C. A. Akemann, G. A. Elliott, G. K. Pedersen, J. Tomiyama, “Derivations and multipliers of C^*-algebras”, *Amer. J. Math.*, **98**:3 (1976), 679–708.

[11] C. A. Akemann, G. K. Pedersen, “Central sequences and inner derivations of separable C^*-algebras”, *Amer. J. Math.*, **101** (1979), 1047–1061.

[12] B. E. Johnson, A. M. Sinclair, “Continuity of derivations and a problem of Kaplansky”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1067–1073.

[13] G. A. Elliott, “Some C^*-algebras with outer derivations, III”, *Annals of Mathematics*, **106** (1977), 121–143.

[14] *C^*-Algebras and Their Automorphism Groups*. V. 14, ed. G. K. Pedersen, Academic Press, 1979.

[15] I. Kaplansky, “Derivations of Banach Algebras”, *Seminars on Analytic Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.: Seminar V. Analytic functions as related to Banach algebras*, **II**, 1958, 254–258.

[16] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1991.

[17] R. V. Kadison, “Derivations of operator algebras”, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 280–293.

[18] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, “Derivations of operator group algebras”, *Amer. J. Math.*, **88**:3 (1966), 562–576.

[19] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, “Derivations and automorphisms of operator algebras”, *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 32–63.

[20] B. E. Johnson, J. R. Ringrose, “Derivations of operator algebras and discrete group algebras”, *Bull. London Math. Soc.*, **1** (1969), 70–74.

[21] B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Mamoirs of the American Mathematical Society, **127**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 1972.

[22] H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity*, London Mathematical Society Monographs, **24**, Oxford University Press, New York, 2000, 928 pp.

[23] B. E. Johnson, “The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups”, *Journal of the London Mathematical Society*, **63**:2 (2001), 441–452.

[24] V. Losert, “The derivation problem for group algebras”, *Annals of Mathematics*, **168**:1 (2008), 221–246.

[25] B. E. Johnson, S. Parrott, “Operators commuting with a von Neumann algebras modulo the set of compact operators”, *Journal of Functional Analysis*, **11** (1972), 39–61.

[26] S. Popa, “The commutant modulo the set of compact operators of a von Neumann algebra”, *Journal of Functional Analysis*, **71** (1987), 393–408.

[27] A. Ber, J. Huang, G. Letvina, F. Sukochev, “Derivations with values in ideals of semifinite von Neumann algebras”, *Journal of Functional Analysis*, **272**:12 (2017), 4984–4997.

[28] J. Huang, *Derivations with values into ideals of a semifinite von Neumann algebra*, Australia’s Global University, School of Mathematics and Statistics Faculty of Science, 2019, http://hdl.handle.net/1959.4/63344.

[29] A. Ber, J. Huang, K. Kudaybergenov, F. Sukochev, “Non-existence of translation-invariant derivations on algebras of measurable functions”, *Quaestiones Mathematicae*, **45**:10 (2022).

[30] A. Ya. Helemskii, *The Homology of Banach and Topological Algebras*, Mathematics and its Applications, **41**, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1989.

[31] A. Ya. Helemskii, *Banach and Locally Convex Algebras*, Oxford Mathematical Monographs, Claredon Press, 1993.

[32] G. Hochschild, “On the cohomology groups of an associative algebra”, *Annals of Mathematics*, **46**:1 (1945), 58–67.

[33] G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg, “Differential forms on regular affine algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc*, **102**:3 (1962), 383–408.

[34] S. Witherspoon, *An Introduction to Hochschild Cohomology*, Texas AM University, 2017.

[35] D. Burghelea, “The cyclic homology of the group rings”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **60** (1985), 354–365.

[36] A. S. Mischenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology”, 2020, `http://arxiv.org/abs/1811.02439`.

[37] A. S. Mischenko, “Geometric description of the Hochschild Cohomology of group algebras”, *Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial*, Contemporary Mathematics, **772**, AMS, Providence, R.I., etc., United States, 2021, 267–279.

[38] A. S. Mischenko, “Description of outer derivations of the group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2020), 107013.

[39] M. Lorentz, R. Willett, “Bounded derivations on uniform Roe algebras”, *Rocky Mountain J. Math.*, **50** (2020), 1747–1758.

[40] V. Manuilov, “On Hochschild homology of uniform Roe algebras with coefficients in uniform Roe bimodules”, `https://arxiv.org/abs/2201.06488`.

[41] M. K. Smith, “Derivations of group algebras of finitely-generated, torsion-free, nilpotent groups”, *Houston J. Math.*, **4** (1978), 277–288.

[42] E. Spiegel, “Derivations of integral group rings”, *Communications in Algebra*, **22**:8 (1994), 2955–2959.

[43] D. Boucher, D. Ulmer, “Linear codes using skew polynomials with automorphisms and derivations”, *Des. Codes Cryptogr.*, **70** (2014), 405–431.

[44] L. Creedon, K. Hughes, “Derivations on group algebras with coding theory applications”, *Finite Fields and Their Applications*, **56** (2019), 247–265.

[45] O. D. Artemovych, V. A. Bovdi, M. A. Salim, “Derivations of group rings”, 2020, `https://arxiv.org/abs/2003.01346`.

[46] Y. Rao, S. Kosari, A. Khan, N. Abbasizadeh, "A Study on special kinds of derivations in ordered hyperrings", *Symmetry*, **14** (2022), 2205.

[47] D. Chaudhuri, "(σ,τ)-derivations of group rings", *Comm. Algebra*, **47**:9 (2019), 3800–3807.

[48] O. Ore, "Theory of non-commutative polynomials", *Ann. Math.*, **34** (1933), 480–508.

[49] V.K. Kharchenko, *Automorphisms and Derivations of Associative Rings*, Mathematics and its Applications, **69**, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam, 1991.

[50] F.A. Berezin, *Introduction to Algebra and Analysis with Anticommuting Variables*, Moscow University Press, Moscow, 1983.

[51] L.A. Bokut, I.V. Lvov, V.K. Kharchenko, "Noncommutative Rings", *Algebra – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **18**, VINITI, Moscow, 1988, 5–116.

[52] P.M. Cohn, *Difference Algebra*, Interscience Publ., New York, 1965.

[53] P.M. Cohn, *Skew Fields Constructions*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.

[54] K.R. Goodearl, R.B. Warfield, Jr, *An Introduction to Non-Commutative Noetherian Rings*, London Mathematical Society Student Texts, **16**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[55] D.A. Jordan, "Iterated skew polynomial rings and quantum groups", *Journal of Algebra*, **156** (1993), 194–218.

[56] V. Kac, P. Cheung, *Quantum Calculus*, Universitext (UTX), Springer, New York, 2002.

[57] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**, 1st ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[58] T.Y. Lam, A. Leroy, "Algebraic conjugacy classes and skew polynomial rings", *Perspectives in Ring Theory*, NATO ASI Series, **233**, eds. F. van Oystaeyen, L. Le Bruyn, Springer, Dordrecht, 1988, 153-203.

[59] J.T. Hartwig, D. Larsson, S.D. Silvestrov, "Deformations of Lie algebras using σ-derivations", *Journal of Algebra*, **295**:2 (2006), 314–361.

[60] D. Larsson, S.D. Silvestrov, "Quasi-deformations of $sl_2(\mathbb{F})$ using twisted derivations", *Comm. Algebra*, **35**:12 (2007), 4303–4318.

[61] Yu.I. Manin, *Topics in Non-Commutative Geometry*, Porter Lectures, Princeton University Press, 1991.

[62] L.R. Rosenberg, *Noncommutative Algebraic Geometry and Representations of Quantized Algebras*, Mathematics and Its Applications, **330**, Springer, Dordrecht, 1995.

[63] J.C. McConnell, J.C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Graduate Studies in Mathematics, **30**, Amer. Math. Society, Providence, Rhode Island, 1987.

[64] Heide Gluesing-Luerssen, "Skew-Polynomial Rings and Skew-Cyclic Codes", 2019, https://arxiv.org/abs/1902.03516.

[65] D. Larsson, S.D. Silvestrov, "Quasi-hom-Lie algebras, central extensions and 2-cocycle-like identities", *Journal of Algebra*, **288**:2 (2005), 321–344.

[66] O. Elchinger, K. Lundengard, A. Makhlouf, S.D. Silvestrov, "Brackets with (τ,σ)-derivations and (p,q)-deformations of Witt and Virasoro algebras", *Forum Math.*, **28**:4 (2016), 657–673.

[67] G. Song, C. Xia, "Simple deformed Witt algebras", *Algebra Colloquium*, **18**:3 (2011), 533–540.

[68] G. Song, Y. Wu, B. Xin, "The σ-derivations of $C[x^{\pm1},y^{\pm1}]$", *Algebra Colloquium*, **22**:2 (2015), 251–258.

[69] E. Gordji, "A characterization of (σ,τ)-derivations on von Neumann algebras", *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*, **73** (2009).

[70] R.H. Fox, "Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring", *The Annals of Mathematics*, **57**:3 (1953), 547–560.

[71] R.H. Fox, "Free differential calculus. II: The isomorphism problem of groups", *The Annals of Mathematics*, **59**:2 (1954), 196–210.

[72] R.H. Fox, "Free differential calculus III. Subgroups", *The Annals of Mathematics*, **64**:3 (1956), 407–419.

[73] K.T. Chen, R.H. Fox, R.C. Lyndon, "Free differential calculus IV. The quotient groups of the lower central series", *The Annals of Mathematics*, **68**:1 (1958), 81–95.

[74] R. H. Fox, “Free differential calculus V. The Alexander matrices re-examined”, *The Annals of Mathematics*, **71**:3 (1960), 408–422.

[75] G. Massuyeau, V. Turaev, “Quasi-Poisson structures on representation spaces of surfaces”, 2012, https://arxiv.org/abs/1205.4898.

[76] А. Н. Паршин, “О кольце формальных псевдодифференциальных операторов”, *Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения*, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **224**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 1999, 291–305; англ. пер.:A. N. Parshin, “On a ring of formal pseudodifferential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **224** (1999), 266–280.

[77] A. Zheglov, “Schur-Sato theory for quasi-elliptic rings”, 2022, https://arxiv.org/abs/2205.06790.

[78] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973. [V. P. Maslov, *Operator Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russian)].

[79] М. А. Шубин, *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория*, Добросвет, Москва. [M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Dobrosvet Publ., Moscow (In Russian)].

[80] M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators on compact manifolds”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69**:3 (1963), 422–433.

[81] M. F. Atiyah, I. M. Singer, “The index of elliptic operators I”, *Annals of Mathematics*, **87**:3 (1968), 484–530.

[82] I. N. Herstein, “Sui commutatori degli anelli semplici”, *Seminario Mat. e. Fis. di Milano*, **33** (1963), 80–86.

[83] V. K. Kharchenko, “Differential identities of prime rings”, *Algebra and Logic*, **17** (1978), 155–168.

[84] P. Grzeszczuk, “On nilpotent derivations of semiprime rings”, *Journal of Algebra*, **149** (1992), 313–321.

[85] C. Chen-Lian, L. Tsiu-Kwen, “Nilpotent derivations”, *Journal of Algebra*, **287**:2 (2005), 381–401.

[86] D. Wright, “On the Jacobian Conjecture”, *Illinois J. Math*, **25** (1981), 423–440.

[87] M. Nagata, “On the fourteenth problem of Hilbert”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Cambridge University Press., Edinburgh, 1958, 459–462.

[88] M. Nagata, *Lectures on the fourteenth problem of Hilbert*, **31**, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, Bombai, 1965, 65 pp.

[89] M. Ferrero, Y. Lequain, A. Nowicki, “A note on locally nilpotent derivations”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **79** (1992), 45–50.

[90] D. Daigle, “Locally nilpotent derivations and the structure of rings”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **224**:4 (2020), 106–201.

[91] S. Maubach, “The commuting derivations conjecture”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **179**:1–2 (2003), 159–168.

[92] Jiantao Li, Xiankun Du, “Pairwise commuting derivations of polynomial rings”, *Linear Algebra and its Applications*, **436**:7, 2375–2379.

[93] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, А. И. Штерн, “Деривации групповых алгебр”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:6 (2016), 65–78; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, A. I. Shtern, “Derivations of group algebras”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248** (2020), 709–718.

[94] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр”, *Матем. сб.*, **210**:6 (2019), 3–29; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras”, *Sb. Math.*, **210**:6 (2019), 756–782.

[95] А. А. Арутюнов, “Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Труды МИАН, **308**, МИАН, М., 2020, 28–41; англ. пер.:A. A. Arutyunov, “Derivation algebra in noncommutative group algebras”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308** (2020), 22–34.

[96] A. A. Arutyunov, A. V. Alekseev, “Cohomology of n-categories and derivations in group algebras”, *Topology and its Applications*, **275** (2019).

[97] A. Arutyunov, “A combinatorial view on derivations in bimodules”, 2022, https://arxiv.org/abs/2208.05478.

[98] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция исчисления псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к исчислению на компактном многообразии удвоенной размерности”, *Матем. заметки*, **94**:4 (2013), 488–505; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “Reduction of the calculus of pseudodifferential operators on a noncompact manifold to the calculus on a compact manifold of doubled dimension”, *Math. Notes*, **94**:4 (2013), 455–469.

[99] А. А. Арутюнов, А. С. Мищенко, “Редукция ПДО исчисления на некомпактном многообразии к компактному многообразию удвоенной размерности”, *Доклад. РАН*, **451**:4 (2013), 369–373; англ. пер.:A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, “Reduction of PDO calculus on a noncompact manifold to a double-dimensional compact manifold”, *Doklady Mathematics*, **88**:1 (2013), 427–430.

[100] А. А. Арутюнов, “Редукция нелокальных псевдодифференциальных операторов на некомпактном многообразии к классическим псевдодифференциальным операторам на компактном многообразии удвоенной размерности”, *Матем. заметки*, **97**:4 (2015), 493–502; англ. пер.:A. A. Arutyunov, “Reduction of nonlocal pseudodifferential operators on a noncompact manifold to classical pseudodifferential operators on a double-dimensional compact manifold”, *Math. Notes*, **97**:4 (2015), 502–509.

Информация об авторе

Арутюнов Андроник Арамович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва; доцент кафедры высшей математики. Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Поступила в редакцию 02.09.2022 г.
Поступила после рецензирования 09.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Andronick A. Arutyunov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Reg., Russian Federation. E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6878-0993

Received 02.09.2022
Reviewed 09.11.2022
Accepted for press 24.11.2022

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327
УДК 51-76, 517.988

О существовании и устойчивости решений типа «кольцо» уравнений нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации Хевисайда

Рашид АТМАНИЯ[1] **, Евгений Олегович БУРЛАКОВ**[1,2] **,**
Иван Николаевич МАЛЬКОВ[1]
[1] ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В работе изучены существование и устойчивость решений типа «кольцо» двумерного уравнения нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации типа Хевисайда. Получены результаты, отражающие зависимость внутреннего и внешнего радиусов колец от порога активации нейронной среды и степени ее неоднородности. Сформулированы необходимое условие существования и достаточное условие отсутствия радиально распространяющихся из эпицентра бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при слабо выраженной микроструктуре нейронной среды. Результаты исследования проиллюстрированы примером, основанном на выборе одной из типично используемых в математической нейробиологии функций межнейронной связи.

Ключевые слова: математическая нейробиология, уравнения нейронных полей с микроструктурой, двумерное уравнение нейронного поля, решение типа «кольцо», существование решений, устойчивость решений, радиальные бегущие волны

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00756).

Для цитирования: *Атмания Р., Бурлаков Е.О., Мальков И.Н.* О существовании и устойчивости решений типа «кольцо» уравнений нейронного поля Амари с периодической микроструктурой и функцией активации Хевисайда // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 318–327. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327

On existence and stability of ring solutions to Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function

Rachid ATMANIA[1] , **Evgenii O. BURLAKOV**[1,2] , **Ivan N. MALKOV**[1]
[1] Tyumen State University
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In the present research, existence and stability of ring solutions to two-dimensional Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function are studied. Results on dependence of the inner and the outer radii of the ring solutions are obtained. Necessary conditions for existence and sufficient conditions for non-existence of radial travelling waves are formulated for homogeneous neural medium and neural media with mild periodic microstructure. Theoretical results obtained are illustrated with a concrete example based on a connectivity function commonly used in the neuroscience community.

Keywords: mathematical neuroscience, neural field models with microstructure, two-dimensional neural field equation, ring solution, existence of solutions, stability of solutions, radial travelling waves

Acknowledgements: The work supported by the Russian Science Foundation (project no 22-21-00756).

Mathematics Subject Classification: 92B99, 35B27, 35B35.

For citation: Atmania R., Burlakov E.O., Malkov I.N. O sushchestvovanii i ustoychivosti resheniy tipa «kol'tso» uravneniy neyronnogo polya Amari s periodicheskoy mikrostrukturoy i funktsiyey aktivatsii Khevisayda [On existence and stability of ring solutions to Amari neural field equation with periodic microstructure and Heaviside activation function]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 318–327. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-318-327. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследование стационарных решений уравнений нейронных полей широко представлены в работах в области математической нейробиологии (см., например, обзоры [1, 2]). Наибольшее внимание уделяется стационарным пространственно локализованным решениям одномерных моделей нейронного поля. В работе [3] были впервые получены условия существования стационарных пространственно локализованных симметричных решений одномерной версии наиболее известной модели нейронного поля Амари — так называемых «бампов». При этом предполагалось, что активация нейронной среды описывается функцией Хевисайда, т. е. переход нейронов из состояния покоя в состояние активности и обратно происходит мгновенно. В последующих исследованиях были изучены устойчивость (одиночных) «бампов» [4], существование и устойчивость двойных симметричных «бампов» [5], а также периодических решений одномерного уравнения Амари [6]. Для двумерного уравнения Амари существование и устойчивость радиально симметричных «бампов» и «колец» изучены в работах [7] и [8], соответственно.

В работе [9] предложена модификация классического уравнения Амари, учитывающая наличие периодической микроструктуры нейронной среды, в форме усредненного уравнения нейронного поля, содержащего локальную переменную микроструктуры. Существование и устойчивость одиночных и двойных симметричных «бампов», не зависящих от переменной микроструктуры, в рамках одномерной усредненной модели Амари исследованы в работах [9] и [10], соответственно. Условия существования и устойчивости радиально симметричных решений-бампов двумерного усредненного уравнения Амари получены в [11]. Цель настоящей работы состоит в изучении существования и устойчивости стационарных не зависящих от переменной микроструктуры решений типа «кольцо» двумерного уравнения Амари с периодической микроструктурой и функцией активации типа Хевисайда [11]:

$$\partial_t u(t,x,x_f) = -u(t,x,x_f) + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathcal{Y}} \omega(|x-y|, x_f - y_f, \gamma) H(u(t,x_f,y_f))dy_f dy, \tag{0.1}$$

где t — переменная времени, $x \in \mathbb{R}^2$ — глобальная пространственная переменная, x_f — локальная переменная, заданная на единичном двумерном торе $\mathcal{Y}$; величина $u(t,x,x_f)$ отвечает значению трансмембранного потенциала, функции H и ω определяют состояние покоя/активности нейрона и силу связи между нейронами (с учетом микроструктуры, формализуемой параметром неоднородности $\gamma \in \Gamma$, где $\Gamma \ni 0$ — некоторое множество допустимых значений параметра микроструктуры), соответственно.

1. Основные результаты

Приведем стандартные предположения относительно содержащихся в уравнении (0.1) функций (см., например, работы [9, 10, 11], [12]). Относительно функции ω, формализующей силу связи между нейронами в зависимости от их позиций в нейронной среде с микроструктурой, предполагаются непрерывность и суммируемость на неотрицательной полуоси по первому аргументу, непрерывность на элементе $\mathcal{Y}$ микроструктуры по второму аргументу и непрерывность в нуле по третьему аргументу при каждом значении первого аргумента, равностепенная относительно второго аргумента. Функция активации нейронов H, определяющая переход между состояниями покоя/активности нейронов, представляет собой функцию Хевисайда с положительным пороговым значением h.

В работе [12] было дано следующее определено решения типа «бамп» усредненного уравнения нейронного поля (0.1).

Определение 1.1. Зафиксируем $h > 0$, $a > 0$, $\gamma \in \Gamma$. *Решением типа «бамп»* (бампом, решением-бампом) радиуса a уравнения (0.1) нейронного поля с уровнем неоднородности γ и порогом активации нейронов h назовем непрерывную функцию u_a, удовлетворяющую уравнению (0.1) и обладающую следующими свойствами:

- $u_a(t,x,x_f) \equiv U_a(r)$, $t>0$, $x\in\mathbb{R}^2$, $x = r\exp(i\alpha)$, $x=(r,\alpha)$, $r\geq 0$, $\alpha\in[0,2\pi)$, $x_f \in \mathcal{Y}$;
- $U_a(r) = h$ при $r = a$;
- $U_a(r) > h$ для всех $x < a$ и $U_a(x) < h$ при всех $x > a$.

Авторами [11] получено следующее необходимое условие существования бампа радиуса $a > 0$ в нейронном поле, формализуемом уравнением (0.1):

$$U_a(a) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \widehat{\langle\omega\rangle}(|a-y|,\gamma)\rho d\rho d\theta = h,$$

где $\langle\omega\rangle$ — среднее значение функции связи ω по второму аргументу на периоде $\mathcal{Y}$, $\widehat{\langle\omega\rangle}(\cdot,\gamma)$ — преобразование Ханкеля функции $\langle\omega\rangle(\cdot,\gamma)$ при каждом $\gamma\in\Gamma$.

При этом само решение-бамп имеет вид

$$U_a(r) = 2\pi a\int\limits_0^{\infty}\langle\widehat{\omega}\rangle(\rho,\gamma)J_0(r\rho)J_1(a\rho)d\rho,$$

где J_k — функции Бесселя первого рода порядка k ($k = 0,1$).

Решение типа «кольцо» (решение-кольцо, кольцевое решение) $W_{a,b}$ внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) нейронного поля с уровнем неоднородности γ и порогом активации нейронов h будем определять как разность двух бампов радиусов b и a ($a<b$):

$$W_{a,b}(r) = U_b(r) - U_a(r).$$

Необходимые условия существования кольцевого решения $W_{a,b}$ внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a уравнения (0.1) естественным образом записываются в виде $W_{a,b}(a) = W_{a,b}(b) = h$, при этом само решение-кольцо имеет вид

$$W_{a,b}(r) = 2\pi\int_0^{\infty}\widehat{\langle\omega\rangle}(\rho,\gamma)J_0(r\rho)\Big(bJ_1(b\rho) - aJ_1(a\rho)\Big)d\rho.$$

Следуя идеям работ [10] и [13], исследуем устойчивость стационарного решения $W_{a,b}$ в первом приближении. Линеаризация (0.1) в окрестности $W_{a,b}$ имеет вид

$$\partial_t v(t,x,x_f) = -v(t,x,x_f) + \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathcal{Y}}\omega(|x-y|,x_f-y_f,\gamma)H'(W_{a,b}(r'))v(t,x_f,y_f)dy_f dy.$$

Представляя возмущение в виде $v(t,x,x_f) = \varphi(x,x_f)\exp(\lambda t)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, получаем

$$(1+\lambda)\varphi(x,x_f) = \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathcal{Y}}\omega(|x-y|,x_f-y_f,\gamma)H'(W_{a,b}(r'))\varphi(x_f,y_f)dy_f dy. \tag{1.1}$$

Здесь λ определяет скорость роста/убывания возмущения $v(t,x,x_f)$ стационарного решения типа «кольцо» $W_{a,b}(x)$.

Далее, используя формальное выражение для производной функции Хевисайда

$$H'(W_{a,b}(r))=\delta(W_{a,b}(r))=\frac{\delta(r-a)}{|W'_{a,b}(a)|}+\frac{\delta(r-b)}{|W'_{a,b}(b)|},$$

где δ — дельта-функция Дирака, мы получаем следующий результат

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}\omega(|x-y|,x_f-y_f,\gamma)H'(W_{a,b}(r_f))\varphi(x_f,y_f)dy\\&=\frac{a}{|W'_{a,b}(a)|}\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\theta-\theta_f)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi(a,\theta_f,y_f)d\theta_f\\&+\frac{b}{|W'_{a,b}(b)|}\int_0^{2\pi}\omega\left(\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos(\theta-\theta_f)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi(b,\theta_f,y_f)d\theta_f.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}&(1+\lambda)\varphi(r,\theta,x_f)\\&=\frac{a}{|W'_{a,b}(a)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos(\theta-\theta_f)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi(a,\theta_f,y_f)dy_fd\theta_f\\&+\frac{b}{|W'_{a,b}(b)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos(\theta-\theta_f)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi(b,\theta_f,y_f)dy_fd\theta_f.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Следуя идеям работ [8, 10], положим в (1.2) $r=a$, $r=b$, $\varphi(r,\theta,x_f)=\varphi_l(r,x_f)\exp(il\theta)$, $l\in\mathbb{Z}$, получая следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}&(1+\lambda)\varphi_l(a,x_f)\\&=\frac{a}{|W'_{a,b}(a)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{2a^2-2a^2\cos(\phi)},x_f-y_f,\gamma)\right)\varphi_l(a,y_f)\cos(l\phi)dy_fd\phi,\\&+\frac{b}{|W'_{a,b}(b)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{a^2+b^2-2ba\cos(\phi)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi_l(b,y_f)\cos(l\phi)dy_fd\phi,\\&(1+\lambda)\varphi_l(b,x_f)\\&=\frac{a}{|W'_{a,b}(a)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{b^2+a^2-2ba\cos(\phi)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi_l(a,y_f)\cos(l\phi)dy_fd\phi,\\&+\frac{b}{|W'_{a,b}(b)|}\int_0^{2\pi}\int_{\mathcal{Y}}\omega\left(\sqrt{2b^2-2b^2\cos(\phi)},x_f-y_f,\gamma\right)\varphi_l(b,y_f)\cos(l\phi)dy_fd\phi,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где a и b ($a<b$) удовлетворяют уравнению $W_{a,b}(a,x_f)=W_{a,b}(b,x_f)=h$. Система уравнений (1.3) может быть представлена в виде задачи отыскания собственных значений μ^γ

$$\mu^\gamma\Phi_l=\mathcal{W}_l^\gamma\Phi_l,$$

$$\Phi_l(x_f)=\begin{pmatrix}\varphi_l(a,x_f)\\\varphi_l(b,x_f)\end{pmatrix},$$

$$\mu^\gamma=\mu^\gamma(x_f)=(\lambda^\gamma(x_f)+1)|W'_{a,b}(a)||W'_{a,b}(b)|$$

оператора $\mathcal{W}_l^\gamma$, заданного в пространстве квадратично суммируемых функций и определяемого равенством

$$\mathcal{W}_l^\gamma(x_f)=\begin{pmatrix}(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{11}&(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{12}\\ \\(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{21}&(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{22}\end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{11} = a|W'_{a,b}(b)| \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \cos(l\phi) dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{12} = b|W'_{a,b}(a)| \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ba\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \cos(l\phi) dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{21} = a|W'_{a,b}(b)| \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{b^2 + a^2 - 2ba\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \cos(l\phi) dy_f d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^\gamma(x_f))_{22} = b|W'_{a,b}(a)| \int_0^{2\pi} \int_{\mathcal{Y}} \omega\left(\sqrt{2b^2 - 2b^2\cos(\phi)}, x_f - y_f, \gamma\right) \cos(l\phi) dy_f d\phi.$$

Отметим, что при каждом γ, в силу свойств функции ω, оператор $\mathcal{W}_l^\gamma$ является компактным линейным оператором, не обладающим свойством самосопряженности, дискретный спектр которого имеет точку сгущения в начале координат. Принимая во внимание вышеупомянутые предположения о непрерывности функции ω по переменной γ, получаем $\mathcal{W}_l^\gamma(x_f) \to \mathcal{W}_l^0$ при $\gamma \to 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^2$ равностепенно относительно $x_f \in \mathcal{Y}$, где $\mathcal{W}_l^0$ имеет вид

$$\mathcal{W}_l^0 = \mathfrak{M}_{\mathcal{Y}} \begin{pmatrix} (\mathcal{W}_l^0)_{11} & (\mathcal{W}_l^0)_{12} \\ & \\ (\mathcal{W}_l^0)_{21} & (\mathcal{W}_l^0)_{22} \end{pmatrix},$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{11} = a|W'_{a,b}(b)| \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{2a^2 - 2a^2\cos(\phi)}, 0, 0\right) \cos(l\phi) d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{12} = b|W'_{a,b}(a)| \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ba\cos(\phi)}, 0, 0\right) \cos(l\phi) d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{21} = a|W'_{a,b}(b)| \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{b^2 + a^2 - 2ba\cos(\phi)}, 0, 0\right) \cos(l\phi) d\phi,$$

$$(\mathcal{W}_l^0)_{22} = b|W'_{a,b}(a)| \int_0^{2\pi} \omega\left(\sqrt{2b^2 - 2b^2\cos(\phi)}, 0, 0\right) \cos(l\phi) d\phi,$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{Y}} = \int_{\mathcal{Y}} 1 dy_f.$$

Таким образом, при $\gamma \to 0$ собственные числа $\mu_l^\gamma(x_f)$ и скорости роста/убывания $\lambda_l^\gamma(x_f)$ сходятся равномерно относительно $x_f \in \mathcal{Y}$ к μ_l^0 и λ_l^0, соответственно.

Собственные числа $\mu_l^{0,\pm}$ скорость роста/убывания $\lambda_l^{0,\pm}$, определяются равенствами

$$\mu_l^{0,\pm} = \mathfrak{M}_{\mathcal{Y}} \frac{\operatorname{tr}(\mathcal{W}_l^0) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(\mathcal{W}_l^0))^2 - 4\det(\mathcal{W}_l^0)}}{2}, \qquad \lambda_l^{0,\pm} = \frac{\mu_l^{0,\pm}}{|W'_{a,b}(b)||W'_{a,b}(a)|} - 1$$

Значения $\lambda_l^{0,\pm}$ могут быть использованы в задаче исследования радиальных бегущих волн в коре головного мозга, практическая возможность моделировать которые при помощи уравнений нейронного поля была показана в недавней работе [14] с использованием экспериментальных данных МЭГ. Для заданной функции межнейронной связи ω область допустимых значений переменной порога активации нейронов $h > 0$ включает две подобласти, на первой из которых выполнено неравенство $\max\limits_{l\in\mathbb{Z}}\{\operatorname{Re}(\lambda_l^{0,+}), \operatorname{Re}(\lambda_l^{0,-})\} < 0$, а на второй — $\max\limits_{l\in\mathbb{Z}}\{\operatorname{Re}(\lambda_l^{0,+}), \operatorname{Re}(\lambda_l^{0,-})\} > 0$. В первой подобласти выполнено достаточное условие отсутствия радиально распространяющихся из эпицентра бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при достаточно слабо выраженной микроструктуре нейронной среды. Во второй подобласти, соответственно, выполнено необходимое условие существования радиально распространяющихся бегущих волн, как в однородной нейронной среде, так и при достаточно слабо выраженной микроструктуре нейронной среды.

Проиллюстрируем полученные в работе результаты при помощи одной из стандартно используемых функций связи ω (см., например, [7, 8, 9, 10, 11]):

$$\omega(x, x_f, \gamma) = \frac{1}{\sigma(x_f)}\chi\left(\frac{x}{\sigma(x_f)}\right), x_f = (x_{f1}, x_{f2})$$

$$\sigma(x_f, \gamma) = 1 + \gamma\cos(x_{f1})\cos(x_{f2}),$$

$$\chi = \frac{1}{2\pi}(\exp(-|x|) - \frac{1}{4}\exp(-\frac{|x|}{2})),$$

где $\mathcal{Y}$ – двумерный единичный тор, $\Gamma = [0, 1]$.

При значениях порога активации $h \in (0.1086, 0.11)$ имеет место сосуществование двух кольцевых решений – «узкого» и «широкого», а при $h = 0.11$ происходит слияние этих решений. На рисунке 1 показаны области существования кольцевых решений в зависимости от значений параметра неоднородности γ и порога активации h для «узкого» и «широкого» колец.

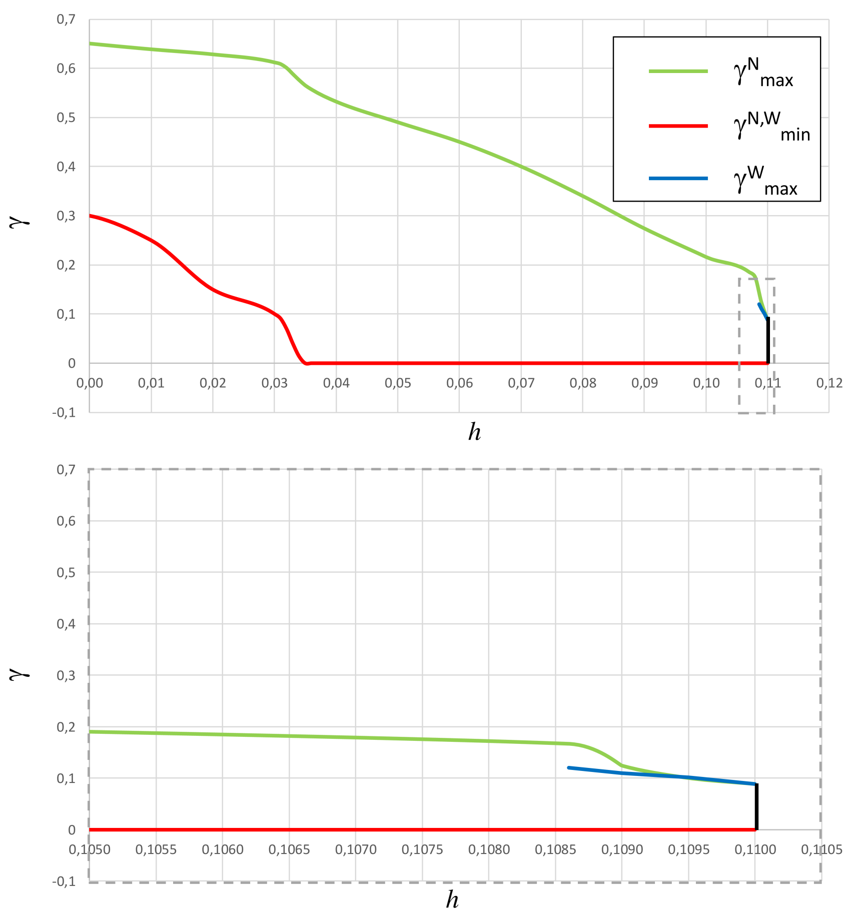


Рис. 1. Области существования кольцевых решений в зависимости от значений параметра неоднородности γ и порога активации h для «узкого» (область, заключенная между зеленой и красной линиями) и «широкого» (область, заключенная между синей и красной линиями) колец.

На рисунке 2 продемонстрирована зависимость внешнего и внутреннего радиусов «узкого» (обозначенных через b_N и a_N, соответственно) и «широкого» (обозначенных через b_W и a_W, соответственно) решений-колец от параметра неоднородности γ и порога активации h. Черными линиями на рисунках 1 и 2 обозначены множества слияния «узкого» и «широкого» решений-колец.

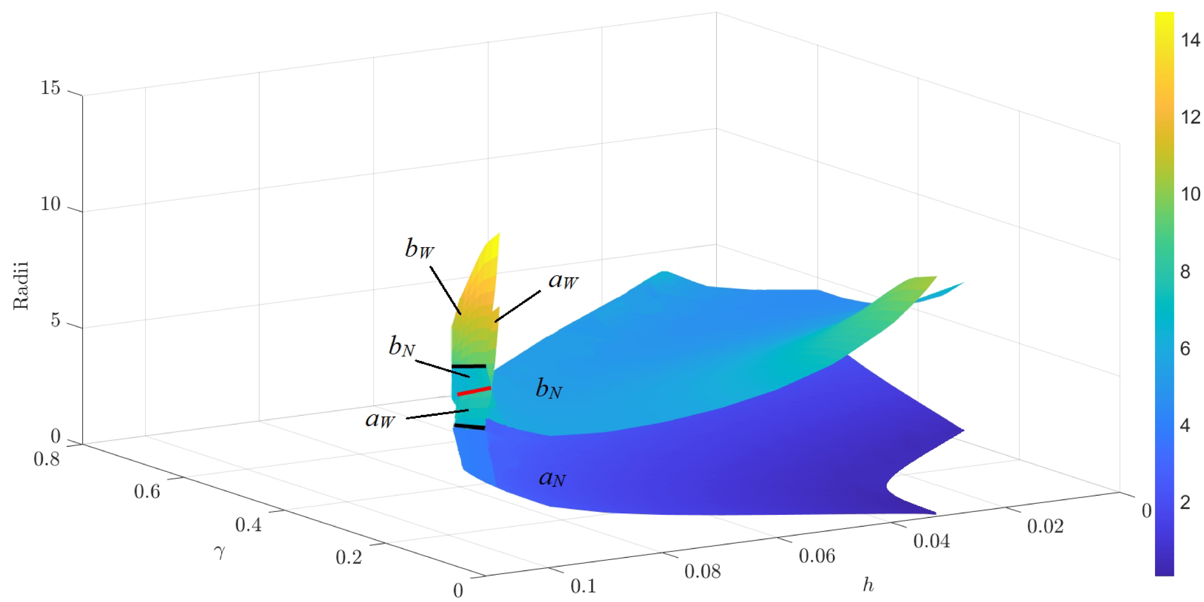


Рис. 2. Зависимость внешнего (b) и внутреннего (a) радиусов кольцевого решения от параметра неоднородности γ и порога активации h. Индексы W и N обозначают «широкую» и «узкую» ветви кольцевого решения, соответственно. Черными линиями обозначены множества слияния «узкого» и «широкого» колец. Красная линия обозначает множество общих точек внутреннего радиуса «широкого» кольца (a_W) с внешним радиусом «узкого» кольца (b_N).

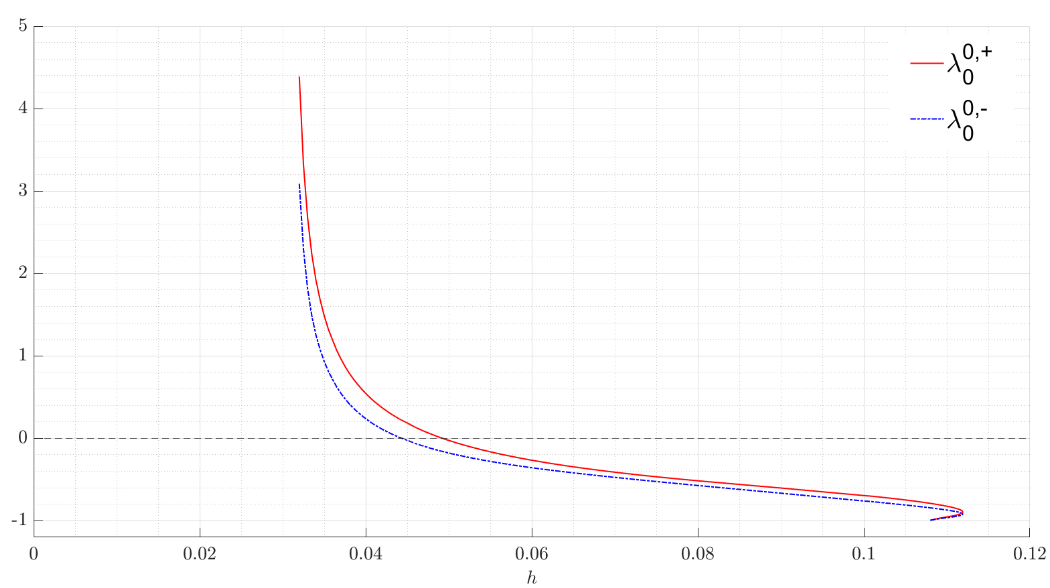


Рис. 3. Зависимость скоростей роста/убывания $\lambda_0^{0,\pm}$ возмущений решений-колец от порога активации h.

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость значений скорости роста/убывания $\lambda_0^{0,\pm}$ возмущений решений-колец от порога активации h. Таким образом, «узкое» кольцо неустойчиво при $h \in (0, 0.0493)$, следовательно для порогов активации из указанного интервала выполнено необходимое условие радиального распространения из эпицентра бегущих волн.

References

[1] P. Bressloff, "Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2011), 033001.

[2] E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, "On continuous and discontinuous models of neural fields", *Journal of Mathematical Sciences*, **259**:3 (2021), 272–282.

[3] S. Amari, "Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields", *Biological Cybernetics*, **27** (1977), 77–87.

[4] S. Kishimoto, S. Amari, "Existence and stability of local excitations in homogeneous neural fields", *Journal of Mathematical Biology*, **7** (1979), 303–318.

[5] C. R. Laing, W. C. Troy, "Two-bump solutions of Amari-type models of neuronal pattern formation", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **178** (2003), 190–218.

[6] K. Kolodina, V. V. Kostrykin, A. Oleynik, "Existence and stability of periodic solutions in a neural field equation", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 271–295.

[7] S. Coombes, "Waves, bumps, and patterns in neural field theories", *Biological Cybernetics*, **93** (2005), 91–108.

[8] M. R. Owen, C. R. Laing, S. Coombes, "Bumps and rings in a two-dimensional neural field: splitting and rotational instabilities", *New Journal of Physics*, **9** (2007), 378.

[9] N. Svanstedt, J. Wyller, E. Malyutina, "A one-population Amari model with periodic microstructure", *Nonlinearity*, **27** (2014), 1391–1417.

[10] E. Malyutina, J. Wyller, A. Ponosov, "Two bumps solutions of a homogenized Wilson-Cowan model with periodic microstructure", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **271** (2014), 19–31.

[11] E. Burlakov, J. Wyller, A. Ponosov, "Two-dimensional Amari neural field model with periodic microstructure: Rotationally symmetric bump solutions", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **32** (2016), 81–88.

[12] Е. О. Бурлаков, И. Н. Мальков, "О связи непрерывных и разрывных моделей нейронных полей с микроструктурой: II. Радиально симметричные стационарные решения в 2D («бампы»)", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 6–17. [E. O. Burlakov, I. N. Malkov, "On connection between continuous and discontinuous neural field models with microstructure: II. Radially symmetric stationary solutions in 2D ("bumps")", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 6–17 (In Russian)].

[13] J. A. Murdock, F. Botelho, J. E. Jamison, "Persistence of spatial patterns produced by neural field equations", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **215** (2006), 106–116.

[14] E. Burlakov, V. Verkhlyutov, V. Ushakov, "A simple human brain model reproducing evoked MEG based on neural field theory", *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research V*, Studies in Computational Intelligence, **1008**, ed. B. Kryzhanovsky, W. Dunin–Barkowski, V. Redko, Y. Tiumentsev, 2021, 109–116.

Информация об авторах

Атмания Рашид, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: atmania.rachid@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Information about the authors

Rachid Atmania, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: atmania.rachid@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2194-1497

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень; научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 23.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Evgenii O. Burlakov, PhD, Senior Researcher at X-Bio Institute. Tyumen State University, Tyumen; Researcher at the Research and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science. Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5845-5591

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 23.08.2022
Reviewed 26.10.2022
Accepted for press 24.11.2022

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338
УДК 517.957, 517.958, 517.925

О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений

Елена Юрьевна ГРАЖДАНЦЕВА
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»
664003, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Карла Маркса, 1
ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева»
Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130

Аннотация. В работе рассматривается гиперболическая система двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами, одно из которых является нелинейным и содержит квадрат одной из неизвестных функций. При этом каждое уравнение содержит две неизвестные функции, зависящие, в свою очередь, от двух переменных. Для этой системы найдены точные решения: решение типа бегущей волны и автомодельное решение. Также определен тип начально-краевых условий, позволяющих использовать построенные общие решения для того, чтобы выписывать решение начально-краевой задачи для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: гиперболическая система дифференциальных уравнений в частных производных, решение типа бегущей волны, автомодельное решение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта FWEU-2021-0006 программы фундаментальных исследований РФ на 2021-2030 гг.

Для цитирования: *Гражданцева Е.Ю.* О точном решении гиперболической системы дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 328–338. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338

On exact solution of a hyperbolic system of differential equations

Elena Yu. GRAZHDANTSEVA
Irkutsk State University
1 Karla Marksa St., Irkutsk 664003, Russian Federation
Melentiev Energy Systems Institute
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. The paper considers a hyperbolic system of two first-order partial differential equations with constant coefficients, one of which is nonlinear and contains the square of one of the unknown functions. Moreover, each equation contains two unknown functions which in turn depend on two variables. Exact solutions are found for this system: a traveling wave solution and a self-similar solution. There is also defined the type of initial-boundary conditions which allow to use the constructed general solutions in order to write out a solution of the initial-boundary value problem for the system of differential equations under consideration.

Keywords: hyperbolic system of partial differential equations, traveling wave solution, self-similar solution

Acknowledgements: The work is partially supported by the grant FWEU-2021-0006 of the RF Basic Research Program for 2021-2030.

Mathematics Subject Classification: 35L02, 35L60.

For citation: Grazhdantseva E.Yu. O tochnom reshenii giperbolicheskoy sistemy differentsial'nykh uravneniy [On exact solution of a hyperbolic system of differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 328–338. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-328-338. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В теоретической физике при описании поведения сплошной среды, будь то газ, жидкость или твердое тело, используются математические модели, приводящие к нелинейным дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям в частных производных или системам таких уравнений. Причем только существенные дополнительные условия приводят к линейным дифференциальным и интегро-дифференциальным уравнениям.

Как отмечено в [1, с. 9], изучение общих свойств нелинейных уравнений и методов их решения представляет собой быстро развивающую область современной математики, но при всем многообразии методов исследования и решения нелинейных уравнений эта область математики до сих пор не имеет столь же основательного теоретического фундамента, как теория линейных уравнений. В первую очередь, это связано с тем, что к нелинейным дифференциальным уравнениям не применим принцип суперпозиции решений, так что многообразие решений не является линейным (подробнее см. [1, с. 9, 10]).

Двумерное неустановившееся движение газов и жидкостей описывается гиперболической системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Это наиболее простые из гиперболических систем нелинейных уравнений, однако и они до сих пор остаются недостаточно изученными. В [1, с. 9, 10] констатируется: «Даже для этих систем в настоящее время нет достаточно полной теории (общих теорем существования и единственности решения задачи с начальными данными). Это объясняется тем, что для гиперболических систем нелинейных уравнений решение задачи Коши в целом связано с существенным осложнением как самой постановки этой задачи, так и методов ее решения. Таким образом, изучение гиперболических систем нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными составляет совершенно необходимый и пока еще не преодоленный этап в исследовании более общих нелинейных уравнений».

Поиску точных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными посвящено достаточно большое количество работ, например, работы [2–8] посвящены построению и исследованию решений типа бегущей волны, в работах [4], [9–13] отражено построение и исследование автомодельного решения. Кроме того, ряд работ (например, [14–20] и др.) посвящены построению и исследованию численных решений.

С развитием отраслей, затрагивающих процессы, описываемые гиперболическими системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, возникает проблема минимизации времени, которое тратится на поиск решения поставленной задачи (какими бы не были быстродейственными численные способы получения решения и технические возможности). Одним из способов ускорения процесса поиска решения подобных задач является наличие точного решения (пусть даже в некоторой ограниченной области).

Данная работа посвящена двум классам точных решений гиперболической системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, а именно, решениям типа бегущей волны и автомодельным решениям, а также определению вида начально-краевой задачи, имеющей такие решения.

Рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial l} + \alpha_0 \dfrac{\partial x}{\partial t} \pm \alpha_1 x^2 = 0, \\ \\ \dfrac{\partial x}{\partial l} + \alpha_2 \dfrac{\partial p}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — действительные положительные числа, $p = p(l,t)$ и $x = x(l,t)$ — неизвестные функции свободных переменных l и t, причем $(l,t) \in D = \{(l,t) : l \in [0,L],\ t \geq 0\}$, $L \in R_+$.

1. Основные понятия

Пусть искомая величина — это функция $u = u(l,t)$ двух переменных l и t, где l играет роль пространственной координаты, а t — роль времени.

О п р е д е л е н и е 1.1. Решением системы (0.1) *типа бегущей волны* (см. [21]) называют решение вида $u(l,t) = V(z)$, $z = kl - mt$, где величина m/k играет роль скорости распространения волны (m может быть любого знака, значение $m = 0$ отвечает стационарному решению, а значение $k = 0$ отвечает пространственно-однородному решению).

О п р е д е л е н и е 1.2. *Автомодельным решением* (см. [21,22]) системы (0.1) называют решение вида $u(l,t) = t^a W(y)$, $y = xt^b$, где показатели степени a и b определяются в процессе построения решения (из вида решаемого уравнения).

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Для произвольных $k \in R$, $m \in R$ система (0.1) имеет решение типа бегущей волны, и это решение определяется соотношениями*

$$x(l,t) = \pm \frac{\alpha_0\alpha_2 - \lambda^2}{\alpha_1\alpha_2(t + \lambda l + C)}, \quad p(l,t) = \mp \frac{(\alpha_0\alpha_2 - \lambda^2)\lambda}{\alpha_1\alpha_2^2(t + \lambda l + C)} + A, \tag{2.1}$$

где C, A — произвольные постоянные, $\lambda = -m/k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы $k \in R$, $m \in R$. Будем искать решение системы (0.1) в виде

$$x(l,t) = U(y), \quad p(l,t) = V(y), \quad y = kl - mt. \tag{2.2}$$

После подстановки (2.2) в уравнения системы (0.1), учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial l} = kU', \quad \frac{\partial x}{\partial t} = -mU', \quad \frac{\partial p}{\partial l} = kV', \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -mV',$$

преобразуем систему (0.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} kV' - \alpha_0 mU' \pm \alpha_1 U^2 = 0, \\ kU' - \alpha_2 mV' = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

относительно неизвестных функций $U = U(y)$ и $V = V(y)$ свободной переменной y.

Из второго уравнения системы (2.3) имеем

$$V' = \frac{k}{\alpha_2 m} U'. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.4), запишем первое уравнение системы (2.3) в виде обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(\frac{k^2}{\alpha_2 m} - \alpha_0 m\right) U' + \alpha_1 U^2 = 0,$$

решением которого является функция

$$U(y) = \frac{\frac{k^2}{\alpha_2 m} - \alpha_0 m}{\alpha_1 y - C_1}.$$

А поскольку функция $V = V(y)$ удовлетворяет уравнению (2.4), получаем

$$V(y) = \frac{k}{\alpha_2 m} U(y) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к функциям $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$, учитывая (2.2), а также то, что $\lambda = -m/k$, без ограничения общности, получаем представление этих функций формулами (2.1), где C, A — произвольные постоянные.

Убедится в том, что набор полученных таким образом функций $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$ является решением системы (0.1), можно непосредственной подстановкой выражений (2.1) в уравнения системы (0.1). □

Теорема 2.2. *Система* (0.1) *имеет автомодельное решение вида*

$$x(l,t) = \frac{1}{t} W(y), \quad p(l,t) = \frac{1}{t} g(y), \quad y = \frac{l}{t}, \tag{2.5}$$

где

$$W(y) = \frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{\pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}(1-\alpha_0\alpha_2 y^2)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} + 4\alpha_0 C(1-\alpha_0\alpha_2 y^2)}, \tag{2.6}$$

$$g(y) = \frac{4\alpha_0}{\pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}(1-\alpha_0\alpha_2 y^2)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} + 4\alpha_0 C(1-\alpha_0\alpha_2 y^2)}, \tag{2.7}$$

C *— произвольная постоянная.*

Доказательство. Пусть $x = x(l,t)$ и $p = p(l,t)$ имеют вид (2.5). После подстановки (2.5) в уравнения системы (0.1), учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}W - \frac{l}{t^3}W', \quad \frac{\partial x}{\partial l} = \frac{1}{t^2}W', \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{t^2}g - \frac{l}{t^3}g', \quad \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{1}{t^2}g',$$

преобразуем систему (0.1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} g' - \alpha_0 W - \alpha_0 y W' \pm \alpha_1 W^2 = 0, \\ W' - \alpha_2 g - \alpha_2 y g' = 0. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

Введем обозначение:

$$F(y) = \pm 2\alpha_1\alpha_2 y \mp \alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}(1-\alpha_0\alpha_2 y^2)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} + 4\alpha_0 C(1-\alpha_0\alpha_2 y^2).$$

С учетом этого обозначения, формулы (2.6), (2.7) перепишем в виде

$$W(y)=\frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{F(y)},\quad g(y)=\frac{4\alpha_0}{F(y)}.$$

Таким образом, имеем

$$W'(y)=\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)}-\frac{4\alpha_0\alpha_2 y\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}-8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2},$$

$$g'(y)=\frac{-4\alpha_0\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}-8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2}.$$

Следовательно, левая часть первого уравнения системы (2.8) принимает вид

$$g'-\alpha_0 W-\alpha_0 yW'\pm\alpha_1 W^2$$

$$=\frac{\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}+32\alpha_0^3\alpha_2 Cy}{\left(F(y)\right)^2}-\frac{4\alpha_0^2\alpha_2 y}{F(y)}$$

$$-\alpha_0 y\left(\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)}-\frac{4\alpha_0\alpha_2 y\Big(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}-8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\Big)}{\left(F(y)\right)^2}\right)\pm\alpha_1\left(\frac{4\alpha_0\alpha_2 y}{F(y)}\right)^2.$$

После приведения всех слагаемых к общему знаменателю и перегруппировки слагаемых числителя получившейся при этом дроби получим:

$$g'-\alpha_0 W-\alpha_0 yW'\pm\alpha_1 W^2=\frac{A(y)}{\left(F(y)\right)^2},$$

где

$$A(y)=\Big(\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\pm 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\mp 4\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3$$
$$\pm 4\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\mp 4\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3\pm 8\alpha_0^3\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^3\Big)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}$$
$$+\big(32\alpha_0^3\alpha_2-16\alpha_0^3\alpha_2-16\alpha_0^3\alpha_2\big)Cy+\big(16\alpha_0^4\alpha_2^2+16\alpha_0^4\alpha_2^2-32\alpha_0^4\alpha_2^2\big)Cy^3$$
$$+\big(\mp 16\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\mp 16\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\pm 32\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\big)y^2.$$

А поскольку $A(y)=0$, получаем первое уравнение системы (2.8), т. е. функции (2.6) и (2.7) удовлетворяют первому уравнению системы (2.8).

Далее, справедлива следующая цепочка равенств:

$$W'-\alpha_2 g-\alpha_2 yg'=$$

$$=\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)}-\frac{4\alpha_0\alpha_2 y\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}-8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2}$$

$$-\frac{4\alpha_0\alpha_2}{F(y)} - \alpha_2 y \frac{-4\alpha_0\left(\pm 2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y\ \ln\dfrac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} - 8\alpha_0^2\alpha_2 Cy\right)}{\left(F(y)\right)^2} = \frac{B(y)}{\left(F(y)\right)^2} = 0,$$

так как

$$B(y) = \left(\mp 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^2 \pm 8\alpha_0^2\alpha_1\alpha_2^2\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\,y^2\right)\ln\frac{1+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y}{1-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}y} + 32\alpha_0^3\alpha_2^2 Cy^2 - 32\alpha_0^3\alpha_2^2 Cy^2 = 0.$$

Следовательно, функции, определенные формулами (2.6) и (2.7), удовлетворяют второму уравнению системы (2.8). □

З а м е ч а н и е 2.1. Автомодельное решение системы (0.1) в переменных (l,t) имеет вид

$$x(l,t) = \frac{4\alpha_0\alpha_2 l}{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,l\,t \mp \alpha_1\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)\ln\dfrac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l} + 4\alpha_0\,C(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)}, \tag{2.9}$$

$$p(l,t) = \frac{4\alpha_0\,t}{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,l\,t \mp \alpha_1\sqrt{\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0}}(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)\ln\dfrac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\,l} + 4\alpha_0\,C(t^2-\alpha_0\alpha_2\,l^2)}. \tag{2.10}$$

Убедиться в справедливости этого замечания можно, непосредственно подставив функции (2.9) и (2.10) в уравнения системы (0.1).

З а м е ч а н и е 2.2. Решение (2.5)–(2.7), равно как и (2.9), (2.10), является частным случаем более общего автомодельного решения вида (2.5) с функцией

$$W(y) = \alpha_2\,y\,g(y) + C_2,$$

где C_2 — произвольная постоянная, а функция $g = g(y)$ является решением уравнения

$$g' + \frac{\pm 2\alpha_1\alpha_2\,C_2 - 2\alpha_0\alpha_2\,y}{1-\alpha_0\alpha_2\,y^2}g \pm \frac{\alpha_1\alpha_2^2\,y^2}{1-\alpha_0\alpha_2 y^2}g^2 + C_2^2 = 0$$

при $C_2 = 0$.

Особенность решения типа бегущей волны и автомодельного решения заключается в том, что благодаря специфической замене искомых функций и свободных переменных дифференциальные уравнения в частных производных преобразуются в обыкновенные дифференциальные уравнения. Таким образом, задача интегрирования дифференциального уравнения с частными производными преобразуется в задачу интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения. Известно, что результатом интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений является семейство функций (интегральных кривых), отличающихся друг от друга на постоянную величину (произвольную постоянную), при этом исчерпывается все многообразие решений обыкновенного дифференциального уравнения, что, в свою очередь, позволяет из этого многообразия выделять решения, отвечающие дополнительным условиям, например, начальным условиям (задача Коши).

Однако, решение типа бегущей волны и автомодельное решение выделяют лишь класс решений, обладающих специфическими свойствами, из всего многообразия возможных точных решений дифференциального уравнения в частных производных. Кроме того, специфика таких решений ограничивает свободу в постановке задачи для дифференциального уравнения, т. е. начальной, краевой или начально-краевой задачи.

Пусть заданы $x_0 \in R$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $l_0 \in R$. Рассмотрим начально-краевую задачу для системы (0.1) с условиями

$$x(l,t)\Big|_{\substack{l=l_0\\ t=t_0}} = x_0, \qquad p(l,t)\Big|_{\substack{l=l_0\\ t=t_0}} = p_0. \tag{2.11}$$

Утверждение 2.1. *В области* $D = \left\{(l,t)\ :\ (t+\lambda l)x_0 \neq x_0(t_0+\lambda l_0) \mp \dfrac{\alpha_0\alpha_2-\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2}\right\}$ *начально-краевая задача* (0.1), (2.11) *имеет решение типа бегущей волны вида*

$$x(l,t) = \pm\frac{(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)x_0}{\alpha_1\alpha_2x_0(t-t_0+\lambda(l-l_0)) \pm (\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)},$$

$$p(l,t) = \mp\frac{(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)\lambda\, x_0}{\alpha_1\alpha_2^2x_0(t-t_0+\lambda(l-l_0)) \pm \alpha_2(\alpha_0\alpha_2-\lambda^2)} + p_0 + \frac{\lambda}{\alpha_2}x_0.$$

Утверждение 2.2. *Пусть* $x_0 \in R\backslash\{0\}$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $t_0 > \sqrt{\alpha_0\alpha_2}|l_0|$, $l_0 \in R$, *и, кроме того, справедливо равенство* $x_0t_0 = \alpha_2p_0l_0$. *Тогда в области*

$$D = \Big\{(l,t)\ :\ t > \sqrt{\alpha_0\alpha_2}|l|,$$
$$\pm 2\alpha_1\alpha_2\, l\, t \mp \alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\left(t^2-\alpha_0\alpha_2\, l^2\right)\ln\frac{t+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\, l}{t-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}\, l} + 4\alpha_0C\left(t^2-\alpha_0\alpha_2\, l^2\right) \neq 0\Big\}$$

начально-краевая задача (0.1), (2.11) *имеет автомодельное решение вида* (2.9), (2.10), *где*

$$C = \frac{\alpha_2l_0}{x_0(t_0^2-\alpha_0\alpha_2l_0^2)} \mp \frac{\alpha_1\alpha_2l_0t_0}{2\alpha_0(t_0^2-\alpha_0\alpha_2l_0^2)} \pm \frac{\alpha_1}{4\alpha_0}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_0}}\ln\frac{t_0+\sqrt{\alpha_0\alpha_2}l_0}{t_0-\sqrt{\alpha_0\alpha_2}l_0}.$$

3. Дополнение

Утверждение 3.1. *Если* $\alpha_1 = 0$, *то решение типа бегущей волны системы* (0.1) *принимает вид* $x(l,t) = C_3$, $p(l,t) = C_4$, *где* C_3, C_4 *— произвольные постоянные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству теоремы 2.1 будем искать решение типа бегущей волны в виде (2.2). Тогда система (0.1) при $\alpha_1 = 0$ преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} kV' - \alpha_0mU' = 0,\\ kU' - \alpha_2mV' = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

относительно неизвестных функций $U = U(y)$ и $V = V(y)$ свободной переменной y.

Решением системы (3.1) являются любые постоянные функции $U(y) = C_3$, $V(y) = C_4$. Следовательно, $x(l,t) = C_3$, $p(l,t) = C_4$, где C_3, C_4 — произвольные постоянные. □

З а м е ч а н и е 3.1. В условиях утверждения 3.1 решение типа бегущей волны для начально-краевой задачи (0.1), (2.11) при $\alpha_1 = 0$ принимает вид $x(l,t) = x_0$, $p(l,t) = p_0$.

Утверждение 3.2. *Если* $\alpha_1 = 0$, *то автомодельное решение системы* (0.1) *имеет вид*

$$x(l,t) = \frac{\alpha_2 C_3 l + C_4 t}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}, \quad p(l,t) = \frac{C_3 t + \alpha_0 C_4 l}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедиться в справедливости этого утверждения можно, подставив функции вида (3.2) в уравнения системы (0.1). Таким образом, учитывая, что, согласно предположению, $\alpha_1 = 0$, получим тождества. □

Утверждение 3.3. *Пусть* $x_0 \in R\backslash\{0\}$, $p_0 \in R$, $t_0 \in R_+$, $l_0 \in R$. *Если* $\alpha_1 = 0$, *то в области* $D = \big\{(l,t):\ t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2 \neq 0,\ l \in R,\ t \in R\big\}$ *начально-краевая задача* (0.1), (2.11) *имеет автомодельное решение вида*

$$x(l,t) = \frac{\alpha_2(p_0t_0 - \alpha_0 l_0 x_0)l + (x_0t_0 - \alpha_2 p_0 l_0)t}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}, \tag{3.3}$$

$$p(l,t) = \frac{(p_0t_0 - \alpha_0 l_0 x_0)t + \alpha_0(x_0t_0 - \alpha_2 p_0 l_0)l}{t^2 - \alpha_0\alpha_2 l^2}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно подставить функции (3.3) и (3.4) в уравнения системы (0.1) и условия (2.11) и убедиться в их выполнении. □

References

[1] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1978. [B. L. Rozhdestvensky, N. N. Yanenko, *Systems of Quasilinear Equations and their Applications in Gas Dynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[2] А. Л. Казаков, П. А. Кузнецов, Л. Ф. Спевак, “О решениях типа бегущей волны для нелинейного уравнения теплопроводности”, *Дифференциальные уравнения и оптимальное управление*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **196**, ВИНИТИ РАН, М., 2021, 36–43. [A. L. Kazakov, P. A. Kuznetsov, L. F. Spevak, “On solutions of the traveling wave type for the nonlinear heat equation”, *Differential Equations and Optimal Control*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **196**, VINITI, Moscow, 2021, 36–43 (In Russian)].

[3] В. Р. Тагирова, “Решение задачи гидроразрыва в виде бегущей волны”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 4, 46–48. [V. R. Tagirova, “A solution to the hydraulic fracture problem in the traveling wave form”, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2009, № 4, 46–48 (In Russian)].

[4] А. Д. Полянин, “Неклассические (неинвариантные) решения типа бегущей волны и автомодельные решения”, *Доклады академии наук*, **398**:1 (2004), 33–37; англ. пер.:A. D. Polyanin, “Nonclassical (noninvariant) traveling-wave solutions and self-similar solutions”, *Doklady Mathematics*, **70**:2 (2004), 790–793.

[5] С. В. Пикулин, “О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:2 (2018), 244–252; англ. пер.:S. V. Pikulin, “Traveling-wave solutions of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**:2 (2018), 230–237.

[6] Х. С. Кучакшоев, “Ограниченные решения типа бегущей волны и некоторые частные решения системы Келлера–Сиджела”, *Доклады академии наук республики Таджикистан*, **54**:8 (2011), 610–617. [Kh. S. Kuchakshoev, “Bounded solutions of the traveling wave type and some particular solutions of the Keller–Siegel system”, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, **54**:8 (2011), 610–617 (In Russian)].

[7] Е. А. Будылина, Е. Г. Мурачев, И. А. Гарькина, А. М. Данилов, “Решения уравнения Клейна–Гордона типа бегущей волны, сглаживающейся на бесконечности”, *Фундаментальные исследования*, 2014, № 5-5, 1000–1005. [E. A. Budylina, E. G. Murachev, I. A. Garkina, A. M. Danilov, “Solutions of the Klein–Gordon equation of traveling wave type, which smoothed at infinity”, *Fundamental Research*, 2014, № 5-5, 1000–1005 (In Russian)].

[8] П. А. Вельмисов, Ю. А. Казакова, “О решениях типа «бегущая волна» дифференциальных уравнений с частными производными”, *Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании*, 2011, № 2, 102–108. [P. A. Velmisov, Yu. A. Kazakova, “On solutions of “travelling wave” type of partial differential equations”, *Mathematical Methods and Models: Theory, Applications and Role in Education*, 2011, № 2, 102–108 (In Russian)].

[9] Т. Д. Джураев, Ю. П. Апаков, “Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **2(15)** (2007), 18–26. [T. D. Dzhuraev, Yu. P. Apakov, “On self-similar solution of an equation of the third order with multiple characteristics”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, **2(15)** (2007), 18–26 (In Russian)].

[10] Б. Т. Мекенбаев, Ч. Т. Дуйшеналиев, “Автомодельное решение динамики гравитационных потоков в наклонных каналах”, *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*, 2016, № 3(35), 59–71. [B. T. Mekenbaev, Ch. T. Duishenaliev, “Self-similar solutions of gravitational flows dynamics in inclined channels”, *Caspian Journal: Control and High Technologies*, 2016, № 3(35), 59–71 (In Russian)].

[11] Э. В. Теодорович, “Автомодельное решение плоской задачи об эволюции трещины гидроразрыва в упругой среде”, *Прикладная математика и механика*, **74**:2 (2010), 252–261; англ. пер.:E. V. Teodorovich, “Self-similar solution of the plane problem of the evolution of a hydraulic fracture crack in an elastic medium”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **74**:2 (2010), 181–187.

[12] А. В. Шмидт, “Автомодельное решение задачи о турбулентном течении круглой затопленной струи”, *Прикладная механика и техническая физика*, **56**:3(331) (2015), 82–88; англ. пер.:A. V. Shmidt, “Self-similar solution of the problem of a turbulent flow in a round submerged jet”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **56**:3 (2015), 414–419.

[13] Б. В. Алексеев, И. В. Овчинникова, “Автомодельные решения гидродинамических уравнений нелокальной физики”, *Вестник МИТХТ им. М. В. Ломоносова*, **9**:6 (2014), 47–54. [B. V. Alekseev, I. V. Ovchinnikova, “Self-similar solutions of hydrodynamic equations of nonlocal physics”, *Bulletin of the M. V. Lomonosov MITHT*, **9**:6 (2014), 47–54 (In Russian)].

[14] А. В. Аргучинцев, “Решение задачи оптимального управления начально-краевыми условиями гиперболической системы на основе точных формул приращения”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2002, № 12, 23–29; англ. пер.:A. V. Arguchintsev, “Solution of the problem of the optimal control of initial-boundary conditions of a hyperbolic system based on exact increment formulas”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **46**:12 (2002), 21–27.

[15] А. В. Соловьев, А. В. Данилин, “Использование схемы Диез повышенного порядка точности для решения некоторых нелинейных гиперболических систем уравнений”, *Вычислительные методы и программирование*, **20**:1 (2019), 45–53. [A. V. Solov’ev, A. V. Danilin, “Using the Sharp scheme of higher-order accuracy for solving some nonlinear hyperbolic systems of equations”, *Num. Meth. Prog.*, **20**:1 (2019), 45–53 (In Russian)].

[16] Ю. О. Яковлева, А. В. Тарасенко, “Решение задачи Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка методом Римана”, *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **25**:3 (2019), 33–38. [J. O. Yakovleva, A. V. Tarasenko, “The solution of Cauchy problem for the hyperbolic differential equations of the fourth order by the Riman method”, *Vestnik SamU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, **25**:3 (2019), 33–38 (In Russian)].

[17] Р. Ю. Новиков, “Численное решение уравнений гиперболического типа”, *Двойные технологии*, 2011, № 3(56), 48–51. [R. Yu. Novikov, “Numerical solution of equations of hyperbolic type”, *Double Technologies*, 2011, № 3(56), 48–51 (In Russian)].

[18] О. П. Комурджишвили, “Разностные схемы для решения многомерных уравнений и систем уравнений гиперболического типа”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:6 (2007), 980–987; англ. пер.:O. P. Komurdzhishvili, “Finite-difference schemes for solving multidimensional hyperbolic equations and their systems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:6 (2007), 936–942.

[19] Г. А. Абдикаликова, А. Х. Жумагазиев, “Построение многопериодического решения одной задачи для нелинейной гиперболической системы уравнений”, *Sciences of Europe*, **12**:12 (2007), 15–19. [G. A. Abdikalikova, A. H. Zhumagaziyev, “Construction of the multiperiodical solution of

one problem for a nonlinear of hyperbolic system equations", *Sciences of Europe*, **12**:12 (2007), 15–19 (In Russian)].

[20] В. В. Тарасевич, *Развитие теории и методов расчета гидродинамических процессов в напорных трубопроводных системах*, автореф. дис. … д-ра. техн. наук, Новосибирск, 2017, 38 с. [V. V. Tarasevich, *Development of the theory and methods for calculating hydrodynamic processes in pressure pipeline systems*, Abstr. Diss. … Doc. Tech. Sciences, Novosibirsk, 2017 (In Russian), 38 pp.]

[21] А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. Ю. Журов, *Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005. [A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, A. Yu. Zhurov, *Methods for Solving Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[22] Е. Ю. Гражданцева, С. В. Солодуша, "Об одном аналитическом решении нелинейного дифференциального уравнения в частных производных", *Нелинейный анализ и экстремальные задачи*, Материалы 7-й Международной конференции по нелинейному анализу и экстремальным задачам (НЛА-2022) (Иркутск, 15–22 июля 2022 г.), ред. А. А. Толстоногов, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, 2022, 42–43. [E. Yu. Grazhdantseva, S. V. Solodusha, "On an analytical solution of a nonlinear partial differential equation", *Nonlinear Analysis and Extremal Problems*, Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022) (Irkutsk, July 15–22, 2022), ed. A. A. Tolstonogov, ISDCT SB RAS, Irkutsk, 2022, 42–43 (In Russian)].

Информация об авторе

Гражданцева Елена Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений. Иркутский государственный университет; младший научный сотрудник отдела прикладной математики. Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Поступила в редакцию 23.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 26.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Elena Yu. Grazhdantseva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis and Differential Equations Department. Irkutsk State University; Junior Researcher of Applied Mathematics Department. Melentiev Energy Systems Institute Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: grelyur@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9541-5679

Received 23.08.2022
Reviewed 26.10.2022
Accepted for press 24.11.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350
УДК 517.55

О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ
ГАПОУ «Подмосковный колледж «Энергия»
142450, Российская Федерация, Московская обл., г. Старая Купавна, ул. Большая Московская, 190

Аннотация. В статье рассматривается экстремальная задача нахождения точных констант $\chi_{m,n,r}(\tau)$ в неравенствах типа Джексона–Стечкина, связывающих наилучшие приближения аналитических в единичном круге $U=\{z:|z|<1\}$ функций алгебраическими комплексными полиномами и усредненными значениями модулей непрерывности высших порядков r-ых производных функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$. Введены классы аналитических в единичном круге функций $W_m^{(r)}(\tau)$ и $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, которые удовлетворяют определенным условиям. Для введенных классов функций вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников. В работе используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций и разработанный В. М. Тихомировым метод оценки снизу n-поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах. Полученные в работе результаты являются обобщением и распространением на случай аналитических в единичном круге функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана, результатов работ С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова, полученных для классов дифференцируемых периодических функций.

Ключевые слова: аналитическая функция, алгебраический комплексный полином, наилучшее приближение, модуль непрерывности высших порядков, весовое пространство Бергмана

Для цитирования: *Лангаршоев М.Р.* О наилучшем приближении и значениях поперечников некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 339–350. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350

On the best approximation and the values of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space

Mukhtor R. LANGARSHOEV
College near Moscow "Energia"
190 Bolshaya Moskovskaya St., Staraya Kupavna, Moscow Region 142450, Russian Federation

Abstract. We consider the extremal problem of finding exact constants in the Jackson–Stechkin type inequalities connecting the best approximations of analytic in the unit circle $U = \{z : |z| < 1\}$ functions by algebraic complex polynomials and the averaged values of the higher-order continuity modules of the r-th derivatives of functions in the Bergman weight space $B_{2,\gamma}$. The classes of analytic in the unit circle functions $W_m^{(r)}(\tau)$ and $W_m^{(r)}(\tau, \Phi)$ which satisfy some specific conditions are introduced. For the introduced classes of functions, the exact values of some known n-widths are calculated. In this paper, we use the methods of solving extremal problems in normalized spaces of functions analytic in a circle and a well-known method developed by V. M. Tikhomirov for estimating from below the n-widths of functional classes in various Banach spaces. The results obtained in the work generalize and extend the results of the works by S. B. Vakarchuk and A. N. Shchitova obtained for the classes of differentiable periodic functions to the case of analytic in the unit circle functions belonging to the Bergmann weight space.

Keywords: analytic function, algebraic complex polynomial, best approximation, higher-order continuity modulus, Bergmann weight space

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

For citation: Langarshoev M.R. O nailuchshem priblizhenii i znacheniyah poperechnikov nekotoryh klassov funkcij v vesovom prostranstve Bergmana [On the best approximation and the values of the widths of some classes of functions in the Bergmann weight space]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 339–350. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-339-350. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Работа посвящена вопросам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций и вычислению значений n-поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана.

Известно, что в экстремальных задачах теории приближения функций большую роль играют неравенства, в которых величина наилучшего приближения функций оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее некоторой производной. Такие неравенства называются неравенствами типа Джексона–Стечкина. Задаче, связанной с нахождением точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина для аналитических в единичном круге функций, посвящено значительное множество работ. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в единичном круге функций были получены в работах [1–4]. В работе [5] были получены точные значения поперечников в смысле Колмогорова некоторых классов аналитических в единичном круге функций в пространстве Харди. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в многочисленных работах (см. [6–9] и приведенную в них литературу). В весовом пространстве Бергмана задачи, связанные с вычислением точных значений верхних граней наилучшего приближения и с вычислением точных значений n-поперечников классов аналитических в круге функций, были решены, например, в работах [10–14].

В данной работе введена и изучена экстремальная аппроксимационная характеристика, которая в отличии от ранее изученных экстремальных характеристик содержит модуль непрерывности не только под знаком интеграла, но и вне интеграла в весовом пространстве Бергмана. Вычислены значения бернштейновского, колмогоровского, гельфандовского, линейного и проекционного n-поперечника для различных классов функций, определяемых модулями непрерывности r-ых производных функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел. Известно, что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \le \rho < 1$$

принадлежит весовому пространству Бергмана $B_{q,\gamma}$, если

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho)|f(\rho e^{it})|^q d\rho dt\right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \le q \le \infty,$$

где $\gamma(\rho) \ge 0$ — суммируемая на $[0,1]$ функция. Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени не выше n обозначим

$$\mathcal{P}_n = \left\{p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\right\}.$$

Через

$$E_n(f)_{B_{q,\gamma}} = \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}$$

обозначим наилучшее приближение функции $f \in B_{q,\gamma}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Легко доказать, что среди произвольных $p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величины наилучшего приближения в пространстве $B_{2,\gamma}$ доставляет частная сумма Тейлора

$$T_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k,$$

разложения функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = T_{n-1}(f,z) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k$$

в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_n(f)_{B_{2,\gamma}} = \left\| f - T_{n-1}(f) \right\|_{B_{2,\gamma}} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int\limits_0^1 \rho^{k+1}\gamma(\rho)d\rho \right\}^{1/2}. \qquad (1.1)$$

Величину

$$\begin{aligned} \omega_m(f,t)_{B_{q,\gamma}} &= \sup\left\{ \|\Delta_h^m(f,\cdot,\cdot)\|_{B_{q,\gamma}} : |h| \le t \right\} \\ &= \sup\left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\gamma(\rho) |\Delta_h^m(f;\rho,u)|^q d\rho du \right)^{1/q} : |h| \le t \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_h^m(f;\rho,u) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k f\left(\rho e^{i(u+kh)}\right)$$

— разность m-го порядка функции $f\left(\rho e^{it}\right)$ по аргументу t с шагом h, назовем интегральным модулем непрерывности m-го порядка.

Производную r-го порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции $f(z)$ обозначим через

$$f^{(r)}(z) = \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k z^{k-r}, \ \alpha_{k,r} = k!\left[(k-r)!\right]^{-1}, \ k \ge r.$$

Всюду далее полагаем

$$\mathcal{B}_{q,\gamma}^{(r)} = \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \left\| z^r f^{(r)} \right\|_{q,\gamma} < \infty \right\}, \ r \in \mathbb{Z}_+, \ 1 \le q \le \infty.$$

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\chi_{m,n,r}(\tau) = \sup_{f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{ \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + n^2 \int\limits_0^\tau (\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du \right\}^{m/2}}, \qquad (1.2)$$

где $0 < \tau \le \pi/n$, $m,n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть X — банахово пространство, S — единичный шар в X, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество X, $\Lambda_n \subset X$ — n-мерное подпространство, $\Lambda^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $\mathcal{L} :\ X$ — непрерывный линейный оператор и $\mathcal{L}^{\perp} : X \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, X) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset X\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{N}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_X :\ f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset X\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - \varphi\|_X :\ \varphi \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{N}\right\} : \Lambda_n \subset X\right\},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}f\|_X :\ f \in \mathfrak{N}\right\} :\ \mathcal{L}X \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset X\right\},$$

$$\pi_n(\mathfrak{N}, X) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathcal{L}^{\perp}f\|_X :\ f \in \mathfrak{N}\right\} : \mathcal{L}^{\perp}X \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset X\right\},$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n-поперечниками в пространстве X. Поскольку X — весовое пространство Бергмана $B_{2,\gamma}$, то для перечисленных выше n-поперечников выполняются соотношения [15, с. 239]:

$$b_n(\mathfrak{N}, X) \le d^n(\mathfrak{N}, X) \le d_n(\mathfrak{N}, X) = \lambda_n(\mathfrak{N}, X) = \Pi_n(\mathfrak{N}, X). \tag{1.3}$$

Также полагаем

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) := \sup\{E_n(f) :\ f \in \mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\Phi(\tau)$ $(\tau \ge 0)$ — произвольная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $\tau > 0$ определим классы функций

$$W_m^{(r)}(\tau) = \left\{f \in B_{2,\gamma} :\ \frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int\limits_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du \le 1\right\},$$

$$W_m^{(r)}(\tau, \Phi) = \left\{f \in B_{2,\gamma} :\ \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + n^2 \int\limits_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du \le \Phi^{m/2}(\tau)\right\}.$$

Положим

$$(1 - \cos nt)_*^m = \begin{cases} (1 - \cos nt)^m, & \text{если} \quad nt < \pi, \\ 2^m, & \text{если} \quad nt \ge \pi. \end{cases}$$

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Пусть m, n, r — произвольные натуральные числа, и $n > r$. Тогда для любых τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau \le \pi/n$, имеет место равенство*

$$\chi_{m,n,r}(\tau) = (n\tau)^{-m}, \tag{2.1}$$

и верхняя грань в равенстве (2.1) реализует функция $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольной аналитической функции $f(z) \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$ имеет место соотношение [10]

$$\omega_m^2\left(z^r f^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} = 2^m \sup_{|u| \le \tau} \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k|^2 \left(1 - \cos ku\right)^m \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho) d\rho. \tag{2.2}$$

Используя соотношения (1.1), (2.2), неравенство Гельдера, а также тот факт, что при любом $k \geq n$ выполнено $\alpha_{k,r} \geq \alpha_{n,r}$ получаем (см. [16])

$$E_n^2(f)_{2,\gamma} - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cos kt \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \left\{|c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1-1/m} \cdot \left\{|c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1/m} (1-\cos kt)$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left\{|c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1-1/m} \cdot \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)^m\right\}^{1/m}$$

$$\leq \left\{\sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho\right\}^{1-1/m} \cdot \left\{\frac{1}{2^m} 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{n,r}}\right)^2 |c_k|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho(1-\cos kt)^m\right\}^{1/m}$$

$$\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma} \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{2,\gamma}.$$

Таким образом,

$$E_n^2(f)_{2,\gamma} - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \cos kt \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{2,\gamma}. \tag{2.3}$$

Интегрируя неравенство (2.3) относительно t в пределах от 0 до u, будем иметь:

$$uE_n^2(f)_{2,\gamma} - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \frac{\sin ku}{k} \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma} \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \int_0^u \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\gamma} dt. \tag{2.4}$$

Вновь интегрируя обе части неравенства (2.4) по u в пределах от 0 до τ, получим:

$$\frac{\tau^2}{2} E_n^2(f)_{2,\gamma} - \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 \frac{1-\cos k\tau}{k^2} \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho$$
$$\leq E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \int_0^\tau \int_0^u \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{2,\gamma} dtdu$$

или

$$\frac{\tau^2}{2} E_n^2(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2 (1-\cos k\tau) \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho$$
$$+ E_n^{2-2/m}(f)_{2,\gamma} \cdot \frac{1}{2\alpha_{n,r}^{2/m}} \int_0^\tau \int_0^u \omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)}, t\right)_{2,\gamma} dtdu. \tag{2.5}$$

Используя соотношение (2.3), преобразуем первое слагаемое в неравенстве (2.5), затем, применяя метод интегрирования по частям для второго слагаемого, получим

$$\frac{\tau^2}{2}E_n^{2/m}(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{2n^2\alpha_{n,r}^{2/m}}\left[\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right]. \tag{2.6}$$

Так как неравенство (2.6) имеет место для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$, то для величины, стоящей в левой части равенства (2.1), запишем оценку сверху

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},\tau)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}} \leq (n\tau)^{-m}. \tag{2.7}$$

С целью получения оценки снизу равную величине в правой части неравенства (2.7) достаточно рассмотреть экстремальную функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получаем

$$E_n(f_0)_{2,\gamma} = \left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2}, \quad \omega_m\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} = 2^{m/2}\alpha_{n,r}(1-\cos nt)^{m/2}E_n(f_0)_{2,\gamma}.$$

$$\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du = (n\tau)^2\alpha_{n,r}^{2/m}\left(\int\limits_0^1\rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/m}.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{\alpha_{n,r}E_n(f)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}}$$

$$\geq \frac{\alpha_{n,r}E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\left\{\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},\tau\right)_{2,\gamma} + n^2\int\limits_0^\tau(\tau-u)\omega_m^{2/m}\left(z^r f_0^{(r)},u\right)_{2,\gamma}du\right\}^{m/2}} = (n\tau)^{-m}. \tag{2.8}$$

Сравнивая оценку сверху (2.7) и оценку снизу (2.8), получаем утверждение теоремы 2.1. □

Следует отметить, что экстремальная аппроксимационная характеристика типа (1.2) в пространстве L_2 была рассмотрена в работе [17].

Следствие 2.1. *Для любых τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau \leq \pi/n$, выполняются неравенства*

$$\frac{1}{\alpha_{n,r}(n\tau)^m} \leq \sup_{f\in\mathcal{B}_{2,\gamma}^{(r)}}\frac{E_n(f)_{2,\gamma}}{\omega_m\left(z^r f^{(r)};\tau\right)_{2,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\frac{1}{(n\tau)^2}+\frac{1}{2}\right)^{m/2}. \tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании неравенства (2.6) для произвольной функции $f(z) \in \mathcal{B}^{(r)}_{2,\gamma}$, имеем:

$$\tau^2 E_n^{2/m}(f) \le \frac{1}{n^2 \alpha_{n,r}^{2/m}} \left(1 + \frac{n^2\tau^2}{2}\right) \omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}; \tau)_{2,\gamma}.$$

Откуда следует оценка сверху

$$\frac{E_n(f)_{2,\gamma}}{\omega_m\left(z^r f^{(r)}; \tau\right)_{2,\gamma}} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{(n\tau)^2} + \frac{1}{2}\right)^{m/2}. \tag{2.10}$$

Чтобы получить оценки снизу, заметим, что для экстремальной функции $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}^{(r)}_{2,\gamma}$ при всех значениях $0 < \tau \le \pi/n$

$$\begin{aligned}\omega_m\big(z^r f_0^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma} &= 2^{m/2}\alpha_{n,r}(1 - \cos n\tau)^{m/2} E_n(f_0)_{2,\gamma} = 2^m \alpha_{n,r} \sin^m \frac{n\tau}{2} E_n(f_0)_{2,\gamma} \\ &\le 2^m \alpha_{n,r} \left(\frac{n\tau}{2}\right)^m E_n(f_0)_{2,\gamma} = \alpha_{n,r}(n\tau)^m E_n(f_0)_{2,\gamma},\end{aligned}$$

или

$$\frac{E_n(f_0)_{2,\gamma}}{\omega_m\big(z^r f_0^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma}} \ge \frac{1}{\alpha_{n,r}(n\tau)^m}. \tag{2.11}$$

Из (2.10) и (2.11) следует неравенство (2.9). □

Теорема 2.2. *Пусть* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $\tau > 0$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sigma_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m},$$

где $\sigma_n(\cdot)$ *— любой из вышеперечисленных* n*-поперечников.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем неравенство (2.6) в виде

$$E_n^{2/m}(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}^{2/m} n^2} \left[\frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\big(z^r f^{(r)}, \tau\big)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int\limits_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}\big(z^r f^{(r)}, u\big)_{2,\gamma}\, du\right]. \tag{2.12}$$

Используя определение класса $W_m^{(r)}(\tau)$ из неравенства (2.12) можно получить оценки сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) \le \mathcal{E}(W_m^{(r)}(\tau))_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}. \tag{2.13}$$

Для получения оценки снизу бернштейновского поперечника $b_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma})$ вводим в рассмотрение $n+1$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1} = \left\{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p\|_n \le \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}\right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\tau)$. Для этого требуется доказать, что для произвольного алгебраического полинома $p_n \in S_{n+1}$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int\limits_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du\right]^{m/2} \le 1.$$

Действительно, для произвольного $p_n(z) \in B_{2,\gamma}$ из соотношении (2.2) имеем

$$\omega_m^2(z^r p_n^{(r)}, \tau)_{2,\gamma} \le 2^m \alpha_{n,r}^2 (1 - \cos n\tau)_*^m \|p_n\|_{2,\gamma}^2. \tag{2.14}$$

Тогда

$$\left[\frac{1}{\tau^2}\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, \tau\right)_{2,\gamma} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}\left(z^r p_n^{(r)}, u\right)_{2,\gamma} du\right]^{m/2}$$

$$\le \left[\frac{2}{\tau^2}\alpha_{n,r}^{2/m}(1 - \cos n\tau)\|p_n\|^{2/m} + \left(\frac{n}{\tau}\right)^2 \int_0^\tau 2\alpha_{n,r}^{2/m}(\tau - u)(1 - \cos nu)\|p_n\|^{2/m} du\right]^{m/2} \le 1.$$

Согласно теореме В. М. Тихомирова [2] о поперечнике шара получим оценки снизу для бернштейновского n-поперечника

$$b_n(W_m^{(r)}(\tau), B_{2,\gamma}) \ge b_n(S_{n+1}, B_{2,\gamma}) \ge \frac{1}{\alpha_{n,r} n^m}. \tag{2.15}$$

Учитывая соотношения (1.3), и сопоставляя неравенства (2.13), (2.15), получаем утверждение теоремы 2.2. □

Теорема 2.3. *Пусть для любых натуральных m, n, r функция Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\pi/n)} \ge \left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2} \begin{cases} \left(\dfrac{\pi^2}{2} - \cos n\tau - 1\right)^{m/2}, & \text{если } 0 \le \tau \le \pi/n, \\ \left(2\pi n\tau - \dfrac{\pi^2}{2} - n^2\tau^2\right)^{m/2}, & \text{если } \tau \ge \pi/n. \end{cases} \tag{2.16}$$

Тогда имеет место следующее равенство

$$\gamma_n(W_m^{(r)}(\tau, \Phi), B_{2,\gamma}) = \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right), \tag{2.17}$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $h = \pi/n$. Запишем неравенство (2.6) в виде

$$E_n(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{n^m \tau^m \alpha_{n,r}}\left[\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, \tau)_{2,\gamma} + n^2 \int_0^\tau (\tau - u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, u)_{2,\gamma} du\right]^{m/2}.$$

Имеем:

$$E_n(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда следует оценка сверху для проекционного n-поперечника

$$\Pi_n(W_m^{(r)}(t, \Phi), B_2) \le \mathcal{E}_n(W_m^{(r)}(t, \Phi))_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.18}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим в подпространстве $\mathcal{P}_n$ шар

$$S_{n+1} = \left\{p_n(z) \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi(\pi/n)\right\}$$

и покажем, что он принадлежит классу $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$. Рассуждения проведем для случаев $0\le\tau\le\pi/n$ и $\tau\ge\pi/n$.

Пусть $0\le\tau\le\pi/n$. Используя определение класса $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, а также первое из ограничений (2.16), получим

$$\left(\omega_m^{2/m}(z^r p_n^{(r)},\tau)_{2,\gamma}+n^2\int\limits_0^{\tau}(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right)^{m/2}$$
$$\le 2^{m/2}\alpha_{n,r}\|p_n\|_{2,\gamma}\left[1-\cos n\tau+n^2\int\limits_0^{\pi/n}\left(\frac{\pi}{n}-u\right)(1-\cos nu)du\right]^{m/2}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2}\Phi(\pi/n)\left(\frac{\pi^2}{2}-\cos n\tau-1\right)^{m/2}\le\Phi(\tau). \tag{2.19}$$

Пусть теперь $\tau\ge\pi/n$. Согласно определению класса $W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$, неравенству (2.14) и второму из ограничений (2.16), получаем

$$\left(\omega_m^{2/m}(z^r p_n^{(r)},\tau)_{2,\gamma}+n^2\int\limits_0^{\tau}(\tau-u)\omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)},u)_{2,\gamma}du\right)^{m/2}$$
$$\le 2^{m/2}\alpha_{n,r}\|p_n\|_{2,\gamma}\left[(1-\cos n\tau)_*+n^2\int\limits_0^{\tau}(\tau-u)(1-\cos nu)_*du\right]^{m/2}$$
$$=\left(\frac{2}{\pi^2}\right)^{m/2}\Phi(\pi/n)\left(2\pi n\tau-\frac{\pi^2}{2}-n^2\tau^2\right)^{m/2}\le\Phi(\tau). \tag{2.20}$$

Из неравенств (2.19) и (2.20) вытекает, что $S_{n+1}\subset W_m^{(r)}(\tau,\Phi)$. В силу определения бернштейновского n-поперечника и неравенств (1.3) для рассматриваемых n-поперечников справедливы следующие оценки снизу

$$b_n(W_m^{(r)}(\tau,\Phi),B_{2,\gamma})\ge b_n(S_{n+1},B_{2,\gamma})\frac{1}{\alpha_{n,r}\pi^m}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{2.21}$$

Сопоставляя найденные выше оценку сверху (2.18) и оценку снизу (2.21), получаем требуемое равенство (2.17). □

References

[1] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].

[2] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3(93) (1960), 81–120; англ. пер.:V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.

[3] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.:L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.

[4] М. З. Двейрин, “Поперечники и ε-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функциональный анализ и прил*, **23** (1975), 32–46. [M. Z. Dveyrin, “Widths and ε-entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function Theory, Functional Analysis and their Applications*, **23** (1975), 32–46 (In Russian)].

[5] Н. Айнуллоев, Л. В. Тайков, “Наилучшее приближение в смысле А. Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций”, *Матем. заметки*, **40**:3 (1986), 341–351; англ. пер.:N. Ainulloev, L. V. Taikov, “Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc”, *Math. Notes*, **40**:3 (1986), 699–705.

[6] Ю. А. Фарков, “Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из C_n”, *УМН*, **45**:5 (1990), 197–198; англ. пер.:Yu. A. Farkov, “Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in C_n”, *Russian Math. Surveys*, **45**:5 (1990), 229–231.

[7] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.

[8] С. Б. Вакарчук, “О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости”, *Укр. матем. журн.*, **56**:9 (2004), 1155–1171; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:9 (2004), 1371–1390.

[9] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, Дж. Дж. Заргаров, “О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди”, Тр. ИММ УрО РАН, **27**, № 4, 2021, 239–254. [M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, J. J Zargarov, “On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **27**, no. 4, 2021, 239–254 (In Russian)].

[10] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$”, *Доклады Академии наук*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.

[11] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, “О поперечниках классов функций, аналитических в круге”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 3–21; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Sbornik Mathematics*, **201**:8 (2010), 1091–1110.

[12] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:6 (2019), 1414–1423; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “Best linear approximation methods for some classes of analytic functions on the unit disk”, *Siberian Mathematical Journal*, **60**:6 (2019), 1101–1108.

[13] М. Р. Лангаршоев, “Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана”, *Чебышевский сб.*, **22**:2 (2021), 135–144. [M. R. Langarshoev, “Jackson–Stechkin type inequalities and widths of classes of functions in the weighted Bergman space”, *Chebyshevskii Sb.*, **22**:2 (2021), 135–144 (In Russian)].

[14] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам в L_2”, *Изв. вузов. Матем.*, **64**:6 (2020), 65–72; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusaynov, “Approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems in L_2”, *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, **64**:6 (2020), 56–62.

[15] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[16] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. журн.*, **43**:1 (1991), 125–129; англ. пер.:V. V. Shalaev, “Widths in L_2 classes of differentiable functions that can be determined by higher-order moduli of continuity”, *Ukrainian Math. J.*, **43**:1 (1991), 104–107.

[17] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журн.*, **56**:11 (2004), 1458–1466; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, A. N. Shchitov, “The best polynomial approximations in L_2 and widths of some classes of functions”, *Ukrainian Math. J.*, **56**:11 (2004), 1738–1747.

Информация об авторе

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, преподаватель математики. Подмосковный колледж «Энергия», г. Старая Купавна, Московская обл., Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Поступила в редакцию 07.09.2022 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physics and Mathematics, Mathematics Teacher. College near Moscow “Energia”, Staraya Kupavna, Moscow Region, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3278-4781

Received 07.09.2022
Reviewed 14.11.2022
Accepted for press 24.11.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374

УДК 517.9

О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Аннотация. Рассматривается регулярная параметрическая нелинейная (невыпуклая) задача на условный экстремум с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств. Ограничения задачи содержат аддитивно входящие в них параметры, что позволяет применять для ее исследования аппарат «нелинейного» метода возмущений. Множество допустимых элементов задачи представляет собою полное метрическое пространство, а сама она может и не иметь решения. Регулярность задачи понимается в смысле существования у нее обобщенного вектора Куна–Таккера. В рамках идеологии метода множителей Лагранжа формулируется и доказывается регуляризованная недифференциальная теорема Куна–Таккера, основным предназначением которой является устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей в рассматриваемой задаче. Эти минимизирующие последовательности конструируются из субминималей (минималей) модифицированной функции Лагранжа, взятой при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. Конструкция модифицированной функции Лагранжа является прямым следствием субдифферециальных свойств полунепрерывной снизу и вообще говоря невыпуклой функции значений как функции параметров задачи. Регуляризованная теорема Куна–Таккера «преодолевает» свойства неустойчивости своего классического аналога, является регуляризирующим алгоритмом и служит теоретической основой для создания алгоритмов практического решения задач на условный экстремум.

Ключевые слова: условный экстремум, нелинейная параметрическая задача, операторное ограничение, недифференциальная теорема Куна–Таккера, метод возмущений, функция значений, проксимальный субградиент, некорректная задача, двойственная регуляризация, обобщенная минимизирующая последовательность, модифицированная функция Лагранжа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00199_а).

Для цитирования: *Сумин М.И.* О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум // Вестник российских университетов.Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 351–374. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374

On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in a nonlinear problem for constrained extremum

Mikhail I. SUMIN
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
Lobachevskii Nizhnii Novgorod State University
23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Abstract. We consider a regular parametric nonlinear (nonconvex) problem for constrained extremum with an operator equality constraint and a finite number of functional inequality constraints. The constraints of the problem contain additive parameters, which makes it possible to use the apparatus of the "nonlinear" perturbation method for its study. The set of admissible elements of the problem is a complete metric space, and the problem itself may not have a solution. The regularity of the problem is understood in the sense that it has a generalized Kuhn–Tucker vector. Within the framework of the ideology of the Lagrange multiplier method, a regularized nondifferential Kuhn–Tucker theorem is formulated and proved, the main purpose of which is the stable generation of generalized minimizing sequences in the problem under consideration. These minimizing sequences are constructed from subminimals (minimals) of the modified Lagrange function taken at the values of the dual variable generated by the corresponding regularization procedure for the dual problem. The construction of the modified Lagrange function is a direct consequence of the subdifferential properties of a lower semicontinuous and, generally speaking, nonconvex value function as a function of the problem parameters. The regularized Kuhn–Tucker theorem "overcomes" the instability properties of its classical counterpart, is a regularizing algorithm, and serves as a theoretical basis for creating algorithms of practical solving problems for constrained extremum.

Keywords: constrained extremum, nonlinear parametric problem, operator constraint, nondifferential Kuhn–Tucker theorem, perturbation method, value function, proximal subgradient, ill-posed problem, dual regularization, generalized minimizing sequence, modified Lagrange function

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00199_a).

Mathematics Subject Classification: 47J06, 49K27, 90C46, 65J20, 90C31.

For citation: Sumin M.I. O regulyarizatsii nedifferentsial'noy teoremy Kuna–Takkera v nelineynoy zadache na uslovnyy ekstremum [On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in a nonlinear problem for constrained extremum]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 351–374. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-351-374. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Принцип Лагранжа (ПЛ) является основой таких современных математических дисциплин, как теория экстремальных задач, оптимальное управление [1]. Он лежит также в основе современных численных методов условной оптимизации и, стало быть, имеет непосредственное отношение к практическому решению самых различных оптимизационных задач [2]. Вместе с тем, при решении большого числа актуальных задач условной оптимизации возникающих, в частности, при исследовании проблем современного естествознания, непосредственное применение ПЛ связано с трудностями принципиального характера, вызванными хорошо известными свойствами некорректности таких задач [2], а, как следствие, и свойствами некорректности самого ПЛ [3–5]. Здесь мы говорим о непосредственном применении ПЛ, если в нашем распоряжении имеется тот или иной алгоритм (оператор), который позволяет выделять удовлетворяющие ПЛ допустимые элементы из составляющих его соотношений. За прошедшие последние примерно шесть десятилетий центральную роль при решении различных некорректных задач играли те или иные конструкции функционалов Тихонова [2, 6, 7], а приближения к их решениям строились из субминималей (минималей) этих функционалов. Автор данной статьи придерживается той точки зрения, в соответствии с которой многие некорректные задачи могут эффективно решаться и в рамках идеологии метода множителей Лагранжа, а их решения могут эффективно аппроксимироваться субминималями (минималями) соответствующих функционалов Лагранжа [3–5].

В работе [3] (см. также работы [4, 5] и их библиографию) было предложено рассматривать ПЛ в задачах условной оптимизации как математический объект, свойства некорректности которого естественным образом подводят к необходимости его регуляризации в соответствии с правилами теории некорректных задач [6, 7]. В основе регуляризации ПЛ лежат методы двойственной регуляризации [8, 9], при этом центральная роль в задачах на условный экстремум естественным образом переходит (подробности в [3–5]) от классического понятия оптимального элемента к понятию обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) [10, 11]. В математическом программировании такие последовательности часто называют оптимальными обобщенными планами [10], в оптимальном управлении — минимизирующими приближенными решениями [11].

В работах [3–5] (см. также библиографию этих работ) было показано, что регуляризация ПЛ применительно к выпуклым задачам на условный экстремум, в зависимости от выбранного способа двойственной регуляризации, приводит к различным регуляризованным ПЛ, представляющим собою регуляризирующие алгоритмы. Результатом действия этих алгоритмов является устойчивое конструирование ОМП в задачах условной оптимизации. В частности, в работе [5] центральное внимание было уделено обсуждению и обоснованию того факта, что указанные регуляризирующие алгоритмы могут применяться для решения большого класса некорректных задач сводящихся к «простейшей» задаче на условный экстремум с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве

$$(P) \qquad \|z\|^2 \to \inf, \quad Az = h, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Подчеркнем при этом, что задача (P) является той «базовой» задачей, с которой началось развитие современной теории некорректных задач и для которой разработаны хорошо известные классические алгоритмы этой теории, в частности метод регуляризации Тихонова [6, 7] (см. также [2]) в различных его вариантах.

Данную работу можно рассматривать как продолжение работ [5, 12]. В отличие от [5] она опирается на «нелинейную» версию основанной на двойственности регуляризации [9] с использованием более поздних в этом направлении результатов работ [13, 14]. В ней показывается как регуляризация ПЛ может быть организована в случае нелинейной (невыпуклой) задачи на условный экстремум с множеством допустимых элементов из полного метрического пространства, а также с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве и конечным числом функциональных ограничений-неравенств, содержащими аддитивно входящие в эти ограничения параметры. Наличие параметров в ограничениях задачи позволяет применить при ее исследовании «нелинейный» вариант метода возмущений (о методе возмущений для выпуклых задач на условный экстремум см. в [1, п. 3.3.2]). Работа призвана, в частности, показать, что большая часть перечисленных в [5] характеристических свойств регуляризованных ПЛ в случае выпуклых задач сохраняется и в задачах нелинейных. В частности, получаемую ниже регуляризованную теорему Куна–Таккера естественно трактовать как «теоретическую базу» для создания устойчивых методов практического решения нелинейных задач рассматриваемого класса. Одновременно, «более привычная» недифференциальная теорема Куна–Таккера, как критерий обычной оптимальности в рассматриваемой ниже нелинейной задаче на условный экстремум, может быть найдена в работе [12] (см. теорему 2.1 в [12]).

Существенной особенностью данной работы, по сравнению с [5], является то, что здесь внимание уделяется лишь регулярному случаю нелинейной задачи на условный экстремум. При этом регулярность задачи понимается в смысле существования в ней обобщенного вектора Куна–Таккера (см. раздел 2.2.6). Именно по этой причине речь в статье идет о регуляризации теоремы Куна–Таккера, что нашло отражение и в ее названии. Так как в регулярных задачах на условный экстремум проблема невыполнимости ПЛ, по сути дела, именно за счет условия регулярности, снимается, то некорректность теоремы Куна–Таккера в рамках рассматриваемой здесь задачи проявляет себя лишь в форме ее неустойчивости [3–5]. Подчеркнем, одновременно, что указанную неустойчивость можно наблюдать уже в самых простых регулярных конечномерных задачах вида (P) (см., в частности, пример 3 в [3], а также пример 5.1 в [13]).

Применение «нелинейного» варианта метода возмущений при доказательстве регуляризованной недифференциальной теоремы Куна–Таккера опирается на одну хорошо известную конструкцию современного негладкого анализа [15, 16]. В отличие от выпуклого случая [5], в котором центральную роль играли субдифференциалы (в смысле выпуклого анализа) выпуклой полунепрерывной снизу функции значений, ниже центральную роль в нелинейной (вообще говоря, невыпуклой) задаче играет уже субдифференциал (в смысле нелинейного анализа) ее нелинейной полунепрерывной снизу функции значений. В роли последнего выступает так называемый проксимальный субградиент [15, 16]. Важнейшее значение при этом имеет тот факт, что проксимальный субградиент «имеет смысл» в точках плотного множества в эффективном множестве функции значений нелинейной задачи (так называемая плотность субдифференцируемости, см. раздел 2.2.2).

Итак, основные усилия в работе направлены на получение регуляризованной недифференциальной теоремы Куна–Таккера (теоремы Куна–Таккера в недифференциальной форме), главное предназначение которой — устойчивое конструирование ОМП в рассматриваемой задаче на условный экстремум из субминималей (минималей) ее функции Лагранжа, а точнее, ее модифицированной функции Лагранжа (МФЛ), взятых при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующей процедурой регуляризации (стабилизации) по Тихонову модифицированной двойственной задачи. При этом здесь существенно то, что вид МФЛ полностью определяется видом используемого «нелинейного субдифференциала» полунепрерывной снизу функции значений задачи. Различные конструкции МФЛ хорошо известны в научной литературе (см., например, книги [17, 18] и их библиографию), однако, в отличие от [17, 18], ниже конструкция МФЛ выступает как следствие «нелинейной субдифференцируемости» полунепрерывной снизу функции значений нелинейной задачи в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Как и в [5], наряду с понятием ОМП, центральным в работе является и жестко с ним связанное понятие ОМП-образующего оператора (алгоритма) (см. определение 1.1) [19,20]. Понятие ОМП-образующего оператора так же, как и в [19, 20], «встраивается» в получаемую регуляризованную теорему Куна–Таккера, превращая ее в соответствующий регуляризирующий алгоритм в смысле определения 1.1, основное предназначение которого состоит в генерировании ОМП, т. е. последовательностей допустимых элементов, которые сходятся одновременно по функции и «по ограничениям». Одновременно подчеркнем, что решение рассматриваемой ниже регулярной нелинейной задачи на условный экстремум, вообще говоря, не обязано существовать. Однако, в случае существования решения (см. замечания 1.1, 2.3) конструируемая ОМП, в зависимости от свойств задачи, в том или ином смысле может сходиться к решению (см. замечание 2.4). Заметим, наконец, что в самое последнее время регуляризация ПЛ была рассмотрена применительно к регулярной нелинейной задаче оптимального управления в работе [20].

Конструированием ОМП из субминималей (минималей) МФЛ излагаемая ниже регуляризация теоремы Куна–Таккера существенно отличается от регуляризации по Тихонову нелинейных задач условной оптимизации [2, 7], где минимизирующая последовательность строится из субминималей (минималей) функционалов Тихонова. Отметим, что чисто с практической точки зрения для процесса построения ОМП в рассматриваемой ниже задаче наиважнейшее значение имеет «качество» решения задачи минимизации МФЛ. Если такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, и, к тому же, имеется аналогичная «возможность вычисления» значений двойственной переменной, вырабатываемой процедурой регуляризации (стабилизации) по Тихонову модифицированной двойственной задачи, то и в исходной задаче на условный экстремум «устойчиво» конструируется ОМП.

1. Постановка параметрической нелинейной задачи на условный экстремум

Рассмотрим параметрическую (т. е. зависящую от параметров) каноническую [1, п.3.3.1] задачу минимизации

$$(P_{p,r}) \qquad f(z) \to \inf, \ \ g(z) = p, \ \ h(z) \le r, \ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывный функционал, $g : \mathcal{D} \to H$ — непрерывный оператор с компактной областью значений $g(\mathcal{D})$, $h \equiv (h_1, \ldots, h_m) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ — непрерывный векторный функционал, $\mathcal{D} \subset Z$ — замкнутое ограниченное множество в полном метрическом пространстве Z с метрикой ρ, H — гильбертово пространство, $p \in H$, $r \equiv (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}^m$

— параметры. Подчеркнем, что здесь и ниже компактность множества понимается в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (см., например, [21, п. 19.3], часто в подобных ситуациях используется термин предкомпактность). Будем также считать, что

$$
\begin{gathered}
|f(z_1)-f(z_2)| \le L\rho(z_1,z_2), \quad \|g(z_1)-g(z_2)\| \le L\rho(z_1,z_2), \\
|h(z_1)-h(z_2)| \le L\rho(z_1-z_2) \ \forall\, z_1,\, z_2 \in \mathcal{D},
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

где $L>0$ не зависит от $z_1,\, z_2\in\mathcal{D}$.

Обозначим: $\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} \equiv \{z\in\mathcal{D}:\ \|g(z)-p\|\le\epsilon,\ \min\limits_{x\in\mathbb{R}^m_-}|h(z)-r-x|\le\epsilon\}$, $\epsilon\ge 0$. Здесь и ниже: $\mathbb{R}^m_-\equiv\{x\in\mathbb{R}^m:\ x\le 0\}$, $\mathbb{R}^m_+\equiv\{x\in\mathbb{R}^m:\ x\ge 0\}$. Определим функцию значений $\beta:\ H\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$ задачи ($P_{p,r}$):

$$
\beta(p,r)\equiv\lim_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon(p,r),\quad \beta_\epsilon(p,r)\equiv\inf_{z\in\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r}} f(z),\qquad \beta_\epsilon(p,r)\equiv+\infty,\ \text{если } \mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r}=\emptyset.
$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p,r)\le\beta_0(p,r)$, где $\beta_0(p,r)\equiv\inf\limits_{z\in\mathcal{D}^0_{p,r}} f(z)$ — классическое значение задачи ($P_{p,r}$). Справедлива следующая лемма, в которой формулируется важное для дальнейших построений характеристическое свойство функции значений β. Ее доказательство проводится точно так же, как и доказательство такого же утверждения в [12, лемма 1.2].

Лемма 1.1. *Функция значений $\beta:\ H\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$ является полунепрерывной снизу.*

Определим обобщенную минимизирующую последовательность (ОМП) в задаче ($P_{p,r}$), т. е. последовательность элементов $z^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$, такую, что $f(z^i)\le\beta(p,r)+\delta^i$, $z^i\in\mathcal{D}^{\epsilon^i}_{p,r}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i=1,2,\dots$.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f}\equiv\{f,\,g,\,h\}$, каждый из которых состоит из непрерывного на $\mathcal{D}$ функционала f, непрерывного оператора g с компактной областью значений $g(\mathcal{D})$ и непрерывного векторного функционала h с указанными выше свойствами (1.1) с независящей от набора постоянной L. Определим наборы невозмущенных (точных) f^0 и возмущенных f^δ исходных данных соответственно: $\mathsf{f}^0\equiv\{f^0,\,g^0,\,h^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta\equiv\{f^\delta,\,g^\delta,\,h^\delta\}$, $\delta\in(0,\delta_0]$, $\delta_0>0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки

$$
\begin{gathered}
|f^\delta(z)|,\ \|g^\delta(z)\|,\ |h^\delta(z)|\le N, \\
|f^\delta(z)-f^0(z)|,\ \ \|g^\delta(z)-g^0(z)\|,\ \ |h^\delta(z)-h^0(z)|\le K\delta\ \ \forall\, z\in\mathcal{D},
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

где $K>0,\ N>0$ — некоторые не зависящие от δ постоянные.

Обозначим задачу ($P_{p,r}$), функционал f, оператор g, векторный функционал h, множество $\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r}$ и т.п., соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta\in[0,\delta_0]$, через ($P^\delta_{p,r}$), f^δ, g^δ, h^δ, $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon}_{p,r}$, соответственно. За функцией значений точной задачи ($P^0_{p,r}$) закрепим обозначение β. Введем центральное для всей статьи определение ОМП-образующего оператора [19, 20] для задачи условной оптимизации ($P^0_{p,r}$). В нем фиксируется основное характеристическое свойство ОМП, заключающееся в их «сходимости» одновременно по функции и «по ограничениям», но, вообще говоря, не по аргументу.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k,\ k = 1, 2, \ldots,$ есть сходящаяся к нулю при $k \to \infty$ последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k,\ k = 1, 2, \ldots,$ оператор (вообще говоря, многозначный) $R_{p,r}(\cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^k}, g^{\delta^k}, h^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $Z^{\delta^k}_{p,r} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче $(P^0_{p,r})$, если любая последовательность $z^{\delta^k} \in Z^{\delta^k}_{p,r},\ k = 1, 2, \ldots,$ есть ОМП в этой задаче.

З а м е ч а н и е 1.1. Обсуждение условий, при которых задача $(P^0_{p,r})$ разрешима, см. ниже в замечании 2.3. В свою очередь, в замечании 2.4 можно найти обсуждение условий, при которых конструируемые ниже ОМП обладают свойствами слабой или сильной сходимости к решениям задачи $(P^0_{p,r})$, если последняя разрешима, в случае гильбертова пространства Z.

Далее нас будет интересовать алгоритм устойчивого построения ОМП в регулярной задаче $(P^0_{p,r})$, состоящих из субминималей (минималей) ее МФЛ, двойственная переменная в которой выбирается в соответствии с процедурой регуляризации по Тихонову [6] модифицированной двойственной к $(P^0_{p,r})$ задачи. Этот регуляризирующий в смысле определения 1.1 алгоритм естественно называть регуляризованной теоремой Куна–Таккера в задаче на условный экстремум $(P^0_{p,r})$, так как составляющие его соотношения «структурно устроены» так же, как и соотношения соответствующей недифференциальной модифицированной теоремы Куна–Таккера [12, теорема 2.1] в этой задаче.

2. Метод возмущений и регуляризованная теорема Куна–Таккера

Наличие параметров (p, r) в ограничениях задачи $(P^0_{p,r})$ означает, что в статье имеется условие применения так называемого метода возмущений (о методе возмущений в случае выпуклой задачи на условный экстремум см. в [1, п. 3.3.2]). Его применение в случае нелинейной задачи $(P^0_{p,r})$ начнем с формулировки вспомогательной эквивалентной задачи с операторным ограничением-равенством.

2.1. Эквивалентная задача с операторным ограничением-равенством и ее МФЛ. Следуя хорошо известному приему (см., например, [17, с. 165]), наряду с задачей на условный экстремум $(P_{p,r})$ с ограничениями типа равенства и неравенства рассмотрим вспомогательную эквивалентную задачу с операторным ограничением-равенством (в [17, с. 165] этот прием применялся в случае разрешимой задачи на условный экстремум). Для этого заметим, что задача $(P_{p,r})$ эквивалентна задаче

$$(\widetilde{P}_{p,r}) \qquad f(z) \to \inf,\ \ g(z) = p,\ \ h(z) + y = r,\ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,\ \ y \in \mathbb{R}^m_+$$

в том смысле, что функции значений задач $(P_{p,r})$ и $(\widetilde{P}_{p,r})$ совпадают, а последовательность $z^i \in \mathcal{D},\ i = 1, 2, \ldots,$ является ОМП в задаче $(P_{p,r})$ тогда и только тогда, когда для некоторой сходящейся к нулю последовательности $\xi^i \in \mathbb{R}^m_+,\ i = 1, 2, \ldots,$ последовательность $(z^i, -(h(z^i) - r - \xi^i)),\ i = 1, 2, \ldots,$ является таковой, т. е. ОМП, в задаче $(\widetilde{P}_{p,r})$.

Определим формально модифицированную функцию Лагранжа (МФЛ) в смысле [17, с. 165] для задачи $(\widetilde{P}_{p,r})$

$$\widetilde{L}^c_{p,r}(z, y, \lambda, \mu) \equiv f(z) + \langle\lambda, g(z) - p\rangle + \langle\mu, h(z) + y - r\rangle + \frac{c}{2}\|g(z) - p\|^2 + \frac{c}{2}|h(z) + y - r|^2,$$
$$z \in \mathcal{D},\ \ y \in \mathbb{R}^m_+,\ \ c \geq 0.$$

Определим далее формально и соответствующую модифицированную двойственную задачу для задачи ($\widetilde{P}_{p,r}$)

$$\widetilde{V}^c_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv \inf_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^c_{p,r}(z,y,\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m. \tag{2.1}$$

Функция $\widetilde{V}^c_{p,r}(\cdot,\cdot)$ в силу равенства

$$\inf_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^c_{p,r}(z,y,\lambda,\mu) = \inf_{z\in\mathcal{D}}\min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^c_{p,r}(z,y,\lambda,\mu),$$

справедливого благодаря тому, что $\widetilde{L}^c_{p,r}$ достигает минимума при каждых z, λ, μ (как сильно выпуклая по y функция на выпуклом замкнутом множестве $\mathbb{R}^m_+$), приобретает вид

$$\widetilde{V}^c_{p,r}(\lambda,\mu) = \inf_{z\in\mathcal{D}}\min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^c_{p,r}(z,y,\lambda,\mu)$$

$$= \inf_{z\in\mathcal{D}}\bigl(f(z) + \langle\lambda, g(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g(z)-p\|^2 + \min_{y\in\mathbb{R}^m_+}(\langle\mu, h(z)+y-r\rangle + \frac{c}{2}|h(z)+y-r|^2)\bigr)$$

$$= \inf_{z\in\mathcal{D}}\bigl(f(z) + \langle\lambda, g(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g(z)-p\|^2 + \sum_{i=1}^m \min_{y_i\in\mathbb{R}^1_+}((\mu_i, h_i(z)+y_i-r_i) + \frac{c}{2}(h_i(z)+y_i-r_i)^2)\bigr)$$

$$\equiv \inf_{z\in\mathcal{D}} L^c_{p,r}(z,\lambda,\mu),$$

где принято обозначение

$$L^c_{p,r}(z,\lambda,\mu)$$

$$\equiv f(z) + \langle\lambda, g(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g(z)-p\|^2 + \sum_{i=1}^m \min_{y_i\in\mathbb{R}^1_+}((\mu_i, h_i(z)+y_i-r_i) + \frac{c}{2}(h_i(z)+y_i-r_i)^2).$$

Определенная таким образом функция $L^c_{p,r}$ совпадает по своей конструкции с известной МФЛ для исходной задачи с ограничениями типа равенства и неравенства ($P_{p,r}$) (подробности см. в [17, с. 167]). При этом, как известно, [17, с. 167]) справедливо равенство

$$L^c_{p,r}(z,\lambda,\mu) = f(z) + \langle\lambda, g(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g(z)-p\|^2 + \frac{1}{2c}\sum_{i=1}^m\{[\max\{0,\mu_i + c(h_i(z)-r_i)\}]^2 - \mu_i^2\},$$

$$z\in\mathcal{D},\ (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m,\ c>0.$$

2.2. Проксимальный субградиент, его «плотность», МФЛ, модифицированная двойственная задача, обобщенный вектор Куна–Таккера. В данном разделе мы получим конструкцию МФЛ на основе свойств обобщенной субдифференцируемости нелинейной полунепрерывной снизу функции значений β задачи ($P_{p,r}$), после чего вновь определим модифицированную двойственную задачу и определим обобщенный вектор Куна–Таккера исходной задачи ($P_{p,r}$).

2.2.1. Проксимальный субградиент полунепрерывной снизу функции в гильбертовом пространстве. Для получения естественным путем конструкции МФЛ в силу свойств субдифференцируемости β нам понадобится важное понятие проксимальной нормали к замкнутому множеству и соответствующее понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции в гильбертовом пространстве (см., например, [15, раздел 4А]).

О п р е д е л е н и е 2.1. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \leq M \|s - \bar{s}\|^2 \ \ \forall\, s \in S. \tag{2.2}$$

Множество всех таких векторов ζ, представляющее собой конус, обозначим через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и назовем проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{\operatorname{epi} f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначим через $\partial^P f(\bar{x})$ и назовем проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

З а м е ч а н и е 2.1. Неравенство (2.2) эквивалентно (см., например, лемму 3C.2 в [15]) включению $\bar{s} \in Pr_S(\bar{s} + \frac{1}{2M}\zeta)$. Другими словами, ζ есть проксимальная нормаль к S в $\bar{s}$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ есть ближайшая в S точка к некоторой точке вида $\bar{s} + t\zeta$, $t > 0$.

Справедлива (см., например, [15, утверждение 4A.3])

Лемма 2.1. *Пусть H — гильбертово пространство, $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, т. е. $\zeta \in \partial^P f(x)$, тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \leq f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \ \ \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \|x' - \bar{x}\| < \delta\}.$$

2.2.2. «Плотность» проксимального субградиента. Подчеркнем, что важнейшим характеристическим свойством полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве является то, что множество тех точек, в которых функция имеет проксимальный субградиент, является достаточно богатым. Справедлива следующая [16, гл. 1, теорема 3.1]

Лемма 2.2. *Пусть в гильбертовом пространстве H задана полунепрерывная снизу функция f. Тогда множество $\{x \in H : \partial^P f(x) \neq \emptyset\}$ всюду плотно в $\operatorname{dom} f$.*

2.2.3. Неположительность второй компоненты проксимального субградиента функции значений. Вернемся далее к рассмотрению полунепрерывной снизу функции значений $\beta : H \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ в задачах ($P_{p,r}$) и ($\widetilde{P}_{p,r}$), напомнив одновременно, что в качестве множества допустимых элементов используется множество $\mathcal{D}$. Введем обозначение: $S_\delta(p,r) \equiv \{(p',r') \in H \times \mathbb{R}^m : \|(p',r') - (p,r)\| < \delta\}$.

Если точка $(p,r) \in \operatorname{dom}\beta$ такова, что $\partial^P \beta(p,r) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P \beta(p,r)$, то из леммы 2.1 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки (p,r) и элемента $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r)$, $\zeta_p \in H$, $\zeta_r \in \mathbb{R}^m$) такие, что

$$\beta(p,r) - \langle \zeta, (p,r) \rangle \leq \beta(p',r') - \langle \zeta, (p',r') \rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r - r'|^2 \ \ \forall\, (p',r') \in S_\delta(p,r). \tag{2.3}$$

Так как функция β является функцией значений в задаче с ограничениями типа равенства и неравенства ($P_{p,r}$), то можно показать, что компонента $\zeta_r \equiv (\zeta_{r,1}, \ldots, \zeta_{r,m})$ элемента ζ является вектором из $\mathbb{R}^m$ с неположительными компонентами: $\zeta_{r,i} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Действительно, справедлива

Лемма 2.3. *Вектор* ζ_r *при сформулированных условиях неположителен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, пусть z^i, $i = 1, 2, \ldots,$ — ОМП в задаче $(P_{p,r})$, т. е. $f(z^i) \le \beta(p,r) + \epsilon^i$, $z^i \in \mathcal{D}^{\epsilon^i}_{p,r}$, $i = 1, 2, \ldots,$ $\epsilon^i \to 0$, $i \to \infty$, где $\mathcal{D}^{\epsilon}_{p,r} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|g(z) - p\| \le \epsilon,\ h_j(z) \le r_j + \epsilon,\ j = 1, \ldots, m\}$, $\epsilon \ge 0$. Предполагая, что в задаче $(P_{p,r})$ выполняется условие непустоты проксимального субградиента $\partial^P \beta(p,r) \ne \emptyset$ с вектором $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p,r)$ и применяя лемму 2.1, можем утверждать, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки (p,r) и элемента ζ) такие, что

$$\begin{gathered}\beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \le \beta(p',r') - \langle \zeta_p, p'\rangle - \langle \zeta_r, r'\rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 \\ \forall\, (p',r') \in S_\delta(p,r) \equiv \{(p',r') \in H \times \mathbb{R}^m : \|(p',r') - (p,r)\| < \delta\}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Прежде всего заметим, что последовательность z^i, $i = 1, 2, \ldots$ является минимизирующей в том же смысле (в смысле ОМП) в вспомогательной расширенной задаче с $\bar\delta < \delta$

$$\begin{gathered}f(z) - \langle \zeta_p, p'\rangle - \langle \zeta_r, r'\rangle + R\|p' - p\|^2 + R|r' - r|^2 \to \inf,\quad (z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar\delta}(p,r), \\ g(z) = p',\quad h(z) \le r',\end{gathered} \tag{2.5}$$

так как последовательность (z^i, p, r), $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered}f(z^i) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \le \beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle + \epsilon^i, \\ \|g(z^i) - p\| \le \epsilon^i,\quad h_j(z^i) - r_j \le \epsilon^i,\quad j = 1, \ldots, m,\end{gathered} \tag{2.6}$$

а обобщенная нижняя грань $\tilde\beta$ в задаче (2.5) равна $\tilde\beta = \beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \equiv \alpha$. Покажем это. Во-первых, так как последовательность (z^i, p, r), $i = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет соотношениям (2.6), то $\tilde\beta \le \beta(p,r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle$. Предположим, во-вторых, что $\tilde\beta < \alpha$. Это значит, что существует последовательность $(\bar z^s, p^s, r^s) \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar\delta}(p,r)$ такая, что

$$\begin{gathered}f(\bar z^s) - \langle \zeta_p, p^s\rangle - \langle \zeta_r, r^s\rangle + R\|p^s - p\|^2 + R|r^s - r|^2 \le \alpha - \kappa,\ s = 1, 2, \ldots,\ \ \kappa > 0, \\ \|g(\bar z^s) - p^s\| \le \epsilon^s,\quad h_j(\bar z^s) - r^s_j \le \epsilon^s,\quad j = 1, \ldots, m,\quad \epsilon^s \to 0,\quad s \to \infty.\end{gathered} \tag{2.7}$$

В силу ограниченности $\mathcal{D}$ и замкнутости шара $\overline{S}_{\bar\delta}(p,r)$, а также компактности образа оператора g и сходимости $\|g(\bar z^s) - p^s\| \to 0$, $s \to \infty$, можно без ограничения общности считать, что $(p^s, r^s) \to (\bar p, \bar r) \in \overline{S}_{\bar\delta}(p,r)$, $s \to \infty$. Тогда, применяя эти предельные соотношения в (2.7), можем записать, что

$$\begin{gathered}f(\bar z^s) - \langle \zeta_p, \bar p\rangle - \langle \zeta_r, \bar r\rangle + R\|\bar p - p\|^2 + R|\bar r - r|^2 \le \alpha - \kappa + \bar\epsilon^s,\quad s = 1, 2, \ldots, \\ \|g(\bar z^s) - \bar p\| \le \bar\epsilon^s,\quad h_j(\bar z^s) - \bar r_j \le \bar\epsilon^s,\quad j = 1, \ldots, m,\quad \bar\epsilon^s \to 0,\quad s \to \infty.\end{gathered}$$

Последние соотношения, с учетом определения обобщенной нижней грани, означают, что выполняется неравенство

$$\beta(\bar p, \bar r) - \langle \zeta_p, \bar p\rangle - \langle \zeta_r, \bar r\rangle + R\|\bar p - p\|^2 + R|\bar r - r|^2 \le \alpha - \kappa,$$

которое находится в противоречии с неравенством (2.4). Таким образом, равенство $\tilde\beta = \alpha$ доказано.

Далее, так как $\tilde{\beta} = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \tilde{\beta}_\epsilon$, а

$$\tilde{\beta}_\epsilon \equiv \inf_{\substack{(z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r): \\ \|g(z)-p'\| \le \epsilon,\ h_j(z)-r'_j \le \epsilon,\ j=1,\dots,m}} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2,$$

то можно утверждать, что для элементов минимизирующей последовательности (z^i, p, r), $i = 1, 2, \dots$ в задаче (2.5) выполняются соотношения

$$f(z^i) - \langle \zeta_p, p \rangle - \langle \zeta_r, r \rangle$$

$$\le \inf_{\substack{(z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r): \\ \|g(z)-p'\| \le \hat{\epsilon}^i,\ h_j(z)-r'_j \le \hat{\epsilon}^i,\ j=1,\dots,m}} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2 + \hat{\epsilon}^i$$

при $\hat{\epsilon}^i \to 0$, $i \to \infty$. Применяя в силу последнего неравенства к непрерывному на полном метрическом пространстве $\{(z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r) : \|g(z)-p'\| \le \hat{\epsilon}^i,\ h_j(z) - r'_j \le \hat{\epsilon}^i,\ j = 1,\dots,m\}$, функционалу $f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2$, $(z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r)$ вариационный принцип Экланда (см. [22]), получаем последовательность элементов

$$(z^{i,1}, p^i, r^i) \in \{(z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r) : \|g(z)-p'\| \le \hat{\epsilon}^i,\ h_j(z) - r'_j \le \hat{\epsilon}^i,\ j = 1,\dots,m\},$$

$i = 1, 2, \dots,$ такую, что

$$\rho(z^i, z^{i,1}) + \|p - p^i\| + |r - r^i| \le \sqrt{\hat{\epsilon}^i} \tag{2.8}$$

и каждая тройка $(z^{i,1}, p^i, r^i)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} f(z) - \langle \zeta_p, p' \rangle - \langle \zeta_r, r' \rangle + R\|p'-p\|^2 + R|r'-r|^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^i}(\rho(z, z^{i,1}) + \|p'-p^i\| + |r'-r^i|) \to \min, \\ (z,p',r') \in \mathcal{D} \times \overline{S}_{\bar{\delta}}(p,r), \quad \|g(z)-p'\| \le \hat{\epsilon}^i, \quad h_j(z) - r'_j \le \hat{\epsilon}^i, \quad j = 1,\dots,m. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Подставим в задачу (2.9) оптимальные значения $z = z^{i,1}$, $p' = p^i$. Тогда задача (2.9) примет вид конечномерной задачи выпуклого программирования с m ограничениями-неравенствами (в силу (2.8) можно считать, что $|r^i - r| < \bar{\delta}$)

$$-\langle \zeta_r, r' \rangle + R|r'-r|^2 + \sqrt{\hat{\epsilon}^i}|r'-r^i| \to \min,\ \ h_j(z^{i,1}) - r'_j \le \hat{\epsilon}^i,\ j = 1,\dots,m, \tag{2.10}$$

решением которой является точка r^i. В задаче (2.10) может быть применена субдифференциальная теорема Куна–Таккера [1, с. 262], после записи субдифференциального равенства которой можно перейти в нем к пределу при $i \to \infty$ ($r^i \to r$, $\hat{\epsilon}^i \to 0$, $i \to \infty$). Тогда, как результат, окончательно получаем существование вектора множителей Лагранжа $\mu_j \ge 0$, $j = 1,\dots,m$ такого, что выполняется равенство $-\zeta_r = \mu$, где $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$. Одновременно, записывая соотношение дополняющей нежесткости при каждом i и используя предельное соотношение $z^i - z^{i,1} \to 0$, $i \to \infty$, получаем предельное соотношение $\mu_j(h_j(z^i) - r_j) \to 0$, $i \to \infty$. Таким образом, компонента ζ_r неположительна и выполняется предельное соотношение $\zeta_{r,j}(h_j(z^i) - r_j) \to 0$, $i \to \infty$, т. е. лемма доказана. □

2.2.4. Конструкция МФЛ в эквивалентной задаче с операторным ограничением-равенством как следствие «нелинейной» субдифференцируемости функции значений. Благодаря ограниченности множества $\mathcal{D}$ функция β ограничена на множестве $\operatorname{dom}\beta$. Поэтому в силу неравенства (2.3) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p, r, \zeta) > 0$

$$\beta(p,r) - \langle\zeta,(p,r)\rangle \le \beta(p',r') - \langle\zeta,(p',r')\rangle + \frac{c}{2}\|p'-p\|^2 + \frac{c}{2}|r'-r|^2 \;\; \forall\,(p',r') \in H\times\mathbb{R}^m \quad (2.11)$$

или

$$\beta(p,r) - \langle\zeta,(p,r)\rangle < \beta(p',r') - \langle\zeta,(p',r')\rangle + \frac{\hat c}{2}\|p'-p\|^2 + \frac{\hat c}{2}|r'-r|^2$$
$$\forall\,(p',r') \in H\times\mathbb{R}^m,\;\; (p',r') \ne (p,r), \qquad \hat c > c,$$

откуда в силу строгого неравенства $\hat c > c$ и полунепрерывности снизу функции значений β следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p',r') - \langle\zeta,(p',r')\rangle + \frac{\hat c}{2}\|p'-p\|^2 + \frac{\hat c}{2}|r'-r|^2 \to \inf,\;\; (p',r') \in H\times\mathbb{R}^m$$

является лишь любая последовательность (p^k, r^k), $k = 1, 2, \ldots,$ сходящаяся к точке (p, r) такая, что $\beta(p^k, r^k) \to \beta(p, r)$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда следует, что в задаче минимизации МФЛ, конструкция которой возникает здесь естественным образом как следствие дифференциальных свойств функции значений β, применительно к эквивалентной задаче с операторным ограничением-равенством, в точке (p, r),

$$f(z) + \langle -\zeta_p, g(z)-p\rangle + \langle -\zeta_r, h(z)+y-r\rangle + \frac{\hat c}{2}\|g(z)-p\|^2 + \frac{\hat c}{2}|h(z)+y-r|^2$$
$$\equiv L^{\hat c}_{p,r}(z,y,-\zeta_p,-\zeta_r) \to \inf,\;\; z\in\mathcal{D},\;\; y\in\mathbb{R}^m_+ \quad (2.12)$$

минимизирующей является лишь последовательность (z^k, y^k), $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $f(z^k) \to \beta(p, r)$, $g(z^k) \to p$, $h(z^k)+y^k \to r$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+} L^{\hat c}_{p,r}(z,y,-\zeta_p,-\zeta_r) = \beta(p,r). \quad (2.13)$$

Действительно, пусть $\bar z^k$, $\bar y^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ — минимизирующая последовательность в задаче минимизации (2.12). Тогда благодаря ограниченности $\mathcal{D}$, ограниченности значений функции f, компактности области значений оператора g и непрерывности h без ограничения общности считаем, что $f(\bar z^k) \to \bar f$, $g(\bar z^k) \to \bar p$, $h(\bar z^k) + \bar y^k \to \bar r$, $k \to \infty$, где $\bar f \in \mathbb{R}^1$, $\bar p \in H$, $\bar r \in \mathbb{R}^m$ — некоторые элементы. Тогда рассмотрим два возможных случая.

Во-первых, если $(\bar p, \bar r) = (p, r)$, но $\bar f \ne \beta(p, r)$, то в силу последних предельных соотношений, с учетом определения величины $\beta(p, r)$, можем записать

$$f(\bar z^k) + \langle -\zeta_p, g(\bar z^k)-p\rangle + \langle -\zeta_r, h(\bar z^k)+\bar y^k-r\rangle + \frac{\hat c}{2}\|g(\bar z^k)-p\|^2 + \frac{\hat c}{2}|h(\bar z^k)+\bar y^k-r|^2 \to \bar f > \beta(p,r).$$

Если же, во-вторых, $(p, r) \ne (\bar p, \bar r)$, то в силу тех же предельных соотношений, определения обобщенной нижней грани $\beta(\bar p, \bar r)$ и соотношений (2.11), с учетом строгого неравенства $\hat c > c$, можем записать одновременно: $\bar f \ge \beta(\bar p, \bar r)$,

$$f(\bar z^k) + \langle -\zeta_p, g(\bar z^k)-p\rangle + \langle -\zeta_r, h(\bar z^k)+\bar y^k-r\rangle + \frac{\hat c}{2}\|g(\bar z^k)-p\|^2 + \frac{\hat c}{2}|h(\bar z^k)+\bar y^k-r|^2$$

$$\to \bar{f} + \langle -\zeta_p, \bar{p} - p\rangle + \langle -\zeta_r, \bar{r} - r\rangle + \frac{\hat{c}}{2}\|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2}|\bar{r} - r|^2$$

$$\geq \beta(\bar{p}, \bar{r}) + \langle -\zeta_p, \bar{p} - p\rangle + \langle -\zeta_r, \bar{r} - r\rangle + \frac{\hat{c}}{2}\|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2}|\bar{r} - r|^2 > \beta(p, r).$$

Полученные в обоих случаях строгие неравенства вступают в противоречие с предположением о том, что последовательность $(\bar{z}^k, \bar{y}^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ — минимизирующая, так как для последовательности (z^k, y^k), $k = 1, 2, \ldots$ указанного выше вида мы можем записать

$$f(z^k) + \langle -\zeta_p, g(z^k) - p\rangle + \langle -\zeta_r, h(z^k) + y^k - r\rangle + \frac{\hat{c}}{2}\|g(z^k) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2}|h(z^k) + y^k - r|^2 \to \beta(p, r).$$

Одновременно, если для некоторых $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in H \times \mathbb{R}^m$, $\hat{c} > 0$ выполняется равенство (2.13), то выполняется и неравенство (2.11) при $c = \hat{c}$, а следовательно, и неравенство (2.3) при $R = \hat{c}/2$ и любом $\delta > 0$, т. е. $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$. Покажем это. Перепишем равенство (2.13) в виде

$$\begin{aligned} \beta(p, r) + \langle -\zeta_p, p\rangle + \langle -\zeta_r, r\rangle \leq f(z) + \langle -\zeta_p, g(z)\rangle + \langle -\zeta_r, h(z) + y\rangle \\ + \frac{\hat{c}}{2}\|g(z) - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2}|h(z) + y - r|^2 \ \forall\, z \in \mathcal{D},\ y \in \mathbb{R}^m_+. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Пусть $\bar{z}^k \in \mathcal{D}$, $y^k \in \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots,$ — такие произвольные последовательности, $(\bar{p}, \bar{r}) \in \operatorname{dom}\beta$ — такая произвольная точка, что $f(\bar{z}^k) \to \beta(\bar{p}, \bar{r})$, $g(\bar{z}^k) \to \bar{p}$, $h(\bar{z}^k) + y^k \to \bar{r}$, $k \to \infty$. Тогда с учетом неравенства (2.14) получаем

$$\beta(p, r) - \langle \zeta_p, p\rangle - \langle \zeta_r, r\rangle \leq \beta(\bar{p}, \bar{r}) - \langle \zeta_p, \bar{p}\rangle - \langle \zeta_r, \bar{r}\rangle + \frac{\hat{c}}{2}\|\bar{p} - p\|^2 + \frac{\hat{c}}{2}|\bar{r} - r|^2,$$

т. е., действительно, неравенство (2.11) выполняется.

Итак, из последних рассуждений можно вывести, в частности, следующее утверждение о том, что минимизирующая МФЛ вспомогательной задачи последовательность является ОМП в той же вспомогательной задаче на условный экстремум.

Предложение 2.1. *Если $(p, r) \in dom\,\beta$ такая точка, что $\partial^P \beta(p, r) \neq \emptyset$, то при любом фиксированном $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$ и при любом $\hat{c} > c = c(p, r, \zeta)$, где $c = c(p, r, \zeta)$ — определенный выше в неравенстве (2.11) штрафной коэффициент, в задаче минимизации МФЛ (2.12) минимизирующей является лишь последовательность (z^k, y^k), $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $f(z^k) \to \beta(p, r)$, $g(z^k) \to p$, $h(z^k) + y^k \to r$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность.*

2.2.5. Модифицированная двойственная задача. Определим, в свою очередь, в силу (2.12), и модифицированную двойственную задачу по отношению к задаче ($P^\delta_{p,r}$)

$$\widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}(\lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in H,\ \mu \in \mathbb{R}^m_+, \qquad \widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}(\lambda, \mu) \equiv \inf_{(z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z, y, \lambda, \mu),$$

которая формально совпадает с введенной ранее в разделе 2.1 по аналогии с хорошо известными публикациями по методу множителей Лагранжа в задачах условной минимизации (см., например, [17, с. 167]) одноименной задачей (2.1)). Однако, принципиальное отличие от [17] заключается в том, что, во-первых, здесь рассматривается на базе иного теоретического аппарата существенно более общая задача и, во-вторых, в основе обоснования указанной модифицированной двойственной задачи лежит предположение непустоты проксимального субградиента $\partial^P \beta(p,r)$. Подчеркнем, что неравенство $\mu \ge 0$ в этом определении модифицированной двойственной задачи является следствием полученного в лемме 2.3 неравенства $\zeta_r \le 0$.

Здесь, как показано в разделе 2.1 (для $\widetilde{L}^c_{p,r}$),

$$\widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}(\lambda,\mu) = \inf_{z\in\mathcal{D}} \min_{y\in\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z,y,\lambda,\mu) \equiv \inf_{z\in\mathcal{D}} L^{c,\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu), \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned} L^{c,\delta}_{p,r}&(z,\lambda,\mu)\\ &\equiv f^\delta(z) + \langle\lambda, g^\delta(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g^\delta(z)-p\|^2\\ &+\sum_{i=1}^m \min_{y_i\in\mathbb{R}^1_+}\big((\mu_i, h^\delta_i(z)+y_i-r_i) + \frac{c}{2}(h^\delta_i(z)+y_i-r_i)^2\big)\\ &= f^\delta(z) + \langle\lambda, g^\delta(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g^\delta(z)-p\|^2\\ &+\sum_{i=1}^m \big((\mu_i, h^\delta_i(z)+\max\{0,-\mu_i/c-(h^\delta_i(z)-r_i)\}-r_i)\\ &+\frac{c}{2}(h^\delta_i(z)+\max\{0,-\mu_i/c-(h^\delta_i(z)-r_i)\}-r_i)^2\big)\\ &= \widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z,y^\delta[z],\lambda,\mu), \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$y^\delta[z] \equiv \big(\max\{0,-\mu_1/c-(h^\delta_1(z)-r_1)\},\ \ldots,\ \max\{0,-\mu_m/c-(h^\delta_m(z)-r_m)\}\big).$$

Напомним, что, как известно [17, с. 167]) и как уже отмечено выше в разделе 2.1, справедливо равенство

$$\begin{aligned} L^{c,\delta}_{p,r}&(z,\lambda,\mu)\\ &= f^\delta(z) + \langle\lambda, g^\delta(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g^\delta(z)-p\|^2\\ &+\frac{1}{2c}\sum_{i=1}^m\{[\max\{0,\mu_i+c(h^\delta_i(z)-r_i)\}]^2-\mu_i^2\}\\ &= f^\delta(z) + \langle\lambda, g^\delta(z)-p\rangle + \frac{c}{2}\|g^\delta(z)-p\|^2\\ &+\frac{c}{2}\sum_{i=1}^m\{[\max\{-\mu_i/c,(h^\delta_i(z)-r_i)\}+\mu_i/c]^2-(\mu_i/c)^2\},\\ &\qquad z\in\mathcal{D},\quad (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+,\quad c>0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

В силу равенств (2.15), (2.16), (2.17) любая минимизирующая в задаче $L^{c,\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu)\to\inf$, $z\in\mathcal{D}$ последовательность z^k, $k=1,2,\ldots$, является в паре с последовательностью $y^\delta[z^k]\equiv\big(\max\{0,-\mu_1/c-(h^\delta_1(z^k)-r_1)\},\ \ldots,\ \max\{0,-\mu_m/c-(h^\delta_m(z)-r_m)\}\big)$, $k=1,2,\ldots$, минимизирующей в задаче

$$\widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z,y,\lambda,\mu)\to\inf,\quad (z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+,$$

так как

$$\widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z^k, y^\delta[z^k], \lambda, \mu) \to \inf_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^{c,\delta}_{p,r}(z, y, \lambda, \mu) = \inf_{z\in\mathcal{D}} L^{c,\delta}_{p,r}(z, \lambda, \mu), \quad k \to \infty.$$

Условия на исходные данные задачи ($P^0_{p,r}$) таковы, что функция $\widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c > 0$ для любой точки $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$ и выполняется оценка

$$|\widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}(\lambda, \mu) - \widetilde{V}^{c,0}_{p,r}(\lambda, \mu)| \le C\delta(1 + \|\lambda\| + |\mu| + c) \quad \forall\, \lambda \in H, \ \mu \in \mathbb{R}^m, \tag{2.18}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированных $(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$ лишь от $\sup\limits_{z\in\mathcal{D}} \|z\|$. Заметим, что при вполне очевидном доказательстве неравенства (2.18) удобно принять во внимание, что справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&|\frac{1}{2c}\{[\max\{0, \mu_i + c(h^\delta_i(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\} - \frac{1}{2c}\{[\max\{0, \mu_i + c(h^0_i(z) - r_i)\}]^2 - \mu_i^2\}| \\
&\qquad = \frac{1}{2c}|[\max\{0, \mu_i + c(h^\delta_i(z) - r_i)]^2 - [\max\{0, \mu_i + c(h^0_i(z) - r_i)\}]^2| \\
&\qquad = \frac{1}{2c}(\max\{0, \mu_i + c(h^\delta_i(z) - r_i)\} - \max\{0, \mu_i + c(h^0_i(z) - r_i)\}) \\
&\qquad\quad \times(\max\{0, \mu_i + c(h^\delta_i(z) - r_i)\} + \max\{0, \mu_i + c(h^0_i(z) - r_i)\}) \\
&\le \frac{1}{2c}c|h^\delta_i(z) - h^0_i(z)| \times (2|\mu_i| + c|h^\delta_i(z) - r_i| + c|h^0_i(z) - r_i|) \le C_1\delta(1 + |\mu_i| + c),
\end{aligned}$$

где $C_1 > 0$ при фиксированной паре $(p, r) \in H \times \mathbb{R}^m$ зависит лишь от $\sup\limits_{z\in\mathcal{D}} \|z\|$.

2.2.6. Обобщенный вектор Куна–Таккера. Укажем прежде всего на важные для дальнейшего обстоятельства, вытекающие из результатов предыдущего раздела (см. задачу (2.12)). Возможны две и только две ситуации для исходной задачи ($P^0_{p,r}$):

А) в задаче существует вектор Куна–Таккера в следующем обобщенном смысле: существует вектор $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, такой, что

$$\beta(p, r) \le \inf_{z\in\mathcal{D}} L^{c,0}_{p,r}(z, \lambda, \mu) = \inf_{(z,y)\in\mathcal{D}\times\mathbb{R}^m_+} \widetilde{L}^{c,0}_{p,r}(z, y, \lambda, \mu) \tag{2.19}$$

для некотором $c > 0$; при этом следствием неравенства (2.19) является неравенство (2.11) с $\zeta \equiv (\zeta_p, \zeta_r) = (-\lambda, -\mu)$, т. е. $(-\lambda, -\mu) \in \partial^P \beta(p, r)$;

Б) в задаче не существует вектора Куна–Таккера в указанном смысле.

Существование вектора Куна–Таккера в указанном (обобщенном) смысле, как показано в [13], эквивалентно тому, что целевая функция $\widetilde{V}^{c,0}_{p,r}(\lambda, \mu)$, $(\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m$, модифицированной двойственной задачи

$$\widetilde{V}^{c,0}_{p,r}(\lambda, \mu) \to \sup, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$$

достигает значения $\beta(p, r)$ в некоторой точке $(\lambda^0, \mu^0) \in H \times \mathbb{R}^m_+$.

Одновременно напомним, что благодаря примененным при получении равенства (2.13) рассуждениям, можно утверждать: любой элемент $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P \beta(p, r)$, взятый с обратным знаком, т. е. элемент $(-\zeta_p, -\zeta_r)$, представляет собою обобщенный вектор Куна–Таккера. И, наоборот, любой такой обобщенный вектор Куна–Таккера, взятый с обратным знаком, является элементом проксимального субградиента $\partial^P \beta(p, r)$.

2.3. Двойственная регуляризация для решения нелинейной регулярной задачи на условный экстремум. С целью конструирования ОМП в исходной задаче ($P^0_{p,r}$) организуем далее устойчивую процедуру поиска максимума в задаче максимизации при каждом фиксированном (достаточно большом) $c > 0$

$$R^{c,\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu) \to \max, \quad (\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+ \tag{2.20}$$

сильно вогнутого функционала $R^{c,\delta,\alpha}_{p,r}(\lambda,\mu) \equiv \widetilde{V}^{c,\delta}_{p,r}(\lambda,\mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2$, $(\lambda,\mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+$, $\delta \geq 0$. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha}_{p,r,c}, \mu^{\delta,\alpha}_{p,r,c})$ единственную в $H \times \mathbb{R}^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум функционалу $R^{c,\delta,\alpha}_{p,r}$ (она, очевидно, существует). Покажем, что при условии согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0 \tag{2.21}$$

регуляризованный процесс поиска максимума в модифицированной двойственной задаче (2.20) конструктивно порождает ОМП $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1,2,\ldots$ в задаче ($P^0_{p,r}$), т. е.

$$f^0(z^i) \to \beta(p,r), \quad z^i \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^i}_{p,r}, \quad \epsilon^i \to 0, \quad i \to \infty.$$

При этом в случае А) величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому (ниже уточняется какому) положительному числу. В случае же Б) штрафной коэффициент c необходимо, вообще говоря, стремить к $+\infty$. В данной статье этот случай не рассматривается.

Случай А). Итак, предполагаем, что задача ($P^0_{p,r}$) обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле с некоторой постоянной $c > 0$ и рассматриваем задачу (2.20) при указанном $c > 0$. Прежде всего, подчеркнем еще раз, что если задача ($P^0_{p,r}$) обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле А), то в соответствии со сказанным выше любой такой вектор доставляет максимальное значение функции $\widetilde{V}^{c,0}_{p,r}$ на $H \times \mathbb{R}^m_+$, равное $\beta(p,r)$ и, наоборот, любой вектор доставляющий максимум функции $\widetilde{V}^{c,0}_{p,r}$, равный $\beta(p,r)$, в этом случае является вектором Куна–Таккера задачи ($P^0_{p,r}$). Замкнутое выпуклое множество всех таких точек максимума (λ,μ) обозначим через $K_{p,r,c}$.

2.3.1. Минимизирующие последовательности в задаче минимизации невозмущенной МФЛ являются ОМП в исходной задаче ($P^0_{p,r}$). Так как $(-\lambda,-\mu) \in \partial^P\beta(p,r)$ и выполняется неравенство (2.11) с $\zeta \equiv (\zeta_p,\zeta_r) = (-\lambda,-\mu)$ для любого вектора Куна–Таккера $(\lambda,\mu) \in K_{p,r,c}$, то в силу предложения 2.1 при любом $\hat{c} > c$ в задаче минимизации (см. задачу (2.12))

$$\widetilde{L}^{\hat{c},0}_{p,r}(z,y,\lambda,\mu) \to \inf, \quad (z,y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m_+ \tag{2.22}$$

минимизирующей является лишь последовательность (z^k,y^k), $k = 1,2,\ldots$ такая, что $f^0(z^k) \to \beta(p,r)$, $g^0(z^k) \to p$, $h^0(z^k) + y^k \to r$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. По этой причине, в силу второго равенства в (2.17), минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$L^{\hat{c},0}_{p,r}(z,\lambda,\mu) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \tag{2.23}$$

при $(\lambda,\mu) \in K_{p,r,c}$ может быть лишь последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1,2,\ldots$, для которой одновременно справедливы предельные соотношения

$$f^0(z^k) \to \beta(p,r), \quad g^0(z^k) \to p,$$

$$\frac{\hat{c}}{2}\{[\max\{-\mu_i/\hat{c}, (h_i^0(z^k)-r_i)\}+\mu_i/\hat{c}]^2-(\mu_i/\hat{c})^2\}\to 0, \quad i=1,\dots,m, \quad k\to\infty$$

и никакая другая последовательность $z^k\in\mathcal{D}$, $k=1,2,\dots$. В противном случае последовательность $(z^k,y^k)\equiv(z^k,y^0[z^k])$, $k=1,2,\dots$, с $y^0[z^k]\equiv(y_1^0[z^k],\dots,y_m^0[z^k])\equiv\big(\max\{0,-\mu_1/\hat{c}-(h_1^0(z^k)-r_1)\},\ \dots,\ \max\{0,-\mu_m/\hat{c}-(h_m^0(z^k)-r_m)\}\big)$ в силу равенств (см. равенства (2.16) и (2.17))

$$\frac{\hat{c}}{2}\{[\max\{-\mu_i/\hat{c}, (h_i^0(z^k)-r_i)\}+\mu_i/\hat{c}]^2-(\mu_i/\hat{c})^2\}$$

$$=(\mu_i, h_i^0(z)+\max\{0,-\mu_i/\hat{c}-(h_i^0(z)-r_i)\}-r_i)+\frac{\hat{c}}{2}(h_i^0(z)+\max\{0,-\mu_i/\hat{c}-(h_i^0(z)-r_i)\}-r_i)^2$$

$$=(\mu_i, h_i^0(z)+y_i^0[z^k]-r_i)+\frac{\hat{c}}{2}(h_i^0(z)+y_i^0[z^k]-r_i)^2, \ \ i=1,\dots,m,$$

была бы той минимизирующей в задаче (2.22) последовательностью, для которой не выполнялось бы хотя бы одно из трех предельных соотношений $f^0(z^k)\to\beta(p,r)$, $g^0(z^k)\to p$, $h^0(z^k)+y^k\to r$, $k\to\infty$, что, как было сказано выше, невозможно. Итак, из проведенных рассуждений вытекает следующее

Предложение 2.2. *Если $(\lambda,\mu)\in K_{p,r,c}$, то при $\kappa>0$, во-первых, для любой минимизирующей в задаче (2.23) последовательности $z^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$, справедливы предельные соотношения*

$$L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z^i,\lambda,\mu)\to\beta(p,r)=\inf_{z\in\mathcal{D}}L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z,\lambda,\mu), \tag{2.24}$$

$$f^0(z^i)\to\beta(p,r), \ \ g^0(z^i)-p\to 0, \max\{-\mu_j/(c+\kappa), h_j^0(z^i)-r_j\}\to 0, \ j=1,\dots,m, \ i\to\infty,$$

что, во-вторых, означает одновременно справедливость и предельных соотношений

$$f^0(z^i)\to\beta(p,r), \ g^0(z^i)-p\to 0, \ \max\{0, h_j^0(z^i)-r_j\}\to 0, \ j=1,\dots,m, \ i\to\infty,$$

говорящих о том, что указанная последовательность $z^i\in\mathcal{D}$, $i=1,2,\dots$ является ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$.

Замечание 2.2. Можно показать [13], что $\partial\widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda,\mu)=\{0\}$ при $\kappa>0$, где $\partial\widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda,\mu)$ — супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутой функции $\widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\cdot,\cdot)$ в точке $(\lambda,\mu)\in K_{p,r,c}$.

2.3.2. Стабилизация по Тихонову модифицированной двойственной задачи. В силу оценки (2.18), условия согласования (2.21) и теоремы о сходимости метода стабилизации Тихонова (см., например, [2, гл. 9, §4, теорема 4]) можно утверждать, что справедливо следующее

Предложение 2.3. *Если $K_{p,r,c}\neq\emptyset$, то*

$$\begin{gathered}\|(\lambda_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)})-(\lambda_{p,r,c}^0,\mu_{p,r,c}^0)\|\to 0,\\ \widetilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)},\mu_{p,r,c}^{\delta,\alpha(\delta)})\to\widetilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^0,\mu_{p,r,c}^0)=\beta(p,r), \quad \delta\to 0,\end{gathered} \tag{2.25}$$

где $(\lambda_{p,r,c}^0,\mu_{p,r,c}^0)$ — минимальная по норме точка во множестве $K_{p,r,c}$.

2.3.3. Построение конкретной ОМП. Пусть далее δ^s, $s = 1, 2, \ldots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, а последовательность $z_\kappa^{c,\delta^s,i}$, $i = 1, 2, \ldots$, является минимизирующей для МФЛ $L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$, $z \in \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \ldots$, где $\kappa > 0$ не зависящая от $s = 1, 2, \ldots$ постоянная. Примем при этом обозначение $z_0^{c,\delta^s,i} \equiv z^{c,\delta^s,i}$ при $\kappa = 0$. Тогда имеем при $i \to \infty$ неравенства

$$L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z_\kappa^{c,\delta^s,i}, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \le \widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) + \epsilon^{c,\delta^s,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad \epsilon^{c,\delta^s,i} \to 0.$$

Пусть $\epsilon^s > 0$, $s = 1, 2, \ldots$ — заранее заданная сходящаяся к нулю последовательность чисел. В силу ограниченности последовательности элементов $(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$, $s = 1, 2, \ldots$, и оценок (1.2), (2.18), а также выбора подпоследовательности $i(c, s)$, $s = 1, 2, \ldots$ последовательности $i = 1, 2, \ldots$ такой, что $\epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)} \le \epsilon^s \to 0$, $s \to \infty$, из последних неравенств выводим, что

$$L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}, \lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \le \widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) + \epsilon^s + \gamma^s, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $\gamma^s \to 0$, $s \to \infty$.

В свою очередь из этой оценки в силу предельного соотношения (2.25) и непрерывности функционала $\widetilde{V}_{p,r}^{c,0}$ (он является локально липшицевым на $H \times \mathbb{R}^m$ как вогнутый и ограниченный функционал на каждом ограниченном множестве в $H \times \mathbb{R}^m$ [23, теорема 2.1]), получаем

$$L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}, \lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \le \widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) + \widetilde{\gamma}^s, \quad s = 1, 2, \ldots, \quad \widetilde{\gamma}^s \to 0, \quad s \to \infty.$$

Последнее неравенство говорит о том, что последовательность $z_\kappa^s \equiv z_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, является минимизирующей в задаче

$$L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D},$$

но такой последовательностью в силу включения $(\lambda_{p,r,c}^0, \mu_{p,r,c}^0) \in K_{p,r,c}$, независимости $\kappa > 0$ от s и предложения 2.2 может являться лишь последовательность с указанными выше свойствами (2.24). Таким образом, сконструированная выше последовательность элементов $z_\kappa^s \equiv z_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s = 1, 2, \ldots$ будет минимизирующей в задаче $(P_{p,r}^0)$, т. е. представлять собой ОМП в этой задаче, удовлетворяя при $s \to \infty$ предельным соотношениям

$$f^0(z_\kappa^s) \to \beta(p, r), \;\; g^0(z_\kappa^s) - p \to 0, \; \max\{-\mu_{p,r,c,j}^0/(c+\kappa), h_j^0(z_\kappa^s) - r_j\} \to 0, \;\; j = 1, \ldots, m. \quad (2.26)$$

Одновременно с предельными соотношениями (2.26) в силу первого предельного соотношения (2.25) и ограниченности $\mathcal{D}$ справедливы и предельные соотношения

$$\max\{-\mu_{p,r,c,j}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}/(c + \kappa), (h_j^0(z_\kappa^s) - r_j)\} \to 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad s \to \infty. \quad (2.27)$$

Так как $\widetilde{V}_{p,r}^{c,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \le \widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$ (см. равенства (2.16), (2.17)), то в дополнение к полученным соотношениям получаем, учитывая второе предельное соотношение (2.25) и неравенство $\widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \le \beta(p, r)$, и предельное соотношение

$$\widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, \mu_{p,r,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \to \beta(p, r), \quad s \to \infty. \quad (2.28)$$

Итак, в общей ситуации для построения ОМП в задаче $(P^0_{p,r})$ в случае А) требуется в регуляризованном процессе максимизации модифицированной двойственной задачи решать задачу минимизации МФЛ при двух значениях штрафного коэффициента c: c и $c+\kappa$.

2.3.4. Частные случаи, когда $\kappa = 0$. В то же время, как показано в [13], во многих важных частных случаях, когда известна дополнительная информация о дифференциальных свойствах функции значений β в конкретной точке $(p,r) \in \operatorname{dom}\beta$, минимизирующей последовательностью в задаче $(P^0_{p,r})$ будет построенная выше последовательность $z^s_\kappa \equiv z^{c,\delta^s,i(c,s)}_\kappa$, $s = 1,2,\dots$ при $\kappa = 0$: $z^s_0 \equiv z^s$, $s = 1,2,\dots$. В частности, такими важными частными случаями являются следующие (подробности см. в [13]).

Штрафной коэффициент c **не зависит от** $\zeta \in \partial^P\beta(p,r)$. Такой дополнительной информацией может служить, например, информация о том, что для любого $\zeta = (\zeta_p, \zeta_r) \in \partial^P\beta(p,r)$ неравенство (2.11) выполняется с некоторым не зависящим от ζ штрафным коэффициентом $c = c(p,r)$. Последнее выполняется, например, тогда, когда множество $\partial^P\beta(p,r)$ является одноточечным.

Проксимальный субградиент содержит минимальный по норме элемент. Это будет заведомо так, если, например, $\partial^P\beta(p,r)$ есть замкнутое множество.

2.3.5. Теорема «сходимости» метода двойственной регуляризации. Итак, можно утверждать, что для процесса построения ОМП в задаче $(P^0_{p,r})$ наиважнейшее значение имеет «качество» решения задачи минимизации МФЛ $L^{c,\delta}_{p,r}(z, \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r,c}, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,r,c})$, $z \in \mathcal{D}$ при каждом $\delta > 0$. Если такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, то в задаче $(P^0_{p,r})$ конструктивно указывается ОМП. Таким образом, с учетом предельных соотношений (2.26), (2.27), (2.28) доказана следующая теорема, которую можно трактовать как теорему «сходимости» метода двойственной регуляризации. Для более компактной ее формулировки обозначим через $Z^{c,\kappa,\epsilon,\delta}_{p,r}[\lambda,\mu] \subset \mathcal{D}$ множество всех элементов $z \in \mathcal{D}$, минимизирующих при $\kappa \geq 0$ с точностью ϵ, МФЛ $L^{c+\kappa,\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu)$, $z \in \mathcal{D}$, т. е. удовлетворяющих неравенству

$$L^{c+\kappa,\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu) \leq \inf_{z\in\mathcal{D}} L^{c+\kappa,\delta}_{p,r}(z,\lambda,\mu) + \epsilon.$$

Теорема 2.1. *Пусть* δ^s, $s = 1,2,\dots$ *– произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда, если задача* $(P^0_{p,r})$ *обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, то найдется достаточно большое* $c > 0$ *такое, что при* $\kappa > 0$ *справедливы предельные соотношения*

$$f^0(z^s) \to \beta(p,r), \quad g^0(z^s) - p \to 0, \max\{0, h^0_j(z^s) - r_j\} \to 0, \quad j = 1,\dots,m,$$

$$\max\{-\mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c,j}/(c+\kappa), (h^0_j(z^s) - r_j)\} \to 0, \quad j = 1,\dots,m, \quad s \to \infty,$$

$$(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}) \to (\lambda^0_{p,r,c}, \mu^0_{p,r,c}),$$

$$\widetilde{V}^{c,0}_{p,r}(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}) \to \beta(p,r), \quad \widetilde{V}^{c+\kappa,0}_{p,r}(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}) \to \beta(p,r), \quad s \to \infty,$$

где $z^s \in Z^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}_{p,r}[\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}] \subset \mathcal{D}$, $s = 1,2,\dots$, $\epsilon^s \to 0$ *при* $s \to \infty$, $\delta^s/\alpha(\delta^s) \to 0$ *при* $s \to \infty$, $(\lambda^0_{p,r,c}, \mu^0_{p,r,c}) \in \partial^P\beta(p,r)$ *— минимальный по норме во множестве* $K_{p,r,c}$ *обобщенный вектор Куна–Таккера задачи* $(P^0_{p,r})$. *При этом, если функция значений* β *обладает в точке* (p,r) *дополнительными дифференциальными свойствами, указанными в разделе 2.3.4, то величину* κ *можно считать равной нулю.*

Таким образом, оператор $R_{p,r}(\cdot,\cdot,\cdot,\delta^s)$, *ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, h^{\delta^s})$, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta=\delta^s$, *множество* $Z^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}_{p,r}[\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}] \subset \mathcal{D}$, *является ОМП-образующим в смысле определения 1.1 в задаче* $(P^0_{p,r})$.

2.4. Регуляризованная теорема Куна–Таккера в нелинейной регулярной задаче на условный экстремум. Сформулированное в теореме 2.1 утверждение можно трансформировать в следующую регуляризованную теорему Куна–Таккера в недифференциальной форме для нелинейной регулярной задачи $(P^0_{p,r})$. Характерным свойством этой теоремы является «устойчивость» по отношению к ошибкам исходных данных в том смысле, что последовательность, о которой идет в ней речь, заведомо представляет собою ОМП в задаче $(P^0_{p,r})$. Ниже при формулировке теоремы используем обозначение $Z^{c,\kappa,\epsilon,\delta}_{p,r}[\lambda,\mu]$, введенное перед формулировкой теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть задача* $(P^0_{p,r})$ *обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле,* δ^s, $s=1,2,\dots$ *— произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда найдутся достаточно большое* $c>0$ *и ограниченная последовательность двойственных переменных* $(\lambda^s,\mu^s)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $s=1,2,\dots$, *такие, что для произвольной последовательности* $z^s\in Z^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}_{p,r}[\lambda^s,\mu^s]\subset\mathcal{D}$, $s=1,2,\dots$, $\epsilon^s\to 0$, $s\to\infty$, *справедливы предельные соотношения*

$$\begin{gathered} g^{\delta^s}(z^s)-p\to 0,\quad \max\{0, h^{\delta^s}_j(z^s)-r_j\}\to 0,\quad j=1,\dots,m,\\ \max\{-\mu^s_j/(c+\kappa), (h^{\delta^s}_j(z^s)-r_j)\}\to 0,\quad j=1,\dots,m,\quad s\to\infty, \end{gathered} \tag{2.29}$$

$$f^0(z^s)\to\beta(p,r), \tag{2.30}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$\widetilde{V}^{c+\kappa,0}_{p,r}(\lambda^s,\mu^s)\to\beta(p,r),\quad s\to\infty. \tag{2.31}$$

Таким образом, оператор $R_{p,r}(\cdot,\cdot,\cdot,\delta^s)$, *который ставит в соответствие каждому набору исходных данных* $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, h^{\delta^s})$, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta=\delta^s$, *множество* $Z^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}_{p,r}[\lambda^s,\mu^s]\subset\mathcal{D}$, *является ОМП-образующим в смысле определения 1.1 в задаче* $(P^0_{p,r})$.

В качестве указанной выше последовательности (λ^s,μ^s), $s=1,2,\dots$, *может быть взята последовательность* $(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c}, \mu^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r,c})$, $s=1,2,\dots$, *из теоремы 2.1, элементы которой максимизируют на множестве* $H\times\mathbb{R}^m_+$ *сильно вогнутый функционал* $R^{c,\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,r}$ *при условии согласования* $\delta^s/\alpha(\delta^s)\to 0$, $s\to\infty$. *При этом* $(\lambda^s,\mu^s)\to(\lambda^0_{p,r,c},\mu^0_{p,r,c})\in\partial^P\beta(p,r)$, $s\to\infty$, *где* $(\lambda^0_{p,r,c},\mu^0_{p,r,c})$ *– минимальный по норме во множестве* $K_{p,r,c}$ *обобщенный вектор Куна–Таккера задачи* $(P^0_{p,r})$. *Наконец, если функция значений* β *обладает в точке* (p,r) *дополнительными дифференциальными свойствами, указанными в разделе 2.3.4, то величину* κ *можно считать равной нулю.*

И наоборот, если при некотором достаточно большом $c>0$ *существует ограниченная последовательность двойственных переменных* $(\lambda^s,\mu^s)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $s=1,2,\dots$, *такая что для последовательности* z^s, $s=1,2,\dots$, *элементы которой удовлетворяют при* $\kappa\ge 0$ *включениям* $z^s\in Z^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}_{p,r}[\lambda^s,\mu^s]$, $\epsilon^s\to 0$, $s\to\infty$, *и предельным соотношениям* (2.29), *то выполняется и предельное соотношение* (2.30), *т. е. последовательность* z^s, $s=1,2,\dots$, *является ОМП в задаче* $(P^0_{p,r})$. *При этом одновременно выполняется и предельное соотношение* (2.31).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы, которое представляет собою ее «необходимую часть», следует из теоремы 2.1, если принять во внимание, что благодаря оценкам (1.2) и ограниченности $\mathcal{D}$ предельные соотношения (2.29) выполняются одновременно с предельными соотношениями

$$\begin{gathered} g^0(z^s) - p \to 0, \quad \max\{0, h_j^0(z^s) - r_j\} \to 0, \quad j = 1, \ldots, m, \\ \max\{-\mu_j^s/(c+\kappa), (h_j^0(z^s) - r_j)\} \to 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad s \to \infty. \end{gathered} \tag{2.32}$$

По этой причине переходим к доказательству второго утверждения, связанного с достаточностью условий теоремы.

Так как точка $z^s \in Z_{p,r}^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s, \mu^s] \subset \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \ldots$, $\epsilon^s \to 0$, $s \to \infty$, то можем записать $\forall z \in \mathcal{D}$

$$L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z^s, \lambda^s, \mu^s) \le L_{p,r}^{c+\kappa,\delta^s}(z, \lambda^s, \mu^s) + \epsilon^s.$$

Отсюда в силу предельных соотношений (2.29), выполняющихся одновременно с предельными соотношениями (2.32), оценок (1.2) и ограниченности $\mathcal{D}$ получаем

$$f^0(z^s) \le L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda^s, \mu^s) + \widetilde{\epsilon}^s \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad \widetilde{\epsilon}^s \to 0, \quad s \to \infty. \tag{2.33}$$

Так как мы можем подставить в последнее неравенство $z = \bar{z}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\bar{z}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ любую ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$, то получаем $f^0(z^s) \le \beta(p, r) + \bar{\epsilon}^s$, $\bar{\epsilon}^s \to 0$, $s \to \infty$. Так как, к тому же, последовательность z^s, $s = 1, 2, \ldots$, в силу предельных соотношений (2.32) удовлетворяет «в пределе» всем ограничениям, то выполняется и предельное соотношение (2.30), т. е. последовательность z^s, $s = 1, 2, \ldots$, является ОМП в задаче $(P_{p,r}^0)$. Выполнение в этом случае и предельного соотношения (2.31) очевидно, так как в силу (2.33) можем записать, что

$$f^0(z^s) \le \inf_{z \in \mathcal{D}} L_{p,r}^{c+\kappa,0}(z, \lambda^s, \mu^s) + \widetilde{\epsilon}^s = \widetilde{V}_{p,r}^{c+\kappa,0}(\lambda^s, \mu^s) + \widetilde{\epsilon}^s \le \beta(p, r) + \widetilde{\epsilon}^s, \quad \widetilde{\epsilon}^s \to 0, \quad s \to \infty,$$

и одновременно выполняется уже доказанное предельное соотношение (2.30). □

З а м е ч а н и е 2.3. Если в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,r}^{c+\kappa,\delta}(z, \lambda, \mu) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \tag{2.34}$$

минимальное значение достигается, то в качестве элементов z^s, $s = 1, 2, \ldots$ ОМП из теорем 2.1, 2.2 естественно могут быть взяты непосредственно ее точки минимума. Разрешимость задачи минимизации (2.34) имеет место во многих важных конкретных ситуациях. Опишем одну из таких ситуаций, возникающих в естественнонаучных приложениях, связанных с нелинейными некорректными задачами (см., например, [7, гл. 1, § 4], [20]). Пусть Z — гильбертово пространство, функционал $f^\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ слабо полунепрерывен снизу (в качестве такого функционала можно взять, например, $f^\delta(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$), оператор $g^\delta : \mathcal{D} \to H$ переводит слабо сходящиеся к элементу z^0 последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$ в сходящиеся сильно к $g^\delta(z^0)$ элементы последовательности $g^\delta(z^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ («полная непрерывность» оператора g^δ), функция $h^\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ — слабо непрерывна, $\mathcal{D} \subset Z$ — ограниченное, выпуклое и замкнутое множество. Тогда рассуждая так же, как, например, в [7, гл. 1, §4, лемма 1], можно заключить, что задача минимизации МФЛ (2.34) (в [7, гл. 1, §4, лемма 1] речь идет о минимизации функции Тихонова) разрешима и, стало быть, в этом случае можно считать, что $\epsilon^s = 0$, $s = 1, 2, \ldots$. Можно заметить также, что при сделанных предположениях разрешимой является и сама исходная задача нелинейного программирования ($P^0_{p,r}$). Можно привести и другие группы условий на исходные данные задачи $(P^\delta_{p,r})$, при которых имеет место разрешимость задачи (2.34).

З а м е ч а н и е 2.4. Важно заметить, что в зависимости от свойств исходных данных задачи ($P^0_{p,r}$) конструируемые ОМП обладают соответствующими свойствами сходимости. Проиллюстрируем сказанное на примере из замечания 2.3. Во-первых, в условиях этого примера все слабые предельные точки каждой ОМП в задаче ($P^0_{p,r}$) являются ее решениями. Это доказывается посредством традиционных рассуждений, основанных на свойствах слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого множества в гильбертовом пространстве, слабой полунепрерывности снизу функционала f^0 и «полной непрерывности» оператора g^0 и функции h^0. Если же, во-вторых, в дополнение к описанным в примере из замечания 2.3 условиям функционал $f^0 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ является еще сильно выпуклым и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа), как, например, функционал $f^0(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$, то все указанные выше слабые предельные точки — решения задачи ($P^0_{p,r}$) — являются предельными точками в исходной сильной топологии гильбертова пространства Z: из слабой сходимости последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$ к элементу $z^0 \in \mathcal{D}$ и числовой сходимости $f^0(z^i) \to f^0(z^0) = \beta(p, r)$, $i \to \infty$ следует сходимость по норме $z^i \to z^0$, $i \to \infty$. Последнее можно утверждать в силу хорошо известного характеристического свойства субдифференцируемых сильно выпуклых функционалов в гильбертовом пространстве.

References

[1] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

[2] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: в 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization methods: in 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[3] М. И. Сумин, "Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, "Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space", *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[4] М. И. Сумин, "Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, № 1, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, "Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems", *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25** (2019), 279–296 (In Russian)].

[5] М. И. Сумин, "О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, "On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].

[6] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington; New York, 1977.

[7] А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, Наука, М., 1995; англ. пер.:A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Taylor and Francis, London, 1998.

[8] М. И. Сумин, "Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007),

602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

[9] М. И. Сумин, “Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:5 (2007), 796–816; англ. пер.:M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:5 (2007), 760–779.

[10] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Duality Theory in Mathematical Programming and its Applications*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].

[11] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[12] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M.I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].

[13] А. В. Канатов, М. И. Сумин, “Секвенциальная устойчивая теорема Куна–Таккера в нелинейном программировании”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53**:8 (2013), 1249–1271; англ. пер.:A. V. Kanatov, M. I. Sumin, “Sequential stable Kuhn–Tucker theorem in nonlinear programming”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:8 (2013), 1078–1098.

[14] М. И. Сумин, “Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:6 (2015), 947–977; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential Kuhn–Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**:6 (2015), 935–961.

[15] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis.* V. 2, CRM Proceedings & Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[16] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control theory.* V. 178, Graduate texts in mathematics, Springer–Verlag, New York, 1998.

[17] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, 1-е изд., Радио и связь, М., 1987; англ. ориг.:D.-P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York–London–Paris–San Diego–SanFrancisco–Sao Paulo–Sydney–Tokyo–Toronto, 1982.

[18] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации*, Наука, М., 1989. [E. G. Golshtein, N. V. Tret'yakov, *Modified Lagrange Functions. Theory and Methods of Optimization*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[19] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, № 2, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, “On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**, no. 2, 2020, 252–269 (In Russian)].

[20] М. И. Сумин, “Метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа и регуляризация правила множителей Лагранжа в нелинейном оптимальном управлении”, Тр. ИММ УрО РАН, **28**, № 3, 2022, 202–221. [M. I. Sumin, “Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **28**, no. 3, 2022, 202–221 (In Russian)].

[21] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[22] I. Ekeland, “On the variational principle”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **47**:2 (1974), 324–353.

[23] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.:J.-P. Aubin, *L'analyse non Lineaire et ses Motivations Economiques*, Masson, Paris–New York, 1984.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 21.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 27.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Received 21.08.2022
Reviewed 27.10.2022
Accepted for press 24.11.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385
УДК 517.922, 517.925.4

Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»
394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию алгебро-дифференциального уравнения
$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t),$$
где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с всюду плотными в E_1 областями определения. Оператор A фредгольмов с нулевым индексом (далее, фредгольмов), функция $f(t)$ принимает значения в E_2; $t \in [0;T]$. Ядро оператора A полагается одномерным. Для разрешения уравнения относительно производной применяется метод каскадной декомпозиции, заключающийся в пошаговом расщеплении уравнения и условий к соответствующим уравнениям и условиям в подпространствах меньших размерностей. Рассматриваются одношаговое и двухшаговое расщепления, получены теоремы о разрешимости уравнения. Теоремы применяются для получения условий существования решения задачи Коши. Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, решается однородная задача Коши с заданными операторными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2$. Для этого рассматривается разрешенное дифференциальное уравнение второго порядка в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^m$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t).$$
Исследуется характеристическое уравнение $M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0$. Для многочлена $M(\lambda)$ в случае $m = 2$, $m = 3$ получены формулы Маклорена. Определено общее решение уравнения в случае единичной алгебраической кратности характеристического уравнения.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальный, уравнение второго порядка, фредгольмов оператор, банахово пространство, разрешение, задача Коши

Для цитирования: *Усков В.И.* Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 375–385. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385

Solution of a second-order algebro-differential equation in a Banach space

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the algebro-differential equation

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t),$$

where $A,$ $B,$ C are closed linear operators acting from a Banach space E_1 into a Banach space E_2 whose domains are everywhere dense in E_1. A is a Fredholm operator with zero index (hereinafter, Fredholm), the function $f(t)$ takes values in E_2; $t \in [0;T]$. The kernel of the operator A is assumed to be one-dimensional. For solvability of the equation with respect to the derivative, the method of cascade splitting is applied, consisting in the stepwise splitting of the equation and conditions to the corresponding equations and conditions in subspaces of lower dimensions. One-step and two-step splitting are considered, theorems on the solvability of the equation are obtained. The theorems are used to obtain the existence conditions for a solution to the Cauchy problem. In order to illustrate the results obtained, a homogeneous Cauchy problem with given operator coefficients in the space $\mathbb{R}^2$ is solved. For this, it is considered the second-order differential equation in the finite-dimensional space $\mathbb{C}^m$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t).$$

The characteristic equation $M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0$ is studied. For the polynomial $M(\lambda),$ in the cases $m = 2,$ $m = 3,$ the Maclaurin formulas are obtained. General solution of the equation is defined in the case of the unit algebraic multiplicity of the characteristic equation.

Keywords: algebro-differential, second-order equation, Fredholm operator, Banach space, solution, Cauchy problem

Mathematics Subject Classification: 34A09.

For citation: Uskov V.I. Razreshenie algebro-differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v banahovom prostranstve [Solution of a second-order algebro-differential equation in a Banach space]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 375–385. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-375-385. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + Cu(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{0.2}$$

где A, B, C — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B} = \overline{\operatorname{dom} C} = E_1$; оператор A фредгольмов; заданы элементы $u^0 \in E_1$, $u^1 \in E_1$ и функция $f(t)$ со значениями в E_2; $t \in [0;T]$.

Под решением задачи (0.1), (0.2) подразумевается дважды дифференцируемая функция $u(t) \in E_1$ такая, что $\dfrac{du}{dt} \in E_1$, и удовлетворяет (0.1), (0.2) на $[0;T]$.

Уравнениями второго порядка описывается вращение жесткого тела (уравнение Ламе) [1], считывание информации с диска [2]; они встречаются в теории вязко-упругих процессов [3] и т. д.

Уравнения (0.1) с вырожденным коэффициентом A называется алгебро-дифференциальными. Такие уравнения исследовались другими авторами: в работе [4] A, B, C являются матрицами n-го порядка; в [5] A — нормально разрешимый фредгольмов оператора, имеющий относительно некоторой оператор-функции полный биканонический жорданов набор. Автором настоящей работы в [6] для уравнения

$$A\frac{d^2u}{dt^2} = Bu(t) + f(t),$$

применялся метод каскадной декомпозиции (далее, МКД) в случае обратимости некоторого оператора, построенного с помощью коэффициентов A, B.

Цель работы: разрешить уравнение (0.1) относительно старшей производной; получить условия существования решения задачи Коши.

Исследуется случай одношагового и двухшагового расщепления уравнения. С применением МКД получены результаты о сведении к равносильной системе, сформулированные в виде теорем. Они применяются к исследованию задачи Коши; определены условия, при которых решение существует.

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, приводится пример нахождения решения задачи Коши с заданными операторными коэффициентами в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Для этого рассматривается разрешенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t),$$

с некоторыми линейными операторами H, K, действующими в пространстве $\mathbb{C}^m$; $t\in[0;T]$. Уравнение исследуется с помощью характеристического уравнения

$$M(\lambda) := \det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0.$$

Для многочлена $M(\lambda)$ получены формулы Маклорена в случае $m = 2$ и $m = 3$.

1. Необходимые сведения

Фредгольмов оператор $A : E_1 \to E_2$ вполне определяется свойством [7]:

$$E_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{1.1}$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A, $\operatorname{Coker} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Im} A$, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Положим ядро оператора A одномерным. Введем проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q)$, где I — единичный оператор в соответствующем подпространстве. Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$ и в одномерном подпространстве $\operatorname{Ker} A$ введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 1. \tag{1.2}$$

Имеет место следующее утверждение [8].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение*

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap \operatorname{dom} A, \quad w \in E_2,$$

равносильно системе

$$\begin{aligned} &v = A^- w + ce \quad \textit{для любого} \quad c \in \mathbb{C}, \\ &\langle Qw, \varphi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Будем обозначать через $P(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ полиномиальный коэффициент, т. е.

$$P(i_1; i_2; \ldots; i_m) = \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_m)!}{(i_1)!(i_2)! \ldots (i_m)!}.$$

Известны следующие утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Имеет место следующее равенство:*

$$P(i_1; i_2; \ldots; i_m) = P(i_1 - 1; i_2; \ldots; i_m) + P(i_1; i_2 - 1; \ldots; i_m) + \ldots + P(i_1; i_2; \ldots; i_m - 1).$$

П р е д л о ж е н и е 1.2 (Обобщенная формула Лейбница). *Пусть функции $f_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, действующие в $\mathbb{R}$, дифференцируемы n раз. Тогда справедлива формула дифференцирования произведения:*

$$(f_1(x) f_2(x) \ldots f_m(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_m \geqslant 0 \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n}} P(i_1; i_2; \ldots; i_m) f_1^{(i_1)}(x) f_2^{(i_2)}(x) \ldots f_m^{(i_m)}(x)$$

2. Формула производной определитель-функции

Пусть заданы функции $f_{ij}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Определим функции

$$F(x) = \det \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1m}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mm}(x) \end{pmatrix}$$

$$F_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(x) = \det\begin{pmatrix} f_{11}^{(i_1)}(x) & f_{12}^{(i_1)}(x) & \cdots & f_{1m}^{(i_1)}(x) \\ f_{21}^{(i_2)}(x) & f_{22}^{(i_2)}(x) & \cdots & f_{2m}^{(i_2)}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}^{(i_m)}(x) & f_{m2}^{(i_m)}(x) & \cdots & f_{mm}^{(i_m)}(x), \end{pmatrix}$$

Справедливо следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть функции $f_{ij}(x)$, $i,j = 1,2,\ldots,m$, дифференцируемы n раз. Тогда имеет место следующая формула:*

$$F^{(n)}(x) = \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_m \geqslant 0 \\ i_1+i_2+\ldots+i_m=n}} P(i_1;i_2;\ldots;i_m)F_{i_1,i_2,\ldots,i_m}(x).$$

Предложение доказывается методом математической индукции по n с применением предложения 1.2.

Далее, пусть $H = (h_{ij})$, $K = (k_{ij})$, $i,j = 1,2,\ldots,m$, — линейные операторы из $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, задаваемые квадратными матрицами. Рассмотрим многочлен

$$M(\lambda) = \det(\lambda^2 I - \lambda H - K).$$

Нетрудно видеть, что его можно представить в виде:

$$M(\lambda) = \sum_{i=0}^{2m} \lambda^i M_i^{(m)}. \tag{2.1}$$

Обозначим $\operatorname{tr}\mathcal{A}$ — след некоторой матрицы $\mathcal{A}$.

Коэффициенты $M_i^{(m)}$ при $m=2$ и $m=3$ определяются в следующем предложении.

П р е д л о ж е н и е 2.2 (Формула Маклорена для многочлена $M(\lambda)$). *1. Пусть $m=2$. Тогда*

$$M_0^{(2)} = \det K, \quad M_1^{(2)} = \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},$$

$$M_2^{(2)} = \det H - \operatorname{tr} K, \quad M_3^{(2)} = -\operatorname{tr} H, \quad M_4^{(2)} = 1.$$

2. Пусть $m=3$. Тогда

$$M_0^{(3)} = -\det K,$$

$$M_1^{(3)} = -\det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33},\end{pmatrix},$$

$$M_2^{(3)} = \det\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{13} \\ k_{31} & k_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$$
$$- \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33},\end{pmatrix},$$

$$M_3^{(3)} = \det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} \\ k_{32} & k_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{13} \\ k_{31} & k_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$$
$$+ \det\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23} \\ h_{32} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{13} \\ h_{31} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix} - \det H,$$

$$M_4^{(3)} = -\operatorname{tr} K + \det\begin{pmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{31} & h_{33}\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},$$

$$M_5^{(3)} = -\operatorname{tr} H, \quad M_6^{(3)} = 1.$$

Доказательство этого предложения основано на формуле Маклорена, а для вычисления производных применяется предложение 2.1.

З а м е ч а н и е 2.1. Нетрудно видеть, что при любом m выполнено:
1) $M_0^{(m)} = (-1)^m \det K, \qquad M_{2m}^{(m)} = 1$;
2) если хотя бы одна координата в наборе $(i_1; i_2; \ldots; i_m)$ больше двух, то соответствующее слагаемое в (2.1) равно нулю.

3. Теоремы о разрешении уравнения относительно старшей производной

Применив лемму 1.1, сведем уравнение (0.1) к равносильной системе:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^- B\frac{du}{dt} + A^- Cu(t) + A^- f(t) + k(t)e, \tag{3.1}$$

$$\langle QB\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QCu(t), \varphi\rangle + \langle Qf(t), \varphi\rangle = 0, \tag{3.2}$$

где $k(t)$ — некоторая непрерывная функция, которую надлежит вычислить. Пусть $f(t)$ дифференцируема. Продифференцируем (3.2) и подставим выражение (3.1):

$$\langle (QBA^- B + QC)\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QBA^- Cu(t), \varphi\rangle + \langle (QBA^- f(t) + Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle + k(t)\langle QBe, \varphi\rangle = 0. \tag{3.3}$$

Разберем два случая разрешимости уравнения (3.1).

Случай 1

Пусть

$$\langle QBe, \varphi\rangle \neq 0. \tag{3.4}$$

Выразив из (3.3) $k(t)$ и подставив в (3.1), получим уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} = K_1^{(1)}\frac{du}{dt} + K_0^{(1)}u(t) + F^{(1)}(t), \tag{3.5}$$

в обозначениях:

$$K_1^{(1)}(\cdot) = A^- B(\cdot) - \frac{\langle (QBA^- B + QC)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e,$$

$$K_0^{(1)}(\cdot) = A^- C(\cdot) - \frac{\langle QBA^- C(\cdot), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e,$$

$$F^{(1)}(t) = A^- f(t) - \frac{\langle (QBA^- f(t) + Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle}{\langle QBe, \varphi\rangle}e.$$

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено (3.4), и функция $f(t)$ дифференцируема. Тогда уравнение (0.1) равносильно системе (3.5), (3.2).*

Случай 2

Пусть теперь
$$\langle QBe, \varphi\rangle = 0, \quad \langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle \neq 0. \tag{3.6}$$

Вернемся к равенству (3.3). Поскольку $\langle QBe, \varphi\rangle = 0$, имеем:

$$\langle (QBA^{-}B + QC)\frac{du}{dt}, \varphi\rangle + \langle QBA^{-}Cu(t), \varphi\rangle + \langle (QBA^{-}f(t) + Q\frac{df}{dt}), \varphi\rangle = 0. \tag{3.7}$$

Теперь предположим, что функция $f(t)$ дважды дифференцируема. Продифференцировав (3.7) и подставив (3.1), получим уравнение относительно функции $k(t)$. В силу условия $\langle (QBA^{-}Be + QCe), \varphi\rangle \neq 0$ выражение $k(t)$ и подстановка в (3.1) приводит к уравнению:
$$\frac{d^2u}{dt^2} = K_1^{(2)}\frac{du}{dt} + K_0^{(2)}u(t) + F^{(2)}(t), \tag{3.8}$$

в обозначениях:

$$K_1^{(2)}(\cdot) = A^{-}B(\cdot) - \frac{\langle (QB(A^{-}B)^2 + QBA^{-}C + QCA^{-}B)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle},$$
$$K_0^{(2)}(\cdot) = A^{-}C(\cdot) - \frac{\langle (QBA^{-}BA^{-}C + QCA^{-}C)(\cdot), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle},$$
$$F^{(2)}(t) = A^{-}f(t) - \frac{\langle (QBA^{-}BA^{-}f(t) + QCA^{-}f(t) + QBA^{-}\frac{df}{dt} + Q\frac{d^2f}{dt^2}), \varphi\rangle}{\langle (QBA^{-}B + QC)e, \varphi\rangle}.$$

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено* (3.6), *и функция* $f(t)$ *дважды дифференцируема. Тогда уравнение* (0.1) *равносильно системе* (3.8), (3.2), (3.7).

4. Теоремы существования задачи Коши (0.1), (0.2)

Применив теоремы 3.1, 3.2, получим следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* (3.4), *и функция* $f(t)$ *дифференцируема. Тогда решение задачи* (0.1), (0.2) *существует при выполнении условия*

$$\langle (QBu^1 + QCu^0 + Qf(0)), \varphi\rangle = 0. \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнено* (3.6), *и функция* $f(t)$ *дважды дифференцируема. Тогда решение задачи* (0.1), (0.2) *существует при выполнении условий*

$$\begin{gathered}\langle (QBu^1 + QCu^0 + Qf(0)), \varphi\rangle = 0,\\ \langle (QBA^{-}Bu^1 + QBA^{-}Cu^0 + QCu^0 + QBA^{-}f(0) + Qf'(0)), \varphi\rangle = 0.\end{gathered} \tag{4.2}$$

5. Решение дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} = H\frac{du}{dt} + Ku(t), \tag{5.1}$$

где $H,\ K$ — линейные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{C}^m$; $t \in [0;T]$.

Под решением уравнения (5.1) подразумевается дважды дифференцируемая функция $u(t) \in \mathbb{C}^m$ такая, что $\dfrac{du}{dt} \in \mathbb{C}^m$, и удовлетворяет (5.1) на $[0;T]$.

Предложение 5.1. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — корень уравнения*

$$\det(\lambda^2 I - \lambda H - K) = 0, \tag{5.2}$$

а h — ненулевой вектор, являющийся решением уравнения

$$(\lambda^2 I - \lambda H - K)h = 0. \tag{5.3}$$

Тогда функция

$$u(t) = e^{\lambda t}h \tag{5.4}$$

является частным решением уравнения (5.1).

Предложение доказывается подстановкой (5.4) в (5.1).

Назовем (5.2) характеристическим уравнением для (5.1).

Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{2m}$ — действительные корни уравнения* (5.2) *единичной алгебраической кратности, а $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2m}$ — соответствующие им решения уравнения* (5.3). *Тогда общее решение уравнения* (5.1) *равно*

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2m} c_i e^{\lambda_i t} h_i,$$

где c_i — произвольные скаляры.

6. Пример

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u_1}{dt^2} + 2\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + 8u_1(t) + (9.5 + 0.5\sqrt{385})u_2(t), \\ &2\frac{d^2u_1}{dt^2} + 4\frac{d^2u_2}{dt^2} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + (9.5 - 0.5\sqrt{385})u_1(t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} u_1(0) = a_1, \quad u_2(0) = a_2, \\ u_1'(0) = b_1, \quad u_2'(0) = b_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Система (6.1) является уравнением вида (0.1) с операторами $A,\ B,\ C$, действующими в $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{6.3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 9.5 + 0.5\sqrt{385} \\ 9.5 - 0.5\sqrt{385} & 0 \end{pmatrix},$$

функцией $f(t) \equiv 0$, начальными элементами $u^0, u^1 \in \mathbb{R}^2$:

$$u^0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad u^1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Оператор A, определяемый формулой* (6.3), *фредгольмов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, возьмем элементы $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Имеют место разложения (1.1) пространства $\mathbb{R}^2$, где

$$\operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, v_2 \neq 0 \right\}, \qquad \operatorname{Coim} A = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\operatorname{Im} A = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \operatorname{Coker} A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2w_1 + w_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Элемент $\operatorname{Ker} A$ равен

$$e = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Элемент $\operatorname{Coker} A$, равен

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6.5}$$

Нетрудно видеть, что $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A = 1$. Проектор на $\operatorname{Coker} A$ равен

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, взяв элементы $v \in \operatorname{Coim} A$ и $w \in \operatorname{Im} A$ и решив уравнение $\tilde{A}v = w$, убеждаемся, что между $\operatorname{Coim} A$ и $\operatorname{Im} A$ имеется взаимно однозначное соответствие. Полуобратный оператор равен

$$A^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, предложение доказано. □

Далее, элемент (6.5) удовлетворяет условию (1.2)

$$< QBe, \varphi >= 1 \neq 0,$$

следовательно, по теореме 4.1 решение задачи (6.1), (6.2) существует при выполнении равенства:

$$(13 + \sqrt{385})a_1 + (38 + 2\sqrt{385})a_2 + 2b_1 + 2b_2 = 0. \tag{6.6}$$

Вычисления показывают, что

$$D_1 = \begin{pmatrix} -14 - \sqrt{385} & -39 - 2\sqrt{385} \\ 7.5 + 0.5\sqrt{385} & 20 + \sqrt{385} \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} -8 & -9.5 - 0.5\sqrt{385} \\ 8 & 9.5 + 0.5\sqrt{385} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в (6.2) значения

$$a_1 = a_2 = b_1 = 1, \quad b_2 = -26.5 - 1.5\sqrt{385}, \tag{6.7}$$

удовлетворяющие условию (6.6).

Применив теорему 3.1, следствие 5.1 и предложение 2.2, получим решение задачи (6.1), (6.2), (6.7):

$$u(t) = \sum_{i=1}^{4} c_i e^{\lambda_i t} h_i,$$

где

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{101 + 5\sqrt{385}}{18}, \quad c_3 = \frac{-275 - 11\sqrt{385}}{40}, \quad c_4 = \frac{77 + 3\sqrt{385}}{32},$$
$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \lambda_4 = 3,$$
$$h_1 = \begin{pmatrix} 19 + \sqrt{385} \\ -16 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 97 + 5\sqrt{385} \\ -46 - 2\sqrt{385} \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} 175 + 9\sqrt{385} \\ -80 - 4\sqrt{385} \end{pmatrix}, h_4 = \begin{pmatrix} 253 + 13\sqrt{385} \\ -118 - 6\sqrt{385} \end{pmatrix}.$$

References

[1] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике*, Наука, М., 1989. [N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, Ngo Zuy Kan, *Operator Methods in Linear Hydrodynamics*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[2] R. C. Dorf, R. H. Bishop, *Modern Control Systems*, Pearson Education International, England, 2008.

[3] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, "Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24** (2001), 1043–1053.

[4] М. Н. Botoroeva, О. С. Будникова, Л. С. Соловарова, "О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка", *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*, 2019, № 3, 32–41. [M. N. Botoroeva, O. S. Budnikova, L. S. Solovarova, "On the choice of boundary conditions for second-order differential-algebraic equations", *BSU Bulletin. Mathematics, Informatics*, 2019, № 3, 32–41].

[5] С. С. Орлов, "Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах", *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, "Continuous solutions of a second-order degenerate integro-differential equation in Banach spaces", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **2**:1 (2009), 328–332].

[6] В. И. Усков, "Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка относительно производной", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:136 (2021), 414–420. [V. I. Uskov, "Solving a second-order algebro-differential equation with respect to the derivative", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:136 (2021), 414–420].

[7] С. М. Никольский, "Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах", *Известия Академии Наук СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, "Linear equations in normed linear spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **7**:3 (1943), 147–166].

[8] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case", *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 07.07.2022 г.
Поступила после рецензирования 28.10.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 07.07.2022
Reviewed 28.10.2022
Accepted for press 24.11.2022

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 27, № 140 2022

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404
УДК 517.929

О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса

Анастасия Владимировна ЧЕРНИКОВА
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Исследуются модели динамики популяций, заданные разностными уравнениями со случайными параметрами. При отсутствии промысла развитие популяции в моменты времени $k=1,2,\ldots$ описывается уравнением $X(k+1)=f\big(X(k)\big),$ где $X(k)$ — количество возобновляемого ресурса, $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция. Предполагается, что в моменты $k=1,2,\ldots$ происходит изъятие случайной доли популяции $\omega\in[0,1].$ Процесс эксплуатации прекращается, когда в момент k доля собранного ресурса окажется больше некоторого значения $u(k)\in[0,1),$ чтобы сохранить часть популяции для воспроизводства и увеличения размера следующего сбора. При этом доля добываемого ресурса будет равна $\ell(k)=\min\big\{\omega(k),u(k)\big\},k=1,2,\ldots.$ Тогда модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1)=f\big((1-\ell(k))X(k)\big),\quad k=1,2,\ldots,$$

где $x(0)$ — начальная численность популяции, $X(1)=f\big(x(0)\big).$ Для стохастической модели популяции исследуется задача выбора управления $\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots),$ ограничивающего в каждый момент времени k долю собираемого ресурса, при котором предел функции средней временной выгоды

$$H\big(\overline{\ell},x(0)\big)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k),\quad\text{где }\ \overline{\ell}\doteq(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots)$$

существует и его можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Если уравнение $X(k+1)=f\big(X(k)\big)$ имеет решение вида $X(k)\equiv x^*,$ то это решение называется положением равновесия данного уравнения. Для любого $k=1,2,\ldots$ вводятся в рассмотрение случайные величины $A(k{+}1,x)=f\big((1{-}\ell(k))A(k,x)\big),$ $B(k{+}1,x^*)=f\big((1{-}\ell(k))B(k,x^*)\big)$; здесь $A(1,x)=f(x),$ $B(1,x^*)=x^*.$ Показано, что при выполнении определенных условий существует управление $\overline{u},$ при котором справедлива оценка средней временной выгоды

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(A(k,x)\ell(k)\big)\leqslant H(\overline{\ell},x(0))\leqslant\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(B(k,x^*)\ell(k)\big),$$

где через M обозначено математическое ожидание. Кроме того, получены условия существования управления $\overline{u},$ при котором с вероятностью единица существует положительный предел средней временной выгоды, равный

$$H(\overline{\ell},x(0))=\lim_{k\to\infty}MA(k,x)\ell(k)=\lim_{k\to\infty}MB(k,x^*)\ell(k).$$

Ключевые слова: подверженная промыслу стохастическая модель популяции, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Для цитирования: *Черникова А.В.* О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. № 140. С. 386–404. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404.

DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404

About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource

Anastasia V. CHERNIKOVA
Vladimir State University
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. We investigate population dynamics models given by difference equations with stochastic parameters. In the absence of harvesting, the development of the population at time points $k = 1, 2, \dots$ is given by the equation $X(k+1) = f\big(X(k)\big)$, where $X(k)$ is amount of renewable resource, $f(x)$ is a real differentiable function. It is assumed that at times $k = 1, 2, \dots$ a random fraction $\omega \in [0, 1]$ of the population is harvested. The harvesting process stops when at the moment k the share of the collected resource becomes greater than a certain value $u(k) \in [0, 1)$, in order to save a part of the population for reproduction and to increase the size of the next harvest. In this case, the share of the extracted resource is equal to $\ell(k) = \min\big\{\omega(k), u(k)\big\}, k = 1, 2, \dots$. Then the model of the exploited population has the form

$$X(k+1) = f\big((1 - \ell(k))X(k)\big), \quad k = 1, 2, \dots,$$

where $X(1) = f\big(x(0)\big)$, $x(0)$ is the initial population size. For the stochastic population model, we study the problem of choosing a control $\overline{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)$ that limits at each time moment k the share of the extracted resource and under which the limit of the average time profit function

$$H\big(\overline{\ell}, x(0)\big) \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X(k)\ell(k), \quad \text{where} \ \ \overline{\ell} \doteq (\ell(1), \dots, \ell(k), \dots),$$

exists and can be estimated from below with probability one by as a large number as possible. If the equation $X(k+1) = f\big(X(k)\big)$ has a solution of the form $X(k) \equiv x^*$, then this solution is called the equilibrium position of the equation. For any $k = 1, 2, \dots$, we consider random variables $A(k+1, x) = f\big((1 - \ell(k))A(k, x)\big)$, $B(k+1, x^*) = f\big((1 - \ell(k))B(k, x^*)\big)$; here $A(1, x) = f(x)$, $B(1, x^*) = x^*$. It is shown that when certain conditions are met, there exists a control $\overline{u}$ under which there holds the estimate of the average time profit

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} M\big(A(k, x)\ell(k)\big) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} M\big(B(k, x^*)\ell(k)\big),$$

where M denotes the mathematical expectation. In addition, the conditions for the existence of control $\overline{u}$ are obtained under which there exists, with probability one, a positive limit to the average time profit equal to

$$H(\overline{\ell}, x(0)) = \lim_{k\to\infty} MA(k, x)\ell(k) = \lim_{k\to\infty} MB(k, x^*)\ell(k).$$

Keywords: stochastic model of the population subject to harvesting, average time profit, optimal exploitation

Mathematics Subject Classification: 37N35, 39A50, 49N25, 93C55.

For citation: Chernikova A.V. O sushchestvovanii predela sredney vremennoy vygody v veroyatnostnykh modelyakh sbora vozobnovlyayemogo resursa [About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 140, pp. 386–404. DOI 10.20310/2686-9667-2022-27-140-386-404. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Эксплуатация природных ресурсов имеет основополагающее значение для выживания человечества. Как известно, чрезмерная эксплуатация возобновляемых ресурсов (например, популяций животных и, в частности, рыб) может привести к их исчезновению и, как следствие, повлиять на экономику, например, ростом цен и высокой неопределенностью в будущем. Таким образом, возникает дилемма: либо интенсивно добывать ресурс для увеличения доходов, либо учитывать возможные отрицательные последствия чрезмерной эксплуатации, влияющие на будущую способность добычи. Поэтому экологическое и экономическое обоснование оптимальных режимов добычи ресурса является ключевой задачей математической биологии [1].

Вопросы оптимизации сбора урожая и максимизации прибыли от него для детерминированных моделей популяций изучались довольно полно примерно со второй половины прошлого столетия [1–3]. Наибольший интерес для исследования вызывают структурированные популяции, например, по возрасту или виду. В [4] доказано, что при селективном режиме промысла оптимальное усилие, прилагаемое к сбору, является периодическим; если избирательности вылова нет, то оптимальным является стационарное усилие. Периодичность оптимального промыслового усилия обусловлена избирательностью сбора. Режимы сбора на конечном и бесконечном промежутках времени для структурированной по возрасту популяции при различных ограничениях на условия промысла получены в [5].

Однако, в моделях популяционной динамики важно учитывать случайные колебания внешней среды, которые встречаются в реальном мире. Одной из важных проблем природосбережения является решение задачи оптимального сбора ресурса, подверженного стохастическим колебаниям окружающей среды [6–8]. За последние годы работы по данной тематике обобщались и дополнялись новыми исследованиями. Так, в [9] показано, что при селективном промысле структурированной по возрасту популяции максимальная устойчивая урожайность приводит к серьезному отклонению от экономической оптимальности, поскольку пренебрегает зависимостью затрат на сбор от выбора орудий сбора. В связи с этим во многих работах принимается во внимание прилагаемое усилие сбора. При эксплуатации популяций, заданных стохастическими логистическими моделями, необходимо уменьшить усилия по сбору урожая и интенсивность воздействия окружающей среды [10]. В противном случае максимальная устойчивая урожайность будет увеличиваться по мере увеличения усилий по сбору урожая, а чрезмерная эксплуатация снизит уровень максимальной устойчивой урожайности и в конечном итоге приведет к вымиранию всей популяции с вероятностью единица. Кроме того, интересной представляется задача посева урожая. В [11] описывается оптимальная стратегия сбора и посева урожая, которая максимизирует доход от сбора урожая за вычетом потерянного дохода от посева. Показано, что не оптимально осуществлять сбор и посев более чем из одной популяции одновременно. В работе [12] для вероятностной модели, описывающей динамику структурированной по виду популяции, получены оценки средней временной выгоды при эксплуатации. Для стохастической модели развития однородной популяции, описанной в [13], показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции, определяющей динамику популяции при отсутствии эксплуатации. Подробный обзор работ по данной тематике приведен в [14, 15].

В данной работе рассматривается модель популяции, заданная разностным уравнением со случайными параметрами. Исследуется задача выбора управления сбором возобновляемого ресурса, при котором функцию средней временной выгоды от сбора можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом. Получены оценки средней временной выгоды и показано, что при выполнении определенных условий найдется управление, при котором существует ее положительный предел.

1. Основные определения и обозначения

Будем рассматривать модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные разностными уравнениями со случайными параметрами. Развитие популяции при отсутствии эксплуатации описывается разностным уравнением

$$X(k+1)=f\big(X(k)\big), \quad k=1,2,\ldots, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ — вещественная дифференцируемая функция, заданная на отрезке $I=[0,a]$, такая, что $f(I)\subseteq I$. Отметим, что для ограниченных неотрицательных функций $f(x)$, определенных на $[0,+\infty)$, все утверждения статьи также верны.

Предполагаем, что в моменты времени k из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k)\in\Omega\subseteq[0,1]$, $k=1,2,\ldots$, что приводит к уменьшению его количества. На процесс сбора можно влиять таким образом, чтобы остановить заготовку, когда ее доля окажется больше некоторого значения $u(k)\in[0,1)$ в момент k, чтобы сохранить возможно больший остаток для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell(k)=\ell\big(\omega(k),u(k)\big)=\min\big\{\omega(k),u(k)\big\}, \quad k=1,2,\ldots. \tag{1.2}$$

Таким образом, модель эксплуатируемой популяции имеет вид

$$X(k+1)=f\big((1-\ell(k))X(k)\big), \quad k=1,2,\ldots,$$

где $x(0)$ — начальная численность, $X(1)=f(x(0))$, $X(k)=X\big(\ell(1),\ldots,\ell(k-1),x(0)\big)$ — количество ресурса до сбора в момент $k=2,3,\ldots$, зависящее от долей $\ell(1),\ldots,\ell(k-1)$ ресурса, собранного в предыдущие моменты, и от начальной численности популяции $x(0)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [16, 17]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*\big(\overline{\ell},x(0)\big)\doteq\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k), \quad \text{где } \overline{\ell}\doteq(\ell(1),\ldots,\ell(k),\ldots). \tag{1.3}$$

Отметим, что если в (1.3) нижний предел заменить на верхний, то аналогично можно определить функцию $H^*\big(\overline{\ell},x(0)\big)$. Если выполнено равенство

$$H_*\big(\overline{\ell},x(0)\big)=H^*\big(\overline{\ell},x(0)\big),$$

то определим предел

$$H\big(\overline{\ell},x(0)\big)\doteq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k).$$

Пусть $U\doteq\big\{\overline{u}:\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\big\}$. Исследуем задачу выбора управления сбором $\overline{u}=(u(1),\ldots,u(k),\ldots)\in U$, ограничивающего долю добываемого ресурса в каждый момент времени k, при котором предел $H\big(\overline{\ell},x(0)\big)$ существует и значение этой функции можно оценить снизу с вероятностью единица по возможности наибольшим числом.

2. Оценка средней временной выгоды, выполненная с вероятностью единица

Приведем описание вероятностной модели. Отметим, что аналогичная вероятностная модель для случая, когда динамика популяции задана дифференциальным уравнением со случайным параметром, описана в [16, 17]. Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств $\Omega \subseteq [0,1]$, на которой с помощью функции распределения $G(x)$ определена вероятностная мера $\widetilde{\mu}$ следующим образом:

$$\widetilde{\mu}\big((\alpha, \beta]\big) = G(\beta) - G(\alpha), \quad \alpha, \beta \in [0,1].$$

Определим вероятностную модель $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где $\Sigma \doteq \big\{\sigma : \sigma = (\omega(1), \ldots, \omega(k), \ldots)\big\}$, $\omega(k) \in \Omega$, $\mathfrak{A}$ — наименьшая сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами

$$D(k) \doteq \big\{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in \mathcal{A}(1), \ldots, \omega(k) \in \mathcal{A}(k)\big\}, \quad \text{где } \mathcal{A}(1) \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ldots, \mathcal{A}(k) \in \widetilde{\mathfrak{A}}$$

и зададим меру

$$\widetilde{\mu}\big(D(k)\big) \doteq \widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(1)\big) \cdot \widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(2)\big) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}\big(\mathcal{A}(k)\big).$$

Тогда в силу теоремы Колмогорова [18, глава 2, с. 204] на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Определение 2.1. (см. [19, с. 44]). Если уравнение (1.1) имеет решение вида $X(k) \equiv \text{const} = x^*$, то это решение называется *положением равновесия* (*неподвижной точкой*) *данного уравнения*, причем $x^* = f\big(x^*\big)$.

Определение 2.2. (см. [19, с. 44]). Решение $X(k) \equiv x^*$ уравнения (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что как только $\big|X(1) - x^*\big| < \delta$, то $\big|X(k) - x^*\big| < \varepsilon$ для всех $k \geqslant 1$. Положение равновесия $X(k) \equiv x^*$ *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого начального условия $X(1)$ из некоторой окрестности точки x^* имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} \big|X(k) - x^*\big| = 0;$$

такую окрестность точки x^* назовем *областью притяжения решения.*

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ зададим случайные величины

$$A(k,x) = A\big(k, x, \overline{\ell}(k)\big), \quad B(k,x^*) = B\big(k, x^*, \overline{\ell}(k)\big), \quad \text{где } \overline{\ell}(k) \doteq (\ell(1), \ldots, \ell(k))$$

рекуррентным образом:

$$\begin{gathered} A(1,x) = f(x), \quad B(1,x^*) = x^*, \\ A(k+1,x) = f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big), \\ B(k+1,x^*) = f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big). \end{gathered} \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k) \equiv x^* > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ *и* $0 < f'(x^*) < 1$. *Обозначим через* $[a_1, a_2]$ *отрезок, содержащий точку* x^*, *для всех точек которого выполнено неравенство*

$$0 < f'(x) < 1.$$

Тогда

1) *для всех* $x \in [a_1, x^*]$ *выполнено*

$$x \leqslant f(x) \leqslant x^*, \tag{2.2}$$

2) $[a_1, a_2]$ *содержится в области притяжения решения* $X(k) \equiv x^*$, $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Докажем пункт 1 леммы. Рассмотрим поведение функции $F(x) \doteq f(x) - x$ на отрезке $[a_1, x^*]$. Отметим, что

$$F'(x) = \big(f(x) - x\big)' = f'(x) - 1 < 0$$

для всех $x \in [a_1, x^*]$. Следовательно, функция $F(x)$ убывает в (a_1, x^*) и, кроме того,

$$F(x^*) = f(x^*) - x^* = 0.$$

Тогда, для всех $x \in [a_1, x^*]$ выполнено

$$F(x) = f(x) - x \geqslant 0,$$

откуда следует, что $f(x) \geqslant x$. По условию леммы функция $f(x)$ возрастает в (a_1, x^*), тогда $f(x) \leqslant f(x^*) = x^*$ при $x \in [a_1, x^*]$. Окончательно получаем, что неравенство (2.2) выполнено для всех $x \in [a_1, x^*]$.

Перейдем к доказательству пункта 2. Пусть $X(1) \in [a_1, x^*)$. Тогда из (2.2) следует, что

$$X(1) \leqslant X(2) = f(X(1)) \leqslant f(x^*) = x^*.$$

Поэтому, в силу теоремы Лагранжа, существует $\widehat{X}(1) \in \big(X(1), x^*\big)$ такое, что

$$\big|X(2) - x^*\big| = \big|f(X(1)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(1))\big|X(1) - x^*\big|.$$

Тогда,

$$\widehat{X}(1) \in \big(X(1), x^*\big) \subseteq (a_1, x^*) \subseteq (a_1, a_2).$$

Затем, учитывая неравенство (2.2), получаем, что

$$X(2) \leqslant X(3) = f(X(2)) \leqslant f(x^*) = x^*.$$

По теореме Лагранжа существует $\widehat{X}(2) \in \big(X(2), x^*\big)$ такое, что

$$\big|X(3) - x^*\big| = \big|f(X(2)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(2))\big|X(2) - x^*\big|.$$

Отметим, что $\widehat{X}(2) \in \big(X(2), x^*\big) \subseteq (a_1, x^*) \subseteq (a_1, a_2)$. Аналогично получаем равенство

$$\big|X(k+1) - x^*\big| = \big|f(X(k)) - f(x^*)\big| = f'(\widehat{X}(k))\big|X(k) - x^*\big|$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$, где $\widehat{X}(k) \in (a_1, a_2)$.

Обозначим $\delta = \max\limits_{x \in [a_1, a_2]} f'(x)$. Из условия $0 < f'(x) < 1$ для всех $x \in [a_1, a_2]$ следует, что $\delta < 1$. Окончательно для всех $X(k) \in [a_1, x^*]$, $k = 1, 2, \ldots$ выполнено $X(k) \leqslant x^*$ и

$$\begin{aligned}\big|X(k+1) - x^*\big| &= \big|f(X(k)) - f(x^*)\big| \\ &= f'(\widehat{X}(1))f'(\widehat{X}(2))\ldots f'(\widehat{X}(k))\big|X(1) - x^*\big| \leqslant \delta^k\big|X(1) - x^*\big|.\end{aligned}$$

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} \delta^k = 0,$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \bigl|X(k) - x^*\bigr| = 0.$$

Аналогичное утверждение выполнено, если $X(1) \in (x^*, a_2].$ Следовательно, отрезок $[a_1, a_2]$ содержится в области притяжения решения. □

Теорема 2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $X(k) \equiv x^* > 0,$ $k = 1, 2, \ldots$ *является неподвижной точкой уравнения* (1.1) *и существует отрезок* $[a_1, a_2]$ *такой, что* $x^* \in [a_1, a_2]$ *и* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in [a_1, a_2]$;

2) $G(0) < 1.$

Тогда для любых $m \in \mathbb{N},$ $x \in [a_1, x^*]$ *и* $x(0) \in [a_1, a_2]$ *существует управление* $\overline{u} \in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *справедлива оценка*

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\bigl(A(k,x)\ell(k)\bigr) \leqslant H(\overline{\ell}, x(0)) \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} M\bigl(B(k,x^*)\ell(k)\bigr). \tag{2.3}$$

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $x \in [a_1, x^*].$ Определим последовательности случайных величин $\{\widetilde{A}(k,x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\widetilde{B}(k,x^*)\}_{k=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$\widetilde{A}(sm+1,x) \doteq f(x), \quad \widetilde{A}(sm+i,x) \doteq f\bigl((1-\ell(sm+i-1))\widetilde{A}(sm+i-1,x)\bigr),$$

$$\widetilde{B}(sm+1,x^*) \doteq x^*, \quad \widetilde{B}(sm+i,x^*) \doteq f\bigl((1-\ell(sm+i-1))\widetilde{B}(sm+i-1,x^*)\bigr),$$

где $i = 2, \ldots, m,$ $s = 0, 1, \ldots.$ Здесь доли $\ell(k)$ добываемого ресурса для всех $k = 1, 2, \ldots$ задаются равенством (1.2); управление $\overline{u} = \bigl(u(1), \ldots, u(k), \ldots\bigr) \in U$ выбирается в зависимости от расположения начальной точки $x(0).$ Рассмотрим три случая.

1. Пусть $x(0) \in [x, x^*],$ $x \in [a_1, x^*].$ Поскольку функция $f(x)$ возрастающая в $(a_1, a_2),$ имеем

$$\widetilde{A}(1,x) = f(x) \leqslant X(1) = f\bigl(x(0)\bigr) \leqslant f(x^*) = x^* = \widetilde{B}(1,x^*).$$

Если $m \geqslant 2,$ то для $X(2) = f\bigl(x(1)\bigr) = f\bigl((1-\ell(1))X(1)\bigr)$ выполнены неравенства

$$\widetilde{A}(2,x) = f\bigl((1-\ell(1))\widetilde{A}(1,x)\bigr) \leqslant X(2) \leqslant f\bigl((1-\ell(1))\widetilde{B}(1,x^*)\bigr) = \widetilde{B}(2,x^*). \tag{2.4}$$

Аналогично для всех $k = 1, \ldots, m$ получаем, что $\widetilde{A}(k,x) \leqslant X(k) \leqslant \widetilde{B}(k,x^*).$ Обозначим через $x(k)$ — количество ресурса после сбора в момент $k;$ тогда $x(k) = (1-\ell(k))X(k),$ $k = 1, 2, \ldots.$ Покажем, что управление $\overline{u} \in U,$ при котором выполнено (2.3), можно определить равенствами $u(k) = 1 - \dfrac{x}{\widetilde{A}(k,x)}$ при всех $k = 1, 2, \ldots.$ Из неравенств

$$\ell(m) = \min\bigl\{\omega(m), u(m)\bigr\} \leqslant u(m) \quad \text{и} \quad \widetilde{A}(m,x) \leqslant X(m)$$

следует, что

$$x(m) = \bigl(1-\ell(m)\bigr)X(m) \geqslant (1-u(m))X(m) = \frac{xX(m)}{\widetilde{A}(m,x)} \geqslant x.$$

Из последнего неравенства при $x(0) \in [x, x^*]$ имеем

$$\widetilde{A}(m+1,x) = f(x) \leqslant X(m+1) = f\bigl(x(m)\bigr) \leqslant x^* = \widetilde{B}(m+1,x^*).$$

Отсюда, аналогично (2.4), следует, что

$$\widetilde{A}(m+i,x) \leqslant X(m+i) \leqslant \widetilde{B}(m+i,x^*), \quad i=2,\ldots,m.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\widetilde{A}(k,x) \leqslant X(k) \leqslant \widetilde{B}(k,x^*) \quad \text{для всех } k=1,2,\ldots. \tag{2.5}$$

Покажем, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k)$ существуют с вероятностью единица. Действительно, случайные величины

$$\widetilde{A}\big(m(p-1)+1,x\big)\ell\big(m(p-1)+1\big)+\ldots+\widetilde{A}\big(mp,x\big)\ell\big(mp\big), \qquad p=1,2,\ldots,$$

независимы, ограничены и одинаково распределены, поэтому в силу усиленного закона больших чисел Колмогорова (см. [18, глава 4, с. 377]) с вероятностью единица выполнено

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k) &= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{mp}\sum_{k=1}^{mp}\widetilde{A}(k,x)\ell(k)\\ &= \lim_{p\to\infty}\frac{1}{mp}\sum_{j=1}^{p}\Big(\widetilde{A}\big(m(j-1)+1,x\big)\ell\big(m(j-1)+1\big)+\ldots+\widetilde{A}\big(mj,x\big)\ell\big(mj\big)\Big)\\ &= \frac{1}{m}M\Big(\widetilde{A}\big(1,x\big)\ell\big(1\big)+\ldots+\widetilde{A}\big(m,x\big)\ell\big(m\big)\Big).\end{aligned}$$

Отметим, что для последовательности $\{\widetilde{B}(k,x^*)\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено подобное равенство. Отсюда, учитывая (2.5), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(\widetilde{A}(k,x)\ell(k)\big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{A}(k,x)\ell(k) \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X(k)\ell(k)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}M\big(\widetilde{B}(k,x^*)\ell(k)\big)\end{aligned} \tag{2.6}$$

для почти всех $\sigma\in\Sigma$, поэтому из неравенства (2.6) получаем (2.3).

2. Пусть $x(0)\in[a_1,x)$. Положим, что для всех $k=1,\ldots,k_0$ извлечение ресурса не происходит, т. е. $u(k)=0$. Здесь $k_0=k_0\big(x(0)\big)$ — наименьшее из натуральных чисел таких, что $x(k)=X(k)=f\big(X(k-1)\big)\geqslant x$. Данное значение k_0 существует, так как по лемме 2.1 точка $x(0)$ содержится в области притяжения решения $X(k)\equiv x^*$. Определим $u(k)=1-\dfrac{x}{\widetilde{A}(k,x)}$ для всех $k>k_0$, тогда

$$\widetilde{A}(k,x)\leqslant X(k)\leqslant \widetilde{B}(k,x^*) \text{ при всех } k>k_0;$$

это доказывается также, как в первом случае. Следовательно, неравенство (2.6) справедливо при выбранном управлении $\overline{u}=\big(u(1),\ldots,u(k),\ldots\big)$, поэтому (2.3) выполнено для почти всех $\sigma\in\Sigma$.

3. Рассмотрим случай, когда $x(0)\in(x^*,a_2]$. Здесь $x\leqslant x^*\leqslant f\big(x(0)\big)=X(1)\leqslant f(a_2)$. Пусть $k_1=k_1\big(x(0)\big)$ — наименьшее из натуральных чисел таких, что $x(k)\leqslant x^*$ при

$u(1) = \ldots = u(k) = 1$. Покажем, что данное число существует с вероятностью единица. Отметим, что такое число существует, если $\omega(k_1) = 1$ при некотором $k_1 = 1, 2, \ldots$; тогда $x(k) = 0$ при всех $k \leqslant k_1$.

Пусть теперь $\omega(k) \neq 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку функция $f(x)$ убывает при $x > x^*$, то $X(k+1) = f\big((1-\ell(k))X(k)\big) < x(k)$, если $x(k) > x^*$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, если $u(k) = 1$, то $\ell(\omega(k), 1) = \omega(k)$; поэтому, если $x(0) > x^*$ и $u(1) = 1$, то

$$x(1) = (1-\omega(1))X(1) < (1-\omega(1))x(0);$$

если $x(1) > x^*$ и $u(1) = u(2) = 1$, то

$$x(2) = (1-\omega(2))X(2) < (1-\omega(2))x(1) < (1-\omega(1))(1-\omega(2))x(0).$$

Аналогично получаем, что если $x(k) > x^*$ и $u(1) = \ldots = u(k+1) = 1$, то

$$x(k+1) < (1-\omega(1))(1-\omega(2)) \cdot \ldots \cdot (1-\omega(k+1))x(0).$$

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\big\{C(k,\omega(k))\big\}_{k=1}^{\infty}$, где $C(k,\omega(k)) = 1-\omega(k)$. Введем также последовательность $\big\{S(k,\omega(k))\big\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$S(k,\omega(k)) = \ln(1-\omega(1)) + \ldots + \ln(1-\omega(k)),$$

которая является случайным блужданием на прямой. Покажем, что если $G(0) < 1$, то

$$M\ln(1-\omega(k)) < 0. \tag{2.7}$$

Действительно, так как $\omega(k) \in [0,1)$, то $\ln(1-\omega(k)) \leqslant 0$, поэтому для математического ожидания либо выполнено неравенство (2.7), либо $M\ln(1-\omega(k)) = 0$. В последнем случае $\omega(k) = 0$ с вероятностью единица [18, глава 2, § 6], что противоречит условию $G(0) = \widetilde{\mu}(\omega(k) = 0) < 1$. Из (2.7) следует, что с вероятностью единица $S(k,\omega(k))$ уходит в минус бесконечность (см. [20, глава 12, § 2]). Это означает, что существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S(k,\omega(k)) = -\infty$ для всех $\omega(k) \in \Sigma_0$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} C(1,\omega(1)) \cdot \ldots \cdot C(k,\omega(k)) = 0 \text{ для всех } \omega(k) \in \Sigma_0,$$

поэтому с вероятностью единица найдется $k_1 = k_1(x(0))$ такое, что $(1-\omega(k_1))X(k_1) \leqslant x^*$.

Выберем управления

$$u(k) = 1, \quad k = 1, \ldots, k_1 - 1; \quad u(k_1) = 1 - \frac{x}{X(k_1)}; \quad u(k) = 1 - \frac{x}{\widetilde{A}(k,x)}, \quad k = k_1 + 1, \ldots .$$

Тогда из $x(k_1) = \big(1-\ell(k_1)\big)X(k_1)$ и неравенства $\ell\big(\omega(k_1), u(k_1)\big) \leqslant u(k_1)$ получаем, что

$$x = \big(1-u(k_1)\big)X(k_1) \leqslant x(k_1) \leqslant x^*,$$

то есть $x(k_1) \in [x, x^*]$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство первого пункта. $\square$

3. О существовании предела средней временной выгоды

Приведем условия, при которых существуют пределы последовательностей

$$\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{и} \quad \big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty},$$

где $A(k,x)$, $B(k,x^*)$ определены равенствами (2.1) для всех $k=1,2,\ldots$.

Лемма 3.1. *Предположим, что уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k)\equiv x^*>0$, $k=1,2,\ldots$ *и существует* $a_1\in[0,x^*)$ *такое, что* $0<f'(x)<1$ *для всех* $x\in(a_1,x^*)$. *Тогда найдется* $\overline{u}\in U$ *такое, что*

1) *если* $x\in(a_1,x^*)$, *то последовательность* $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ *неубывающая, а последовательность* $\big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ *невозрастающая,*

2) *существуют пределы математических ожиданий*

$$\lim_{k\to\infty} MA(k,x)\ell(k), \quad \lim_{k\to\infty} MB(k,x^*)\ell(k). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для всех $x\in(a_1,x^*)$ последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является неубывающей, т. е.

$$MA(k,x)\ell(k)\leqslant MA(k+1,x)\ell(k+1), \qquad k=1,2,\ldots .$$

Определим

$$u(k)=1-\frac{x}{A(k,x)}, \qquad k=1,2,\ldots . \tag{3.2}$$

Убедимся, что выполнено неравенство $f(x)=A(1,x)\leqslant A(2,x)=f\big((1-\ell(1))f(x)\big)$ для любых $x\in[a_1,x^*]$. Отметим, что

$$x\leqslant(1-\ell(1))f(x)=\max\big\{(1-\omega(1))f(x),(1-u(1))f(x)\big\}=\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\},$$

и так как функция $f(x)$ возрастающая при всех $x\in(a_1,x^*)$, то по лемме 2.1 получаем, что

$$(1-\omega(1))f(x)\leqslant f(x)\leqslant x^*.$$

Следовательно, $\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\in(a_1,x^*]$ и для любого $\ell(1)$

$$f(x)\leqslant f\big(1-\ell(1))f(x)\big)=f\Big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x),x\big\}\Big). \tag{3.3}$$

Далее, для всех $x\in(a_1,x^*)$ и с учетом (2.1), (1.2) и (3.2) найдем математические ожидания случайных величин $MA(1,x)\ell(1)$ и $MA(2,x)\ell(2)$:

$$\begin{aligned} MA(1,x)\ell(1)&=M\min\Big\{\omega(1)f(x),u(1)f(x)\Big\}\\ &=M\min\Big\{\omega(1)f(x),f(x)-x\Big\}=M\min\Big\{\omega(2)f(x),f(x)-x\Big\},\\ MA(2,x)\ell(2)&=M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big),u(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big\}\\ &=M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big),f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\Big\}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3.3), получаем, что для любого $\ell(1)$ выполнено

$$\omega(2)f(x)\leqslant\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big) \quad \text{или} \quad f(x)-x\leqslant f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x.$$

Таком образом,

$$\min\big\{\omega(2)f(x), f(x)-x\big\} \leqslant \min\big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\big\}$$

и, следовательно,

$$MA(1,x)\ell(1) \leqslant MA(2,x)\ell(2).$$

Покажем далее, что $MA(2,x)\ell(2) \leqslant MA(3,x)\ell(3)$. Находя математические ожидания $MA(2,x)\ell(2)$ и $MA(3,x)\ell(3)$, получим

$$\begin{aligned} MA(2,x)\ell(2) &= M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))f(x)\big), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(2)f\big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x), x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(1))f(x), x\big\}\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x), x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x), x\big\}\big)-x\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MA(3,x)\ell(3) &= M\min\Big\{\omega(3)f\big((1-\ell(2))f(x)\big), f\big((1-\ell(2))f(x)\big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\Big((1-\ell(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big), \\ &\qquad\qquad f\Big((1-\ell(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\Big)-x\Big\} \\ &= M\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big), x\big\}\big), \\ &\qquad\qquad f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big), x\big\}\big)-x\Big\}. \end{aligned}$$

Снова с учетом (3.3) получаем, что для любого $\ell(2)$ выполнено

$$\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x), x\big\}\big) \leqslant \omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big), x\big\}\big)$$

или

$$f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f(x), x\big\}\big)-x \leqslant f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big), x\big\}\big)-x,$$

откуда следует, что

$$(1-\omega(2))f(x) \leqslant (1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))f(x)\big).$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} &\min\Big\{\omega(3)f\big(\max\big\{(1-\omega(2))A(1,x), x\big\}\big), f\big(\max\big\{(1-\omega(2))A(1,x), x\big\}\big)-x\Big\} \\ &\leqslant \min\Big\{\omega(3)f\Big(\max\big\{(1-\omega(2))A(2,x), x\big\}\Big), f\Big(\max\big\{(1-\omega(2))A(2,x), x\big\}\Big)-x\Big\}, \end{aligned}$$

где $A(1,x)=f(x)$, $A(2,x)=f\big((1-\ell(1))f(x)\big)$. Следовательно,

$$MA(2,x)\ell(2) \leqslant MA(3,x)\ell(3).$$

Тогда для всех $x \in (a_1, x^*)$ и $k=1,2,\ldots$ можно показать, что

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant MA(k+1,x)\ell(k+1) \tag{3.4}$$

и, следовательно, последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ является неубывающей.

Проводя аналогичные рассуждения можно показать, что при любом $x \in (a_1, x^*)$ последовательность $\{MB(k,x)\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая, т. е. $MB(k,x) \geqslant MB(k+1,x)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Нетрудно удостовериться в том, что выполнено неравенство

$$x^* = B(1,x^*) \geqslant B(2,x^*) = f\big((1-\ell(1))x^*\big)$$

для любых $x \in [a_1, x^*]$. Заметим, что

$$x^* \geqslant (1-\ell(1))x^* = \max\big\{1-\omega(1), 1-u(1)\big\}x^*,$$

и так как для всех $x \in (a_1, x^*)$ функция $f(x)$ возрастающая, то снова с учетом леммы 2.1 получаем

$$x^* \geqslant f\big((1-\ell(1))x^*\big) = f\big(\max\big\{1-\omega(1), 1-u(1)\big\}x^*\big). \tag{3.5}$$

Математические ожидания случайных величин $MB(1,x^*)\ell(1)$ и $MB(2,x^*)\ell(2)$ имеют вид:

$$MB(1,x^*)\ell(1) = M\min\Big\{\omega(1)x^*, u(1)x^*\Big\} = M\min\Big\{\omega(2)x^*, u(2)x^*\Big\},$$

$$MB(2,x^*)\ell(2) = M\min\Big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big), u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big)\Big\}.$$

Принимая во внимание (3.5), получаем, что для любого $\ell(1)$ выполнено

$$\omega(2)x^* \geqslant \omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big) \quad \text{или} \quad u(2)x^* \geqslant u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big).$$

Следовательно,

$$\min\big\{\omega(2)x^*, u(2)x^*\big\} \geqslant \min\big\{\omega(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big), u(2)f\big((1-\ell(1))x^*\big)\big\}$$

и, значит,

$$MB(1,x^*)\ell(1) \geqslant MB(2,x^*)\ell(2).$$

Также нетрудно показать, что $MB(2,x^*)\ell(2) \geqslant MB(3,x^*)\ell(3)$. Найдя математические ожидания $MB(2,x^*)\ell(2)$, $MB(3,x^*)\ell(3)$ и принимая во внимание (3.5), для любого $\ell(2)$ получаем

$$\begin{aligned}&f\big(\max\big\{(1-\omega(2)), (1-u(2))\big\}x^*\big)\\ \geqslant &f\big(\max\big\{(1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big), (1-u(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big)\big\}\big),\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$(1-\omega(2))x^* \geqslant (1-\omega(2))f\big((1-\ell(1))x^*\big).$$

Таким образом,

$$MB(2,x^*)\ell(2) \geqslant MB(3,x^*)\ell(3).$$

Продолжая рассуждения для всех $x \in (a_1, x^*)$ и $k = 1, 2, \ldots$ можно показать, что

$$MB(k,x^*)\ell(k) \geqslant MB(k+1,x^*)\ell(k+1) \tag{3.6}$$

а, значит, последовательность $\big\{MB(k,x^*)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая.

Из (3.4) и (3.6) по теореме Вейерштрасса получаем, что неубывающая последовательность $\big\{MA(k,x)\ell(k)\big\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху значением

$$B(1,x^*)\ell(1)=\min\big\{\omega(1),u(1)\big\}x^*\leqslant x^*,$$

а невозрастающая последовательность $\big\{MB(k,x^*)\big\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена снизу значением

$$A(1,x)\ell(1)=\min\big\{\omega(1)f(x),u(1)f(x)\big\}=\min\big\{\omega(1)f(x),f(x)-x\big\}\leqslant f(x).$$

Следовательно, существуют пределы (3.1). □

В следующей теореме получены условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел $H(\overline{\ell},x(0))$.

Теорема 3.1. *Предположим, что уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k)\equiv x^*>0$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $a_1\in[0,x^*)$ *такое, что* $0<f'(x)<1$ *для всех* $x\in(a_1,x^*)$,

2) $\Omega\subseteq[0,1],G(0)<1$.

Тогда для любого $x\in(a_1,x^*)$ *существует управление* $\overline{u}\in U$ *такое, что для почти всех* $\sigma\in\Sigma$ *существует положительный предел*

$$H(\overline{\ell},x(0))=\lim_{k\to\infty}MA(k,x)\ell(k)=\lim_{k\to\infty}MB(k,x^*)\ell(k), \tag{3.7}$$

не зависящий от начального значения $x(0)\in(a_1,x^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что управление $\overline{u}\in U$, при котором выполнено (3.7), можно определить равенством $u(k)=1-\dfrac{x}{A(k,x)}$ при $k=1,2,\ldots$. Поскольку $\ell(k)\doteq\min\{\omega(k),u(k)\}\leqslant u(k)$, то для всех $k=1,2,\ldots$ выполнено неравенство

$$(1-\ell(k))A(k,x)\geqslant(1-u(k))A(k,x)=x. \tag{3.8}$$

При $k=1$ имеем $f(x)=A(1,x)<B(1,x^*)=x^*$, откуда следует, что

$$x=(1-u(1))A(1,x)\leqslant(1-u(1))B(1,x^*)\qquad\text{для всех } x\in(a_1,x^*). \tag{3.9}$$

Из (2.2), (3.8) и (3.9) для всех x из интервала (a_1,x^*) получаем

$$a_1<x\leqslant(1-\ell(1))A(1,x)\leqslant(1-\ell(1))B(1,x^*)\leqslant x^*. \tag{3.10}$$

Поскольку функция $f(x)$ возрастающая в (a_1,x^*), то

$$f\big((1-\ell(1))A(1,x)\big)\leqslant f\big((1-\ell(1))B(1,x^*)\big).$$

В силу теоремы Лагранжа и с учетом (2.1), существует $\widehat{x}_1\in\big((1-\ell(1))f(x),(1-\ell(1))x^*\big)$ такое, что

$$B(2,x^*)-A(2,x)=f\big((1-\ell(1))x^*\big)-f\big((1-\ell(1))f(x)\big)=f'(\widehat{x}_1)\big(1-\ell(1)\big)\big(x^*-f(x)\big).$$

Из (3.10) следует, что $\widehat{x}_1\in\big((1-\ell(1))f(x),(1-\ell(1))x^*\big)\subseteq(x,x^*)\subseteq(a_1,x^*)$, а значит $f'(\widehat{x}_1)<1$ и

$$B(2,x^*)-A(2,x)<\big(1-\ell(1)\big)\big(x^*-f(x)\big),\quad x\in(a_1,x^*).$$

Далее при $k=2$ получаем $f\big((1-\ell(1))f(x)\big)=A(2,x)<B(2,x^*)=f\big((1-\ell(1))x^*\big)$ и, следовательно,

$$(1-\ell(2))A(2,x)\leqslant(1-\ell(2))B(2,x^*)\quad\text{для всех } x\in(a_1,x^*). \tag{3.11}$$

С учетом (2.2), (3.8) и (3.11) для всех $x\in(a_1,x^*)$ имеем

$$a_1<x\leqslant(1-\ell(2))A(2,x)\leqslant(1-\ell(2))B(2,x)\leqslant x^*.$$

Снова принимая во внимание, что функция $f(x)$ возрастающая в (a_1,x^*), получаем $f\big((1-\ell(2))A(2,x)\big)\leqslant f\big((1-\ell(2))B(2,x^*)\big)$. Затем, по теореме Лагранжа и с учетом (2.1), существует $\widehat{x}_2\in\big((1-\ell(2))f(x),(1-\ell(2))x^*\big)$ такое, что

$$\begin{aligned}B(3,x^*)-A(3,x)&=f\big((1-\ell(2))B(2,x^*)\big)-f\big((1-\ell(2))A(2,x)\big)\\&=f'(\widehat{x}_2)\big(1-\ell(2)\big)\big(B(2,x^*)-A(2,x)\big).\end{aligned}$$

Из последнего следует, что $\widehat{x}_2\in\big((1-\ell(2))f(x),(1-\ell(2))x^*\big)\subseteq(x,x^*)\subseteq(a_1,x^*)$. Тогда $f'(\widehat{x}_2)<1$ и

$$B(3,x^*)-A(3,x)<\big(1-\ell(2)\big)\big(B(2,x^*)-A(2,x)\big).$$

Окончательно для всех $k=1,2,\ldots$ и $x\in(a_1,x^*)$ выполнено $A(k+1,x)<B(k+1,x^*)$ и

$$\begin{aligned}B(k+1,x^*)-A(k+1,x)&=f\big((1-\ell(k))B(k,x^*)\big)-f\big((1-\ell(k))A(k,x)\big)\\&\leqslant\big(1-\ell(k)\big)\big(B(k,x^*)-A(k,x)\big).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Из (3.12) следует, что для любых $k=1,2,\ldots$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned}0\leqslant B(k+1,x^*)-A(k+1,x)&<\big(1-\ell(k)\big)\big(B(k,x^*)-A(k,x)\big)\\&<\big(1-\ell(k)\big)\big(1-\ell(k-1)\big)\big(B(k-1,x^*)-A(k-1,x)\big)\\&<\ldots<\big(1-\ell(k)\big)\ldots\big(1-\ell(1)\big)\big(x^*-f(x)\big).\end{aligned}$$

Отметим, что, если выполнено условие 2 теоремы, то $\lim\limits_{k\to\infty}(1-\ell(1))\ldots(1-\ell(k))=0$ с вероятностью единица. Это показано в работе [16] при доказательстве теоремы 1.

Таким образом, по лемме 3.1 существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty}MA(k,x)$, $\lim\limits_{k\to\infty}MB(k,x^*)$ и из (3.12) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\big(B(k,x^*)-A(k,x)\big)=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}M\big(B(k,x^*)\ell(k)-A(k,x)\ell(k)\big)=0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\big(B(k,x^*)\ell(k)-A(k,x)\ell(k)\big)=0 \tag{3.13}$$

для почти всех $\sigma\in\Sigma$. Из (2.3) и (3.13) следует существование предела $H(\bar{\ell},x(0))$ для почти всех $\sigma\in\Sigma$ и равенство (3.7). Управление $\overline{u}\in U$, при котором существует предел $H(\bar{\ell},x(0))$, построено при доказательстве теоремы 2.3.

Покажем, что, если $x>a_1>0$, то предел (3.7) положительный. Для этого достаточно показать, что $M(A(1)\ell(1))>0$. Функция $f(x)$ возрастающая в интервале $x\in(a_1,x^*]$, поэтому, как показано выше, $A(1,x)=f(x)\geqslant x$ для любых $MA(1,x)\ell(x)\geqslant xM\ell(1)$. Покажем теперь, что $M\ell(1)>0$, если $G(0)<1$. Действительно, если выполнено $G(0)=\mu\big(\omega(1)=0\big)<1$, то $\mu\big(\ell(1)>0\big)=\mu\big(\min\{\omega(1),u(1)\}>0\big)\geqslant\mu\big(\omega(1)>0\big)>0$. Так как $\ell(1)\geqslant0$, то для математического ожидания имеет место либо неравенство $M\ell(1)>0$, либо равенство $M\ell(1)=0$. В последнем случае $\ell(1)=0$ с вероятностью единица [18, глава 2, § 6], что противоречит условию $\mu\big(\ell=0\big)<1$. □

Теорема 3.2. *Если уравнение* (1.1) *имеет решение* $X(k) \equiv x^* > 0$ *и выполнены следующие условия:*

1) *существует* $a_1 \in [0, x^*)$ *такое, что* $0 < f'(x) < 1$ *для всех* $x \in (a_1, x^*)$,

2) $\Omega \subseteq [0,1]$, $G(0) < 1$,

то для любого $k = 1, 2, \ldots$ *и почти всех* $\sigma \in \Sigma$ *имеет место неравенство*

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant H(\bar{\ell}, x(0)) \leqslant MB(k,x^*)\ell(k). \tag{3.14}$$

Доказательство. Обозначим $a_k = MA(k,x)\ell(k)$, $k = 1,2,\ldots$. По лемме 3.1 числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая. В силу теоремы 3.1 существует положительный предел $H(\bar{\ell}, x(0)) = \lim\limits_{k\to\infty} MA(k,x)\ell(k) = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \geqslant a_k$ для любого $k = 1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$MA(k,x)\ell(k) \leqslant H(\bar{\ell}, x(0)).$$

Введя обозначение $b_k = MB(k,x^*)\ell(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ и проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что $H(\bar{\ell}, x(0)) \leqslant MB(k,x^*)\ell(k)$. □

4. Пример оптимизации средней временной выгоды для линейной модели динамики популяции

Предположим, что динамика популяции при отсутствии эксплуатации задана линейным разностным уравнением

$$X(k+1) = aX(k) + b, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

где $0 < a < 1$, $b > 0$, $x(0) \in [0, +\infty)$ и случайные величины $\omega(1), \omega(2), \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Отметим, что уравнение (4.1) имеет устойчивое положение равновесия $x^* = \dfrac{b}{1-a}$, областью притяжения которого является промежуток $[0, +\infty)$. Пусть $u(k) = 1 - \dfrac{x}{A(k,x)}$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, где случайная величина $A(k,x)$ определена (2.1).

Учитывая, что $u(1) = 1 - \dfrac{x}{f(x)}$, найдем математическое ожидание

$$MA(1,x)\ell(1) = f(x) M \min\big\{\omega(1), u(1)\big\}$$

как интеграл Лебега (см. [18, с. 227]):

$$\begin{aligned} MA(1,x)\ell(1) &= f(x) \int\limits_0^1 \min\big\{\omega(1), u(1)\big\}\, d\omega(1) \\ &= f(x) \left(\int\limits_0^{u(1)} \omega(1)\, d\omega(1) + \int\limits_{u(1)}^1 u(1)\, d\omega(1) \right) = \frac{f^2(x) - x^2}{2f(x)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Теперь, учитывая, что $u(2) = 1 - \dfrac{x}{f\big((1-\ell(1))f(x)\big)}$, найдем математическое ожидание

$MA(2,x)\ell(2)$. Имеем

$$\begin{aligned}
MA(2,x)\ell(2) &= M\min\big\{A(2,x)\omega(2), A(2,x)u(2)\big\} \\
&= \int_0^1\int_0^1 \min\Big\{f\big((1-\ell(1))f(x)\big)\omega(2), f\big((1-\ell(1))f(x)\big)u(2)\Big\}\,d\omega(1)\,d\omega(2) \\
&= \int_0^{u(1)}\Bigg(\int_0^{u(2)} f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\,\omega(2)\,d\omega(2) + \int_{u(2)}^1 f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\,u(2)\,d\omega(2)\Bigg)\,d\omega(1) \\
&+ \int_{u(1)}^1\Bigg(\int_0^{u(2)} f\big((1-u(1))f(x)\big)\,\omega(2)\,d\omega(2) + \int_{u(2)}^1 f\big((1-u(1))f(x)\big)\,u(2)\,d\omega(2)\Bigg)\,d\omega(1)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{u(1)} f\big((1-\omega(1))f(x)\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1) + \int_{u(1)}^1 f\big((1-u(1))f(x)\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1). \quad (4.3)$$

Для оценки средней временной выгоды сверху найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned}
MB(1,x^*)\ell(1) &= x^*\int_0^1 \min\Big\{\omega(1), u(1)\Big\}\,d\omega(1) \\
&= x^*\Bigg(\int_0^{u(1)}\omega(1)\,d\omega(1) + \int_{u(1)}^1 u(1)\,d\omega(1)\Bigg) = \frac{\big(f^2(x)-x^2\big)x^*}{2f^2(x)},
\end{aligned}$$

Аналогично (4.3) найдем

$$\begin{aligned}
MB(2,x^*)\ell(2) &= \int_0^1\int_0^1 \min\Big\{f\big((1-\ell(1))x^*\big)\,\omega(2), f\big((1-\ell(1))x^*\big)\,u(2)\Big\}\,d\omega(1)\,d\omega(2) \\
&= \int_0^{u(1)} f\big((1-\omega(1))x^*\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1) + \int_{u(1)}^1 f\big((1-u(1))x^*\big)\Big(u(2)-\frac{u^2(2)}{2}\Big)d\omega(1).
\end{aligned}$$

Пусть $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{4}$. Тогда динамика популяции при отсутствии эксплуатации (4.1) примет вид

$$X(k+1) = \frac{X(k)}{2} + \frac{1}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Подставляя функцию $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ в (4.2), нетрудно посчитать, что

$$MA(1,x)\ell(1) = \frac{(2x+1)^2 - 16x^2}{8(2x+1)},$$

и наибольшее значение этой функции достигается в точке $x \approx 0,0774$. Подставим функцию $f(x)$ в (4.3) и получим

$$\begin{aligned} MA(2,x)\ell(2) &= \int\limits_0^{u(1)} \frac{(1-\omega(1))(2x+1)+2}{16}\left(1-\frac{64x^2}{\big((1-\omega(1))(2x+1)+2\big)^2}\right)d\omega(1) \\ &+ \int\limits_{u(1)}^{1} \frac{(1-u(1))(2x+1)+2}{16}\left(1-\frac{64x^2}{\big((1-\omega(1))(2x+1)+2\big)^2}\right)d\omega(1) \\ &= \frac{4x^2}{2x+1}\ln\left(\frac{2(2x+1)}{2x+3}\right)-\frac{256x^3-20x^2-12x-5}{32(2x+1)}. \end{aligned}$$

Тогда наибольшее значение функции $MA(2,x)\ell(2)$ достигается в точке $x \approx 0,0272$.

Подставим функцию $f(x)$ в $MB(1,x^*)\ell(1)$ и $MB(2,x^*)\ell(2)$:

$$MB(1,x^*)\ell(1) = \frac{(2x+1)^2-16x^2}{4(2x+1)^2},$$

$$MB(2,x^*)\ell(2) = \frac{8x^2}{(2x+1)^2}\ln\left(\frac{2(2x+1)}{2x+3}\right)-\frac{768x^4+712x^3-172x^2-42x-9}{16(2x+1)^2(2x+3)}.$$

Окончательно получаем, что в силу (3.14) в момент $k=1$ наибольшее значение функции $MA(1,x)\ell(1)$ достигается в точке $x \approx 0,0774$ и выполнена следующая приближенная оценка средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1339 \leqslant H(\bar{\ell},x(0)) \leqslant 0,2320;$$

при $k=2$ наибольшее значение функции $MA(2,x)\ell(2)$ достигается в точке $x \approx 0,0272$ и имеем приближенную оценку средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1571 \leqslant H(\bar{\ell},x(0)) \leqslant 0,1867.$$

Поскольку при $k=3$ вычисления имеют весьма громоздкий вид, отметим только, что наибольшее значение функции $MA(3)\ell(3)$ достигается в точке $x \approx 0,0076$ и приближенные оценки средней временной выгоды с вероятностью единица

$$0,1641 \leqslant H(\bar{\ell},x(0)) \leqslant 0,1718.$$

Отметим, что при увеличении k оценка средней временной выгоды получается более точной.

Благодарности: Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

[1] C. W. Clark, "Mathematical Bioeconomics", *Mathematical Problems in Biology.* V. 2, Lecture Notes in Biomathematics, ed. S. Levin, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974, 29–45.

[2] B. Dennis, "Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction", *Natural Resource Modeling*, **3**:4 (1989), 481–538.

[3] A. M. Parma, "Optimal harvesting of fish populations with non-stationary stock-recruitment relationships", *Natural Resource Modeling*, **4**:1 (1990), 39–76.

[4] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, "On optimal harvesting in age-structured populations", *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making.* V. 22: *Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance*, eds. H. Dawid, K. F. Doerner, G. Feichtinger, P. M. Kort, A. Seidl, Springer Cham, Switzerland, 2016, 149–166.

[5] А. В. Егорова, Л. И. Родина, "Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, "On optimal harvesting of renewable resource from the structured population", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

[6] W. J. Reed, "The steady state of a stochastic harvesting model", *Mathematical Biosciences*, **41**:3-4 (1978), 273–307.

[7] R. Lande, S. Engen, B. E. Saether, *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, New York, 2003, 212 pp.

[8] S. J. Schreiber, M. Benaim, K. A. S. Atchadé, "Persistence in fluctuating environments", *Journal of Mathematical Biology*, **62**:5 (2011), 655–683.

[9] O. Tahvonen, M. F. Quaas, R. Voss, "Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries", *Journal of Environmental Economics and Management*, **92** (2018), 659–676.

[10] B. Yang, Y. Cai, K. Wang, W. Wang, "Optimal harvesting policy of logistic population model in a randomly fluctuating environment", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **526** (2019), Article ID 120817.

[11] A. Hening, K. Q. Tran, T. T. Phan, G. Yin, "Harvesting of interacting stochastic populations", *Journal of Mathematical Biology*, **79**:2 (2019), 533–570.

[12] Л. И. Родина, "Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса", *Вестник российских университетов. Математика*, **23**:124 (2018), 685–695. [L. I. Rodina, "About one stochastic harvesting model of a renewed resourse", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **23**:124 (2018), 685–695 (In Russian)].

[13] А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова, "О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32**:2 (2022), 211–227. [A. A. Rodin, L. I. Rodina, A. V. Chernikova, "On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **32**:2 (2022), 211–227 (In Russian)].

[14] T. Upmann, S. Behringer, "Harvesting a remote renewable resource", *Theoretical Ecology*, **13**:4 (2020), 459–480.

[15] M. Liu, "Optimal Harvesting of Stochastic Population Models with Periodic Coefficients", *Journal of Nonlinear Science*, **32**:2 (2022), 1–14.

[16] Л. И. Родина, "Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, "Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

[17] Л. И. Родина, "Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, "Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].

[18] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[19] Ю. М. Свирежев, Д. О. Логофет, *Устойчивость биологических сообществ*, Наука, М., 1978. [Yu. M. Svirezhev, D. O. Logofet, *Stability of Biological Communities*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[20] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**, Мир, М., 1984. [V. Feller, *Introduction to Probability Theory and its Applications*, **2**, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

Информация об авторе

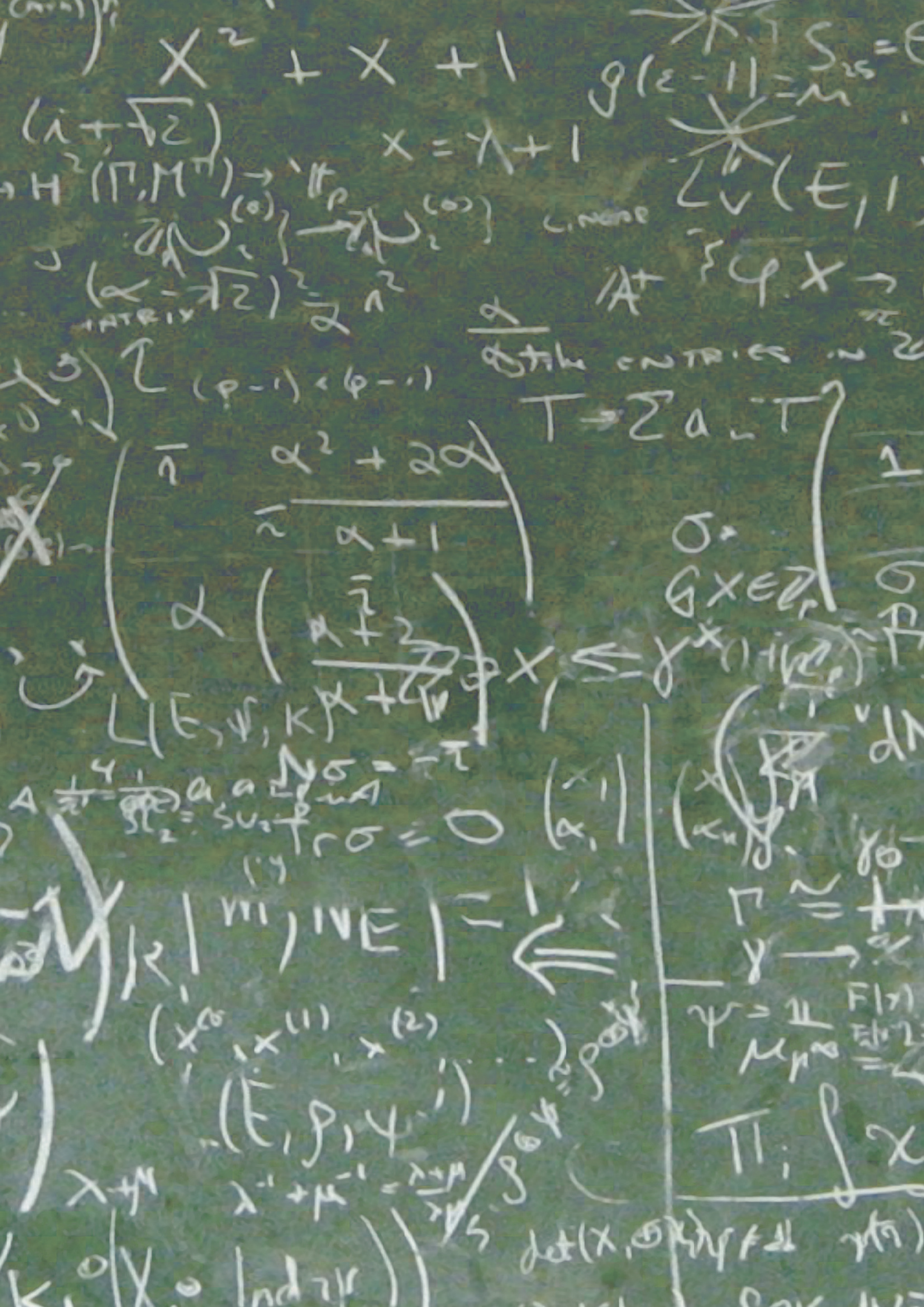
Черникова Анастасия Владимировна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Поступила в редакцию 18.08.2022 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2022 г.
Принята к публикации 24.11.2022 г.

Information about the author

Anastasia V. Chernikova, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Received 18.08.2022
Reviewed 14.11.2022
Accepted for press 24.11.2022


$x^2 + x + 1$
$x = \lambda + 1$
MATRIX
ENTRIES IN
$T \to \sum a_n T$
$\mathrm{tr}\,\sigma = 0$