

ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический
журнал

Серия:
Естественные и технические науки

Том 23, № 122, 2018

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени
доктора наук (группа научных специальностей: 01.01.00 – математика)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

<i>L.I. Grosheva</i>	Decomposition of canonical representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles	113
<i>M.I. Kamenskii, V.V. Obukhovskii, G.G. Petrosyan</i>	On semidiscretization methods for differential inclusions of fractional order	125
<i>K. Kolodina, A. Oleynik, J. Wyller</i>	Existence and stability of bumps in a neural field model	131
<i>S.V. Kornev, V.V. Obukhovskii</i>	Asymptotic behavior of solutions for inclusions with causal multioperators and the method of integral guiding potentials	136
<i>Т.А. Аверина, К.А. Рыбаков</i>	Моделирование мультиструктурных систем на многообразиях в задачах статистического анализа и фильтрации	145
<i>М.Ж. Алвеш, С.М. Лабовский</i>	О спектральной задаче и положительных решениях для функционально-дифференциального уравнения четного порядка	154
<i>И.Ю. Андреева, А.С. Шляхов</i>	Вырожденная линейно-квадратичная задача с запаздыванием	158
<i>А.С. Апарцин, И.В. Сидлер</i>	Тестовое уравнение Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, содержащих n возрастных групп	168
<i>М.С. Афанасова</i>	О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве	180
<i>А.С. Баландин</i>	Об асимптотическом поведении фундаментального решения и функции Коши дифференциальных уравнений нейтрального типа	187
<i>В.Р. Барсегян, Т.В. Барсегян</i>	Задача оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений	200
<i>С. Бенараб, Е.С. Жуковский</i>	О накрывающих отображениях со значениями в пространстве с рефлексивным бинарным отношением	210
<i>В.Б. Васильев</i>	О дискретных приближениях для псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач	216
<i>А.Ю. Вдовин, С.С. Рублева</i>	Численное моделирование входного воздействия в нелинейной динамической системе	228
<i>Н.И. Восковская, М.Б. Зверева, М.И. Каменский</i>	О волновом уравнении с условием гистерезисного типа	235
<i>Б.Д. Гельман</i>	Неравенство Каристи и обобщенные сжатия (случай однозначных отображений)	243
<i>С.А. Глазков</i>	Алгоритмы решения дифференциальных уравнений в Math Partner	250

М.И. Гомоюнов	Об оценке сверху дробной производной композиции двух функций	261
М.И. Гомоюнов, Н.Ю. Лукоянов, А.Р. Плаксин	Уравнения Гамильтона–Якоби в задачах динамической оптимизации систем нейтрального типа	268
И.В. Горохова, В.И. Сумин	Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу	278
И.В. Гребенникова	К итерационному методу построения оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях	285
А.А. Григоренко	О разрешимости и оценках решений возмущенного включения в пространстве непрерывных функций	292
С.П. Зубова, Е.В. Раецкая	Исследование сингулярно возмущенной системы управления	303
И.В. Зыков	Об алгоритме построения множеств достижимости управляемых систем с изопериметрическими ограничениями	309
М.С. Коржавина, В.И. Сумин	О начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью	317

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященной 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина» и участников II Международной школы молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление», посвященной 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20079г) и ТГУ им. Г.Р. Державина. Школа организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-681001р_г), администрации Тамбовской области и ТГУ им. Г.Р. Державина.

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды).

Адрес редакции: 392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. Тел. редакции: +7 (4752)-72-34-34 доб. 0440.
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru Интернет: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;
<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ ПИ № ФС77-70572 от 3 августа 2017 г.
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать».

Редакторы: А.А. Манаенкова, М.И. Филатова.
Редакторы английских текстов: С.Ю. Можаров, Т.А. Сустина.
Технический секретарь М.В. Борзова.

Для цитирования:

Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – Тамбов, 2018. – Т. 23, № 122. – 216 с. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122

Подписано в печать 19.06.2018. Выход в свет
Формат 60×84 1/8. Печ. л. 27,0. Усл. печ. л. 25,11. Тираж 1000 экз. Заказ № 18165. Свободная цена.

Адрес издателя: 392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

Отпечатано в Издательском доме «Державинский». 392008, г. Тамбов, ул. Советская, 190г.

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2018
© Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки», 2018.
При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.
Ответственность за содержание публикаций несет автор.

Tambov University REPORTS

Scientific-Theoretical
Journal

Series:
Natural and Technical Sciences

**Volume 23, no. 122,
2018**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

Journal of Tambov State University named after G.R. Derzhavin

The journal is on the official list of scientific reviewed periodicals recommended by High Attestation Commission for publication principal scientific researches of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science (group of scientific specialties: 01.01.00 – Mathematics)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>Л.И. Грошева</i>	Разложение канонических представлений в сечениях линейных расслоений на плоскости Лобачевского	113
<i>М.И. Каменский, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян</i>	О методе полудискретизации для дифференциальных включений дробного порядка	125
<i>К. Колодина, А. Олейник, Й. Виллер</i>	Существование и устойчивость бампов в модели нейронного поля	131
<i>С.В. Корнев, В.В. Обуховский</i>	Асимптотическое поведение решений включений с каузальными мультиоператорами и метод интегральных направляющих потенциалов	136
<i>Т.А. Averina, К.А. Rybakov</i>	Modeling of multistructural systems on manifolds for statistical analysis and filtering problems	145
<i>M.J. Alves, S.M. Labovskiy</i>	On the spectral problem and positive solutions for a functional-differential equation of the even order	154
<i>I.Yu. Andreeva, A.S. Shlyakhov</i>	Degenerated linearly-quadratic problem with delay	158
<i>A.S. Apartsyn, I.V. Sidler</i>	The test Volterra equation of the first kind in integral models of developing systems containing n age groups	168
<i>M.S. Afanasova</i>	On the Cauchy problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition in a Banach space	180
<i>A.S. Balandin</i>	On asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function for neutral differential equations	187
<i>V.R. Barseghyan, T.V. Barseghyan</i>	The problem of optimal control for one system of linear loaded differential equations	200
<i>S. Benarab, E.S. Zhukovskiy</i>	About covering mappings with values in the space with a reflexive binary relation	210
<i>V.B. Vasilyev</i>	On digital approximations for pseudo-differential equations and related boundary value problems	216
<i>A.Y. Vdovin, S.S. Rubleva</i>	Numerical simulation of the input impact in a nonlinear dynamical system	228
<i>N.I. Voskovskaya, M.B. Zvereva, M.I. Kamenskii</i>	On the wave equation with the hysteresis type condition	235
<i>B.D. Gelman</i>	The inequality of Karisti and generalized compression (the case of singular images)	243
<i>S.A. Glazkov</i>	Algorithms for solving differential equations in Math Partner	250
<i>M.I. Gomoyunov</i>	About an estimate from above of the fractional derivative of the composition of two functions	261

M.I. Gomoyunov, N.Y. Lukoyanov, A.R. Plaksin	Hamilton–Jacobi equations in dynamical optimization problems for neutral-type systems	268
I.V. Gorokhova, V.I. Sumin	About singular controls of pointwise maximum principle for optimization problem connected with Goursat–Darboux system	278
I.V. Grebennikova	To the iterative method of constructing optimal control of a singularly perturbed system with delay with geometric constraints	285
A.A. Grigorenko	On solvability and estimating solutions of a perturbed inclusion in the space of continuous functions	292
S.P. Zubova, E.V. Raetskaya	The study of a singularly perturbed control system	303
I.V. Zykov	On the algorithm for constructing reachable sets of control systems with isoperimetric constraints	309
M.S. Korzhavina, V.I. Sumin	On the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equation with controlled principal part	317

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference “Kolmogorov Readings – VIII. General Control Problems and their Applications (GCP-2018)”, dedicated to the 115th anniversary of the birth of A.N. Kolmogorov and to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin, and those of the participants of the II International school of young researches “Multivalued Analysis, Convex Analysis, and Optimal Control”, dedicated to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The conference is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-01-20079 g) and Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The school is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project No. 18-41-681001 r_g), the administration of the Tambov region, and Tambov State University named after G.R. Derzhavin.

Founder: Federal State Budget Educational Institution of High Education
“Tambov State University named after G.R. Derzhavin” (392000, Tambov, 33 Internatsionalnaya street)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation).

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. G.I. Malaschonok (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasyukov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, France), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portugal), Prof., Dr. A.V. Ponomosov (Ås, Norway), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands).

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation.

Tel. number: +7 (4752)-72-34-34 extension 0440.

E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Internet: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>; <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). Certificate of registration ПИ № ФС77-70572 of August 3, 2017.

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372.

Editors: A.A. Manaenkova, M.I. Filatova.

English texts editors: S.Y. Mozharov, T.A. Sustina.

Technical editor M.V. Borzova.

For citation:

Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2018. – Vol. 22, no. 122. – 216 p. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122

Podpisano v pechat' 19.06.2018. Vykhod v svet

Format 60×84 1/8. Pech. list 27,0. Usl. pech. list 25,11. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 18165. Svobodnaya tsena.

Publisher's address: 392000, Tambov, 33 Internatsionalnaya St., FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”.

Published in Publishing House “Derzhavinskiy”. 392008, Tambov, 190g Sovetskaya St.

© FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”, 2018

© The journal “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”, 2018.

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications.

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-113-124

DECOMPOSITION OF CANONICAL REPRESENTATIONS ON THE LOBACHEVSKY PLANE ASSOCIATED WITH LINEAR BUNDLES

© L. I. Grosheva

Tambov State University named after G. R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: gligli@mail.ru

Abstract. We decompose canonical representations on the Lobachevsky plane, associated with sections of linear bundles

Keywords: Lobachevsky plane; canonical representations; distributions; boundary representations; Poisson and Fourier transforms

Introduction

In our work [1] we described canonical and boundary representations of the group $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ on the Lobachevsky plane D in sections of linear bundles on D . Now we decompose these representations into irreducible ones. We lean on works [2], [3].

1. Representations of $\mathrm{SU}(1, 1)$ induced by characters of $\mathrm{U}(1)$

The Lobachevsky plane is the unit disk $D : z\bar{z} < 1$ on the complex plane with the linear-fractional action of G :

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

The boundary S of D is the circle $z\bar{z} = 1$, it consists of points $s = \exp i\alpha$, the measure ds on S is $d\alpha$. Let $\bar{D}$ be the closure of D : $\bar{D} = D \cup S$. Let

$$p = 1 - z\bar{z},$$

so that $D = \{p > 0\}$ and $S = \{p = 0\}$. The stabilizer of the point $z = 0$ is the maximal compact subgroup $K = \mathrm{U}(1)$ consisting of diagonal matrices:

$$k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} = 1,$$

so that $D = G/K$. The Euclidean measure $dx dy$ on D is $(1/2) dp ds$, a G -invariant measure $d\mu(z)$ on D is

$$d\mu(z) = p^{-2} dx dy.$$

If M is a manifold, then $\mathcal{D}(M)$ denotes the Schwartz space of compactly supported infinitely differentiable $\mathbb{C}$ -valued functions on M , with a usual topology, and $\mathcal{D}'(M)$ denotes the space of distributions on M – of antilinear continuous functionals on $\mathcal{D}(M)$.

Recall principal non-unitary series representations of G trivial on the center. Let $\sigma \in \mathbb{C}$. The representation T_σ acts on the space $\mathcal{D}(S)$ by

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi(s \cdot g) |bs + \bar{a}|^{2\sigma}.$$

The inner product from $L^2(S, ds)$:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int_S \psi(u) \overline{\varphi(u)} ds(u) \quad (1.1)$$

is invariant with respect to the pair $(T_\sigma, T_{-\bar{\sigma}-1})$.

If $\sigma \notin \mathbb{Z}$, then T_σ is irreducible and equivalent to $T_{-\sigma-1}$ (for $\sigma \in \mathbb{Z}$ there is a "partial equivalence").

The following operator A_σ acts on $\mathcal{D}(S)$ and intertwines T_σ and $T_{-\sigma-1}$:

$$(A_\sigma \varphi)(s) = \int_S |1 - s\bar{u}|^{-2\sigma-2} \varphi(u) du,$$

exponents $\psi_n(s) = s^n$ are eigenfunctions for A_σ with eigenvalues $a_n(\sigma)$:

$$a_n(\sigma) = 2\pi (-1)^n \frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma+n) \Gamma(-\sigma-n)}.$$

The composition $A_\sigma A_{-\sigma-1}$ is a scalar operator:

$$A_\sigma A_{-\sigma-1} = \frac{1}{2\pi\omega(\sigma)} \cdot E$$

where $\omega(\sigma)$ is a "Plancherel measure" (see Theorem 1.1):

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) \cot \sigma\pi,$$

The operator A_σ is meromorphic in σ with simple poles at $\sigma \in -(1/2) + \mathbb{N}$.

There are four series of unitarizable irreducible representations: the *continuous series*: T_σ , $\sigma = -(1/2) + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, an inner product is (1.1); the *complementary series*: T_σ , $-1 < \sigma < 0$, an inner product is the form $\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$ with a suitable factor; the *holomorphic* and *antiholomorphic* series consisting of subfactors $T_{\sigma, \pm}$ of T_σ , $\sigma \in \mathbb{Z}$.

We shall use denotation:

$$z^{\mu, m} = |z|^\mu \left(\frac{z}{|z|} \right)^m, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Let us take characters (one dimensional representations) of the group K that are trivial on the center $\pm E$, namely,

$$\omega_m(k) = \bar{a}^{2m} = a^{-2m}, \quad k \in K, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Denote by $U^{(m)}$ the representation of the group G induced by the character ω_m . It acts by translations on the space $\mathcal{D}^{(m)}(G)$ of functions $\psi \in \mathcal{D}(G)$ satisfying the condition $\psi(kg) = \omega_m(k) \psi(g)$. It can be realized on functions on the disk D :

$$(U^{(m)}(g)f)(z) = f(z \cdot g) (bz + \bar{a})^{0, 2m}.$$

The representation $U^{(m)}$ moves the Casimir element of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ to the Casimir operator (a differential operator on D). Its radial part is the following differential operator on $[1, \infty)$:

$$L_m = (c^2 - 1) \frac{d^2}{dc^2} + 2c \frac{d}{dc} + \frac{2m^2}{c + 1}. \quad (1.2)$$

The representation $U^{(m)}$ preserves the inner product

$$(f, h)_{d\mu} = \int_D f(z) \overline{h(z)} d\mu(z).$$

We denote the unitary completion of $U^{(m)}$ acting on $L^2(D, d\mu)$ by the same symbol.

Let $\mathcal{D}(\overline{D})$ be the space of restrictions to $\overline{D}$ of functions from $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ with the induced topology, and by $\mathcal{D}'(\overline{D})$ the space of distributions on $\mathbb{C}$ with supports in $\overline{D}$. Consider the inner product with respect to the Lebesgue measure on D :

$$\langle F, f \rangle_D = \int_D F(z) \overline{f(z)} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (1.3)$$

The space $\mathcal{D}(\overline{D})$ can be embedded into $\mathcal{D}'(\overline{D})$ by assigning to $h \in \mathcal{D}(\overline{D})$ the functional $f \mapsto \langle h, f \rangle_D$, $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$. So we shall write the value of $F \in \mathcal{D}'(\overline{D})$ at $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$ in the same form: $\langle F, f \rangle_S$.

We define the Poisson transform $P_\sigma^{(m)} : \mathcal{D}(S) \rightarrow C^\infty(D)$ and the Fourier transform $F_\sigma^{(m)} : \mathcal{D}(D) \rightarrow \mathcal{D}(S)$, associated to the character ω_m , as integral operators

$$\begin{aligned} (P_\sigma^{(m)} \varphi)(z) &= p^{-\sigma} \int_S (1 - s\bar{z})^{2\sigma, -2m} s^m \varphi(s) ds. \\ (F_\sigma^{(m)} f)(s) &= s^{-m} \int_D (1 - s\bar{z})^{2\sigma, 2m} p^{-\sigma} f(z) d\mu(z). \end{aligned}$$

The Poisson and Fourier transforms $P_\sigma^{(m)}$ and $F_\sigma^{(m)}$ intertwine representations $T_{-\sigma-1}$ with $U^{(m)}$ and $U^{(m)}$ with T_σ respectively. The Poisson and the Fourier transform are conjugate to each other:

$$\langle F_\sigma^{(m)} f, \varphi \rangle_S = (f, P_{\bar{\sigma}}^{(m)} \varphi)_{d\mu}.$$

Using the spectral resolution of the radial part of the Casimir operator (1.2), we obtain the following Plancherel theorem for $U^{(m)}$.

Theorem 1.1. *Let us assign to a function $f \in \mathcal{D}(D)$ the family $\{F_\sigma^{(m)} f\}$ where $\sigma = -1/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, of its Fourier components of the continuous series and the family $\{F_k^{(m)}, f\}$ where $k = 0, 1, \dots, |m| - 1$, of its Fourier components of the analytic (if $m < 0$) or the anti-analytic (if $m > 0$) series. This correspondence is G -equivariant. One has the inversion formula:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) (P_{-\sigma-1}^{(m)} F_\sigma^{(m)} f)(z) \big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho \\ &+ \sum_{k=0}^{|m|-1} \frac{1}{2\pi^2} (2k+1) (P_{-k-1}^{(m)} F_k^{(m)} f)(z), \end{aligned}$$

and the Plancherel formula for functions $f, h \in \mathcal{D}(D)$:

$$\begin{aligned} (f, h)_{d\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \langle F_\sigma^{(m)} f, F_\sigma^{(m)} h \rangle_S \big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho \\ &+ \sum_{k=0}^{|m|-1} \frac{1}{2\pi^2} \langle F_k^{(m)} f, F_{-k-1}^{(m)} h \rangle_S. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Therefore, the previous correspondence can be extended from the space $\mathcal{D}(S)$ to $L^2(D, d\mu)$ and gives then the decomposition of the unitary representation $U^{(m)}$ on $L^2(D, d\mu)$ into the direct integral of the representations T_σ , $\sigma = -1/2 + i\rho$ of the continuous series, and the direct sum of $|m|$ representations $T_{k,+}$ or $T_{k,-}$, $k = 0, 1, \dots, |m| - 1$, of the analytic ($m > 0$) or anti-analytic ($m < 0$) series. This decomposition is multiplicity free.

2. Canonical representations

Let $\lambda \in \mathbb{C}$. We define the *canonical representation* $R_{\lambda,m}$ of the group G associated with a character of K as follows:

$$(R_{\lambda,m}(g)f)(z) = f(z \cdot g) (bz + \bar{a})^{-2\lambda-4,2m},$$

it acts on the space $\mathcal{D}(\bar{D})$.

The inner product (1.3) is invariant with respect to the pair $(R_{\lambda,m}, R_{-\bar{\lambda}-2,m})$:

$$\langle R_{\lambda,m}(g)f, h \rangle_D = \langle f, R_{-\bar{\lambda}-2,m}(g^{-1})h \rangle_D, \quad g \in G. \quad (2.1)$$

Let us define the operator $Q_{\lambda,m}$ – first on $\mathcal{D}(D)$:

$$(Q_{\lambda,m}f)(z) = c(\lambda, m) \int_D (1 - z\bar{w})^{2\lambda,2m} f(w) du dv,$$

where

$$c(\lambda, m) = \frac{-\lambda + m - 1}{\pi}.$$

It intertwines $R_{\lambda, m}$ and $R_{-\lambda-2, m}$:

$$Q_{\lambda, m} R_{\lambda, m}(g) = R_{-\lambda-2, m}(g) Q_{\lambda, m}, \quad g \in G,$$

and interacts with the form (1.3) as follows:

$$\langle Q_{\lambda, m} f, h \rangle_D = \langle f, Q_{\lambda, m} h \rangle_D. \quad (2.2)$$

The formulae (2.1) and (2.2) allow to extend the representation $R_{\lambda, m}$ and the operator $Q_{\lambda, m}$ to the space $\mathcal{D}'(\overline{D})$ of distributions on $\overline{D}$.

Canonical representations $R_{\lambda, m}$ generate boundary representations $L_{\lambda, m}$ and $M_{\lambda, m}$. Consider the Taylor series of $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$ in powers of p :

$$f(z) \sim a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots,$$

where $a_k = a_k(s)$ are functions in $\mathcal{D}(S)$:

$$a_k(s) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial p} \right)^k \Big|_{p=0} f(z).$$

Let $a(f)$ denote the column $(a_0, a_1, \dots)$ of the Taylor coefficients.

Denote by $\Sigma_k(\overline{D})$ the space of distributions on $\mathbb{C}$ concentrated at S and of the form

$$\zeta = \varphi_0(s) \delta(p) + \varphi_1(s) \delta'(p) + \dots + \varphi_k(s) \delta^{(k)}(p),$$

where $\delta(p)$ is the Dirac delta function on the real line (being a continuous linear functional on $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) and $\delta^{(j)}(p)$ its j -th derivative. Set

$$\Sigma(\overline{D}) = \cup_{k=0}^{\infty} \Sigma_k(\overline{D}).$$

There is a natural filtration

$$\Sigma_0(\overline{D}) \subset \Sigma_1(\overline{D}) \subset \Sigma_2(\overline{D}) \subset \dots \quad (2.3)$$

A distribution $\varphi(s) \delta^{(l)}(p)$ acts on a function $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$ as follows:

$$\langle \varphi(s) \delta^{(l)}(p), f \rangle_D = \frac{1}{2} (-1)^l l! \langle \varphi, a_l \rangle_S. \quad (2.4)$$

Distributions from $\Sigma_k(\overline{D})$ can be extended to a wider space than $\mathcal{D}(\overline{D})$. Namely, let $\mathcal{T}_k(\overline{D})$ be the space of functions f on $\overline{D}$ of class C^∞ on D and on S and having a Taylor decomposition of order k :

$$f(z) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k + o(p^k)$$

uniformly with respect to $u \in S$, where $a_m = a_m(f)$ belong to $\mathcal{D}(S)$. Then (2.4) is well preserved for $f \in \mathcal{T}_k(\overline{D})$.

The canonical representation $R_{\lambda,m}$ acting on $\mathcal{D}'(\overline{D})$, preserves the space $\Sigma(\overline{D})$ and the filtration (2.3). The first boundary representation $L_{\lambda,m}$ is the restriction of $R_{\lambda,m}$ to $\Sigma(\overline{D})$. The second boundary representation $M_{\lambda,m}$ acts on columns $a(f)$ by:

$$M_{\lambda,m}(g) a(f) = a(R_{\lambda,m}(g)f).$$

Theorem 2.1. *The representation $L_{\lambda,m}$ is equivalent to a upper triangular matrix with diagonal $T_{-\lambda-1}, T_{-\lambda}, T_{-\lambda+1}, \dots$. The equivalence is given by multiplication of the functions $\varphi_k(s)$ by s^{-m} . The representation $M_{\lambda,m}$ is equivalent to a lower triangular matrix with diagonal $T_{-\lambda-2}, T_{-\lambda-3}, \dots$. The equivalence is given by multiplication of the Taylor coefficients $a_k(s)$ by s^{-m} .*

Let $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. In the generic case: $2\lambda \notin \mathbb{N}$, the representation $L_{\lambda,m}$ is diagonalizable, which means that the space $\Sigma(\overline{D})$ is the direct sum of the spaces $V_{\lambda,k}^{(m)}$ ($k \in \mathbb{N}$), so that $L_{\lambda,m}$ is the direct sum of the $T_{-\lambda-1+k}$ ($k \in \mathbb{N}$).

3. Poisson transform

Let $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$ and $m \in \mathbb{Z}$. We define the *Poisson transform associated with the canonical representation* $R_{\lambda,m}$ as the map $P_{\lambda,\sigma}^{(m)} : \mathcal{D}(S) \rightarrow C^\infty(D)$ by the following formula

$$\left(P_{\lambda,\sigma}^{(m)} \varphi\right)(z) = p^{-\lambda-\sigma-2} \int_S (1 - s\bar{z})^{2\sigma, -2m} s^m \varphi(s) ds.$$

The Poisson transform $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ intertwines the representations $T_{-\sigma-1}$ and the canonical representation $R_{\lambda,m}$:

$$R_{\lambda,m}(g) P_{\lambda,\sigma}^{(m)} = P_{\lambda,\sigma}^{(m)} T_{-\sigma-1}(g) \quad (g \in G).$$

With the intertwining operators A_σ and $Q_{\lambda,m}$ the Poisson transform interacts as follows:

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\sigma}^{(m)} A_\sigma &= a_{-m}(\sigma) P_{\lambda, -\sigma-1}^{(m)}, \\ Q_{\lambda,m} P_{\lambda,\sigma}^{(m)} &= \Lambda^{(m)}(\lambda, \sigma) P_{-\lambda-2, \sigma}^{(m)}, \end{aligned}$$

where

$$\Lambda^{(m)}(\lambda, \sigma) = \frac{\Gamma(-\lambda + \sigma) \Gamma(-\lambda - \sigma - 1)}{\Gamma(-\lambda - m) \Gamma(-\lambda + m - 1)}.$$

The Poisson transform $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ is meromorphic in σ , and has poles at the points

$$\sigma = \lambda - k, \quad \sigma = -\lambda - 1 + l \quad (k, l \in \mathbb{N}). \quad (3.1)$$

All poles are simple except in the case when the two sequences (3.1) have a non-empty intersection and the pole belongs to this intersection. This happens when $2\lambda + 1 \in \mathbb{N}$ and

$0 \leq k, l \leq 2\lambda + 1$, $k + l = 2\lambda + 1$. In this case the pole μ is of the second order. Let us write down the principal part of the Laurent series of $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ at the poles μ of the first order:

$$P_{\lambda,\sigma}^{(m)} = \frac{\widehat{P}_{\lambda,\mu}^{(m)}}{\sigma - \mu} + \dots.$$

The residue intertwines $T_{-\mu-1}$ with $R_{\lambda,m}$. Let us write it explicitly. We set

$$V_{\sigma,m,n}(p) = (1-p)^{(m+n)/2} F(\sigma+1+m, \sigma+1+n; 2\sigma+2; p),$$

where F is the Gauss hypergeometric function. Expand V in powers of p :

$$V_{\sigma,m,n}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{\sigma,k}^{(m)}(n) p^k,$$

here $w_{\sigma,k}^{(m)}$ are polynomials in n of degree k . The coefficients of these polynomials are rational functions of σ with simple poles. Now we set

$$W_{\sigma,k}^{(m)} = w_{\sigma,k}^{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} \right).$$

If a pole μ belongs only to one of the sequences (3.1), then it is simple and

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{\lambda,\lambda-k}^{(m)} &= (-1)^{k+m} \frac{1}{k!} a_{-m}(\lambda - k) \xi_{\lambda,k}^{(m)}, \\ \widehat{P}_{\lambda,-\lambda-1+l}^{(m)} &= (-1)^{l+m} \frac{1}{l!} \xi_{\lambda,l}^{(m)} \circ A_{\lambda-l}, \end{aligned}$$

where $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$ is the following operator $\mathcal{D}(S) \rightarrow \Sigma_k(\overline{D})$:

$$\xi_{\lambda,k}^{(m)} \varphi = s^m \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \left(W_{\lambda-k,n}^{(m)} \varphi \right) (s) \delta^{(k-n)}(p). \quad (3.2)$$

The operator $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$ is meromorphic in λ . For fixed $k = 1, 2, \dots$ it has k poles (simple) at the points $\lambda = k - 1, k - 3/2, k - 2, \dots, (k - 1)/2$. It intertwines $T_{-\lambda-1+k}$ with $L_{\lambda,m}$ (restricted to $\Sigma_k(\overline{D})$).

Theorem 3.1. *Up to a factor, the composition of the operators $Q_{\lambda,m}$ and $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$ is the Poisson transform $P_{-\lambda-2,\lambda-k}^{(m)}$:*

$$Q_{\lambda,m} \xi_{\lambda,k}^{(m)} = q_{\lambda,k}^{(m)} \cdot P_{-\lambda-2,\lambda-k}^{(m)},$$

where

$$\begin{aligned} q_{\lambda,k}^{(m)} &= \frac{1}{2} (-1)^{k+m} k! a_{-m}(-\lambda - 1 + k) \Lambda_k^{(m)}(\lambda), \\ \Lambda_k^{(m)}(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi^2} (2\lambda - 2k + 1) \frac{\Gamma(\lambda + m + 1) \Gamma(\lambda - m + 2)}{k! \Gamma(2\lambda + 2 - k)}. \end{aligned}$$

4. Fourier transform

Let $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$ and $m \in \mathbb{Z}$. We define the *Fourier transform associated with the canonical representation* $R_{\lambda,m}$ as the map $F_{\lambda,\sigma}^{(m)} : \mathcal{D}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ by the following formula

$$\left(F_{\lambda,\sigma}^{(m)} f\right)(s) = s^{-m} \int_D (1 - z\bar{s})^{2\sigma, 2m} p^{\lambda-\sigma} f(z) dx dy.$$

The integral converges absolutely for $\operatorname{Re}(\lambda - \sigma) > -1$, $\operatorname{Re}(\lambda + \sigma) > -2$ and can be meromorphically continued in σ and λ . The Poisson and the Fourier transform are conjugate to each other:

$$\langle F_{\lambda,\sigma}^{(m)} f, \varphi \rangle_S = \langle f, P_{-\bar{\lambda}-2, \bar{\sigma}}^{(m)} \varphi \rangle_D. \quad (4.1)$$

This allows to transfer statements about the Poisson transform to the Fourier transform. The Fourier transform interacts with the intertwining operators as follows:

$$\begin{aligned} A_\sigma F_{\lambda,\sigma}^{(m)} &= a_{-m}(\sigma) F_{\lambda, -\sigma-1}^{(m)}, \\ F_{-\lambda-2, \sigma}^{(m)} Q_{\lambda, m} &= \Lambda^{(m)}(\lambda, \sigma) F_{\lambda, \sigma}^{(m)}. \end{aligned}$$

It has poles in σ at the points

$$\sigma = -\lambda - 2 - k, \quad \sigma = \lambda + 1 + l \quad (k, l \in \mathbb{N}). \quad (4.2)$$

All poles are simple, except the case $-2\lambda - 3 \in \mathbb{N}$ and the pole μ belongs to both sequences (4.2), i. e. $0 \leq k, l \leq -2\lambda - 3$ and $k + l = -2\lambda - 3$. In this case μ is of the second order. For the Laurent coefficients of the Fourier transform we use a similar notation as in case of the Poisson transform. The first Laurent coefficient $\widehat{F}_{\lambda, \mu}^{(m)}$ for the first order μ intertwines $R_{\lambda, m}$ with T_μ . Let us write it explicitly:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\lambda, -\lambda-2-k}^{(m)} &= \frac{1}{2} (-1)^m a_{-m}(-\lambda - 2 - k) b_{\lambda, k}^{(m)}, \\ \widehat{F}_{\lambda, \lambda+1+l}^{(m)} &= -\frac{1}{2} (-1)^m A_{-\lambda-2-l} b_{\lambda, l}^{(m)}, \end{aligned}$$

where $b_{\lambda, k}^{(m)}$ is a “boundary” operator $\mathcal{D}(\overline{D}) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ which is defined in terms of the Taylor coefficients c_n of f as follows:

$$b_{\lambda, k}^{(m)}(f) = \sum_{n=0}^k W_{-\lambda-2-k, k-n}^{(m)} (s^{-m} c_n).$$

The operators $\xi^{(m)}$ and $b^{(m)}$ are conjugate to each other (up to a factor):

$$\langle f, \xi_{-\bar{\lambda}-2, k}^{(m)} \varphi \rangle_D = \frac{1}{2} (-1)^k k! \langle b_{\lambda, k}^{(m)}(f), \varphi \rangle_S.$$

The operator $b_{\lambda, k}^{(m)}$ intertwines $R_{\lambda, m}$ with $T_{-\lambda-2-k}$. It is meromorphic in λ . It has k poles (simple) at the points $\lambda = -k - 1, -k - 1/2, \dots, (-k - 3)/2$.

5. Decomposition of canonical representations

For simplicity we restrict ourselves to generic λ lying in the strips I_k , ($k \in \mathbb{Z}$).:

$$-3/2 + k < \operatorname{Re} \lambda < -1/2 + k.$$

Case A: $\lambda \in I_0$. Let $f, h \in \mathcal{D}(\overline{D})$. Consider the functions

$$f_0(z) = p^{\lambda+2} f(z), \quad h_0(z) = p^{-\bar{\lambda}} h(z).$$

Since $\lambda \in I_0$, both functions $f_0(z)$ and $h_0(z)$ belong to $L^2(D, d\mu)$. Let us apply to this pair of functions f_0, h_0 the Plancherel formula (1.19). We obtain:

$$\begin{aligned} (f_0, h_0)_{d\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \langle F_{\sigma}^{(m)} f_0, F_{-\bar{\sigma}-1}^{(m)} h_0 \rangle_S \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho \\ &+ \sum_{n=0}^{|m|-1} \frac{1}{2\pi^2} (2n+1) \langle F_n^{(m)} f_0, F_{-n-1}^{(m)} h_0 \rangle_S. \end{aligned}$$

Then we return to f and h :

$$\begin{aligned} (f, h)_D &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \langle F_{\lambda, \sigma}^{(m)} f, F_{-\bar{\lambda}-2, -\bar{\sigma}-1}^{(m)} h \rangle_S \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho \\ &+ \sum_{n=0}^{|m|-1} \frac{1}{2\pi^2} (2n+1) \langle F_{\lambda, n}^{(m)} f, F_{-\bar{\lambda}-2, -n-1}^{(m)} h \rangle_S. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Now using the conjugacy (4.1), we transfer the Fourier transform of h to the Poisson transform of $F_{\lambda, \sigma}^{(m)} f$. We obtain a formula that gives an expansion of f regarded as a distribution in $\mathcal{D}'(\overline{D})$:

$$\begin{aligned} f &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) P_{\lambda, -\sigma-1}^{(m)} F_{\lambda, \sigma}^{(m)} f \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho \\ &+ \sum_{n=0}^{|m|-1} \frac{1}{2\pi^2} (2n+1) P_{\lambda, -n-1}^{(m)} F_{\lambda, n}^{(m)} f. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Theorem 5.1. *Let $\lambda \in I_0$. Then the canonical representation $R_{\lambda, m}$ decomposes, in a similar way as $U^{(m)}$, see § 1, into the direct integral of the representations T_{σ} , $\sigma = -1/2 + i\rho$, of the continuous series and the direct sum of $|m|$ representations $T_{n,+}$ or $T_{n,-}$, $n = 0, 1, \dots, |m| - 1$, of the analytic ($m < 0$) or the anti-analytic series ($m > 0$) with multiplicity one. Namely, if we assign to $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$ the family of Fourier components $\{F_{\lambda, \sigma}^{(m)} f\}$ where $\sigma = -1/2 + i\rho$ and $\sigma \in \{0, 1, \dots, |m| - 1\}$, then this correspondence is G -equivariant. There is an inversion formula (5.2) and a decomposition (5.1) of the form $(f, h)_D$.*

Case B: $\lambda \in I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. We perform analytic continuation of (5.2) from the strip I_0 to the right, to the strip I_{k+1} . Here the poles of the Poisson transform intersect the line of integration $\operatorname{Re} \sigma = -1/2$ and give additional terms. We obtain

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{n=0}^{|m|-1} + \sum_{v=0}^k \pi_{\lambda,v}^{(m)}(f), \quad (5.3)$$

where the integral and the first sum mean the same as in (5.2) and

$$\pi_{\lambda,v}^{(m)} = 2(-1)^{v+m} \frac{1}{v!} \frac{1}{a_{-m}(-\lambda-1+v)} \xi_{\lambda,v}^{(m)} \circ F_{\lambda,-\lambda-1+v}^{(m)}.$$

The operators $\pi_{\lambda,v}^{(m)}$, $v \leq k$, can be extended to $\Sigma_k(\overline{D})$, because the Fourier transforms occuring in $\pi_{\lambda,v}^{(m)}$ are already extended. Thus, the operators $\pi_{\lambda,v}^{(m)}$, $v \leq k$, are defined on the space

$$\mathcal{D}_k(\overline{D}) = \mathcal{D}(\overline{D}) + \Sigma_k(\overline{D}). \quad (5.4)$$

The operators $\pi_{\lambda,v}^{(m)}$, $v \leq k$, acting on the space $\mathcal{D}_k(\overline{D})$, are projection operators onto the spaces $V_{\lambda,v}^{(m)}$, see § 2 for them, i.e. the following relations hold:

$$\begin{aligned} \pi_{\lambda,v}^{(m)} \pi_{\lambda,v}^{(m)} &= \pi_{\lambda,v}^{(m)}, \\ \pi_{\lambda,v}^{(m)} \pi_{\lambda,s}^{(m)} &= 0, \quad v \neq s. \end{aligned}$$

Thus, in Case B we have

Theorem 5.2. *Let $\lambda \in I_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Then the space $\mathcal{D}(\overline{D})$ has to be completed to the space $\mathcal{D}_k(\overline{D})$, see (5.4). On this space the canonical representation $R_{\lambda,m}$ splits into the sum of two terms: the first term decomposes as $R_{\lambda,m}$ does in Case A, the second term decomposes into the sum of the irreducible representations $T_{-\lambda-1+v} \sim T_{\lambda-v}$ with $v = 0, 1, \dots, k$. Namely, let us assign to any $f \in \mathcal{D}_k(\overline{D})$ the family $\{F_{\lambda,\sigma}^{(m)}\}$ where $\sigma = -1/2 + i\rho$, $\sigma = n$, $n = 0, 1, \dots, |m| - 1$, and $\sigma = -\lambda - 1 + v$, $v = 0, 1, \dots, k$. This correspondence is G -equivariant. The function f is recovered by the inversion formula (5.3).*

Case C: $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Now we perform analytic continuation of (5.2) to the left, to the strip I_{-k-1} . Here the poles

$$\sigma = -\lambda - 2 - v, \quad \sigma = \lambda + 1 + v, \quad v \in \mathbb{N}, \quad v \leq k,$$

of the integrand (they are poles of the Fourier transform) intersect the line of integration $\operatorname{Re} \sigma = -1/2$ and give additional terms. We obtain

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} + \sum_{n=0}^{|m|-1} + \sum_{v=0}^k \Pi_{\lambda,v}^{(m)}(f), \quad (5.5)$$

where the integral and the first sum have the same meaning as in (5.2) and

$$\Pi_{\lambda,v}^{(m)} = (-1)^m \frac{1}{a_{-m}(\lambda + 1 + v)} P_{\lambda,\lambda+1+v}^{(m)} \circ \xi_{\lambda,v}^{(m)}.$$

Denote by $\mathcal{P}_{\lambda,v}^{(m)}$ the image of the operator $P_{\lambda,\lambda+1+v}^{(m)}$. The operators $\Pi_{\lambda,v}^{(m)}$ with $v \leq k$ can be extended to the space $\mathcal{T}_k(\overline{D})$ since the operators $b_{\lambda,v}^{(m)}$ with $v \leq k$ are defined on this space. In particular, $\Pi_{\lambda,v}^{(m)}$ can be applied to $\mathcal{P}_{\lambda,s}^{(m)}$, $s \leq k$, and we can consider the products $\Pi_{\lambda,v}^{(m)} \Pi_{\lambda,s}^{(m)}$ with $v, s \leq k$.

Theorem 5.3. *The operators $\Pi_{\lambda,v}^{(m)}$, $v \leq k$, are projection operators on $\mathcal{P}_{\lambda,v}^{(m)}$, namely, the following relations hold:*

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda,v}^{(m)} \Pi_{\lambda,v}^{(m)} &= \Pi_{\lambda,v}^{(m)}, \\ \Pi_{\lambda,v}^{(m)} \Pi_{\lambda,s}^{(m)} &= 0, \quad s \neq v. \end{aligned}$$

Thus, in Case C we have

Theorem 5.4. *Let $\lambda \in I_{-k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Then the canonical representation $R_{\lambda,m}$ considered on the space $\mathcal{T}_k(\overline{D})$ splits into the sum of two terms. The first term acts on the subspace of functions f such that their Taylor coefficients $c_v(f)$ are equal to zero for $v \leq k$, and decomposes as $R_{\lambda,m}$ in Case A, the second term decomposes into the direct sum of the $k+1$ irreducible representations $T_{-\lambda-2-v}$ ($\sim T_{\lambda+1+v}$), $v = 0, 1, \dots, k$, acting on the sum of the spaces $\mathcal{P}_{\lambda,v}^{(m)}$. One has an inversion formula, see (5.5).*

REFERENCES

1. Grosheva L.I. Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1218-1228. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1218-1228.
2. Molchanov V.F., Grosheva L.I. Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane. *Acta Appl. Math.*, 2002, vol. 73, pp. 59-77.
3. Grosheva L.I. Kanonicheskie predstavleniya v secheniyakh lineynykh rassloeniy na ploskosti Lobachevskogo [Canonical representations on sections of linear bundles on the Lobachevsky plane]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 436-438. (In Russian).

Received 23 March 2018

Reviewed 25 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Grosheva Larisa Igorevna, Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Associate Professor of Physics and Mathematics, e-mail: gligli@mail.ru

For citation: Grosheva L.I. Decomposition of canonical representation on the Lobachevsky plane associated with linear bundles. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 113–124. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-113-124 (In Engl., Abstr. in Russian).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-113-124

УДК 517.98

РАЗЛОЖЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО В СЕЧЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Л. И. Грошева

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: gligli@mail.ru

Аннотация. Мы разлагаем канонические представления, действующие в сечениях линейных расслоений на плоскости Лобачевского

Ключевые слова: плоскость Лобачевского; канонические представления; обобщенные функции; граничные представления; преобразования Пуассона и Фурье

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grosheva L.I.* Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1218-1228. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1218-1228.
2. *Molchanov V.F., Grosheva L.I.* Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane // Acta Appl. Math. 2002. Vol. 73. P. 59-77.
3. *Грошева Л.И.* Канонические представления в сечениях линейных расслоений на плоскости Лобачевского // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 436-438.

Поступила в редакцию 23 марта 2018

Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Грошева Лариса Игоревна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: gligli@mail.ru

Для цитирования: Грошева Л.И. Разложение канонических представлений в сечениях линейных расслоений на плоскости Лобачевского // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 113–124. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-113-124

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-125-130

ON SEMIDISCRETIZATION METHODS FOR DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER

© M. I. Kamenskii¹⁾, V. V. Obukhovskii²⁾, G. G. Petrosyan²⁾

¹⁾ Voronezh State University

1 University sq., Voronezh 394018, Russian Federation

E-mail: mikhailkamenski@mail.ru

²⁾ Voronezh State Pedagogical University

86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation

E-mail: valerio-ob2000@mail.ru, garikpetrosyan@yandex.ru

Abstract. The report provides semidiscretization diagram for semilinear differential inclusions of fractional order.

Keywords: fractional differential inclusion; semilinear differential inclusion; Cauchy problem; approximation; semidiscretization; fixed point; condensing map; measure of noncompactness

Introduction

Theories of differential inclusions and condensing mappings are of great importance in modern mathematics (see [1], [2]). In our work, we present further development of these theories for differential inclusions of fractional order.

For a semilinear fractional order differential inclusion in a separable Banach space E of the form

$${}^C D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

consider the problem of existence of mild solutions to this inclusion satisfying the following periodic

$$x(0) = x(T) \quad (2)$$

and anti-periodic

$$x(0) = -x(T), \quad (3)$$

boundary value conditions under the following basic assumptions.

The symbol ${}^C D^q x$ denotes the Caputo fractional derivative of order $q \in (0, 1)$. We suppose that the linear operator A satisfies condition (A)

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (Project No 1.3464.2017/4.6).

- (A) $A : D(A) \subseteq E \rightarrow E$ is a linear closed (not necessarily bounded) operator generating a C_0 -semigroup $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ of bounded linear operators in E

We will assume that the multivalued nonlinearity $F : [0, T] \times E \rightarrow Kv(E)$ obeys the following conditions:

- (F1) for each $x \in E$ the multifunction $F(\cdot, x) : [0, T] \rightarrow Kv(E)$ admits a strongly continuous selection;
- (F2) for a.e. $t \in [0, T]$ the multimap $F(t, \cdot) : E \rightarrow Kv(E)$ is u.s.c.;
- (F3) there exists a function $\alpha \in L_+^\infty([0, T])$ such that

$$\|F(t, x)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|x(t)\|_E) \text{ for a.e. } t \in [0, T],$$

- (F4) the χ -regularity condition: there exists a function $\mu \in L^\infty([0, T])$ such that for each bounded set $\Omega \subset E$ we have:

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq \mu(t)\chi(\Omega),$$

for a.e. $t \in [0, T]$, where χ is the Hausdorff MNC in E .

Along with inclusion (1), for a given sequence of positive numbers $\{h_n\}$ converging to zero consider the inclusion

$$D^q x_h(t) \in A_h x_h(t) + F_h(t, x_h(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $h \in H = \overline{\{h_n\}}$ is the semidiscretization parameter, $A_h : D(A_h) \subset E_h \rightarrow E_h$ are closed linear operators in Banach spaces E_h generating C_0 -semigroups $\{U_h(t)\}_{t \geq 0}$. We assume that $E_0 = E, A_0 = A, F_0 = F$ and continuous maps $F_h : [0, T] \times E_h \rightarrow E_h$ satisfying conditions (F1) – (F4) for each $h \in H$.

1. Basic concepts

Definition 1. A mild solution to the Cauchy problem for inclusion (1) with initial condition

$$x(0) = x_0 \quad (5)$$

on an interval $[0, \tau] \subseteq [0, T]$ is a function $x \in C([0, \tau]; E)$ which can be represented as

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) \phi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

where $\phi \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) U(t^q \theta) d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) U(t^q \theta) d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q} \theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}_+.$$

By the symbol $\Sigma_{x_0}^F[0, \tau]$ we will denote the set of all mild solutions to the Cauchy problem (1), (5) on an interval $[0, \tau] \subseteq [0, T]$. In articles [3] and [4] we proved the following local existence result.

Theorem 1. *Under conditions (A), (F1) – (F4) there exists $\tau \in (0, T]$ such that $\Sigma_{x_0}^F[0, \tau]$ is a nonempty subset of the space $C([0, \tau]; E)$.*

Definition 2. We will say that problem (1), (5) satisfies condition (Q) provided:

(Q1) $\Sigma_{x_0}^F[0, T]$ is a non-empty compact subset of $C([0, T]; E)$;

(Q2) the following extendability condition holds:

$$\Sigma_{x_0}^F[0, \tau] = \Sigma_{x_0}^F[0, T]|_{[0, \tau]}$$

for every $\tau \in (0, T]$.

We suppose that there exist linear operators $Q_h : E_h \rightarrow E, h \in H, Q_0 = I$ and projection operators $P_h : E \rightarrow E_h, P_0 = I$ such that

$$P_h Q_h = I_h, \tag{6}$$

where I_h is the identity on E_h and

$$Q_h P_h x \rightarrow x \tag{7}$$

as $h \rightarrow 0$ for each $x \in E$. We suppose that the operators P_h and Q_h are uniformly bounded

$$\|P_h\| \leq 1, \quad \|Q_h\| \leq 1 \tag{8}$$

for all $h \in H$.

An initial condition for equation (4) will be given by the equality

$$x_h(0) = x_h(T) \text{ (or } x_h(0) = -x_h(T)) \tag{9}$$

2. Main results

Theorem 2. *Under conditions (A), (F1) – (F2), (Q1) – (Q2) let problem (1) – (2) (or (1) – (3)) has the solution x^* on the interval $[0, a]$. Then, for a sufficiently small $h > 0$ problems (4), (9) have solutions x_h on the interval $[0, a]$ and*

$$Q_h x_h \rightarrow x^*$$

as $h \rightarrow 0$.

Various applications of the theory of differential inclusions of fractional order can be found in papers [5], [6] and [7].

REFERENCES

1. Akhmerov R.R., Kamenskii M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskiy B.N. *Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie operatory* [Measures of Non-Compactness and Condensing Operators]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. (In Russian).
2. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).
3. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269-292.
4. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, pp. 1-21.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Elsevier Science, 2006, 541 p.
6. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache koshi dlya differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviey [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).
7. Petrosyan G.G. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Nekotorye voprosy analiza, algebrы, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* [Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry and Mathematical Education]. Voronezh, 2016, pp. 7-8.

Received 21 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Kamenskii Mikhail Igorevich, Voronezh State University, Voronezh, Russia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Functional Analysis and Operator Equations, e-mail: mikhailkamenski@mail.ru

Obukhovskii Valeri Vladimirovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Higher Mathematics, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

For citation: Kamenskii M.I., Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. On semidiscretization methods for differential inclusions of fractional order. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 125-130. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-125-130 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-125-130

УДК 517.92

О МЕТОДЕ ПОЛУДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. И. Каменский¹⁾, В. В. Обуховский²⁾, Г. Г. Петросян²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: mikhaikamenski@mail.ru

²⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: valerio-ob2000@mail.ru, garikpetrosyan@yandex.ru

Аннотация. В докладе приводится схема полудискретизации для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка

Ключевые слова: дифференциальное включение дробного порядка; полулинейное дифференциальное включение; задача Коши; аппроксимация; полудискретизация; неподвижная точка; уплотняющее отображение; мера некомпактности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н. Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск, Наука, 1986.
2. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
3. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.
4. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. P. 1-21.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier Science, 2006. 541 p.
6. Петросян Г.Г., Афанасова М.С. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.
7. Петросян Г.Г. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж, 2016. С. 7-8.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Каменский Михаил Игоревич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: mikhailkamenski@mail.ru

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-131-135

EXISTENCE AND STABILITY OF BUMPS IN A NEURAL FIELD MODEL

© K. Kolodina¹⁾, A. Oleynik²⁾, J. Wyller¹⁾

¹⁾ Norwegian University of Life Sciences

3 Universitetstunet, Ås 1433, Norway

E-mail: karina.kolodina@nmbu.no, john.wyller@nmbu.no

²⁾ University of Bergen

41 Allegaten, Realfagbygget, Bergen 5020, Norway

E-mail: Anna.Oleynik@uib.no

Abstract. We investigate existence and stability of *bumps* (localized stationary solutions) in a homogenized 2-population neural field model, when the firing rate functions are given by the unit step function.

Keywords: homogenization theory; existence and stability of stationary solutions of nonlocal neural field models

1. The main results

The set of coupled integro-differential equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u_e &= -u_e + \omega_{ee} \otimes \otimes P_e(u_e - \theta_e) - \omega_{ie} \otimes \otimes P_i(u_i - \theta_i) \\ \tau \frac{\partial}{\partial t}u_i &= -u_i + \omega_{ei} \otimes \otimes P_e(u_e - \theta_e) - \omega_{ii} \otimes \otimes P_i(u_i - \theta_i)\end{aligned}\tag{1}$$

models the neural activity in the cortical tissue. Here $f \otimes \otimes g$ is defined as

$$[f \otimes \otimes g](x, y) \equiv \int_{\Omega} \int_Y f(x - x', y - y') g(x', y') dy' dx'$$

where $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $t > 0$. u_e and u_i are the membrane potentials of excitatory and inhibitory neurons, respectively, at the spatial point x, y and time t . The region Ω is the spatial region occupied by the neurons. The functions ω_{mn} ($m, n = e, i$) model the coupling strengths (referred to as the connectivity functions) in the network. The functions $P_m, m = e, i$ (referred to as the firing rate functions) are monotonically increasing and assume values in the interval $Y = [0, 1]$. The connectivity functions are assumed to be 1-periodic in the variable y . The parameter τ is the relative inhibition time i.e. $\tau = \tau_i/\tau_e$

The work is partially supported by the Norwegian University of Life Sciences and The Research Council of Norway (project № 239070).

where τ_e (τ_i) is the excitatory (inhibitory) time constant, while θ_e and θ_i are the threshold values for firing of the excitatory and the inhibitory neurons, respectively. The system (1) is derived from a 2-population neural field model with periodic microstructure incorporated in the connectivity functions by using the 2-scale convergence technique of Nguetseng [1].

The connectivity kernels ω_{mn} are expressed in terms of the scaling function Φ and the footprint functions σ_{mn} , $m, n = e, i$:

$$\begin{aligned}\omega_{mn}(x, y; \alpha_{mn}) &= \frac{1}{\sigma_{mn}(y; \alpha_{mn})} \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{mn}(y; \alpha_{mn})}\right) \\ \sigma_{mn}(y; \alpha_{mn}) &= s_{mn}(1 + \alpha_{mn} \cos(2\pi y)), \quad s_{mn} > 0, \quad 0 \leq \alpha_{mn} < 1 \\ \Phi(\xi) &= \Phi(-\xi), \quad \Phi(\xi) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi(\xi) d\xi = 1, \quad \Phi \in BC^1(\mathbb{R}).\end{aligned}\tag{2}$$

The parameters α_{mn} , $m, n = e, i$ are referred to as the *heterogeneity parameters*. We denote the bump solutions by $U = [U_e, U_i]$. The components U_e and U_i can formally be expressed as

$$\begin{aligned}U_e(x; \alpha_e) &= W_{ee}(a_e - x; \alpha_{ee}) + W_{ee}(a_e + x; \alpha_{ee}) - W_{ie}(a_i - x; \alpha_{ie}) - W_{ie}(a_i + x; \alpha_{ie}), \\ U_i(x; \alpha_i) &= W_{ei}(a_e - x; \alpha_{ei}) + W_{ei}(a_e + x; \alpha_{ei}) - W_{ii}(a_i - x; \alpha_{ii}) - W_{ii}(a_i + x; \alpha_{ii}),\end{aligned}$$

where α_e and α_i are the vectors $\alpha_e = (\alpha_{ee}, \alpha_{ie})$ and $\alpha_i = (\alpha_{ei}, \alpha_{ii})$ and

$$W_{mn}(\xi) = \int_0^\xi \left(\int_0^1 \omega_{mn}(x, y) dy \right) dx.$$

Here the *pulse width coordinates* $a_m > 0$ are defined by means of the condition $U_m(\pm a_m) = \theta_m$ ($m = e, i$). Necessary conditions for the existence of the bumps read

$$f_e(a; \alpha_e) = \theta_e, \quad f_i(a; \alpha_i) = \theta_i,\tag{3}$$

where f_e and f_i are given as

$$\begin{aligned}f_e(a; \alpha_e) &\equiv W_{ee}(2a_e; \alpha_{ee}) - W_{ie}(a_e + a_i; \alpha_{ie}) + W_{ie}(a_e - a_i; \alpha_{ie}), \\ f_i(a; \alpha_i) &\equiv W_{ei}(a_e + a_i; \alpha_{ei}) - W_{ei}(a_i - a_e; \alpha_{ei}) - W_{ii}(2a_i; \alpha_{ii}).\end{aligned}$$

Here we have introduced the *pulse width vector* $a = (a_e, a_i)$. We obtain the following result:

Theorem 1. *Let Σ and I be the sets $\Sigma = \{(a_e, a_i); a_e, a_i > 0\}$ and $I = \{(\theta_e, \theta_i); 0 < \theta_m \leq 1, m = e, i\}$ and $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ be the 4-parameter family of vector field $F_\alpha = (f_e, f_i) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ where $\alpha = (\alpha_e, \alpha_i) \in \mathcal{A} \equiv [0, 1]^4$. Then the following holds true:*

1. *The set $F_\alpha(\Sigma)$ is bounded for all $\alpha \in \mathcal{A}$.*
2. *The vectorfield $F_\alpha : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$ is smooth for all $\alpha \in \mathcal{A}$.*
3. *If the Jacobian $D_a F_0(a_0)$ is non-singular where a_0 is a solution of (3) when $\alpha = 0$, then by the implicit function theorem the intersection between $F_\alpha(\Sigma)$ and I is non-empty i.e. there is a $k \in [0, 1)$ such that*

$$F_\alpha(\Sigma) \cap I \neq \emptyset$$

for $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ where

$$\tilde{\mathcal{A}}_k \equiv \{\alpha \in \mathcal{A}; 0 \leq \alpha_{mn} < k\} \subset \mathcal{A}.$$

Based on this result, one can prove the following result:

Theorem 2. *For $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}_k$ and $D_a F_0(a_0)$ being non-singular, the generic picture consists of two solutions of the system (3) for each $(\theta_e, \theta_i) \in J \equiv F_\alpha(\Sigma) \cap I$.*

This result is obtained by interpreting solutions of the system (3) as a transversal intersection between two level curves and the one-to-one correspondence between the solutions of (3) and the bumps. This result means that the typical situation consists of two bumps for each $(\theta_e, \theta_i) \in J$.

We next study stability of the bumps $U_0 = (U_e, U_i)$. We write the system (1) on the compact form

$$\frac{\partial}{\partial t} U = T(-U + F(U)),$$

where F is the integral operator on the RHS of this system and

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\tau \end{pmatrix}.$$

Then by imposing a perturbation on U_0 i.e. by assuming

$$U(x, y, t) = U_0(x) + V(x, y) \exp[\lambda t], \quad V = (V_e, V_i)$$

and linearizing the resulting equation for V we end up with the eigenvalue problem

$$\lambda V = G(V), \quad G(V) = T(-V + F'_{U_0}(V)).$$

Here the Frechét derivative F'_{U_0} is given by

$$F'_{U_0}(V) = \begin{pmatrix} L_{ee}V_e - L_{ie}V_i \\ L_{ei}V_e - L_{ii}V_i \end{pmatrix}$$

$$(L_{mn}V_m)(x, y) = \frac{1}{|U'_m(a_m)|} \int_Y (\omega_{mn}(a_m - x, y' - y)V_m(a_m, y') + \omega_{mn}(a_m + x, y' - y)V_m(-a_m, y')) dy'.$$

We have the following result:

Theorem 3. *The spectrum $Sp(G)$ of the operator G can differ from $\bigcup_{k=1,2} Sp(T + H^{(k)})$ only by two values, -1 and $-1/\tau$. Here the integral operator $H^{(k)} : BC^1(Y) \times BC^1(Y) \rightarrow BC^1(Y) \times BC^1(Y)$, $k = 1, 2$ is given as*

$$(H^{(k)}v_k)(y) = \int_Y T A^{(k)}(y' - y)v_k(y')dy', \quad v_k \in BC^1(Y) \times BC^1(Y)$$

$$A^{(1)}(y) = \begin{pmatrix} A(y) + B(y) & -C(y) - D(y) \\ E(y) + F(y) & -G(y) - H(y) \end{pmatrix}$$

and

$$A^{(2)}(y) = \begin{pmatrix} A(y) - B(y) & -C(y) + D(y) \\ E(y) - F(y) & -G(y) + H(y) \end{pmatrix},$$

where

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{\omega_{ee}(0,y)}{|U'_e(a_e)|}, & B(y) &= \frac{\omega_{ee}(2a_e,y)}{|U'_e(a_e)|}, & C(y) &= \frac{\omega_{ie}(a_i-a_e,y)}{|U'_i(a_i)|}, & D(y) &= \frac{\omega_{ie}(a_i+a_e,y)}{|U'_i(a_i)|}, \\ E(y) &= \frac{\omega_{ei}(a_e-a_i,y)}{|U'_e(a_e)|}, & F(y) &= \frac{\omega_{ei}(a_e+a_i,y)}{|U'_e(a_e)|}, & G(y) &= \frac{\omega_{ii}(0,y)}{|U'_i(a_i)|}, & H(y) &= \frac{\omega_{ii}(2a_i,y)}{|U'_i(a_i)|}. \end{aligned}$$

The spectrum of $H^{(k)}$, $k = 1, 2$ which is computed by means of the Fourier-decomposition method, serves as the basis for the stability method. For the scenario with two bumps for each pair of threshold values θ_e, θ_i , we find that one bump is unstable for all relative inhibition times τ and the other one is stable for small and moderate values of τ . The latter bump becomes unstable when τ exceeds a certain threshold.

R e m a r k 1. More details as well as other results can be found in Kolodina *et al.* [2].

REFERENCES

1. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1989, vol. 20, no. 3, pp. 608-623.
2. Kolodina K., Oleynik A., Wyller J. Single bumps in a 2-population homogenized neuronal network model. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2018, vol. 310, pp. 40-53.

Received 23 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Kolodina Karina, Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway, PhD-student at Faculty of Science and Technology, e-mail: karina.kolodina@nmbu.no

Oleynik Anna, University of Bergen, Bergen, Norway, PhD, Postdoctoral fellow at Department of Mathematics, e-mail: Anna.Oleynik@uib.no

Wyller John, Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway, PhD, Professor at Faculty of Science and Technology, e-mail: john.wyller@nmbu.no

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-131-135

УДК 51-76

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ БАМПОВ В МОДЕЛИ НЕЙРОННОГО ПОЛЯ

К. Колодина¹⁾, А. Олейник²⁾, Й. Виллер¹⁾

¹⁾ Норвежский университет естественных наук

1433, Норвегия, Ос, ул. Университетская, 3

E-mail: karina.kolodina@nmbu.no, john.wyller@nmbu.no

²⁾ Бергенский университет

5020, Норвегия, Берген, ул. Аллегатен, 41

E-mail: Anna.Oleynik@uib.no

Аннотация. Исследованы существование и устойчивость бампов (локализованных стационарных решений) усредненной двупопуляционной модели нейронного поля в случае, когда функции активации задаются функцией типа Хевисайда.

Ключевые слова: теория усреднения; существование и устойчивость стационарных решений нелокальных моделей нейронных полей

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1989. Vol. 20. № 3. P. 608-623.

2. *Kolodina K., Oleynik A., Wyller J.* Single bumps in a 2-population homogenized neuronal network model // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2018. Vol. 310. P. 40-53.

Поступила в редакцию 23 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Колодина Карина, Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия, аспирант факультета науки и технологий, e-mail: karina.kolodina@nmbu.no

Олейник Анна, Бергенский университет, г. Берген, Норвегия, научный сотрудник факультета математики, e-mail: Anna.Oleynik@uib.no

Виллер Йон, Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия, профессор факультета науки и технологий, e-mail: john.wyller@nmbu.no

Для цитирования: Колодина К., Олейник А., Виллер Й. Существование и устойчивость бампов в модели нейронного поля // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 131–135. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-131-135

Работа выполнена при поддержке Норвежского университета естественных наук и Научно-исследовательского совета Норвегии (проект № 239070).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-136-144

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR INCLUSIONS WITH CAUSAL MULTIOPERATORS AND THE METHOD OF INTEGRAL GUIDING POTENTIALS

© S. V. Kornev, V. V. Obukhovskii

Voronezh State Pedagogical University
86 Lenina St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: kornev _ vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Abstract. In the present paper the method of integral guiding potentials is applied to study the problem of the asymptotic behavior of solutions for a differential inclusion with a causal multioperator. At first we consider the case when the multioperator is closed and convex-valued. Then the case of a non-convex-valued and lower semicontinuous right-hand part is considered.

Keywords: functional inclusion; causal multioperator; asymptotic behavior of solutions; integral guiding potential

Introduction

The study of systems governed by differential and functional equations with causal operators, which is due to Tonelli [1] and Tychonov [2], attracts the attention of many researchers. The term causal arises from the engineering and the notion of a causal operator turns out to be a powerful tool for unifying problems in ordinary differential equations, integro-differential equations, functional differential equations with finite or infinite delay, Volterra integral equations, neutral functional equations et al. (see the monograph [3]). In the present paper we apply the method of integral guiding potentials to the investigation of the asymptotic behavior of solutions for a differential inclusion with the multivalued causal operator.

The main ideas of the method of guiding functions were formulated by Krasnosel'skii and Perov in the fifties (see [4, 5]). Being geometrically clear, this method was originally applied to the study of periodic and bounded solutions of ordinary differential equations (see, e.g., [6-8]). Thereafter the method was extended to differential inclusions (see, e.g., [9, 10]), differential inclusion with the causal operator (see, e.g., [11, 12]) and other objects. The sphere of applications was extended to the study of qualitative behavior and bifurcations

The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project № 1.3464.2017/4.6) and the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-00386).

of solutions (see, e.g., [13-16]) and asymptotics of solutions (see, e.g., [17-19]). These and other aspects of the method of guiding functions and its applications, as well as the additional bibliography, may be found in the recent monograph [20].

1. Main concepts

Let (X, d_X) and (Y, d_Y) be metric spaces. By the symbols $P(Y)$ and $K(Y)$ we denote the collections of all nonempty and, respectively, nonempty and compact subsets of the space Y . If Y is a normed space, $Cv(K)$ and $Kv(Y)$ denote the collections of all nonempty convex closed (and, respectively, compact) subsets of Y .

Definition 1. A multimap $F : X \rightarrow P(Y)$ is called upper semicontinuous (u.s.c.) at the point $x \in X$ if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \subset V$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \subset V$. A multimap $F : X \rightarrow P(Y)$ is called u.s.c. if it is u.s.c. at each point $x \in X$.

Definition 2. A multimap $F : X \rightarrow P(Y)$ is called lower semicontinuous (l.s.c.) at a point $x \in X$, if for each open set $V \subset Y$ such that $F(x) \cap V \neq \emptyset$ there exists $\delta > 0$ such that $d_X(x, x') < \delta$ implies $F(x') \cap V \neq \emptyset$. A multimap $F : X \rightarrow P(Y)$ is called l.s.c. if it is l.s.c. at each point $x \in X$.

Definition 3. Let I be a closed subset of $\mathbb{R}$ endowed with the Lebesgue measure. A multifunction $F : I \rightarrow K(Y)$ is called measurable if, for each open subset $W \subset Y$, its pre-image $F^{-1}(W) = \{t \in I : F(t) \subset W\}$ is the measurable subset of I .

Remark 1. A u.s.c. multifunction is measurable. Each measurable multifunction $F : I \rightarrow K(Y)$ has a measurable selection, i.e., there exists such measurable function $f : I \rightarrow Y$, that $f(t) \in F(t)$ for a.e. $t \in I$.

Let $T > 0$ and $\sigma \geq 0$ be given numbers. By the symbols $C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n)$ and $L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$, where $k \in \mathbb{Z}$, we will denote the corresponding spaces of continuous and integrable functions with usual norms.

For any subset $\mathcal{N} \subset L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$ and $\tau \in (kT, (k+1)T)$ we define the restriction of $\mathcal{N}$ on (kT, τ) as

$$\mathcal{N} \mid_{(kT, \tau)} = \{f \mid_{(kT, \tau)} : f \in \mathcal{N}\}.$$

Definition 4. We will say that $\mathcal{Q}$ is a causal multioperator if for each $k \in \mathbb{Z}$ a multimap

$$\mathcal{Q} : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$$

is defined in such a way that for each $\tau \in (kT, (k+1)T)$ and for all

$$u(\cdot), v(\cdot) \in C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n)$$

the condition $u \mid_{[kT - \sigma, \tau]} = v \mid_{[kT - \sigma, \tau]}$ implies $\mathcal{Q}(u) \mid_{(kT, \tau)} = \mathcal{Q}(v) \mid_{(kT, \tau)}$.

Denote by $\mathcal{C}$ the Banach space $C([-\sigma, 0]; \mathbb{R}^n)$.

E x a m p l e 1. Suppose that a multimap $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the following conditions:

- (F1) the multifunction $F(\cdot, c) : \mathbb{R} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ admits a measurable selection for every $c \in \mathcal{C}$;
- (F2) the multimap $F(t, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ is u.s.c. for a.e. $t \in \mathbb{R}$;
- (F3) for every $r > 0$ there exists a locally integrable non-negative function $\eta_r(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ such that

$$\|F(t, c)\| := \sup\{\|y\| : y \in F(t, c)\} \leq \eta_r(t) \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R},$$

for all $c \in \mathcal{C}$, $\|c\| \leq r$.

It is known (see, e.g., [9, 21]) that under conditions (F1) – (F3) for each $k \in \mathbb{Z}$, the superposition multioperator $\mathcal{P}_F : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{P}_F(u) = \{f \in L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n) : f(t) \in F(t, u_t) \quad \text{a.e. } t \in (kT, (k+1)T)\}$$

is well defined. Here $u_t \in \mathcal{C}$ is defined as $u_t(\theta) = u(t + \theta)$, $\theta \in [-\sigma, 0]$. It is easy to see that the multioperator $\mathcal{P}_F$ is causal.

E x a m p l e 2. Let $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ be a multimap satisfying conditions (F1) – (F3) of Example 1. Suppose that $\{K(t, s) : -\infty < s \leq t < +\infty\}$ is a continuous (with respect to the norm) family of linear operators in $\mathbb{R}^n$ and $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ is a given locally integrable function. Consider, for each $k \in \mathbb{Z}$, the Volterra type integral multioperator $\mathcal{G} : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$ defined as

$$\mathcal{G}(u)(t) = m(t) + \int_{kT}^t K(t, s)F(s, u_s)ds,$$

$$\mathcal{G}(u) = \{y \in L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n) : y(t) = m(t) + \int_{kT}^t K(t, s)f(s)ds : f \in \mathcal{P}_F(u)\}.$$

It is also obvious that the multioperator $\mathcal{G}$ is causal.

E x a m p l e 3. Suppose that a multimap $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(\mathbb{R}^n)$ satisfies the following condition of almost lower semicontinuity:

- (F_L) there exists a sequence of disjoint closed sets $\{J_n\}$, $J_n \subseteq \mathbb{R}$ $n = 1, 2, \dots$ such that: (i) $meas(\mathbb{R} \setminus \bigcup_n J_n) = 0$; (ii) the restriction of F on each set $J_n \times \mathcal{C}$ is l.s.c.

Then (see, e.g., [9, 21]) under conditions (F_L), (F3), for each $k \in \mathbb{Z}$, the superposition multioperator $\mathcal{P}_F : C([kT - \sigma, (k+1)T]; \mathbb{R}^n) \multimap L^1((kT, (k+1)T); \mathbb{R}^n)$ is also well-defined and causal.

Now, suppose that $\psi \in \mathcal{C}$ is a given initial function. By the symbol D_ψ we will denote the set of all continuous functions $x : [-\sigma, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-\sigma, 0]$ and the restriction of x to $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ is absolutely continuous.

Considering the following abstract Cauchy problem for a functional inclusion with causal operator Q of the following form:

$$x' \in Q(x), \quad (1)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\sigma, 0], \quad (2)$$

where $x(\cdot)$ is an absolutely continuous function, we will study the problem of existence of solutions satisfying the estimate of the type

$$\|x(t)\| \leq \frac{k}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (3)$$

where $k > 0$ and g is a given function.

2. Main results

2.1. Convex-valued causal multioperators

By the symbols L^1 and C we will denote the corresponding spaces of integrable functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ and continuous functions $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\|_C = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$.

In this section we will assume that the causal multioperator $\mathcal{Q} : C \rightarrow Cv(L^1)$ has convex values and satisfies the following conditions:

- (Q1) for each bounded linear operator $A : L^1 \rightarrow E$, where E is a Banach space, the composition $A \circ \mathcal{Q} : C \rightarrow Cv(E)$ is closed;
- (Q2) there exists a locally integrable non-negative function $\alpha(\cdot) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ such that for every $x \in C$

$$\|\mathcal{Q}(x)(t)\| \leq \alpha(t)(1 + \|x(t)\|) \text{ for a.e. } t \in \mathbb{R}_+.$$

To provide condition (Q1) in Examples 1 and 2, it is sufficient to assume that the multimap F satisfies conditions (F1) – (F3) (see, e.g., [9, Theorem 1.5.30]) and to fulfil condition (Q2), we can suppose, in Example 1, the following sublinear growth condition: for each $x \in C$ we have, for some non-negative integrable function $\beta(t)$:

$$\|F(t, x_t)\| \leq \beta(t)(1 + \|x(t)\|) \text{ for a.e. } t \in \mathbb{R}_+, \quad (4)$$

and, in Example 2, the global boundedness condition $\|F(t, c)\| \leq \gamma(t)$ for some non-negative integrable function $\gamma(t)$.

Denote by $\mathfrak{V}$ the collection of all C^1 -functions $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the coercivity condition $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$. Notice that, given a function $V \in \mathfrak{V}$, for each $r > 0$ there exists $k(r) > r$ such that if $\alpha_r := \inf\{V(x), \|x\| \leq r\}$ then $V(x) < \alpha_r$, $\|x\| \geq k(r)$.

Now, let $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a given C^1 -function such that $\inf\{g(t), t \in \mathbb{R}_+\} \geq 1$.

Definition 5. A function $V \in \mathfrak{V}$ is called an integral guiding potential for inclusion (1) along the function g if there exists $r_V > g(0)\|\psi(0)\|$ such that for every function $x \in \mathcal{D}_\psi$ satisfying conditions

- (i) there exists a largest finite number $\tau_1^x > 0$ such that $g(t)\|x(t)\| \leq r_V$, $t \in [0, \tau_1^x]$;
- (ii) there exists a (least) finite number $\tau_*^x > \tau_1^x$ such that $g(\tau_*^x)\|x(\tau_*^x)\| = k_V := k(r_V)$;
- (iii) $\|x'(t)\| \leq \|Q(x)(t)\|$ for a.e. $t \in \mathbb{R}_+$;

we have

$$\int_{\tau_\#^x}^{\tau_*^x} \langle \nabla V(g(s)x(s)), g'(s)x(s) + g(s)f(s) \rangle ds \geq 0$$

for each summable selections $f \in Q(x)$, where $\tau_\#^x := \sup\{\tau \in [\tau_1^x, \tau_*^x], \|g(\tau)x(\tau)\| = r_V\}$.

Now we are in position to formulate the main result of this paper.

Theorem 1. *If $V \in \mathfrak{V}$ is an integral guiding potential for inclusion (1) along the function g then each solution of Cauchy problem (1), (2) satisfies the estimate*

$$\|x(t)\| \leq k_V \cdot \frac{1}{g(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

2.2. Lower semicontinuous causal multioperators

In this section we will consider the Cauchy problem for a class of functional inclusions with non-convex-valued lower semicontinuous causal multioperators. Namely, we will suppose that the causal multioperator $\mathcal{Q} : C \rightarrow P(L^1)$ satisfies condition

($\mathcal{Q}_L$) $\mathcal{Q}$ is l.s.c. and has closed decomposable values

and condition ($\mathcal{Q}2$).

As an example of a causal multioperator satisfying conditions ($\mathcal{Q}_L$) and ($\mathcal{Q}2$) we may consider the superposition multioperator $\mathcal{P}_F$ generated by a multimap $F : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ satisfying conditions of almost lower semicontinuity (F_L) and the sublinear growth condition (4) (see, e.g., [9, 21]).

The following result holds true.

Theorem 2. *Let $\mathcal{Q} : C \rightarrow P(L^1)$ be a causal multioperator satisfying conditions ($\mathcal{Q}_L$) and ($\mathcal{Q}2$). If $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is an integral guiding potential for inclusion (1) along the function g then each solution of Cauchy problem (1), (2) satisfies the estimate (5).*

REFERENCES

1. Tonelli L. Sulle equazioni funzionali di Volterra. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 1930, vol. 20, pp. 31-48.
2. Tikhonov A.N. O funktsional'nykh uravneniyakh tipa Volterra i ikh primeneniyyakh k nekotorym zadacham matematicheskoy fiziki [Functional Volterra-type equations and their applications to

certain problems of mathematical physics]. *Byulleten' Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Sektsiya A. Seriya Matematika i mekhanika – Moscow State University Bulletin. S. A*, 1938. vol. 1, no. 8, pp. 1-25. (In Russian).

3. Corduneanu C. *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*. London, Taylor and Francis, 2002.

4. Krasnoselskiy M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1966. (In Russian).

5. Krasnoselskiy M.A., Perov A.I. Ob odnom printsipe sushchestvovaniya ogranichennykh, periodicheskikh i pochti-periodicheskikh resheniy u sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [On a certain principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 1958, vol. 123, no. 2, pp. 235-238. (In Russian).

6. Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P. *Geometricheskie metody nelineynogo analiza* [Geometrical Methods of Nonlinear Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1975. (In Russian).

7. Mawhin J. Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Providence, American Mathematical Society, 1979.

8. Mawhin J., Ward J.R.Jr. Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 39-54.

9. Borisovich Y.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogo-znachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheni* [Introduction to the Theory of Multivalued Map and Differential Inclusion]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

10. Górniewicz L. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications*. Dordrecht, Springer, 2006.

11. Kornev S.V., Obukhovskiy V.V. Integral'nye napravlyayushchie funktsii i periodicheskie resheniya vklyucheni s kauzal'nymi operatorami [Integral guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 55-65. (In Russian).

12. Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P. Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, issue 3, pp. 418-428.

13. Kryszewski W. *Homotopy Properties of Set-Valued Mappings*. Torun, Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.

14. Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S. Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012. vol. 20, pp. 285-300.

15. Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P. On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces. *Nonlinear Analysis*, 2013, vol. 76, pp. 80-92.

16. Kornev S.V., Liou Y.-C. Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 2016, vol. 9, issue 8, pp. 5259-5270.

17. Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C. On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions. *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization*, 2014, vol. 34, no. 2, pp. 219-227.

18. Kornev S.V., Obukhovskiy V.V. Asimptoticheskoe povedenie resheniy differentsial'nykh vklyucheni i metod napravlyayushchikh funktsiy [Asymptotic behavior of solutions of differential

inclusions and the method of guiding functions]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 700-705. (In Russian).

19. Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C. On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 967-975.

20. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. *Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Mathematics*. Heidelberg, Springer, 2013.

21. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2001.

Received 23 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Kornev Sergey Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Chair of Higher Mathematics, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Obukhovskii Valeri Vladimirovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Chair of Higher Mathematics, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-136-144

УДК 517.911

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВКЛЮЧЕНИЙ С КАУЗАЛЬНЫМИ МУЛЬТИОПЕРАТОРАМИ И МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

С. В. Корнев, В. В. Обуховский

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»

394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

E-mail: kornev _ vrn@rambler.ru, valerio-ob2000@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе метод интегральных направляющих потенциалов применяется для изучения задачи об асимптотическом поведении решений дифференциального включения с каузальным мультиоператором. Сначала рассматривается случай, когда мультиоператор имеет замкнутые и выпуклые значения. Затем рассматривается случай невыпуклозначной полунепрерывной снизу правой части.

Ключевые слова: функциональное включение; каузальный мультиоператор; асимптотическое поведение решений; интегральный направляющий потенциал

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tonelli L.* Sulle equazioni funzionali di Volterra // Bulletin of the Calcutta Mathematical Society. 1930. Vol. 20. P. 31-48.
2. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюллетень Московского государственного университета. Секция А. Серия Математика и механика. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1-25.
3. *Corduneanu C.* Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications. London: Taylor and Francis, 2002.
4. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
5. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 2. С. 235-238.
6. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
7. *Mawhin J.* Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems // CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 1979.
8. *Mawhin J., Ward J.R.Jr.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2002. Vol. 8. № 1. P. 39-54.
9. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2011.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.3464.2017/4.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (№№ 17-51-52022, 16-01-00370, 16-01-00386).

10. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Second edition. Topological Fixed Point Theory and Its Applications. Dordrecht: Springer, 2006.

11. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Интегральные направляющие функции и периодические решения включений с каузальными операторами // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 55-65.

12. *Kornev S., Obukhovskii V., Zecca P.* Guiding functions and periodic solutions for inclusions with causal multioperators // *Applicable Analysis*. 2017. Vol. 96. Issue 3. P. 418-428.

13. *Kryszevski W.* Homotopy Properties of Set-Valued Mappings. Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.

14. *Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S.* Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2012. Vol. 20. P. 285-300.

15. *Loi N.V., Obukhovskii V., Zecca P.* On the global bifurcation of periodic solutions of differential inclusions in Hilbert spaces // *Nonlinear Analysis*. 2013. Vol. 76. P. 80-92.

16. *Kornev S.V., Liou Y.-C.* Multivalent guiding functions in the bifurcation problem of differential inclusions // *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. 2016. Vol. 9. Issue 8. P. 5259-5270.

17. *Kornev S., Obukhovskii V., Yao J.-C.* On asymptotics of solutions for a class of functional differential inclusions // *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization*. 2014. Vol. 34. № 2. P. 219-227.

18. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51. № 6. С. 700-705.

19. *Obukhovskii V., Kamenskii M., Kornev S., Liou Y.-C.* On asymptotics of solutions for a class of differential inclusions with a regular right-hand part // *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*. 2017. Vol. 18. № 5. P. 967-975.

20. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of Guiding Functions in Problems of Nonlinear Analysis. Lecture Notes in Mathematics. Heidelberg: Springer, 2013.

21. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. Berlin; N. Y.: Walter de Gruyter, 2001.

Поступила в редакцию 23 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Обуховский Валерий Владимирович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Для цитирования: *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Асимптотическое поведение решений включений с каузальными мультиоператорами и метод интегральных направляющих потенциалов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 136-144. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-136-144

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153
УДК 519.217

МОДЕЛИРОВАНИЕ МУЛЬТИСТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ФИЛЬТРАЦИИ

© Т. А. Аверина^{1,2)}, К. А. Рыбаков³⁾

¹⁾ ФГБУН «Институт вычислительной математики и математической геофизики»
Сибирского отделения Российской академии наук

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 6

²⁾ ФГАОУ ВО «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»
630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: ata@osmf.sccc.ru

³⁾ ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация. В работе предлагается расширение класса стохастических динамических систем, траектории которых находятся на заданном многообразии, на мультиструктурные стохастические системы, а именно системы с переменной и случайной структурой. Рассматриваются вопросы описания таких систем и моделирования их траекторий в приложении к задачам анализа и фильтрации.
Ключевые слова: инвариантная стохастическая система; первый интеграл; система с переменной структурой; система со случайной структурой; случайный процесс; стохастическое дифференциальное уравнение; численный метод

Введение

В статье рассматриваются мультиструктурные стохастические системы на многообразиях. Мультиструктурные системы, или системы с переключениями режимов, возникают во многих прикладных областях [1], однако в отличие от других работ здесь предполагается, что траектории системы принадлежат многообразию, то есть для системы выполняется некоторый закон сохранения. Ранее рассматривались системы, структура которых фиксирована, с траекториями на заданном многообразии [2].

Идентификация моментов времени изменения структуры, или переключения режимов, в стохастических системах тесно связана с задачей о разладке, рассмотренной в работах А.Н. Колмогорова, Ю.В. Прохорова и А.Н. Ширяева [3, 4]. В этой статье основное внимание уделено вопросам моделирования траекторий систем с переключениями

режимов. Такие алгоритмы моделирования лежат в основе статистических методов анализа и фильтрации, поскольку и при решении задачи анализа, и при решении задачи фильтрации требуется моделировать ансамбль траекторий системы с их последующей статистической обработкой [5]. Предлагается модификация численных методов, которая обеспечивает принадлежность численного решения заданному многообразию (при использовании стандартных методов численное решение не принадлежит многообразию из-за погрешности [6]).

1. Основные понятия

Рассматривается модель динамической системы, заданная векторным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) Ито:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор состояния; $t \in T = [t_0, T]$ — время, моменты времени t_0 и T заданы; $f(t, x)$ — n -мерная вектор-функция, $\sigma(t, x)$ — $(n \times s)$ -мерная матричная функция; $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, $W(t)$ и $X_0 \in \mathbb{R}^n$ независимы. Согласно [2] $f_i(t, x), \sigma_{il}(t, x) \in C^{1,2}(T \times \mathbb{R}^n)$, где $f_i(t, x)$ и $\sigma_{il}(t, x)$ — координаты вектор-функции $f(t, x)$ и элементы матричной функции $\sigma(t, x)$ соответственно; $i = 1, 2, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, s$.

Если скалярная неслучайная функция $M(t, x)$, не равная постоянной и имеющая непрерывную производную первого порядка по t и непрерывные производные первого и второго порядков по координатам вектора x , является первым интегралом для системы (1), то стохастический дифференциал случайного процесса $M(t, X(t))$ определяется формулой Ито и $dM(t, X(t)) = 0$. Таким образом, с вероятностью 1 на любой траектории решения СДУ (1) функция $M(t, x)$ принимает постоянное значение, зависящее только от X_0 , и это означает, что траектории случайного процесса $X(t)$ принадлежат гладкому многообразию $M(t, x) = C = \text{const}$.

Условия существования непрерывных частных производных функций $f_i(t, x)$, $\sigma_{il}(t, x)$ можно рассматривать не на всем множестве $T \times \mathbb{R}^n$, а только в окрестности заданного многообразия.

Чтобы функция $M(t, x)$ была первым интегралом системы (1), необходимо и достаточно выполнение следующих условий на всех траекториях ее решения $X(t)$:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{il}(t, x) \frac{\partial M(t, x)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, s; \quad (2)$$

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[f_i(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^s \frac{\partial \sigma_{il}(t, x)}{\partial x_j} \sigma_{jl}(t, x) \right] \frac{\partial M(t, x)}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Детальное изложение теории первых интегралов стохастических дифференциальных систем с примерами приведено в [2], некоторые аспекты численного моделирования траекторий таких инвариантных систем рассмотрены в [6].

2. Мультиструктурные системы на многообразиях

Представляет интерес расширение класса систем диффузионного типа (1) на системы с переменной и случайной структурой [1, 7, 8]. Для этого расширим вектор состояния, введя дополнительную координату $L \in \mathbb{L} = \{1, 2, \dots, m\}$, определим случайный процесс $L(t)$ — процесс смены структуры (каждая структура соответствует некоторому режиму функционирования, $L(t_0) = L_0$), траектории которого — это кусочно-постоянные функции со значениями из множества $\mathbb{L}$, и зададим уравнение для случайного процесса $X(t)$ в форме

$$dX(t) = f^{(l)}(t, X(t))dt + \sigma^{(l)}(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (4)$$

где $f^{(l)}(t, x)$ — вектор-функция, $\sigma^{(l)}(t, x)$ — матричная функция, удовлетворяющие условиям, аналогичным (2) и (3), $l = 1, 2, \dots, m$. В общем случае каждой структуре может соответствовать свое гладкое многообразие $M^{(l)}(t, x) = C^{(l)} = \text{const}$.

Процесс смены структуры $L(t)$ можно задать с помощью совокупности уравнений $S_{lr}(t, x) = 0$; $l, r = 1, 2, \dots, m$; $l \neq r$. Тогда при условии $L(t-0) = l$ и достижении вектором X поверхности с уравнением $S_{lr}(t, x) = 0$ в момент времени t функция $L(t)$ принимает значение r . Такой тип смены структуры называется сосредоточенным переходом, а система (4) — системой с переменной структурой.

Другой вариант — задание функций $\lambda_{lr}(t, x) \geq 0$, определяющих интенсивности смены структуры; $l, r = 1, 2, \dots, m$; $l \neq r$. Тогда при условии $L(t-0) = l$ и $X(t-0) = x$ функция $L(t + \Delta t)$ принимает значение r с вероятностью $\lambda_{lr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t)$. Такой тип смены структуры называется распределенным переходом, а система (4) — системой со случайной структурой.

Отметим, что расширение класса стохастических дифференциальных систем, траектории которых находятся на заданном многообразии, на стохастические системы с переменной структурой, позволяет рассматривать не только гладкие, но и кусочно-гладкие многообразия, например, многогранники или образы многогранников, полученные с помощью гладких отображений. Для таких систем можно рассматривать все классические задачи теории управления — задачи синтеза и моделирования таких систем, анализа, фильтрации и прогнозирования.

3. Модифицированные численные методы моделирования траекторий мультиструктурных систем

Опишем модификацию численных методов решения СДУ, которая обеспечивает принадлежность численного решения заданному многообразию и может быть включена в базовые алгоритмы моделирования систем с переменной и случайной структурой, изложенные в [7, 8].

Пусть $\{t_k\}$ — равномерная сетка с заданным постоянным шагом h , определяющая разбиение отрезка времени $[t_0, T]$, $k = 1, \dots, N$.

Обозначим через X_k численное решение СДУ (1) в момент времени t_k , полагая, что начальное значение численного решения совпадает с начальным значением задачи Коши, то есть $X_0 = X(t_0)$.

Запишем численный метод решения СДУ в общем виде

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, h), \quad (5)$$

где функция $F(t, X, h)$ определяется конкретным численным методом решения СДУ.

Опишем методику коррекции численного решения. Будем предполагать, что точка (t_k, X_k) принадлежит заданной поверхности, то есть $M(t_k, X_k) = C$. В следующем узле сетки t_{k+1} численное решение X_{k+1} условию $M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C$ в общем случае не удовлетворяет из-за погрешности численного метода, то есть $M(t_{k+1}, X_{k+1}) = C' \neq C$.

Построим проекцию точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$. Найдем вектор нормали к поверхности $M(t, X) = C'$ в точке (t_{k+1}, X_{k+1}) : $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$, и запишем параметрическое уравнение прямой в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку X_{k+1} с направляющим вектором $\nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})$:

$$\chi(\alpha) = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Остается найти точку пересечения прямой (6) и поверхности $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ как решение системы

$$\begin{cases} \tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \\ M(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1}) = C. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что проекция $\tilde{X}_{k+1}$ точки X_{k+1} на поверхность $M(t, X) = C$ при $t = t_{k+1}$ определяется решением в общем случае нелинейного уравнения

$$M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) = C \quad (7)$$

относительно параметра α . Такое уравнение может иметь несколько решений, однако требуется найти α , соответствующее минимальному расстоянию между точками X_{k+1} и $\tilde{X}_{k+1}$ в смысле евклидовой метрики, то есть минимальному значению $|\alpha|$ из возможных. Таким образом,

$$\tilde{X}_{k+1} = X_{k+1} + \alpha^* \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1}), \quad (8)$$

где

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} \{ |\alpha| : M(t_{k+1}, X_{k+1} + \alpha \nabla M(t_{k+1}, X_{k+1})) = C \}.$$

Проекцию (8) следует находить на каждом шаге используемого численного метода решения СДУ, учитывая, что α^* — это функция точки (t, X) . После чего эта проекция используется на следующем шаге, то есть вместо формулы (5) имеем

$$X_{k+1} = F(t_k, \tilde{X}_k, h) \quad (9)$$

и тогда $M(t_k, \tilde{X}_k) = C$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Модификация численных методов решения СДУ, описанная выше, может применяться и в общем случае, когда каждой структуре соответствует гладкое многообразие $M^{(l)}(t, x) = C^{(l)} = \text{const}$. Такая модификация сокращает отклонение численного решения от заданной поверхности до нуля и может уменьшать погрешность численного метода в смысле сильной сходимости по абсолютной величине.

4. Примеры мультиструктурных систем на многообразиях

Пример 1. Рассмотрим двумерную систему с тремя структурами, каждой из которых соответствует многообразие, являющееся также и поверхностью переключения ($n = 2$, $m = 3$), $t \in [0, 5]$. Первая структура задается СДУ Ито

$$d \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t}{X_1(t)} - \frac{1}{2}e^{-t}X_1(t) + X_2(t) \\ -X_1(t) - \frac{1}{2}e^{-t}X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} e^{-t/2}X_2(t) \\ -e^{-t/2}X_1(t) \end{bmatrix} dW(t),$$

для второй и третьей структуры СДУ Ито имеют вид

$$d \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -X_1(t) \\ X_1(t) \end{bmatrix} dt + \frac{1}{1+t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} dW(t), \quad d \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} X_2(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} dW(t),$$

Для первой структуры траектории случайного процесса $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$ принадлежат конусу $M^{(1)}(t, x) = M^{(1)}(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - t^2)/2 = C^{(1)}$, для второй и третьей структуры — плоскостям $M^{(2)}(t, x) = M^{(2)}(t, x_1, x_2) = x_1 + x_2 = C^{(2)}$ и $M^{(3)}(t, x) = M^{(3)}(t, x_1, x_2) = x_1 - x_2 = C^{(3)}$.

Начальный вектор состояния X_0 нулевой, а начальный номер структуры L_0 равен трем. Поверхности переключения заданы соотношениями $S_{12}(t, x) = M^{(2)}(t, x)$, $S_{23}(t, x) = M^{(3)}(t, x)$, $S_{31}(t, x) = M^{(1)}(t, x) - 1$, то есть $C^{(1)} = 1$, $C^{(2)} = C^{(3)} = 0$ и возможны следующие переходы: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 1$. Таким образом, траектория случайного процесса $X(t)$ в начальный момент времени начинается из нуля, ее фрагмент до первого момента переключения принадлежит биссекторной плоскости $x_1 - x_2 = 0$. Уравнение третьей структуры определяет неустойчивую систему, поэтому траектория удаляется от оси времени и в некоторый момент достигает конуса, происходит переключение режима $3 \rightarrow 1$. Далее до второго момента переключения фрагмент траектории принадлежит конусу. Затем происходит достижение траекторией другой биссекторной плоскости $x_1 + x_2 = 0$ и переключение режима $1 \rightarrow 2$. Следовательно, до третьего момента переключения соответствующий фрагмент траектории принадлежит этой плоскости. Уравнения второй структуры определяют асимптотически устойчивую систему, поэтому траектория приближается к оси времени и в некоторый момент времени достигает первой биссекторной плоскости, происходит переключение режима $2 \rightarrow 3$. Дальше процесс переключений повторяет описанную выше процедуру.

Пример 2. Рассмотрим двумерную систему с двумя структурами, каждой из которых соответствует многообразие ($n = m = 2$), $t \in [0, 1]$. Первая структура задается СДУ Ито

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t) dW(t),$$

а вторая структура СДУ Ито

$$dX(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(t)dt + \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} X(t) dW(t),$$

где $X(t) = [X_1(t) \ X_2(t)]^T$.

Для первой структуры траектории случайного процесса $X(t)$ принадлежат гиперболическому цилиндру $M^{(1)}(t, x) = M^{(1)}(t, x_1, x_2) = x_1 x_2 = C^{(1)}$, для второй структуры — круговому цилиндру $M^{(2)}(t, x) = M^{(2)}(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = C^{(2)}$.

Начальный вектор состояния $X_0 = [1 \ 1]^T$, а начальный номер структуры L_0 равен единице. Процесс смены структуры задается интенсивностями смены структуры: $\lambda_{12}(t, x) = e^{-t}$, $\lambda_{21}(t, x) = 2$. Эти интенсивности задают показательные законы распределения времени между переключениями: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$. Таким образом, траектория случайного процесса $X(t)$ в начальный момент времени начинается из точки X_0 , ее фрагмент до первого момента переключения принадлежит гиперболическому цилиндру $x_1 x_2 = C^{(1)}$. Через случайный промежуток времени, распределенный по показательному закону с параметром e^{-t} , происходит переключение режима $1 \rightarrow 2$. Далее до второго момента переключения фрагмент траектории принадлежит круговому цилиндру $x_1^2 + x_2^2 = C^{(2)}$. Через случайный промежуток времени, распределенный по показательному закону с параметром 2, происходит переключение режима $2 \rightarrow 1$. Далее процесс переключений повторяется. Константы $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ определяются вектором состояния в моменты смены структуры, в начальный момент времени $C^{(1)}$ определяется начальным вектором состояния X_0 : $C^{(1)} = 1$.

На рис. 1 и 2 приведены результаты численного моделирования траекторий для примеров 1 и 2 (по три выборочные траектории случайного процесса $X(t)$ в каждом примере и их проекции на фазовую плоскость; слева для примера 1, справа для примера 2).

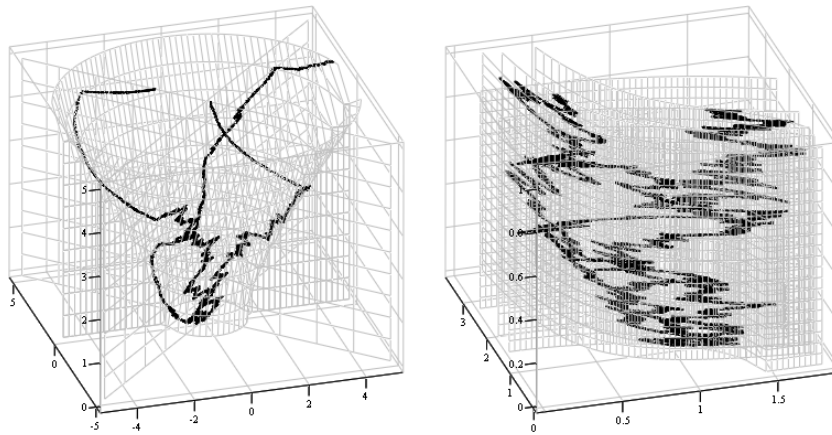


Рис. 1. Три выборочные траектории случайных процессов $X(t)$

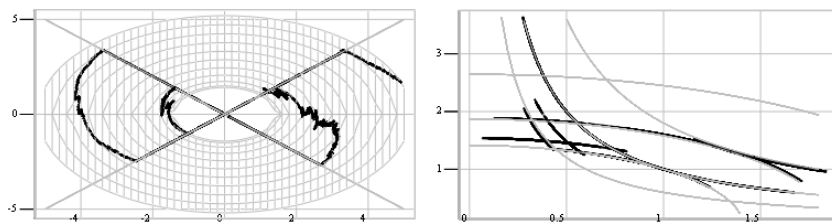


Рис. 2. Проекции траекторий случайных процессов $X(t)$ на фазовую плоскость

Для моделирования применялся обобщенный метод типа Розенброка [6] с шагом численного интегрирования $h = 10^{-4}$. Ось времени на рисунках расположена вертикально, на переднем плане — координата x_1 , левее ее — координата x_2 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
2. Дубко В.А., Карачанская Е.В. Специальные разделы теории стохастических дифференциальных уравнений. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2013. 91 с.
3. Колмогоров А.Н., Прохоров Ю.В., Ширяев А.Н. Вероятностно-статистические методы обнаружения спонтанно возникающих эффектов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 182. № 5. С. 4-23.
4. Ширяев А.Н. Стохастические задачи о разладке. М.: МЦНМО, 2016. 392 с.
5. Рыбаков К.А. Статистические методы анализа и фильтрации в непрерывных стохастических системах. М.: Изд-во МАИ, 2017. 176 с.
6. Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A. Statistical analysis of diffusion systems with invariants // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2018. Vol. 33. № 1. P. 1-13.
7. Аверина Т.А. Численный анализ систем управления динамическими объектами со случайными изменениями структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1023-1026.
8. Аверина Т.А. Построение и обоснование статистических алгоритмов моделирования решения систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 986-991.

Поступила в редакцию 22 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Аверина Татьяна Александровна, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник; Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация, доцент кафедры вычислительной математики, e-mail: ata@osmf.sccc.ru

Рыбаков Константин Александрович, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры математической кибернетики, e-mail: rkoffice@mail.ru

Для цитирования: Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Моделирование мультиструктурных систем на многообразиях в задачах статистического анализа и фильтрации // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 145–153. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153

MODELING OF MULTISTRUCTURAL SYSTEMS ON MANIFOLDS FOR STATISTICAL ANALYSIS AND FILTERING PROBLEMS

Т. А. Averina^{1,2)}, К. А. Rybakov³⁾

¹⁾ Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch RAS
6 Lavrent'eva Ave., Novosibirsk 630090, Russian Federation

²⁾ Novosibirsk State University

1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

E-mail: ata@osmf.sccc.ru

³⁾ Moscow Aviation Institute (National Research University)

4 Volokolamskoe Hwy., Moscow 125993, Russian Federation

E-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract. We propose an extension for the stochastic dynamical systems whose trajectories belong to a given manifold. This extension is the stochastic multistructural systems, namely the systems with a variable and random structure. The description for such systems are considered in application to analysis and filtering problems.

Keywords: invariant stochastic system; first integral; numerical method; random process; system with variable structure; system with random structure; stochastic differential equation

REFERENCES

1. Kazakov I.E., Artemev V.M., Bukhalev V.A. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* [Analysis of Systems with Random Structure]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1993, 272 p. (In Russian).
2. Dubko V.A., Karachanskaya E.V. *Spetsial'nye razdely teorii stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy* [Special Chapters of the Theory of Stochastic Differential Equations]. Khabarovsk, Pacific National University, 2013, 91 p. (In Russian).
3. Kolmogorov A.N., Prokhorov Y.V., Shiryaev A.N. Veroyatnostno-statisticheskie metody obnaruzheniya spontanno voznikayushchikh effektov [Probabilistic-statistical methods of detecting spontaneously occurring effects]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1988, vol. 182, no. 5, pp. 4-23. (In Russian).
4. Shiryaev A.N. *Stokhasticheskie zadachi o razladke* [Stochastic Disorder Problems]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2016, 392 p. (In Russian).
5. Rybakov K.A. *Statisticheskie metody analiza i fil'tratsii v nepreryvnykh stokhasticheskikh sistemakh* [Statistical Methods of Analysis and Filtering for Continuous Stochastic Systems]. Moscow, Moscow Aviation Institute, 2017, 176 p. (In Russian).
6. Averina T.A., Karachanskaya E.V., Rybakov K.A. Statistical analysis of diffusion systems with invariants. *Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 2018, vol. 33, no. 1, pp. 1-13.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-08-00530) and the base project 0315-2016-0002.

7. Averina T.A. Chislennyy analiz sistem upravleniya dinamicheskimi ob"ektami so sluchaynymi izmeneniyami struktury [Numerical analysis of multistructural control systems of dynamic objects]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 1023-1026. (In Russian).

8. Averina T.A. Postroenie i obosnovanie statisticheskikh algoritmov modelirovaniya resheniya sistem so sluchaynoy strukturoy, zadannoy stokhasticheskimi differentsial'nymi uravneniyami [Construction and justification of statistical algorithms for simulation of switching diffusion, given by stochastic differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 986-991. (In Russian).

Received 22 March 2018

Reviewed 25 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Averina Tatyana Aleksandrovna, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of Siberian Branch RAS, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Novosibirsk State University, Novosibirsk, the Russian Federation, Associate Professor of the Computational Mathematics Department, e-mail: ata@osmf.sccc.ru

Rybakov Konstantin Aleksandrovich, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department, e-mail: rkoffice@mail.ru

For citation: Averina T.A., Rybakov K.A. Modelirovanie mul'tistrukturnykh sistem na mnogoobraziyakh v zadachakh statisticheskogo analiza i fil'tratsii [Modeling of multistructural systems on manifolds for statistical analysis and filtering problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 145–153. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-145-153 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157
УДК 517.929.7

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

© М. Ж. Алвеш¹⁾, С. М. Лабовский²⁾

¹⁾ Университет им. Эдуардо Мондлане
СР 257, Мозамбик, г. Мапуто, Площадь 25 июня, 257
E-mail: mjalves.moz@gmail.com

²⁾ ФГБОУ ВО «Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова»
117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., 36
E-mail: labovski@gmail.com

Аннотация. Получены условия базисности системы собственных функций для функционально-дифференциального оператора четного порядка при специальных краевых условиях. Установлена эквивалентность ряда классических утверждений, в том числе утверждения типа Валле-Пуссена, а также положительности соответствующего квадратичного функционала.

Ключевые слова: квадратичный функционал; теорема Валле-Пуссена; функционально-дифференциальный оператор; спектр

1. Задача и обозначения

Рассматривается задача $\mathcal{L}u = f$ при краевых условиях

$$u^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad (1)$$

$$u^{(k)}(l) = 0, \quad k = m, \dots, 2m-1, \quad (2)$$

где функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ определяется равенством

$$\mathcal{L}u(x) := (-1)^m u^{(2m)} - \int_0^l u(s)r(x, ds), \quad x \in I := [0, l], \quad (3)$$

($m \geq 1$), $f \in L_2(0, l)$, $L_2(0, l)$ – множество функций, интегрируемых с квадратом по Лебегу на $[0, l]$.

Задача является частным случаем задачи, рассмотренной в [1]. Она может быть получена вариационным способом из квадратичного функционала $\langle u, u \rangle$, билинейный функционал определяется равенством

$$\langle u, v \rangle := \int_0^l u^{(m)}v^{(m)} dx - \int_{I \times I} u(s)v(x) d\xi. \quad (4)$$

Интеграл в (3) – интеграл Стильеса, вместо $r(x, ds)$ может быть написано $d_s r(x, s)$. Функция $r(x, \cdot)$ может рассматриваться как обычная неубывающая или же как мера. Отметим, что в частном случае (дискретная мера) получим уравнение с отклоняющимся аргументом, если

$$\int_0^l u(s)r(x, ds) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)u(h_i(x)).$$

Предполагаем, что $r(x, \cdot)$ при почти всех $x \in I$ не убывает на I , для любого $s \in I$ функция $r(\cdot, s)$ интегрируема по Лебегу, $\xi(x, y) = \int_0^x r(t, y) dt$ определяет симметричную меру на $I \times I$ (т. е. $\xi(e \times g) = \xi(g \times e)$).

Другие обозначения:

- W^k ($k \geq 0$) – множество функций u , имеющих абсолютно непрерывную на $[0, l]$ производную $u^{(k)}$, $u^{(0)} = u$. Форму $\langle u, v \rangle$ рассматриваем в множестве функций из W^{m-1} , для которых $\int_0^l (u^{(m)})^2 dx < \infty$.
- W_0 – множество функций из W^{m-1} , удовлетворяющих краевому условию (1), а также условию $[u, u] < \infty$, где

$$[u, v] := \int_0^l u^{(m)} v^{(m)} dx.$$

W_0 является гильбертовым пространством относительно $[u, v]$.

2. Результаты

Теорема 1. *Спектральная задача $\mathcal{L}u = \lambda u$ при краевых условиях (1), (2) имеет полную и ортогональную в W_0 и в $L_2(0, l)$ систему собственных функций $\mathcal{L}u_k = \lambda_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$. Для λ , отличного от собственных значений, краевая задача $\mathcal{L}u - \lambda u = f$ имеет единственное решение при любой $f \in L_2(0, l)$.*

Определим «урезанный» оператор $\mathcal{L}_\nu$ равенством

$$\mathcal{L}_\nu u := (-1)^m u^{(2m)} - \int_\nu^l u(s)r(x, ds), \quad x \in [\nu, l], \quad (5)$$

и краевое условие

$$u^{(k)}(\nu) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \quad (6)$$

Решение задачи $(-1)^m u^{(2m)} = z$, (1), (2), удовлетворяет при $z \geq 0$ условиям

$$u^{(k)} \geq 0 \quad (k = 0, \dots, m-1), \quad (-1)^{k-m} u^{(k)} \geq 0 \quad (k = m, \dots, 2m-1). \quad (7)$$

Следующее утверждение обобщает некоторые результаты из [2].

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. Квадратичный функционал $\langle u, u \rangle$ положителен в множестве W_0 .
2. При любом $\nu \in [0, l)$ «урезанная» краевая задача $\mathcal{L}_\nu u = 0$, (6), (2), имеет только нулевое решение.

3. Наименьшее собственное число λ_0 спектральной задачи $\mathcal{L}u = \lambda u$ при краевых условиях (1),(2) положительно.
4. Краевая задача $\mathcal{L}u = f$, (1),(2), однозначно разрешима, и ее решение положительно при любой неотрицательной ненулевой f .
5. Существует $v \in W^{2m-1}$, удовлетворяющая (7), дающая неотрицательную невязку $\mathcal{L}v = \psi \geq \not\equiv 0$, и удовлетворяющая условию $u^{(2m-1)}(l) \neq 0$.

Утверждение о существовании неотрицательной функции v , дающей неотрицательную невязку составляет содержание так называемой теоремы Валле-Пуссена [3] о дифференциальном неравенстве. В данном случае – это частный случай теоремы, полученной в [1]. Использование конкретных пробных функций v позволяет получать эффективные оценки–условия положительности функционала (положительности первого собственного числа). Например, полагая $v(x) = (x + \varepsilon)^{m-0.5}$ ($\varepsilon > 0$), получим следующее достаточное условие положительности первого собственного числа:

$$\int_0^l (s + \varepsilon)^{m-0.5} d_s r(x, s) \leq \frac{((2m-1)!!)^2}{2^{2m}} (x + \varepsilon)^{-m-0.5}.$$

В частном случае, когда $\int_0^l u(s) d_s r(x, s) = p(x)u(x)$, получим оценку

$$p(x) \leq \frac{(2m-1)!!^2}{2^{2m}(x + \varepsilon)^2},$$

которая при $m = 1$ совпадает с известной оценкой $p(x) \leq 1/(4(x + \varepsilon)^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лабовский С.М. О положительных решениях линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 4. С. 578-584.
2. Labovskiy S. On spectral problem and positive solutions of a linear singular functional-differential equation // Functional Differential Equations. 2013. Vol. 20. № 3-4. P. 179-200.
3. Ch. J. de la Vallée-Poussin. Sur l'équation différentielle lineare du second ordre // J. Math. Pures et Appl. 1929. Vol. 9. № 8. P. 125-144. JFM 55.0850.02.

Поступила в редакцию 22 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Алвеш Мануэль Жоаким, Университет им. Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, профессор кафедры математики, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

Лабовский Сергей Михайлович, Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: labovski@gmail.com

Для цитирования: Алвеш М.Ж., Лабовский С.М. О спектральной задаче и положительных решениях для функционально-дифференциального уравнения четного порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 154–157. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157

ON THE SPECTRAL PROBLEM AND POSITIVE SOLUTIONS FOR A FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE EVEN ORDER

M. J. Alves¹⁾, S. M. Labovskiy²⁾

¹⁾ Eduardo Mondlane University
257 Praca 25 de Junho, Maputo CP 257, Mocambique

E-mail: mjalves.moz@gmail.com

²⁾ Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny Lane, 36, Moscow 117997, Russian Federation
E-mail: labovski@gmail.com

Abstract. Basic properties of the system of eigenfunctions for even order functional differential equation under special boundary conditions are obtained. Equivalence of a serie of classical affirmations is established. Among them are the Vallee-Poussin affirmation and positivity of the corresponding quadratic functional.

Keywords: quadratic functional; Vallee-Poussin theorem; functional differential operator; spectrum

REFERENCES

1. Labovskiy S.M. O polozhitel'nykh resheniyakh lineynykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On positive solutions of rectilinear functional differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 578-584. (In Russian).
2. Labovskiy S. On spectral problem and positive solutions of a linear singular functional-differential equation. *Functional Differential Equations*, 2013, vol. 20, no. 3-4, pp. 179-200.
3. Ch. J. de la Vallée-Poussin. Sur l'équation différentielle lineaire du second ordre. *J. Math. Pures et Appl.*, 1929, vol. 9, no. 8, pp. 125-144. JFM 55.0850.02. (In French).

Received 22 March 2018

Reviewed 25 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Alves Manuel Joaquim, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, Ph. D., Full Professor of Mathematics Department, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

Labovskiy Sergey Mikhailovich, Plekhanov Russian University of Economics, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department, e-mail: labovski@gmail.com

For citation: Alves M. J., Labovskiy S.M. O spektralnoy zadache i polozhitel'nykh resheniyakh dlya funktsionalno-differentsial'nogo uravneniya chetnogo poryadka [On the spectral problem and positive solutions for a functional-differential equation of the even order]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 154–157. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-154-157 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167

УДК 517.977.5

ВЫРОЖДЕННАЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© И. Ю. Андреева, А. С. Шляхов

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru, aleksandr.shlyakhov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с постоянным запаздыванием в системе и в функционале. В ранее полученных результатах авторов удалось сократить число уравнений, описывающих параметры оптимального управления. Благодаря этому впервые для таких задач просчитаны модельные примеры.

Ключевые слова: вырожденная линейно-квадратичная задача; оптимальное управление; импульсное управление; последствие

Введение

Исследование вырожденных линейно-квадратичных задач оптимизации с запаздыванием является актуальным, так как для практических задач факт вырожденности функционала встречается достаточно часто. Данная задача рассматривалась в работах [1], [2]. Невырожденные линейно-квадратичные задачи для систем с последствием рассматривались в [3], [4].

1. Основные понятия

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[v(\cdot)] = x^T(T)Sx(T) + \int_{t_0}^T \left[x^T(t)\Phi_0(t)x(t) + x^T(t) \int_{-\tau}^0 \Phi_1(t, \theta)x(t + \theta)d\theta + \right. \\ \left. + \int_{-\tau}^0 x^T(t + \theta)\Phi_1^T(t, \theta)d\theta x(t) + \int_{-\tau}^0 x^T(t + s)\Phi_2(t, s)x(t + s)ds + \right.$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+\theta) \Phi_3(t, \theta, \rho) x(t+\rho) d\theta d\rho + x^T(t-\tau) \Phi_4(t) x(t-\tau) \Big] dt, \quad (1)$$

где $\Phi_0(\cdot)$, $\Phi_1(\cdot, \cdot)$, $\Phi_2(\cdot, \cdot)$, $\Phi_3(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\Phi_4(\cdot)$ — симметричные (за исключением $\Phi_3(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $\Phi_1(\cdot, \cdot)$) непрерывные по совокупности переменных матрицы-функции размерности $n \times n$, S — неотрицательно определенная симметричная матрица с постоянными элементами вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_\tau(t)x(t-\tau) + \int_{-\tau}^0 G(t, \theta)x(t+\theta)d\theta + B(t)\dot{v}(t) \quad (2)$$

с начальным условием $x(t) = \varphi(t)$, при $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, которую назовем задачей 1. Здесь $x(t)$, $\varphi(t)$ — вектор-функции размерности n , $v(t)$ — вектор-функция размерности m , $A(t)$, $A_\tau(t)$ — непрерывные матрицы-функции размерности $n \times n$, $G(t, \theta)$ — непрерывная по совокупности переменных $n \times n$ -матрица-функция, $B(t)$ — непрерывно дифференцируемая матрица-функция размерности $n \times m$.

В работах [1], [2] данная задача была решена, и результаты этого решения отражены в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть для $t \in [t_0, T]$ выполнены условия

$$1) \det \left(B^T(t) \Phi_0(t) B(t) + P_6(t, 0) \right) \neq 0,$$

2) матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} \Phi_0(t) & \Phi_1(t, \theta) \\ \Phi_1^T(t, \theta) & \Phi_2(t, \theta) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена при $\theta \in [-\tau, 0]$,

3) матрица $\Phi_3(t, \theta, \rho)$ имеет структуру

$$\Phi_3(t, \theta, \rho) = \tilde{\Phi}_3(t, \theta) \tilde{\Phi}_3(t, \rho),$$

4) матрица $\Phi_4(t)$ неотрицательно определена,

а матрицы $P(t)$, $P_4(t, s)$, $P_6(t, r)$, $P_1(t, \theta_1)$, $P_5(t, p)$, $Q(t, \theta)$, $P_2(t, \theta, \theta_1)$, $R(t, \theta, \rho) = R^T(t, \rho, \theta)$, $P_3(t, \theta_1, \theta_2) = P_3^T(t, \theta_2, \theta_1)$ являются решением системы уравнений

$$\frac{dP(t)}{dt} + Q(t, 0) + Q^T(t, 0) + P^T(t)A(t) + A^T(t)P(t) + P_4(t, 0) + \Phi_0(t) =$$

$$= F_0^T(t)H^{-1}(t)F_0(t),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Q(t, \theta) + R(t, 0, \theta) + P(t)G(t, \theta) + A^T(t)Q(t, \theta) + \Phi_1(t, \theta) =$$

$$= F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t, \theta),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) R(t, \theta, \rho) + G^T(t, \theta)Q(t, \rho) + Q^T(t, \theta)G(t, \rho) + \Phi_3(t, \theta, \rho) =$$

$$= F_1^T(t, \theta)H^{-1}(t)F_1(t, \rho),$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) P_1(t, \theta_1) + P_2(t, 0, \theta_1) + A^T(t)P_1(t, \theta_1) + P(t)G(t, \theta_1)B(t + \theta_1) + \\
& \quad + \Phi_1(t, \theta_1)B(t + \theta_1) = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_2(t, \theta_1), \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) P_2(t, \theta, \theta_1) + Q^T(t, \theta)G(t, \theta_1)B(t + \theta_1) + G^T(t, \theta)P_1(t, \theta_1) + \\
& \quad + \Phi_3(t, \theta, \theta_1)B(t + \theta_1) = F_1^T(t, \theta)H^{-1}(t)F_2(t, \theta_1), \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) P_3(t, \theta_1, \theta_2) + B^T(t + \theta_1)G^T(t, \theta_1)P_1(t, \theta_2) + \\
& \quad + P_1^T(t, \theta_1)G(t, \theta_2)B(t + \theta_2) + B^T(t + \theta_1)\Phi_3(t, \theta_1, \theta_2)B(t + \theta_2) = \\
& \quad = F_2^T(t, \theta_1)H^{-1}(t)F_2(t, \theta_2), \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \right) P_4(t, s) + \Phi_2(t, s) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial p} \right) P_5(t, p) + \Phi_2(t, p)B(t + p) = 0, \\
& \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \right) P_6(t, r) + B^T(t + r)\Phi_2(t, r)B(t + r) = 0
\end{aligned} \tag{3}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned}
& P(T) = N, \quad Q(T, \theta) = R(T, \theta, \rho) = P_1(T, \theta_1) = \\
& = P_2(T, \theta, \theta_1) = P_3(T, \theta_1, \theta_2) = P_4(T, s) = P_5(T, p) = P_6(T, r) = 0, \\
& P(t)A_\tau(t)B(t - \tau) = P_1(t, -\tau), \quad B^T(t - \tau)A_\tau^T(t)Q(t, \theta) = P_2^T(t, \theta, -\tau), \\
& A_\tau^T(t)Q(t, \theta) + Q^T(t, \theta)A_\tau(t) = R^T(t, \theta, -\tau) + R(t, -\tau, \theta), \\
& A_\tau^T(t)P(t) = Q^T(t, -\tau), \quad A_\tau^T(t)P_1(t, \theta_1) = P_2(t, -\tau, \theta_1), \\
& B^T(t - \tau)A_\tau^T(t)P_1(t, \theta_1) + P_1^T(t, \theta_1)A_\tau(t)B(t - \tau) = P_3^T(t, \theta_1, -\tau) + P_3(t, -\tau, \theta_1), \\
& \Phi_4(t) = P_4(t, -\tau), \quad \Phi_4(t)B(t - \tau) = P_5(t, -\tau), \quad B^T(t - \tau)\Phi_4(t)B(t - \tau) = P_6(t, -\tau), \\
& \text{для } t < T, \quad -\tau \leq \theta, \theta_1, \theta_2, \rho, p, r, s \leq 0, \quad \text{где}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F_0(t) = P_1^T(t, 0) + B_1^T(t)P(t) + P_5^T(t, 0) + B^T(t)\Phi_0(t), \\
& F_1(t, \theta) = B_1^T(t)Q(t, \theta) + P_2^T(t, \theta, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta), \\
& F_2(t, \theta_1) = B_1^T(t)P_1(t, \theta_1) + P_3^T(t, \theta_1, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta_1)B(t + \theta_1), \\
& H(t) = B^T(t)\Phi_0(t)B(t) + P_6(t, 0), \quad B_1(t) = A(t)B(t) - \dot{B}(t).
\end{aligned}$$

Тогда на $[t_0, T]$ оптимальное управление примет вид

$$\begin{aligned}
& \dot{v}(t) = \Delta v(t_0, \varphi(\cdot)) \delta(t - t_0) + Z_1(t)x(t) + Z_2(t)x(t - \tau) + \\
& \quad + \int_{-\tau}^0 Z_3(t, \theta)x(t + \theta) d\theta + \Delta v(T, x(T - 0)) \delta(t - T),
\end{aligned}$$

где величины скачков функции $v(t)$, определяются формулами

$$\Delta v(t_0, \varphi(\cdot)) = W_0(t_0)\varphi(t_0) + \int_{-\tau}^0 W_1(t_0, \theta)\varphi(t_0 + \theta) d\theta,$$

$$\begin{aligned} \Delta v(T, x(T-0)) = & -\left(B^T(T)SB(T)\right)^- B^T(T)Sx(T-0) + \\ & + \left(E - \left(B^T(T)SB(T)\right)^- B^T(T)SB(T)\right)p \end{aligned}$$

и

$$W_0(t) = -H^{-1}(t)\left[P_1(t, 0) + B_1^T(t)P(t) + P_5(t, 0) + B^T(t)\Phi_0(t)\right],$$

$$W_1(t, \theta) = -H^{-1}(t)\left[B_1^T(t)Q(t, \theta) + P_2^T(t, \theta, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta)\right],$$

$$W_2(t, \theta_1) = -H^{-1}(t)\left[B_1^T(t)P_1(t, \theta_1) + P_3^T(t, \theta_1, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta_1)B(t + \theta_1)\right].$$

$$Z_1(t) = -\left[\frac{dW_0(t)}{dt} + W_0(t)A(t) + W_1(t, 0)\right], \quad Z_2(t) = -\left[W_0(t)A_\tau(t) - W_1(t, -\tau)\right],$$

$$Z_3(t, \theta) = -\left[G(t, \theta) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right)W_1(t, \theta)\right]$$

для $t \in (t_0, T)$.

2. Упрощение системы для нахождения коэффициентов оптимального управления

Основным результатом по упрощению системы уравнений (3) является ее приведение к системе с меньшим количеством уравнений. Рассмотрим второе и четвертое уравнение этой системы. Умножим второе уравнение на $B(t + \theta)$ справа, а затем из полученного уравнения вычтем четвертое уравнение, для которого в качестве второго параметра возьмем θ . В результате выполнения указанных действий получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right)Q(t, \theta)\right) B(t + \theta) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta_1}\right)P_1(t, \theta_1) + R(t, 0, \theta) B(t + \theta) - \\ & - P_2(t, 0, \theta_1) + A^T(t)Q(t, \theta) B(t + \theta) - A^T(t)P_1(t, \theta) = \\ & = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t, \theta) B(t + \theta) - F_0^T(t)H^{-1}(t)F_2(t, \theta). \end{aligned}$$

Подставим в это уравнение:

$$F_1(t, \theta) = B_1^T(t)Q(t, \theta) + P_2^T(t, \theta, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta),$$

$$F_2(t, \theta_1) = B_1^T(t)P_1(t, \theta_1) + P_3^T(t, \theta_1, 0) + B^T(t)\Phi_1(t, \theta_1)B(t + \theta_1).$$

В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Q(t, \theta) \right) B(t + \theta) - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) P_1(t, \theta_1) + R(t, 0, \theta) B(t + \theta) - \\ & - P_2(t, 0, \theta_1) + A^T(t) Q(t, \theta) B(t + \theta) - A^T(t) P_1(t, \theta) = \\ & = F_0^T(t) H^{-1}(t) [B_1^T(t) Q(t, \theta) B(t + \theta) - B_1^T(t) P_1(t, \theta) + P_2^T(t, \theta, 0) B(t + \theta) - P_3^T(t, \theta, 0)]. \end{aligned}$$

Очевидно, что данное уравнение станет тождеством, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} B(t + s) &= \text{const}, \quad P_1(t, \theta) = Q(t, \theta) B(t + \theta), \quad P_2(t, 0, \theta) = R(t, 0, \theta) B(t + \theta) \\ P_3^T(t, \theta, 0) &= P_2^T(t, \theta, 0) B(t + \theta). \end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассуждения с остальными уравнениями системы и граничными условиями, можно прийти к выводу, что при выполнении равенств:

$$\begin{aligned} P_1(t, \theta) &= Q(t, \theta) B(t + \theta), \quad P_2(t, 0, \theta) = R(t, 0, \theta) B(t + \theta), \quad P_3^T(t, \theta, 0) = P_2^T(t, \theta, 0) B(t + \theta), \\ P_5(t, s) &= P_4(t, s) B(t + s), \quad P_6(t, s) = B^T(t + s) P_4(t, s) B(t + s) \end{aligned}$$

система примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{dP(t)}{dt} + Q(t, 0) + Q^T(t, 0) + P^T(t) A(t) + A^T(t) P(t) + P_4(t, 0) + \Phi_0(t) = \\ & = F_0^T(t) H^{-1}(t) F_0(t), \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Q(t, \theta) + R(t, 0, \theta) + A^T(t) Q(t, \theta) + P(t) G(t, \theta) + \Phi_1(t, \theta) = \\ & = F_0^T(t) H^{-1}(t) F_1(t, \theta), \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho} \right) R(t, \theta, \rho) + G^T(t, \theta) Q(t, \rho) + Q^T(t, \theta) G(t, \rho) + \Phi_3(t, \theta, \rho) = \\ & = F_1^T(t, \theta) H^{-1}(t) F_1(t, \rho), \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} \right) P_4(t, s) + \Phi_2(t, s) = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} P(T) &= N, \quad Q(T, \theta) = R(T, \theta, \rho) = P_4(T, s) = 0, \quad \Phi_4(t) = P_4(t, -\tau), \\ 2A_\tau^T(t) Q(t, \theta) &= R^T(t, \theta, -\tau) + R(t, -\tau, \theta), \quad A_\tau^T(t) P(t) = Q^T(t, -\tau), \end{aligned}$$

при $t < T$, $-\tau \leq \theta, \theta_1, \theta_2, \rho, p, r, s \leq 0$, где

$$\begin{aligned} F_0(t) &= Q(t, \theta) + P(t) + P_4(t, 0) + \Phi_0(t), \quad F_1(t, \theta) = Q(t, \theta) + R(t, \theta, 0) + \Phi_1(t, \theta), \\ H(t) &= \Phi_0(t) + P_4(t, 0). \end{aligned}$$

Пример 1. Рассмотрим задачу минимизации функционала (1) вдоль траекторий системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-5) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{v}(t)$$

с начальными условиями: $\varphi(t) = 1$, $t \in [-5; 0]$. Из постановки задачи имеем, что

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t_0 = 0, \quad \tau = 5, \quad T = 1, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для данной задачи будут иметь место следующие равенства:

$$P_4(t, s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_5(t, s), \quad (1 \ 1)P_4(t, s) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_6(t, s), \quad Q(t, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_1(t, \theta),$$

$$R(t, \rho, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_2(t, \rho, \theta), \quad P_2^T(t, \rho, \theta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = P_3^T(t, \rho, \theta),$$

с учетом которых система для нахождения неизвестных функций примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} + Q(t, 0) + Q^T(t, 0) + P^T(t) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P(t) + P_4(t, 0) + \Phi_0(t) = \\ = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_0(t), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta}\right)Q(t, \theta) + R(t, 0, \theta) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Q(t, \theta) + \Phi_1(t, \theta) = F_0^T(t)H^{-1}(t)F_1(t, \theta),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \rho}\right)R(t, \theta, \rho) + \Phi_3(t, \theta, \rho) = F_1^T(t, \theta)H^{-1}(t)F_1(t, \rho),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right)P_4(t, s) + \Phi_2(t, s) = 0,$$

где

$$F_0(t) = (1 \ 1) Q^T(t, 0) + (2 \ 2) P(t) + (1 \ 1) P_4^T(t, 0) + (1 \ 1) \Phi_0(t),$$

$$F_1(t, \theta) = (2 \ 2) Q(t, \theta) + (1 \ 1) R^T(t, \theta, 0) + (1 \ 1) \Phi_1(t, \theta),$$

$$H(t) = (1 \ 1) \Phi_0(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 \ 1) P_4(t, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для этой системы будут следующими:

$$P(T) = N = \begin{pmatrix} a_1(1 - \frac{a_1}{a_1+a_2})^2 + \frac{a_1^2 a_2}{(a_1+a_2)^2} & \frac{2a_1 a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \\ \frac{2a_1 a_2}{a_1+a_2} - \frac{a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} & a_2(1 - \frac{a_2}{a_1+a_2})^2 + \frac{a_1 a_2^2}{(a_1+a_2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

$$Q(T, \theta) = R(T, \theta, \rho) = P_4(T, s) = 0, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P(t) = Q^T(t, -5),$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q(t, \theta) + Q^T(t, \theta) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^T(t, \theta, -5) + R(t, -5, \theta), \quad \Phi_4(t) = P_4(t, -5)$$

для $t < 1$, $-5 \leq \theta, \rho, s \leq 0$. В результате решения данной системы уравнений с указанными граничными условиями были получены неизвестные функции для нахождения оптимального управления. Тогда вид оптимального управления будет следующим:

$$\begin{aligned} \dot{v}_r(t) = & \dot{W}_0^1(t) x(t) + 2x_1(t) W_0^1(t) + x_2(t) W_0^1(t) - x_1(t - \tau) W_0^1(t) + \\ & + x_2(t - \tau) W_0^1(t) - \dot{W}_0^1(t) v(t), \end{aligned}$$

величины скачков функции $v(t)$, соответственно, будут определяться формулами:

$$\Delta v(t_0) = v(t_0) - v(0) = (W_0^1(t) \ 0) \left(\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \right) = W_0^1(0) x_1(0-),$$

$$\Delta v(T, x(T-0)) = -(B^T(T)SB(T))^{-1}B^T(T)Sx(T-0),$$

где

$$F_0(t) = \begin{pmatrix} e^{4(T-t)} + 1 - \frac{(t-T)^2}{2} - \Phi_0^1(t) - \frac{3e^{T-t}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \Phi_0^1(t) + \Phi_0^2(t) + \Phi_0^3(t) + \Phi_0^4(t) - (t-T)^2, \quad W_0(t) = -H^{-1}(t)F_0(t) = (W_0^1(t) \ 0),$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^1(t) = & \frac{-16e^{8(T-t)} + 10e^{5(T-t)} - 40e^{4(T-t)} + 5e^{2(T-t)} - 18e^{(T-t)}}{-8 + 6e^{T-t} + 16e^{4(T-t)}} + \\ & + \frac{(8e^{4(T-t)} + 4e^{(T-t)} - 4)(T-t)^2 + 8}{-8 + 6e^{T-t} + 16e^{4(T-t)}}, \end{aligned}$$

$$\Phi_0^2(t) = \Phi_0^3(t) = -e^{4(T-t)} - \frac{e^{T-t}}{2},$$

$$\Phi_0^4(t) = \frac{-8e^{5(T-t)} - 32e^{4(T-t)} - 4e^{2(T-t)} - e^{T-t}(6 - (t-T)^2)}{-64e^{8(T-t)} - 2e^{5(T-t)} - 4e^{2(T-t)} + e^{T-t}(t-T)^2},$$

$$W_0^1(t) = \frac{-8e^{5(T-t)} - 32e^{4(T-t)} - 4e^{2(T-t)} + e^{(T-t)}(T-t)^2}{64e^{8(T-t)} + 32e^{5(T-t)} + 4e^{2(T-t)} - e^{T-t}(T-t)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева И.Ю., Сесекин А.Н. Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации с запаздыванием по времени // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 43-54.
2. Сесекин А.Н., Фетисова Ю.В. Вырожденная линейно-квадратичная задача оптимизации для систем с последействием // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: тр. 9 Междунар. Четаевской конф., посвящ. 105-летию Н.Г. Четаева. Иркутск, 2007. Т. 3. С. 196-205.
3. Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л. Оптимальные оценки состояния системы и некоторые задачи управления уравнениями с последействием // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 446-456.

4. Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. Москва: Наука, 1978. 416 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Андреева Ирина Юрьевна, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru

Шляхов Александр Сергеевич, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики, e-mail: aleksandr.shlyakhov@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167

DEGENERATED LINEARLY-QUADRATIC PROBLEM WITH DELAY

I. Yu. Andreeva, A. S. Shlyakhov

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru, aleksandr.shlyakhov@gmail.com

Abstract. We consider a degenerate linear-quadratic problem optimization with a constant delay in the system and in the functional. In the previously obtained results of the authors, it was possible to reduce the number of equations describing the parameters of optimal control. Thanks to this, for the first time model examples are calculated for such problems.

Keywords: degenerate linearly-quadratic problem; optimal control; impulse control; aftereffect

REFERENCES

1. Andreeva I.Y., Seseikin A.N. Vyrozhdannaya lineynno-kvadratichnaya zadacha optimizatsii s zapazdyvaniem po vremeni [Degenerate linear-quadratic optimization problem with time delay]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1997, no. 7, pp. 43-54. (In Russian).
2. Seseikin A.N., Fetisova Y.V. Vyrozhdannaya lineynno-kvadratichnaya zadacha optimizatsii dlya sistem s posledeystviem [Degenerate linear-quadratic optimization problem for systems with aftereffect]. *Trudy 9 Mezhdunarodnoy Chetaevskoy konferentsii «Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravlenie dvizheniem», posvyashchennoy 105-letiyu N.G. Chetaeva* [Proceedings of the International Chetaev Conference “Analytical Mechanics, Stability and Motion Control” dedicated to the 105th anniversary of N.G. Chetaev]. Irkutsk, 2007, vol. 3, pp. 196-205. (In Russian).
3. Kolmanovskiy V.B., Mayzenberg T.L. Optimal'nye otsenki sostoyaniya sistemy i nekotorye zadachi upravleniya uravneniyami s posledeystviem [Optimum estimates of the state of the system and some problems of control of equations with aftereffect]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1977, vol. 41, no. 3, pp. 446-456. (In Russian).
4. Yanushevskiy R.T. *Upravlenie ob"ektami s zapazdyvaniem* [Management of Objects with Delay]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 416 p. (In Russian).

Received 19 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Andreeva Irina Yurevna, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics Department, e-mail: ira.iyandreeva.andreeva@mail.ru

Shlyakhov Alexander Sergeevich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Post-Graduate Student of the Department of Applied Mathematics, e-mail: aleksandr.shlyakhov@gmail.com

For citation: Andreeva I.Yu., Shlyakhov A.S. Vyrozhdannaya lineyno-kvadratichnaya zadacha s zapazdyvaniem [Degenerated linearly-quadratic problem with delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 158–167. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-158-167 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

УДК 519.642.5

ТЕСТОВОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ n ВОЗРАСТНЫХ ГРУПП

© А. С. Апарцин, И. В. Сидлер

ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева» СО РАН
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена обобщению результатов авторов по исследованию тестовых интегральных уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, состоящих из двух и трех возрастных групп элементов, на случай произвольного числа групп. Наряду с теоретическими результатами приводятся численные расчеты для модельного примера, иллюстрирующие справедливость теоретических оценок.

Ключевые слова: развивающаяся система; n возрастных групп; тестовое уравнение Вольтерра I рода; численное решение; неустойчивость

Введение

При построении интегральной модели развивающейся системы, элементы которой принадлежат n возрастным группам, важную роль играет интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

описывающее баланс между требуемым уровнем развития (правой частью (0.1)) и возможностью его достижения совокупностью элементов системы. В (0.1)

$$a_0(t) \equiv t > a_1(t) > \dots > a_n(t) \geq 0 \quad \forall t > 0, \quad (0.2)$$

$K_i(t, s)$ — непрерывный по t, s и непрерывно дифференцируемый по t в области $\Delta_i = \{t \in [0, T], s \in [a_i(t), a_{i-1}(t)]\}$ коэффициент эффективности функционирования элементов $x(s)$ i -ой возрастной группы. Специфику (0.1) во многом определяют значения $a_i(0)$. Случай $a_i(0) < 0$, $i = 1, \dots, n$, предполагает задание предыстории

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № АААА-А17-117030310446-6) и при частичной поддержке РФФИ (проект 15-01-01425).

$x(t) = x_0(t)$, $t \in [a_n(0), 0)$. В частности, при $a_i(t) = t - T_i$, $0 < T_i < \dots < T_n$, $x(t) = x_0(t)$, $t \in [-T_n, 0)$. В [1], [2] этот случай с $n = 3$ положен в основу построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы России, а в качестве $y(t)$ принята суммарная располагаемая мощность электростанций.

Принципиально иная ситуация возникает при условии $a_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, которое означает, что моменту $t = 0$ соответствует время возникновения системы, так что предыстория отсутствует, все возрастные группы пусты и $y(0) = 0$. Ниже рассматривается именно этот случай. Дополнительно к (0.2) предполагаем, что $a_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$, $a'_i(t) \geq 0$, $a'_n(0) < \dots < a'_1(0) < 1$.

В настоящее время теория уравнений (0.1) с указанными свойствами пределов интегрирования еще только создается. В частности, нуждается в тщательном исследовании эффект потери устойчивости к погрешностям начальных данных непрерывного решения (0.1) с ростом длины временного отрезка моделирования.

1. Тестовые уравнения для $n = 2, 3$

Пониманию специфики уравнений типа (0.1) способствует рассмотрение простейших тестовых уравнений. Всюду далее полагаем, что δ — числовой параметр,

$$a_i(t) = \alpha_i t, \quad 1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_n \geq 0.$$

В [3] для случая $n = 2$ введено тестовое уравнение

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_0^{\alpha_1 t} (1 - \delta s) x(s) ds = t - \frac{\alpha_1^2 \delta}{2} t^2, \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

точное решение которого, а также эквивалентного функционального уравнения

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta t x(\alpha_1 t) + 1 - \alpha_1^2 \delta t, \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$\bar{x}(t) = 1$ для любого конечного T . Оператор в правой части (1.2), рассматриваемый действующим из $C_{[0, T]}$ в $C_{[0, T]}$, является сжимающим лишь при $T < T_2^*$ (индекс 2 означает, что рассматривается случай $n = 2$),

$$T_2^* = \frac{1}{\alpha_1^2 |\delta|}.$$

Однако для изучения процессов старения элементов развивающейся системы и замены их новыми необходимо рассматривать отрезок моделирования достаточно большим, так что $T > T_2^*$. Предположим, для численного решения (1.1) применен какой-либо сходящийся на $[0, T_2^*)$ метод квадратур, погрешность которого в точке $\alpha_1 T_2^* - \varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*) \neq 0$ (h — шаг сетки). В частности, эта погрешность заведомо не меньше погрешности ε компьютерных вычислений. Очевидно также, что погрешность сеточного решения в области $t > T_2^*$ в силу влияния погрешностей аппроксимации интегралов квадратурой и погрешностей округления не меньше, чем погрешность $\tilde{\varepsilon}(t) = 1 - \tilde{x}(t)$ точного решения $\bar{x}(t)$ функционального уравнения

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta t x(\alpha_1 t) + 1 - \alpha_1^2 \delta t, \quad t \geq T_2^*,$$

если стартовое значение $\tilde{x}(\alpha_1 T_2^*)$ совпадает со значением сеточного решения $x^h(\alpha_1 T_2^*)$.

Введем последовательность точек

$$T_i = \frac{T_2^*}{\alpha_1^i}, \quad i = -1, 0, 1, \dots$$

Так как

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t), \quad t \geq T_2^*, \quad \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_2^*) = \varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*), \quad (1.3)$$

то, переходя в (1.3) к оценке по модулю и полагая $t = T_i$, получим линейное однородное разностное уравнение первого порядка с переменным коэффициентом

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{-1})| = |\varepsilon^h(\alpha_1 T_2^*)|. \quad (1.4)$$

В силу монотонного возрастания коэффициента с ростом i решение (1.4) превысит любой наперед заданный порог, сколь бы мало ни было отличное от нуля значение $|\tilde{\varepsilon}(T_{-1})|$. С точки зрения математического моделирования развития динамической системы отсутствие устойчивости решения задачи Коши (1.4) означает, что если эффективность функционирования элементов старшей возрастной группы превышает (по модулю) эффективность молодых элементов, то такая система не имеет перспектив развития. При этом в случае $\delta > 0$ эффект потери устойчивости возникает из-за малочисленности группы молодых элементов, в случае $\delta < 0$ — из-за ее невостремленности.

Из того, что решение (1.4) является оценкой снизу для погрешности любого численного метода решения тестового уравнения (1.1) при $t > T_2^*$, следует, что найдется такой узел сетки, в котором погрешность сеточного решения превысит любой априори заданный порог.

Результаты [3] развиты в [4] в различных направлениях. Показано, что полученные результаты сохраняются при любой правой части (1.1), принадлежащей области значений интегрального оператора в левой части (1.1). Рассмотрен случай сверхлинейного роста модуля второго ядра в (1.1). Приведены таблицы с численными результатами, полученными с помощью разработанных в [5], [6] модифицированных методов левых и средних прямоугольников соответственно и показавшими полное соответствие численных расчетов теоретическим оценкам.

Случай $n = 3$ детально исследовался в [7]. Тестовое уравнение, являющееся естественным обобщением (1.1), имеет вид

$$\int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s) x(s) ds + \int_0^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s) x(s) ds = y(t); \quad (1.5)$$

$$1 > \alpha_1 > \alpha_2 > 0; \quad \delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \quad t \in [0, T].$$

Для определенности далее будем считать, что $\delta_2 > \delta_1$. Полагая $y(t) \in \mathring{C}_{[0, T]}^{(1)}$, что означает $y'(t) \in C_{[0, T]}$, $y(0) = 0$, выпишем для (1.5) эквивалентное функциональное уравнение

$$x(t) = Wx(t) + y'(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t x(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t x(\alpha_2 t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.6)$$

Оператор W в (1.6), рассматриваемый действующим из $C_{[0,T]}$ в $C_{[0,T]}$, является сжимающим лишь при

$$T < T_3^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1)}. \quad (1.7)$$

Пусть $T > T_3^*$. Запишем однородное уравнение относительно ошибки $\tilde{\varepsilon}(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$:

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t) + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) t \tilde{\varepsilon}(\alpha_2 t), \quad t \geq T_3^*, \quad (1.8)$$

с начальными условиями

$$\tilde{\varepsilon}(\alpha_2 T_3^*) = \varepsilon^h(\alpha_2 T_3^*), \quad \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_3^*) = \varepsilon^h(\alpha_1 T_3^*),$$

где по-прежнему ε^h — ненулевая погрешность любого сходящегося на $[0, T_3^*)$ численного метода, и если предположить дополнительно, что $\alpha_2 = \alpha_1^2$ и знаки $\tilde{\varepsilon}(\alpha_1 T_3^*)$ и $\tilde{\varepsilon}(\alpha_2 T_3^*)$ совпадают, то, полагая в (1.8) $t = T_i = T_3^* / \alpha_1^i$, $i = -2, -1, 0, 1, \dots$, и переходя к оценке по модулю, получим линейное однородное разностное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta_1 T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})| + \alpha_1^4 (\delta_2 - \delta_1) T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-2})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

с начальными данными

$$|\tilde{\varepsilon}(T_{-2})| = |\varepsilon^h(\alpha_1^2 T_3^*)|, \quad |\tilde{\varepsilon}(T_{-1})| = |\varepsilon^h(\alpha_1 T_3^*)|.$$

И вновь, как и в случае с (1.4), из монотонного возрастания коэффициентов (1.9) с ростом i и того, что решение (1.9) дает оценку снизу для погрешности любого численного метода решения (1.5) в области $t > T_3^*$, вытекает, что, сколь бы малы ни были начальные данные в (1.9), найдется такой узел сетки, в котором погрешность численного решения превысит сколь угодно большой наперед заданный порог. В [7] приведены результаты расчетов модельных примеров, полностью согласующиеся с теоретическими оценками. Цель настоящей статьи — обобщить развитую в [3], [4], [7] технику на случай произвольного натурального числа возрастных групп. Этой проблематике и посвящен следующий раздел.

2. Тестовое уравнение для произвольного числа возрастных групп

Обратимся вначале к исходному уравнению (0.1), представив его в операторной форме

$$V_1 x + \Delta V_1 x = y,$$

где

$$V_1 x = \int_{a_1(t)}^t K_1(t, s) x(s) ds,$$

$$\Delta V_1 x = \sum_{i=2}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds.$$

Напомним классический результат функционального анализа (см., например, [8, стр. 212]). Достаточным условием ограниченности обратного к линейному ограниченному оператору $V_1 + \Delta V_1$, действующему на паре банаховых пространств (B_1, B_2) , при условии ограниченности V_1^{-1} является неравенство

$$\|\Delta V_1\|_{B_1 \rightarrow B_2} < \frac{1}{\|V_1^{-1}\|_{B_2 \rightarrow B_1}}. \quad (2.1)$$

Положим $B_1 = C_{[0,T]}$, $B_2 = \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}$ и предположим дополнительно относительно ядра $K_1(t, s)$, что

$$K_1(t, t) \neq 0, \quad t \in [0, T].$$

Тогда оператор V_1^{-1} , рассматриваемый на паре $(\overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)}, C_{[0,T]})$, ограничен (см. [9], стр. 129–131), а следовательно, справедливо неравенство (2.1), гарантирующее существование, единственность и устойчивость решения (0.1) в пространстве $C_{[0,T]}$. Этот результат, полученный в [10], в важном частном случае, когда коэффициенты эффективности постоянны: $K_i(t, s) = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, $\beta_1 \neq 0$, переходит в неравенство

$$\sum_{i=2}^n |\beta_{i-1} - \beta_i| \alpha_{i-1} < 1, \quad (2.2)$$

гарантирующее корректность уравнения

$$\beta_1 \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \sum_{i=2}^n \beta_i \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T],$$

на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}_{[0,T]}^{(1)})$ при любом $T < \infty$.

Отметим особую роль параметра α_1 , определяющего первую группу — группу молодых элементов развивающейся системы. Выбор α_1 достаточно малым, чтобы обеспечить преобладание элементов первой группы, гарантирует выполнение оценки (2.2). В общем же случае переменных ядер наличие в (2.2) хотя бы одного слагаемого с монотонно возрастающей с ростом T операторной нормой неизбежно приведет к нарушению (2.1), сколь бы мало ни было априори выбранное α_1 . Этот эффект и лежит в основе построения соответствующих тестовых примеров.

Естественное обобщение (1.1), (1.5) на случай произвольного n имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \sum_{i=2}^n \int_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} (1 - \delta_{i-1} s) x(s) ds &= y(t); \\ 1 > \alpha_1 > \dots > \alpha_{n-1} > 0; \\ \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3)$$

а эквивалентное (2.3) функциональное уравнение

$$x(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t x(\alpha_1 t) + \sum_{i=3}^n \alpha_{i-1}^2 (\delta_{i-1} - \delta_{i-2}) t x(\alpha_{i-1} t) + y'(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

Не уменьшая общности, считаем $\delta_i > \delta_{i-1} > 0$, $i = 2, \dots, n-1$.

Оператор в правой части (2.4), рассматриваемый действующим в $C_{[0,T]}$, является сжимающим лишь при $T < T_n^*$,

$$T_n^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 (\delta_i - \delta_{i-1})}.$$

Пусть $T > T_n^*$. Линейное однородное уравнение относительно ошибки $\tilde{\varepsilon}(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$ имеет вид

$$\tilde{\varepsilon}(t) = \alpha_1^2 \delta_1 t \tilde{\varepsilon}(\alpha_1 t) + \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i^2 (\delta_i - \delta_{i-1}) t \tilde{\varepsilon}(\alpha_i t) \quad (2.5)$$

с начальными условиями

$$\tilde{\varepsilon}(\alpha_k T_n^*) = \varepsilon^h(\alpha_k T_n^*), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

где $\varepsilon^h(\alpha_k T_n^*)$ — погрешность любого сходящегося на $[0, T_n^*)$ численного метода решения (2.3). Предположим дополнительно, что

$$\alpha_k = \alpha_1^k, \quad k = 2, \dots, n-1 \quad (2.6)$$

и

$$\text{sign } \varepsilon^h(\alpha_k T_n^*) = \text{const}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (2.7)$$

Тогда, полагая в (2.5) $t = T_i = T_n^*/\alpha_1^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, переходя к оценке по модулю и учитывая (2.6), (2.7), получим линейное однородное разностное уравнение с переменными коэффициентами $n-1$ -го порядка

$$|\tilde{\varepsilon}(T_i)| = \alpha_1^2 \delta_1 T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-1})| + \sum_{j=2}^{n-1} \alpha_1^{2j} (\delta_j - \delta_{j-1}) T_i |\tilde{\varepsilon}(T_{i-j})|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

и начальными данными

$$|\tilde{\varepsilon}(T_{-k})| = |\varepsilon^h(T_{-k})|, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

С ростом i коэффициенты в (2.8) монотонно возрастают, поэтому найдется такое $i = i^*$, для которого $|\tilde{\varepsilon}(T_{i^*})|$ впервые превысит любой сколь угодно большой порог M , сколь бы малы ни были (2.9). Переобозначим такое T_{i^*} как $T_{i_M^*}^h$. В силу погрешности аппроксимации интегралов в (2.3) квадратурой, а также неизбежной погрешности вычислений, найдется такой номер k_M^* узла $T_{k_M^*}^h$ равномерной сетки, что

$$|\varepsilon_k^h| = |\bar{x}(T_k^h) - x_k^h| < M, \quad k = \overline{0, k_M^* - 1}; \quad |\varepsilon_{k_M^*}^h| \geq M, \quad (2.10)$$

(x_k^h — сеточное решение уравнения (2.3) в k -м узле) и при этом

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*}^h. \quad (2.11)$$

Справедлива

Теорема 2.1. Пусть стартовые значения для рекурсии (2.8) удовлетворяют условиям (2.7), (2.9) и выполнено равенство (2.6). Пусть M — сколь угодно большое наперед заданное число. Тогда для любого сходящегося на $[0, T_n^*)$ численного метода решения тестового уравнения (2.3) найдется такой номер k_M^* узла $T_{k_M^*}^h$ равномерной сетки, что выполнены неравенства (2.10), (2.11).

Из теоремы 2.1 вытекает важное

Следствие 2.1. Для любого метода квадратур численного решения (2.3), реализованного на компьютере с погрешностью округления ε^* , и заданного порога $M < \infty$ справедлива априорная оценка

$$T_{k_M^*}^h < T_{i_M^*} \quad \forall h \in (0, \alpha_1^{n-1} T^*],$$

если положить $|\tilde{\varepsilon}(\alpha_k T^*)| = |\varepsilon^*|$, $k = 1, \dots, n-1$.

3. Численные результаты

Реализация стандартных квадратурных методов численного решения неклассического интегрального уравнения (0.1) приводит к тому, что из-за несовпадения узлов равномерной сетки со значениями пределов интегрирования уже в первом узле сетки может возникнуть уравнение с n неизвестными. В работах [5], [6] предложены модификации методов левых и средних прямоугольников соответственно (обозначаемые далее как ммлп и ммсп), основанные на преобразовании исходного уравнения к эквивалентному, у которого переменными являются только верхние пределы. Построенные численные схемы для эквивалентного уравнения на каждом шаге численного решения сводятся к уравнению с одним неизвестным и при $T < T^*$ имеют первый (ммлп) и второй (ммсп) порядки сходимости по шагу сетки, как и в классическом случае. Программная реализация ммлп и ммсп использована для приводимых ниже результатов.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1 t}^t x(s) ds + \int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} (1 - \delta_1 s) x(s) ds + \int_{\alpha_3 t}^{\alpha_2 t} (1 - \delta_2 s) x(s) ds + \int_0^{\alpha_3 t} (1 - \delta_3 s) x(s) ds = \\ = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^3 \delta_1 + \alpha_2^3 (\delta_2 - \delta_1) + \alpha_3^3 (\delta_3 - \delta_2)) t^3, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\delta_1 = 100, \quad \delta_2 = 200, \quad \delta_3 = 300,$$

$$0 < \alpha_1 < 1, \quad \alpha_i = \alpha_1^i, \quad i = 2, 3,$$

точное решение которого $\bar{x}(t) = t$, $T_4^* = \frac{1}{\alpha_1^2 \delta_1 + \alpha_2^2 (\delta_2 - \delta_1) + \alpha_3^2 (\delta_3 - \delta_2)}$. В таблицах 1 и 2 приведены результаты решения (3.1) для различных α_1 с использованием ммлп и ммсп соответственно. В столбцах 4-9 таблицы 1 и 4, 5, 7, 8, 10, 11 таблицы 2 указаны значения $T_{k_M^*}^h$ и $T_{i_M^*}^h$ из теоремы 2.1 для $M = 10^i$, $i = 0, 1, 2$.

Сравнение столбцов 4 с 5, 6 с 7, 8 с 9 таблицы 1 и 4 с 5, 7 с 8, 10 с 11 таблицы 2 показывает справедливость неравенства (2.11). Видно, что с уменьшением шага h значения $T_{k_M^*}^h$ и $T_{i_M^*}^h$ увеличиваются за счет уточнения решения.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α_1	T_4^*	h	$T_{k=10^0}^h$	$T_{i=10^0}^h$	$T_{k=10^1}^h$	$T_{i=10^1}^h$	$T_{k=10^2}^h$	$T_{i=10^2}^h$
1/2	0,030476	0,003810	0,3467	0,9752	0,6019	0,9752	0,9448	1,9505
		0,001915	0,4152	0,9752	0,7048	0,9752	1,0933	1,9505
		0,000952	0,4552	0,9752	0,7848	1,9505	1,2038	1,9505
2/3	0,013703	0,000508	0,1522	0,2341	0,2274	0,3512	0,1487	0,5268
		0,000254	0,1718	0,3512	0,2535	0,3512	0,1675	0,5268
		0,000127	0,1937	0,3512	0,2769	0,5268	0,1880	0,5268
3/4	0,009462	0,000148	0,0980	0,1680	0,1339	0,2240	0,1774	0,2987
		0,000074	0,1059	0,2240	0,1452	0,2240	0,1883	0,2987
		0,000037	0,1176	0,1680	0,1569	0,2240	0,2046	0,2987
8/9	0,005242	0,000008	0,0356	0,0437	0,0431	0,0553	0,0513	0,0622
		0,000005	0,0377	0,0491	0,0455	0,0553	0,0538	0,0622
		0,000002	0,0399	0,0491	0,0479	0,0553	0,0564	0,0622

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α_1	T_4^*	h	$T_{k=10^0}^h$	$T_{i=10^0}^h$	$T_{i=10^0}^*$	$T_{k=10^1}^h$	$T_{i=10^1}^h$	$T_{i=10^1}^*$	$T_{k=10^2}^h$	$T_{i=10^2}^h$	$T_{i=10^2}^*$
1/2	0,030476	0,008707	0,4920	0,9752		0,8577	1,9505		1,4150	1,9505	
		0,004064	0,7172	0,9752		1,0017	1,9505		1,7006	1,9505	
		0,001966	0,8759	0,9752	62,42	1,4226	1,9505	62,42	1,9397	3,9010	62,42
2/3	0,013703	0,003916	0,1703	0,2341		0,2486	0,3512		0,3465	0,5268	
		0,001827	0,2165	0,3512		0,3079	0,3512		0,4120	0,5268	
		0,000884	0,2674	0,3512	4,0003	0,3753	0,5268	6,0005	0,5052	0,7902	6,0005
3/4	0,009462	0,000610	0,1407	0,1680		0,1859	0,2240		0,2359	0,2987	
		0,000300	0,1660	0,2240		0,2155	0,2987		0,2714	0,2987	
		0,000149	0,1932	0,2240	1,6783	0,2488	0,2987	1,6783	0,3100	0,3983	2,2377
8/9	0,005242	0,000338	0,0373	0,0437		0,0448	0,0491		0,0533	0,0622	
		0,000166	0,0419	0,0491		0,0498	0,0552		0,0583	0,0622	
		0,000083	0,0465	0,0491	0,1795	0,0549	0,0622	0,2019	0,0621	0,0670	0,2019

В целом применение ммсп позволяет увеличить примерно в два раза длину коридора погрешности численного решения, не превышающей заданный порог M . Вместе с тем, согласно следствию 2.1, никакой численный метод не может преодолеть барьер $T_{i_M}^*$, полученный по (2.8) (2.9) с $|\tilde{\varepsilon}(T_{-k})| = \varepsilon^* = 10^{-16}$, $k = 1, 2, 3$ при вычислениях на компьютере с двойной точностью. В столбцах 6, 9 и 12 таблицы 2 указаны значения $T_{i_M}^*$ для $M = 10^i$, $i = 0, 1, 2$.

Характер неустойчивости численного решения (1.7) иллюстрирует рис. 1.

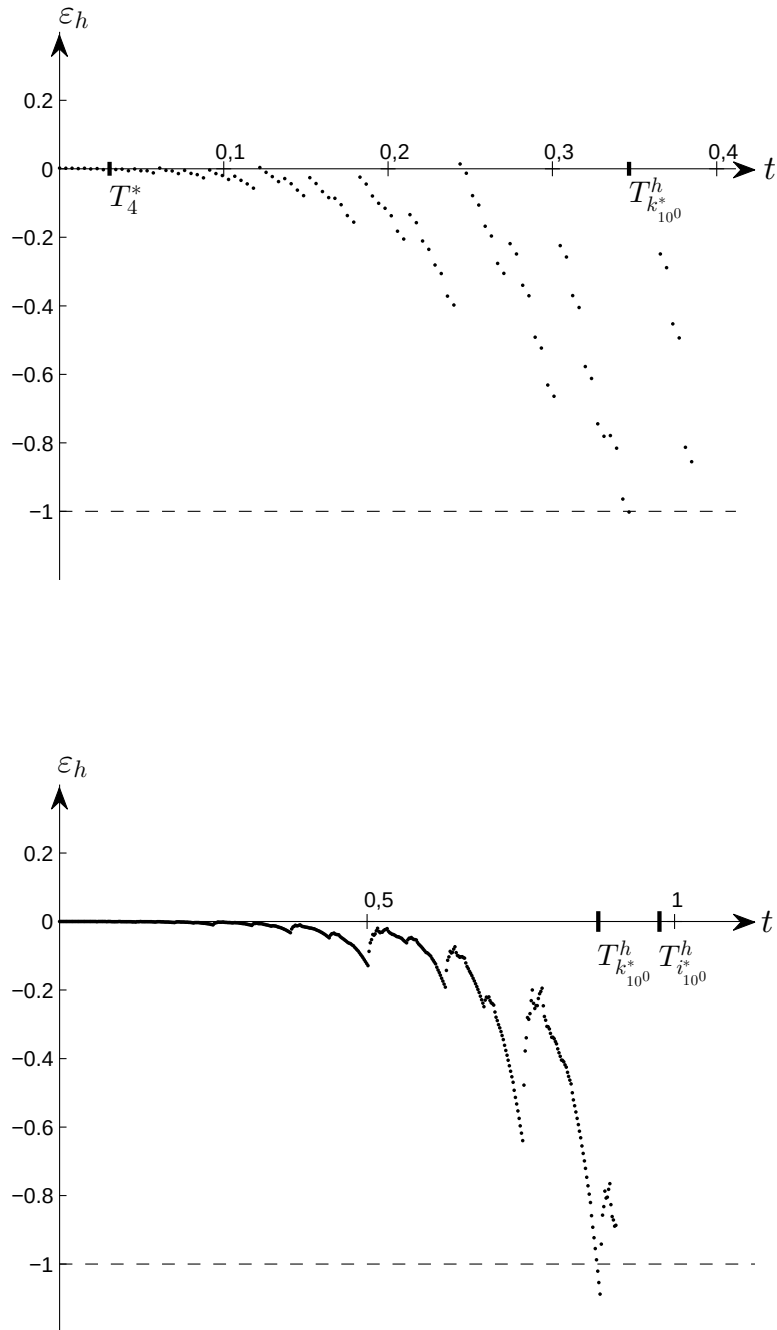


Рис. 1. Погрешность численного решения уравнения (3.1) модифицированными методами левых (верхний график) и средних прямоугольников ($\alpha_1 = 1/2$, $\delta_1 = 10^2$, $\delta_2 = 2 \cdot 10^2$, $\delta_3 = 3 \cdot 10^2$, $M = 10^0$, $T^* = 0,0305$, $h = 0,002$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.
2. Труфанов В.В., Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В. Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей // Электричество. 2017. № 3. С. 4-11.
3. Апарцин А.С. К теории интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывными ядрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 5. С. 824-839.
4. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 4. С. 31-45.
5. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Обобщенные постановки и решения задач управления: сб. тр. 7 Междунар. симп. М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. С. 21-25.
6. Апарцин А.С., Сидлер И.В. О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. 9 Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2014. С. 59-64.
7. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды УРО РАН, 2018. № 2. С. 24-33.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 759 с.
9. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.
10. Apartsyn A.S. On the theory of non-classical Volterra equations of the first kind // Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013). France, June 26-28. Albi, 2013. P. A6353AA.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Апарцин Анатолий Соломонович, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Сидлер Инна Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: inna.sidler@mail.ru

Для цитирования: Апарцин А.С., Сидлер И.В. Тестовое уравнение Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, содержащих n возрастных групп // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 168–179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179

THE TEST VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND IN INTEGRAL MODELS OF DEVELOPING SYSTEMS CONTAINING n AGE GROUPS

A. S. Apartsyn, I. V. Sidler

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Abstract. The paper addresses the test integral Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems. Earlier, models consisted of two and three age groups of elements. Here the authors generalized the results to the case of an arbitrary number of groups. Along with the theoretical results, numerical calculations are given for the test example. Calculations illustrate the validity of theoretical estimates.

Keywords: developing system; age groups; test Volterra equations of the first kind; numerical solution; instability

REFERENCES

1. Apartsin A.S., Sidler I.V. Primenenie neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda dlya modelirovaniya razvivayushchihsya sistem [Using the Nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).
2. Trufanov V.V., Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'nye modeli dlya razrabotki strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya generiruyushchih moshchnostey [Integrated Models for the Development of Technical Modernization of Generating Capacities Strategy]. *Elektrichestvo – Electricity*, 2017, no. 3, pp. 4-11. (In Russian).
3. Apartsin A.S. K teorii integral'nykh uravneniy Vol'terra I roda s razryvnymi yadrami [To the theory of volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, vol. 56, no. 5, pp. 824-839. (In Russian).
4. Apartsin A.S., Sidler I.V. O testovykh uravneniyah Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchihsya sistem [On the Test Volterra Equations of the First Kind in the Integral Models of Developing Systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2018, no. 4, pp. 31-45. (In Russian).
5. Apartsin A.S., Sidler I.V. Chislennoe reshenie uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchihsya sistem [Numerical Solution of the Volterra Equations of the First Kind in Integral Models of Developing Systems]. *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnogo simpoziuma «Obobshchennye postanovki i resheniya zadach upravleniya»* [Proceedings of the 7 International

The work was carried out within the framework of the scientific project III.17.3.2 of the program of fundamental research of the SB RAS, reg. No. AAAA-A17-117030310446-6 and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 15-01-01425).

Symposium “Generalized Statements and Solutions of Control Problems”]. Moscow, Autonomous Noncommercial Organization “Publishing House of Physical and Mathematical Literature”, 2014, pp. 21-25. (In Russian).

6. Apartsin A.S., Sidler I.V. O chislennom reshenii neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the numerical solution of the nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sbornik statey 9 Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Analiticheskie i chislennyye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem»* [Proceedings of the Ninth International Conference “Analytical and Numerical Methods of Modeling of Natural Science and Social Problems”]. Penza, 2014, pp. 59-64. (In Russian).

7. Apartsin A.S., Sidler I.V. Issledovanie testovykh uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Investigation of the test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 24-33. (In Russian).

8. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 759 p.

9. Apartsyn A.S. *Nonclassical linear Volterra equations of the first kind*. Utrecht, Boston, VSP, 2003, 168 p.

10. Apartsyn A.S. On the theory of non-classical Volterra equations of the first kind. *Abstract of the 4-th Inverse Problems, Design and Optimization Symposium (IPDO-2013)*. France, Albi, 2013, p. A6353AA.

Received 19 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Apartsyn Anatoly Solmonovich, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Sidler Inna Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Senior Researcher, e-mail: inna.sidler@mail.ru

For citation: Apartsyn A.S., Sidler I.V. Testovoye uravneniye Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem, sodержashchikh n vozrastnykh grupp [The test Volterra equation of the first kind in integral models of developing systems containing n age groups]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 168–179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI:10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186

УДК 517

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОБЩИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© М. С. Афанасова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Аннотация. В работе рассматривается задача Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве.

Ключевые слова: дифференциальное включение; дробная производная; задача Коши; мера некомпактности; неподвижная точка; уплотняющее мультиотображение

Введение

Идеи Лейбница и Эйлера положили начало теории дифференциальных уравнений дробного порядка, однако эта тематика получила бурное развитие только в конце XX столетия, за счет осознания ее практического применения в различных отраслях естествознания таких как биология, экономика, прикладная математика и других. В настоящее время дробный математический анализ характеризуется значительным ростом за счет его изучения нашими соотечественниками и зарубежными коллегами (см., например, монографии [1], [2], статьи [3], [4], [5] и др.).

Изначально методы нелинейного функционального анализа применялись и разрабатывались в приложениях к дифференциальным уравнениям такими учеными как Пуанкаре А., Брауэр Н.А., Хопф Г., Шаудер Ю. и др. Данные методы с начала 50-х годов XX века претерпели изменения и в дальнейшем были применены к новым классам дифференциальных уравнений, а также к дифференциальным включениям, этим занимались Красносельский М.А., Крейн С.Г., Борисович Ю.Г., Забрейко П.П., Звягин В.Г., Перов А.И., Садовский Б.Н, Каменский М.И., Обуховский В.В. Развитие данных методов связано в первую очередь с тем, что дифференциальные включения являются удобным

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственной квоты (проект № 1.3464.2017/4.6), Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

аппаратом для описания систем управления, систем с разрывными характеристиками, математической физики, экономики и биологии (см., например, монографии и статьи [6], [7], [8] и др.).

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении, в ней указанные методы применяются для изучения нового класса дифференциальных включений дробного порядка.

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $Kv(E)$ — совокупность его непустых выпуклых компактов. Для $a > 0$, $h > 0$ обозначим

$$\mathcal{D} = C([-h, a], E), \quad \mathcal{C} = C([-h, 0], E).$$

Для $x \in \mathcal{D}$ определим функцию $x_t \in \mathcal{C}$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$.

Рассмотрим общую краевую задачу для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка

$$D^q x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$Q\tilde{x} \in Sx, \quad (2)$$

где $q \in (0, 1)$, $\tilde{x} \in C([0, a], E)$, $\tilde{x}(t) = x(t)$, $t \in [0, a]$. В этом включении $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор в E , порождающий ограниченную C_0 группу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$; обозначим $M = \sup_{t \geq 0} \|\{T(t)\}\|$, $t \geq 0$. Относительно мультиоператора $F : [0, a] \times \mathcal{C} \rightarrow Kv(E)$ будем предполагать следующие условия:

(F1) для всех $x \in \mathcal{C}$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение;

(F2) для почти всех $t \in [0, a]$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{C} \rightarrow Kv(E)$ полунепрерывно сверху;

(F3) для любого непустого ограниченного $\Omega \subset \mathcal{C}$ найдется функция $\alpha_\Omega \in L^\infty([0, a])$ такая, что для почти всех $t \in [0, a]$, $x \in \mathcal{C}$ выполнено

$$\|F(t, x)\| \leq \alpha_\Omega(t)(1 + \|x\|_C);$$

(F4) найдется функция $\mu \in L^\infty([0, a])$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$ при почти всех $t \in [0, a]$ выполнено

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq \mu(t)\varphi_C(\Omega),$$

где χ — мера некомпактности Хаусдорфа в E , φ_C — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{C}$

$$\varphi_C(\Omega) = \sup_{t \in [-h, 0]} e^{-pt} \chi(\Omega(t)).$$

Для операторов из граничного условия (2) предполагаются следующие условия:

(Q) $Q : C([0, a], E) \rightarrow \mathcal{C}$ — линейный ограниченный оператор;

(S) мультиотображение $S : \mathcal{D} \rightarrow Kv(\mathcal{C})$ является полунепрерывным сверху и переводит каждое ограниченное множество в относительно компактное.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Интегральным решением задачи Коши (1)–(2) на промежутке $[-h, a]$ называется функция $x \in \mathcal{D}$ такая, что $Q\tilde{x} \in Sx$,

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x(0) + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a],$$

где $f(s) \in F(s, x_s)$,

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = q \int_0^\infty \theta\xi_q(\theta)T(t^q\theta)d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}}\Psi_q(\theta^{-1/q}),$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \theta^{-qn-1} \frac{\Gamma(nq+1)}{n!} \sin(n\pi q), \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

З а м е ч а н и е 1. $\int_0^\infty \theta \xi_q(\theta) d\theta = \frac{1}{\Gamma(q+1)}.$

О п р е д е л е н и е 2. Линейный оператор $G : L^\infty([0, a]; E) \rightarrow C([0, a]; E)$, определенный соотношением

$$Gf(x) = \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, a],$$

называется оператором Коши.

Обозначим через $\mathcal{D}_0$ подпространство $C([0, a], E)$, состоящее из функций вида $x(t) = \mathcal{G}(t)x(0)$. Определим сужение Q_0 оператора Q на $\mathcal{D}_0$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(QS) существует линейный ограниченный оператор $\Lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}_0$ такой, что

$$(I - Q_0\Lambda)(y - QGf) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{D}$, $y \in \mathcal{S}(x)$ и $f \in F(s, x_s)$;

$(\tilde{Q})$ линейный ограниченный оператор $\tilde{Q} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, определенный как $\tilde{Q}c = Q((rc)|_{[0, a]})$, является обратимым.

Нетрудно видеть, что при выполнении условия $(\tilde{Q})$ оператор Λ можно задать явным образом

$$\Lambda c = r \left[\tilde{Q}^{-1}(c) \right].$$

В предположении, что условие (QS) выполнено, рассмотрим многозначный оператор $\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow Kv(\mathcal{D})$, заданный соотношением

$$\Gamma(x) = \Lambda S(x) + (I - \Lambda Q)GF(s, x_s).$$

Лемма 1. (см. [9]) *Мультиотображение G является полунепрерывным сверху.*

Лемма 2. *Мультиотображение Γ является полунепрерывным сверху.*

Лемма 3. *Каждая неподвижная точка мультиоператора Γ имеет вид*

$$x = \Lambda(y - QGf) + Gf \quad (3)$$

и является интегральным решением задачи Коши (1)–(2). Если дополнительно выполняется условие $(\tilde{Q})$, то каждое интегральное решение x задачи Коши (1)–(2) является неподвижной точкой мультиоператора Γ .

Введем в пространстве $\mathcal{D}$ векторную меру некомпактности $\nu : P(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ со значениями в конусе $\mathbb{R}_+^2$, определенную как

$$\nu_{\mathcal{D}}(\Omega) = \max_{D \in \Delta(\Omega)} (\varphi_{\mathcal{D}}(\Omega), \text{mod}_C(D)),$$

где $\Delta(\Omega)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω ,

$$\varphi_{\mathcal{D}}(D) = \sup_{t \in [0, a]} e^{-pt} \chi(D(t)),$$

и константа $p > 0$ выбрана так, что для $d > 0$, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{qM \|\mu\|_{\infty} (1 + \|\Lambda\|b)}{\Gamma(1+q)} \frac{d^q}{q} < \frac{1}{4}, \quad (4)$$

выполняется следующая оценка

$$\frac{qM \|\mu\|_{\infty} (1 + \|\Lambda\|b)}{\Gamma(1+q)} \frac{1}{pd^{1-q}} < \frac{1}{4}. \quad (5)$$

Вторая компонента определенной нами меры некомпактности ν , суть модуль равностепенной непрерывности, который определяется соотношением

$$\text{mod}_C(\mathcal{D}) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{u \in \mathcal{D}} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|u(t_1) - u(t_2)\|.$$

Лемма 4. *Мультиоператор Γ является уплотняющим относительно меры некомпактности ν .*

2. Основные результаты

Теорема 1. *При выполнении условий (F1), (F2), (F3), (F4), (Q), (QS), $(\tilde{Q})$, (H1) множество решений задачи (1)–(2) на $[-h, a]$ непусто и компактно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И., Потапов А.С., Родкина А.Е., Садовский Б.Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. Новосибирск: Наука, 1986.
2. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Издание 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.
3. *Петросян Г.Г.* Об одной теореме о слабой замкнутости суперпозиционного мультиоператора // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1355-1358.
4. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001. 231 p.
5. *Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C.* On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays // *Applicable Analysis*. 2013. Vol. 92. № 1. P. 115-137.
6. *Obukhovskii V., Yao J.-C.* Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations // *Fixed Point Theory*. 2010. Vol. 11. № 1. P. 85-96.
7. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // *Fixed Point Theory*. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.
8. *Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.
9. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.

Поступила в редакцию 29 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 10 мая 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Афанасова Мария Сергеевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, математический факультет, e-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Для цитирования: *Афанасова М.С.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с общим начальным условием в банаховом пространстве // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 180–186. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL INCLUSION OF FRACTIONAL ORDER WITH A GENERAL INITIAL CONDITION IN A BANACH SPACE

M. S. Afanasova

Voronezh State University
1 University square, Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: marya.afanasowa@ya.ru

Abstract. In this paper we consider the Cauchy problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition in a Banach space.

Keywords: differential inclusion; the fractional derivative; the Cauchy problem; MNC; fixed point; condensing multimap

REFERENCES

1. Akhmerov R.R., Kamenskiy M.I., Potapov A.S., Rodkina A.E., Sadovskiy B.N. *Mery nekom-paktnosti i uplotnyayushchie operatory* [Measures of Non-Compactness and Condensing Operators]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. (In Russian).
2. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogo-znachnykh otobazheniy i differentsial'nykh vkl'yucheniye* [Introduction to the Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).
3. Petrosyan G.G. Ob odnoy teoreme o slaboy zamknutosti superpozitsionnogo mul'tioperatora [Theorem on the weak closure of superposition multioperators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1355-1358. (In Russian).
4. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 2001. 231 p.
5. Ke T.D., Obukhovskii V., Wong N.-C., Yao J.-C. On a Class of Fractional Order Differential Inclusions with Infinite Delays. *Applicable Analysis*, 2013, vol. 92, no. 1, pp. 115-137.
6. Obukhovskii V., Yao J.-C. Some Existence Results for Fractional Functional Differential Equations. *Fixed Point Theory*, 2010, vol. 11, no. 1, pp. 85-96.
7. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269-292.
8. Obukhovskii V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vkl'yucheniya drobnogo por'yadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).

This research was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (projects № 1.3464.2017/4.6, № 14.Z50.31.0037).

9. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym uslovиеm [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).

Received 29 March 2018

Reviewed 10 May 2018

Accepted for press 5 June 2018

Afanasova Mariya Sergeevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Faculty of Mathematics, e-mail: marya.afanasova@ya.ru.

For citation: Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s obshchim nachal'nym uslovиеm v banahovom prostranstve [On the Cauchy problem for a functional differential inclusion of fractional order with a general initial condition in a Banach space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 180–186. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-180-186 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199

УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИИ КОШИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© А. С. Баландин

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: balandin-anton@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа. Для данного уравнения выведены формулы, связывающие фундаментальное решение и функцию Коши, на основе которых исследуется асимптотическое поведение решений указанного уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; уравнение нейтрального типа; фундаментальное решение; функция Коши; асимптотическое поведение

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$, χ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}_+$, $C[0, l]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^J a_j \dot{x}(t - h_j) = \int_0^\omega x(t - s) dr(s) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

в следующих предположениях и обозначениях: $J \in \mathbb{N}$, $a_j = \text{const} \in \mathbb{C}$, $h_j = \text{const} \in \mathbb{R}_+$, функция $r: [0, \omega] \rightarrow \mathbb{C}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ суммируема на каждом конечном отрезке. При отрицательном значении аргумента x и $\dot{x}$ доопределим начальными функциями φ и ψ , не зависящими друг от друга; требования «непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$ и $\dot{x}(0) = \psi(0)$ также не считаются обязательными. Функция $\int_t^\omega \varphi(t - s) dr(s)$ суммируема на $[0, \omega]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Заметим, что при $t \in [0, \omega]$ уравнение (0.1) понимается следующим образом:

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^J a_j \dot{x}(t - h_j) = \int_0^t x(t-s) dr(s) + f(t) + f_\varphi(t), \quad f_\varphi(t) = \int_t^\omega \varphi(t-s) dr(s).$$

Следуя [1], сделаем замену переменных, которая дает возможность отнести начальные функции к внешнему возмущению f . Это позволяет считать, что на отрицательной полуоси обе функции, x и $\dot{x}$, доопределены нулем.

Под *решением* уравнения (0.1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке функцию $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющую (0.1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (0.1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s) ds, \quad (0.2)$$

где $X: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ называется *фундаментальным решением*, а $C: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ — *функцией Коши* уравнения (0.1). Удобно доопределить нулем фундаментальное решение на отрицательной полуоси, а функцию Коши вне множества Δ .

При исследовании асимптотических свойств основное внимание уделим функции Коши, поскольку, как будет показано далее, из экспоненциальной оценки на функцию Коши следует экспоненциальная оценка на фундаментальное решение.

Для автономного дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной, между его фундаментальным решением и функцией Коши существует простая зависимость ([2], с. 116):

$$C(t,s) = X(t-s). \quad (0.3)$$

Равенство (0.3) упрощает исследование неоднородных уравнений, сводя любую задачу к изучению соответствующих свойств функции X . Как показывают простые примеры [3], для уравнений нейтрального типа формула (0.3) неверна и вопрос о связи между фундаментальным решением и функцией Коши был и остается одним из важнейших (см., напр., [1], с. 83–84). Существенное продвижение в этом вопросе было достигнуто в работе [3], где для уравнения с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^J a_j \dot{x}(t - jh) = \sum_{m=0}^M b_m x(t - mh) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (0.4)$$

методом производящих функций была получена формула, связывающая фундаментальное решение и функцию Коши. Как и ожидалось, эта формула позволила преодолеть ряд трудностей, возникающих при исследовании асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно производной (см. работы [4]; [5]; [6], с. 177–178, 512–513). Цель настоящей работы — обобщить результаты работы [3] на уравнение (0.1): найти связь между фундаментальным решением и функцией Коши, и на ее основе изучить асимптотическое поведение всех решений уравнения.

1. Вспомогательные утверждения

«Функцией скачков» будем называть кусочно-постоянную функцию, имеющую конечное количество скачков (разрывов первого рода) на каждом конечном отрезке в фиксированных точках и непрерывную слева. Пусть $[0, l]$ — произвольный отрезок, $P[0, l]$ — пространство функций, представимых в виде суммы непрерывной на $[0, l]$ функции и функции скачков. Очевидно, что $P[0, l]$ является линейным пространством с естественными операциями сложения и умножения на число.

Определим операторы S , A , C , R по следующим правилам:

$$\begin{aligned} (Sy)(t) &= \sum_{j=1}^J a_j y(t - h_j), & (Ay)(t) &= \int_0^\omega y(t - s) dr(s), \\ (Cy)(t) &= \int_0^t y(s) ds, & (Ry)(t) &= \int_0^\omega y(t - s) r(s) ds. \end{aligned}$$

Перепишем уравнение (0.1) в операторном виде (с учетом договоренностей из Введения):

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) = (Ax)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

Далее вместо уравнения (0.1) будем использовать эквивалентный вид (1.1).

Области определения и множества значений операторов S , A , C , R характеризуются следующим утверждением.

Утверждение 1.1. *Операторы S , A , C , R действуют в следующих пространствах: $S: P[0, l] \rightarrow P[0, l]$, $A: C[0, l] \rightarrow P[0, l]$, $C, R: P[0, l] \rightarrow C[0, l]$.*

Зафиксируем произвольное $\alpha \in \mathbb{R}$ и введем норму в пространстве $P[0, l]$

$$\|x\|_\alpha = \sup_{t \in [0, l]} |x(t)e^{-\alpha t}|.$$

Покажем, что операторы S , A , C и R ограничены:

$$\begin{aligned} \|Sy\|_\alpha &\leq \left(\sum_{j=1}^J |a_j| e^{-\alpha h_j} \right) \|y\|_\alpha, & \|Ay\|_\alpha &\leq \left(\int_0^\omega e^{-\alpha s} |dr(s)| \right) \|y\|_\alpha, \\ \|Cy\|_\alpha &\leq \sup_{t \in [0, l]} \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \right) \|y\|_\alpha = \sup_{t \in [0, l]} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \|y\|_\alpha, \\ \|Ry\|_\alpha &\leq \sup_{t \in [0, l]} \left(\int_0^\omega e^{-\alpha s} r(s) ds \right) \|y\|_\alpha = \sup_{t \in [0, \omega]} |r(t)| \sup_{t \in [0, l]} \left(\frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \right) \|y\|_\alpha. \end{aligned}$$

Для норм операторов, действующих из $(P[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$ в себя, будем использовать обозначение $\|\cdot\|$. Отметим, что выбор величины α позволяет манипулировать величиной нормы операторов R , C , т.к. при $\alpha \rightarrow +\infty$ нормы $\|R\|, \|C\| \rightarrow 0$.

Несложно убедиться, что пространство $(P[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$ является банаховым.

В разделах 2 и 3 нам понадобится следующая известная теорема об обратном операторе (см., [7, с. 224–230]). Через E здесь и далее будем обозначать тождественный оператор.

Утверждение 1.2. Пусть $\mathcal{B}$ — банахово пространство, $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ — линейный ограниченный оператор, причем $\|T\| < 1$. Тогда существует линейный ограниченный оператор $(E - T)^{-1}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, и при любом $f \in \mathcal{B}$ уравнение $z = Tz + f$ имеет в $\mathcal{B}$ единственное решение $z = (E - T)^{-1}f$.

2. Фундаментальное решение

Из формулы (0.2) следует, что функция X определяется как решение следующего уравнения

$$\dot{x}(t) - (S\dot{x})(t) = (Ax)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1)$$

дополненного начальным условием $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1$.

Лемма 2.1. Справедливы следующие утверждения.

1. Функция $\dot{X} \in P[0, l]$ при любом l .
2. Существуют $\alpha \in \mathbb{R}, N_1, N_2 \in \mathbb{R}_+$, такие что при любом $t \in \mathbb{R}_+$

$$a) |X(t)| \leq N_1 e^{\alpha t};$$

$$б) |\dot{X}(t)| \leq N_2 e^{\alpha t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим (2.1) на отрезке $[0, l]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B = E + S + \dots + S^{k_0}$, где $k_0 h_{\min} < l, (k_0 + 1)h_{\min} > l$, и учтем, что $(S^{(k_0+1)h_{\min}} \dot{X})(t) \equiv 0$:

$$\dot{x}(t) = ((BA)X)(t). \quad (2.2)$$

Утверждение 1 леммы следует из (2.2) и утверждения 1.1.

Подействуем на обе части уравнения (2.2) оператором C (то есть проинтегрируем обе части уравнения):

$$X(t) = X(0) + ((CBA)X)(t). \quad (2.3)$$

Заметим, что $CBA: C[0, l] \rightarrow C[0, l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|CBA\| < 1$. В силу утверждения 1.2 получаем, что $X \in (C[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$. Следовательно, $\|X\|_\alpha = N_1 < \infty$, где N_1 не зависит от l . Значит, $|X(t)| \leq N_1 e^{\alpha t}$.

В силу уравнения (2.2) и $|X(t)| \leq N_1 e^{\alpha t}$, получаем, $|\dot{X}(t)| \leq N_2 e^{\alpha t}$. $\square$

Из уравнения (2.1), леммы 2.1 следует, что к уравнению (2.1) применимо преобразование Лапласа [6, с. 12, 18].

Обозначим

$$S(p) = \sum_{j=1}^J a_j e^{-ph_j}, \quad A(p) = \int_0^\omega e^{-p\xi} dr(\xi), \quad g(p) = p(1 - S(p)) - A(p), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2.2. Лаплас-образ фундаментального решения имеет вид $L_X(p) = \frac{1-S(p)}{g(p)}$, $\operatorname{Re} p \geq \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (2.1) и найдем функцию L_X из полученного уравнения. Лаплас-образ функции X определен на множестве $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ в силу установленной выше оценки $|X(t)| \leq N_1 e^{\alpha t}$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Функция L_X является мероморфной функцией. Как известно [9, с. 58], мероморфные функции имеют не более чем счетное число изолированных особенностей, которые являются нулями знаменателя. Значит, функция L_X может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением этих точек.

3. Функция Коши

Как показано в ([1], с. 61), функция Коши уравнения (0.1), как функция второго аргумента (при фиксированном t) при почти всех $s \leq t$ удовлетворяет равенству

$$C(t, s) = 1 + \sum_{j=1}^J a_j C(t, s + h_j) - \int_0^\omega C(t, \tau + s) r(\tau) d\tau. \quad (3.1)$$

В той же работе установлено, что (3.1) однозначно определяет функцию Коши уравнения (0.1) и может быть принято за ее определение. Напомним, что $C(t, s) \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R}_+^2 \setminus \Delta$.

Рассмотрим аналог уравнения (3.1) для функции одной переменной:

$$Y(t) = 1 + (SY)(t) - (RY)(t), \quad (3.2)$$

где функция Y предполагается равной нулю при отрицательных значениях аргумента.

Лемма 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Уравнение (3.2) однозначно разрешимо в $P[0, l]$ при любом l .
2. Существуют $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{R}_+$, такие что при любом $t \in \mathbb{R}_+$ $|Y(t)| \leq N e^{\alpha t}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если $(RY)(t)$ существует, то является локально абсолютно непрерывной функцией на любом конечном отрезке.

Рассмотрим (3.2) на отрезке $[0, l]$. Подействуем на обе части уравнения оператором $B = E + S + \dots + S^{k_0}$, где $k_0 h_{\min} < l$, $(k_0 + 1)h_{\min} > l$, и, учитывая $(S^{(k_0+1)h_{\min}} Y)(t) \equiv 0$, получаем:

$$Y(t) = (BR)Y(t).$$

Заметим, что $BR: P[0, l] \rightarrow P[0, l]$. Выбором достаточно большого α можно добиться выполнения неравенства $\|BR\| < 1$. В силу утверждения 1.2 получаем, что $Y \in (P[0, l], \|\cdot\|_\alpha)$, то есть утверждение 1 леммы доказано. Отсюда вытекает, что $\|Y\|_\alpha = N < \infty$, где N не зависит от l . Значит, $|Y(t)| \leq N e^{\alpha t}$, тем самым доказано утверждение 2 леммы. $\square$

Лемма 3.2. $C(t, s) = Y(t - s)$.

Доказательство. Функция $Y(t-s)$ удовлетворяет уравнению (3.1), которое как отмечалось выше, однозначно определяет функцию Коши. $\square$

Лемма 3.3. *Лаплас-образ функции Y имеет вид $L_Y(p) = \frac{1}{g(p)}$, $\operatorname{Re} p \geq \alpha$.*

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к правой и левой части уравнения (3.2) и найдем функцию L_Y из полученного уравнения. Лаплас-образ функции Y определен на множестве $\operatorname{Re} p \geq \alpha$ в силу установленной выше оценки $|Y(t)| \leq Ne^{\alpha t}$. $\square$

Замечание 3.1. Функция L_Y имеет не более чем счетное число полюсов, являющихся нулями знаменателя (и только ими). Значит, функция L_Y может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением этих точек.

4. Связь между фундаментальным решением и функцией Коши

Следующие теоремы устанавливают связь между функцией Коши и фундаментальным решением, а также их Лаплас-образами.

Из лемм 2.2 и 3.3 очевидным образом следует

Теорема 4.1. $L_X(p) = (1 - S(p))L_Y(p)$, $\operatorname{Re} p \geq \alpha$.

Теорема 4.2. Пусть X — фундаментальное решение, а Y — решение уравнения (3.2). Тогда

$$X(t) = (E - S)Y(t), \quad (4.1)$$

$$X(t) = 1 - (RY)(t). \quad (4.2)$$

Доказательство. Равенство (4.1) получается, если к правой и левой частям равенства из теоремы 4.1 применить обратное преобразование Лапласа и использовать его элементарные свойства [6, гл. 1]. Из (3.2) и (4.1) следует (4.2). $\square$

5. Асимптотическое поведение функции Коши

Далее нам понадобится следующий результат, являющийся следствием теоремы Кронекера [8, с. 41].

Утверждение 5.1 ([8, с. 44]). Система неравенств

$$|\nu_k t| < \delta \pmod{2\pi} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

имеет решения (и притом сколь угодно большие) при любых $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}$ и при любом $\delta > 0$.

Лемма 5.1. Пусть существует $p_0 = x_0 + iy_0$, для которого $S(p_0) = 1$, и существуют $\lambda, M_1 > 0$, такие что при $\operatorname{Re} p \in [\operatorname{Re} p_0 - \lambda, \operatorname{Re} p_0 + \lambda]$ функция $\eta_1(p)$ аналитическая и $|\eta_1(p)| \leq M_1$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon \in (0, \lambda)$ существует $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $p_k = x_0 + iy_k$, и при $k \geq k_0$ в каждом круге $|p_k - p| < \varepsilon$ функция $\eta(p) = 1 - S(p) + \frac{\eta_1(p)}{p}$ имеет нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $1 - S(p)$ аналитическая, ее нули изолированы. Поэтому можно взять достаточно малое $\varepsilon \in (0, \lambda)$, что в круге $|z| < \varepsilon$ функция $1 - S(p_0 + z)$ имеет единственный нуль, а на окружности $|z| = \varepsilon$ выполняется $|1 - S(p_0 + z)| \geq \mu > 0$.

Заметим, что существует такое $M_2 > 0$, что $\sum_{j=1}^J |a_j e^{h_j z} e^{h_j p_0}| \leq M_2$ при $|z| \leq \varepsilon$.

Далее выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < \min \left\{ \frac{\mu}{2M_2}, 1 \right\}$.

В силу утверждения 5.1, для любого заданного $\delta > 0$ система неравенств

$$|h_j(y - y_0)| < \delta \pmod{2\pi}, \quad j = \overline{1, J},$$

будет иметь последовательность решений $\{y_k - y_0\}_{k \in \mathbb{N}}$, причем y_k сколь угодно большие. Полагаем $p_k = x_0 + iy_k$.

Пусть $\zeta(z) = 1 - S(p_0 + z)$, $\xi_k(z) = S(p_0 + z) - S(p_k + z) + \frac{\eta_1(p_k + z)}{p_k + z}$, тогда $\eta(p_k + z) = \zeta(z) + \xi_k(z)$, $z \in \mathbb{C}$. При $|z| \leq \varepsilon$ имеем

$$|e^{h_j(p_k - p_0)} - 1| = |e^{ih_j(y_k - y_0)} - 1| \leq |h_j(y_k - y_0)| < \delta,$$

тогда

$$|S(p_0 + z) - S(p_k + z)| = \left| \sum_{j=1}^J a_j e^{h_j z} e^{h_j p_0} (e^{h_j(p_k - p_0)} - 1) \right| \leq M_2 \delta < \frac{\mu}{2}.$$

Далее получаем

$$\left| \frac{\eta_1(p_k + z)}{p_k + z} \right| \leq \frac{M_1}{|p_k| - \varepsilon}.$$

Заметим, что найдется k_0 такое, что при всех $k \geq k_0$ справедливо $\frac{M_1}{|p_k| - \varepsilon} < \frac{\mu}{2}$. Итак, при $|z| = \varepsilon$ для всех $k \geq k_0$ выполняется $|\zeta(z)| \geq \mu > |\xi_k(z)|$. Значит, по теореме Руше функции $\zeta(z)$ и $\xi_k(z)$ при $|z| < \varepsilon$ имеют одинаковое количество нулей. Следовательно, во всех кругах $|p_k - p| < \varepsilon$ при $k \geq k_0$ существуют точки, где $1 - S(p) + \frac{\eta_1(p)}{p} = 0$. $\square$

Пусть $\eta_1(p) \equiv 0$. Тогда имеем

Следствие 5.1. Пусть существует $p_0 = x_0 + iy_0$, для которого $S(p_0) = 1$, тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $p_k = x_0 + iy_k$, и в каждом круге $|p_k - p| < \varepsilon$ функция $1 - S(p)$ имеет нуль.

Таким образом, любой из нулей функции $1 - S(p)$ порождает вертикальную цепь нулей, то есть существует $c \in \mathbb{R}$, такое что для любого $\varepsilon > 0$ в полосе $|\operatorname{Re} p - c| < \varepsilon$ существует бесконечное число нулей (со сколь угодно большой мнимой частью) функции $1 - S(p)$.

Пусть $\eta_1(p) = -A(p)$. Тогда имеем

Следствие 5.2. Пусть существует $p_0 = x_0 + iy_0$, для которого $S(p_0) = 1$, тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $p_k = x_0 + iy_k$, и при $k \geq k_0$ в каждом круге $|p_k - p| < \varepsilon$ функция $g(p)$ имеет нуль.

Сформулируем еще один важный результат.

Следствие 5.3. Пусть все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда все нули функции $1 - S(p)$ лежат в этой же полуплоскости.

Доказательство. Допустим, что функция $1 - S(p)$ имеет хотя бы один нуль полуплоскости $P = \{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \lambda\}$. Тогда, в силу следствия 5.2 и открытости полуплоскости P , в P найдутся нули функции g . $\square$

Далее нам понадобится следующее утверждение. Приведем его в удобном для нас виде.

Утверждение 5.2 ([6, с. 438, теорема 12.6]). Пусть p_m — нули $1 - S(p)$, $\mathcal{M}$ — такое множество, что $\inf_m \inf_{p \in \mathcal{M}} |p - p_m| > 0$. Тогда $\inf_{p \in \mathcal{M}} |1 - S(p)| > 0$.

Лемма 5.2. Пусть все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \lambda_1 - \varepsilon\}$ при некоторых $\varepsilon > 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\lambda_2 > \lambda_1$ справедливо

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_2 - iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| = 0.$$

Доказательство. Заметим, что при $\operatorname{Re} p \in [\lambda_1, \lambda_2]$ найдется $M_A > 0$, такое что $|A(p)| \leq M_A$. В силу следствия 5.3 и утверждения 5.1, в условиях леммы имеем $|1 - S(p)| \geq m_S > 0$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{e^{pt}}{p(1 - S(p)) - A(p)} dp \right| \leq \\ &\leq \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{|e^{pt}|}{|p||1 - S(p)| - |A(p)|} dp \leq e^{\lambda_2 t} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\lambda_1 + iy}^{\lambda_2 + iy} \frac{dp}{|p|m_S - M_A} = 0. \end{aligned}$$

Доказательство $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_2 - iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| = 0$ повторяет только что проведенное, если y заменить на $-y$. $\square$

Лемма 5.3. Пусть все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\lambda_1 > \lambda$ справедливо

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| \leq M e^{\lambda_1 t}, \quad M > 0.$$

Доказательство. Возьмем α_0 таким, чтобы существовали нули функции g с вещественной частью большей α_0 . Сделаем несколько преобразований, используя тот

факт, что $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} |S(p)| = 0$, и абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} S^k(p)$:

$$\begin{aligned}
 & \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} \frac{e^{pt}}{(p - \alpha_0)(1 - S(p))} dp \right| = \left| \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} \sum_{k=0}^{\infty} S^k(p) \frac{e^{pt}}{p - \alpha_0} dp \right| = \\
 & = \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} S^k(p) \frac{e^{pt}}{p - \alpha_0} dp \right| = \\
 & = \lim_{y \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_J = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_J!} (a_1^{k_1} \dots a_J^{k_J}) \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} e^{-p(h_1 k_1 + \dots + h_J k_J)} \frac{e^{pt}}{p - \alpha_0} dp \right| = \\
 & = e^{\alpha_0 t} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_J = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_J!} (a_1^{k_1} \dots a_J^{k_1}) \chi(t - h_1 k_1 - \dots - h_J k_J) e^{-\alpha_0(h_1 k_1 + \dots + h_J k_J)} \right| \leq \\
 & \leq \frac{e^{\alpha_0 t}}{|1 - |a_1|e^{-\alpha_0 h_1} - \dots - |a_J|e^{-\alpha_0 h_J}|}.
 \end{aligned}$$

В силу следствия 5.3 и утверждения 5.2, в условиях леммы имеем $\left| \frac{A(p)}{1-S(p)} \right| \leq A_1 < \infty$ и $\left| \frac{1}{1-S(p)} \right| \leq A_2 < \infty$. Оценим

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} \frac{\left(\frac{A(p)}{1-S(p)} - \alpha_0 \right) e^{pt} dp}{p(1-S(p)) \left(p - \frac{A(p)}{1-S(p)} \right)} \right| \leq (A_1 + |\alpha_0|) A_2 e^{\lambda_1 t} \int_{-y}^y \frac{dw}{\sqrt{\lambda_1^2 + w^2} \left| \lambda_1 + iw - \frac{A(\lambda_1 + iw)}{1-S(\lambda_1 + iw)} \right|} = \\
 & = (A_1 + |\alpha_0|) A_2 e^{\lambda_1 t} \int_{-y}^y O\left(\frac{1}{w^2}\right) dw.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\lambda_1 - iy}^{\lambda_1 + iy} L_Y(p) e^{pt} dp \right| \leq \frac{e^{\alpha_0 t}}{|1 - a_1 e^{-\alpha_0 h_1} - \dots - a_J e^{-\alpha_0 h_J}|} + \\
 & + (A_1 + |\alpha_0|) A_2 e^{\lambda_1 t} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-y}^y O\left(\frac{1}{w^2}\right) dw \leq M e^{\lambda_1 t}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Функция Коши уравнения (0.1) имеет оценку*

$$|C(t, s)| \leq N_C e^{\beta(t-s)}, \quad N_C > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

тогда и только тогда, когда нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что справедлива оценка (5.1). Значит, L_Y является аналитической функцией в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \beta\}$. Следовательно, нули функции g лежат только в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$.

Достаточность. Предположим, что все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p \leq \beta - \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник $ABCD$, вершины которого соответствуют точкам $\alpha - i\gamma$, $\alpha + i\gamma$, $\beta + i\gamma$, $\beta - i\gamma$, где α определяется леммой 2.1, причем $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$.

Разобьем интеграл $\int_{ABCD} L_Y(p) e^{pt} dp$ на четыре интеграла:

$$I_1 = \int_{AB} L_Y(p) e^{pt} dp, \quad I_2 = \int_{BC} L_Y(p) e^{pt} dp, \quad I_3 = \int_{CD} L_Y(p) e^{pt} dp, \quad I_4 = \int_{DA} L_Y(p) e^{pt} dp.$$

Из теоремы Коши о вычетах [10, с. 79] следует, что $\int_{ABCD} L_Y(p) e^{pt} dp = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. По лемме 5.2 $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_2| = 0$, $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_4| = 0$. По лемме 5.3 $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_3| \leq M e^{\beta t}$. С помощью обратного преобразования Лапласа получаем $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} I_1 = 2\pi i Y(t)$.

Таким образом, $2\pi |Y(t)| = \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_1| \leq \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_3| + \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_2| + \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} |I_4| \leq M e^{\beta t}$, откуда получаем оценку (5.1). $\square$

Легко видеть, что справедливо следующее

Следствие 5.4. Если имеет место оценка (5.1), то справедлива и оценка

$$|X(t)| \leq N_X e^{\beta t}, \quad N_X > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Из оценки (5.2) не вытекает оценка (5.1). Это показывает построенный в работе [3]

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-h) + bx(t) - abx(t-h) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Легко убедиться, что $X(t) = \chi(t) e^{-bt}$ — фундаментальное решение этого уравнения, $C(t, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(t - jh - s) e^{-b(t-jh-s)} a^j$ — функция Коши. Непосредственный подсчет по направлению $s = 0$ в точках $t = kh$, $k \in \mathbb{N}_0$, приводит к равенствам $C(kh, 0) = Y(kh) = \frac{a^{k+1} - e^{-b(k+1)}}{a - e^{-b}}$. Очевидно, что при $a > 1$ и $b > 0$ функция Коши неограниченно растет, в то время как фундаментальное решение экспоненциально убывает.

Найдем условия, когда из оценки (5.2) следует оценка (5.1).

Следствие 5.5. Пусть $\beta \in \mathbb{R}$. Для того чтобы оценки (5.2) и (5.1) выполнялись одновременно, необходимо и достаточно, чтобы общие нули функций $1 - S(p)$ и $A(p)$ лежали слева от прямой $\operatorname{Re} p = \beta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.
3. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнениях нейтрального типа // Известия вузов. Математика. 2007. № 7. С. 17-27.
4. *Соколов В.А.* Об устойчивости одного класса линейных уравнений нейтрального типа // Краевые задачи. Пермь: Перм. политех. ин-т, 1984. С. 60-63.
5. *Соколов В.А.* Экспоненциальная оценка матрицы Коши и устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа. Пермь: Перм. политех. ин-т, 1985. 21 с. Деп. ВИНТИ. 11.04.85. № 2419.
6. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
8. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 205 с.
9. *Маркушевич А.И.* Целые функции. М.: Наука, 1965. 108 с.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Баландин Антон Сергеевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, младший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION AND THE CAUCHY FUNCTION FOR NEUTRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. S. Balandin

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolsky prospect, Perm 614990, Russian Federation
E-mail: balandin-anton@yandex.ru

Abstract. We consider a linear autonomous neutral functional differential equation. We obtain formulas relating the fundamental solution and the Cauchy function for this equation. On the basis of the formulas the asymptotic behavior of solutions of the equation is studied.

Keywords: functional differential equation; neutral equation; the fundamental solution; the Cauchy function; asymptotic behavior

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).
2. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Solutions for Equations with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm National Research Polytechnic University, 2001, 230 p. (In Russian).
3. Balandin A.S., Malygina V.V. Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh uravneniyakh neytral'nogo tipa [On exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type]. *Izvestiya vysshihkh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2007, no. 7, pp. 17-27. (In Russian).
4. Sokolov V.A. *Ob ustoychivosti odnogo klassa lineynykh uravneniy neytral'nogo tipa* [On stability of a class of linear equations of neutral type]. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problem], Perm, Perm National Research Polytechnic University, 1984, pp. 60-63. (In Russian).
5. Sokolov V.A. *Ekspontentsial'naya otsenka matritsy Koshi i ustoychivost' odnogo klassa uravneniy neytral'nogo tipa* [Exponential Estimation of the Cauchy Matrix and Stability of a Class of Linear Equations of Neutral Type]. Perm, Perm National Research Polytechnic University 1985, 21 p. Dep. VINITI. 11.04.85. No. 2419. (In Russian).
6. Bellman R., Kuk K.L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations]. Moscow, Mir Publ., 1967, 548 p. (In Russian).
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 544 p. (In Russian).

8. Levitan B.M., Zhikov V.V. *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost Periodic Functions and Differential Equations]. Moscow, Moscow State University Publ., 1978, 205 p. (In Russian).

9. Markushevich A.I. *Tselye funktsii* [Integer Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 108 p. (In Russian).

10. Lavrentev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of Theory of Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 688 p. (In Russian).

Received 19 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Balandin Anton Sergeevich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Junior researcher of Research Center «Functional Differential Equations», e-mail: balandin-anton@yandex.ru

For citation: Balandin A.S. Ob asimptoticheskom povedenii fundamental'nogo resheniya i funktsii Koshi differentsial'nyh uravnenij nejtral'nogo tipa [On asymptotic behavior of the fundamental solution and the Cauchy function for neutral differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 187–199. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-187-199 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209

УДК 519.71, 517.977.15

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. Р. Барсегян^{1,2)}, Т. В. Барсегян²⁾

¹⁾ Ереванский государственный университет
0025, Армения, г. Ереван, ул. А. Манукяна, 1
E-mail: barseghyan@sci.am

²⁾ Институт механики НАН Армении
0019, Армения, г. Ереван, пр. М. Баграмяна, 24Б
E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача управления и оптимального управления одной системой линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Приведен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. В качестве приложения построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения; поэтапно меняющиеся системы; управление; оптимальное управление

Введение

Математическое описание динамических процессов управления, зависящих не только от настоящего, но и от предыстории процесса, осуществляется при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженными дифференциальными уравнениями в литературе [1-4] принято называть уравнения, содержащие в коэффициентах или в правой части какие-либо функционалы (функции) от решения, в частности, значения решения, в которых фазовое состояние процесса в какой-либо точке и в какой-либо момент может оказывать влияние на динамику процесса в целом.

Наличие в динамике системы нагруженного слагаемого не всегда позволяет непосредственно применять известные методы исследований, развитые при исследованиях обычных (не нагруженных) динамических систем. Это подчеркивает как теоретическую, так и практическую актуальность исследования различных задач управления и оптимального управления для нагруженных дифференциальных уравнений. В последние годы проводится интенсивное исследование нагруженных дифференциальных

уравнений, связанное с различными прикладными задачами механики, биологии, экологии и химии, моделированных с нагруженными уравнениями. Интерес исследователей к задачам управления нагруженных динамических систем связан также с необходимостью использовать наиболее адекватные математические модели рассматриваемых процессов.

Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1-5] и установлены условия их разрешимости различными методами. Значительный вклад в развитие теории нагруженных уравнений внесла работа [1] (и другие работы этого же автора), где даны определения нагруженных дифференциальных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений и их многочисленные приложения. В монографии [2] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как возмущения дифференциальных уравнений. В работе [5] рассмотрена задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. В качестве приложения построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

1. Постановка задач

Рассмотрим управляемый процесс, динамика которого описывается нагруженными линейными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u \quad (1.1)$$

где $x(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы, $A_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, 3$), $B(t)$ матрицы параметров системы (непрерывны на $[t_0, T]$), $u(t)$ управляющее воздействие, соответственно с размерностями $A_k(t) - (n \times n)$, $B(t) - (n \times r)$, $u(t) - (r \times 1)$.

В формуле (1.1) слагаемые $A_k(t)x(t_k)$ ($k = 1, 2, 3$) как функции влияют на систему, начиная с момента времени $t \geq t_k$. Так как значение фазового состояния $x(t_k)$, как результат измерения, определяется в момент времени $t = t_k$ и с этого момента (при $t \geq t_k$) непрерывно влияет на систему в виде слагаемого $A_k(t)x(t_k)$.

Пусть заданы начальное $x(t_0) = x_0$ и конечное $x(T) = x_T$ состояния системы (1.1). Предполагается, что заданы моменты времени точек нагружения и $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$. Функция $x(t)$ непрерывна на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ ($k = 1, \dots, 4$) и в точках нагружения t_k имеет конечные левосторонние пределы $\lim_{t \rightarrow t_k - 0} x(t) = x(t_k)$.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $u = u(t)$ и программное движение, переводящее движение системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ на промежутке времени $[t_0, T]$, а также построить их.

Пусть для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан критерий качества $\mathfrak{a}[u]$, который может иметь смысл нормы некоторого нормированного пространства.

Задачу оптимального управления для системы (1.1) с начальной и конечной условиями и критерием качества $\mathfrak{a}[u]$ можно сформулировать следующим образом.

Задача 2. Требуется найти оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, которое переводит движение системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ и имеет наименьшее возможное значение критерия качества $\mathfrak{a}[u^0]$.

2. О движении нагруженной управляемой линейной системы.

Для построения решений поставленных задач интервал $[t_0, T]$ разбиваем на части точками нагружения: $[t_0, T) = \bigcup_{k=1}^4 [t_{k-1}, t_k)$. Учитывая последовательность точек нагружения и характер влияния соответствующих нагруженных слагаемых, уравнение (1.1) напишем по отдельности на интервалах $[t_{k-1}, t_k)$ ($k = 1, \dots, 4$) в следующем виде

$$\dot{x} = \begin{cases} A_0(t)x + B(t)u, & t \in [t_0, t_1) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, & t \in [t_1, t_2) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + B(t)u, & t \in [t_2, t_3) \\ A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + A_2(t)x(t_2) + A_3(t)x(t_3) + B(t)u, & t \in [t_3, T] \end{cases}, \quad (2.1)$$

которое является поэтапно меняющимися дифференциальными уравнениями [5-7].

Следуя [5], решение системы (1.1) (или (2.1)) для промежутка времени $[t_0, t_1)$ представим следующим образом

$$x(t) = X[t, t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^t H[t, \tau]u(\tau)d\tau, \quad (2.2)$$

где $H[t, \tau] = X[t, \tau]B(\tau)$, а через $X[t, \tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородного уравнения $\dot{x} = A_0(t)x$. Начиная с момента времени t_1 , движения системы (2.1) представляются в следующем виде

$$x(t) = \tilde{X}[t, t_1]X[t_1, t_0]x(t_0) + \tilde{X}[t, t_1] \int_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_1}^t H[t, \tau]u(\tau)d\tau \quad (2.3)$$

при $t \in [t_1, t_2)$,

$$\begin{aligned} x(t) = & Y[t, t_2]X[t_1, t_0]x(t_0) + Y[t, t_2] \int_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau + \\ & + \tilde{X}[t, t_2] \int_{t_1}^{t_2} H[t_2, \tau]u(\tau)d\tau + \int_{t_2}^t H[t, \tau]u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.4)$$

при $t \in [t_2, t_3)$,

$$x(t) = Z[t, t_3]X[t_1, t_0]x(t_0) + Z[t, t_3] \int_{t_0}^{t_1} H[t_1, \tau]u(\tau)d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_{t_3}^t X[t, \tau] A_2(\tau) d\tau + \tilde{X}[t, t_3] \tilde{X}[t_3, t_2] \right) \int_{t_1}^{t_2} H[t_2, \tau] u(\tau) d\tau + \\
& + \tilde{X}[t, t_3] \int_{t_2}^{t_3} H[t_3, \tau] u(\tau) d\tau + \int_{t_3}^t H[t, \tau] u(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.5}$$

при $t \in [t_3, t_4]$, где

$$\tilde{X}[t, t_j] = X[t, t_j] + \int_{t_j}^t X[t, \tau] A_j(\tau) d\tau \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$Y[t, t_2] = \tilde{X}[t, t_2] \tilde{X}[t_2, t_1] + \int_{t_2}^t X[t, \tau] A_1(\tau) d\tau,$$

$$Z[t, t_3] = \int_{t_3}^t X[t, \tau] A_1(\tau) d\tau + \int_{t_3}^t X[t, \tau] A_2(\tau) d\tau \tilde{X}[t_2, t_1] + \tilde{X}[t, t_3] Y[t_3, t_2]. \tag{2.6}$$

Таким образом, имея начальное состояние $x(t_0)$ системы (1.1) и задавая управляющее воздействие $u(t)$, с помощью формулы (2.2)-(2.5) определяется фазовое состояние $x(t)$ системы (1.1) (решение нагруженного уравнения (1.1)) для промежутков времени $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 2, \dots, 4$), соответственно.

3. Решение задач

Из формулы (2.5) при $t = t_4$ имеем

$$\int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^4 H_i[t] \right) u(t) dt = x(t_4) - Z[t_4, t_3] X[t_1, t_0] x(t_0) = \eta(t_0, \dots, T), \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{H}[t_1, t] &= \begin{cases} H[t_1, t], & t_0 \leq t < t_1 \\ 0, & t_1 \leq t \leq T \end{cases}, \quad \bar{H}[t_2, t] = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_1 \\ H[t_2, t], & t_1 \leq t < t_2 \\ 0, & t_2 \leq t \leq T \end{cases} \\
\bar{H}[t_3, t] &= \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_2 \\ H[t_3, t], & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t_3 \leq t \leq T \end{cases}, \quad \bar{H}[t_4, t] = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_3 \\ H[t_4, t], & t_3 \leq t \leq T \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$H_1[t] = Z[t_4, t_3] \bar{H}[t_1, t], \quad H_2[t] = \left(\int_{t_3}^{t_4} X[t_4, \tau] A_2(\tau) d\tau + \tilde{X}[t_4, t_3] \tilde{X}[t_3, t_2] \right) \bar{H}[t_2, t],$$

$$H_3[t] = \tilde{X}[t_4, t_3] \bar{H}[t_3, t], \quad H_4[t] = \bar{H}[t_4, t].$$

Функция $u(t)$ $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющая интегральному соотношению (3.1), имеет следующий вид [6]

$$u(t) = \left(\sum_{i=1}^4 H_i[t] \right)^T Q^{-1} (x(T) - Z[T, t_3] X[t_1, t_0] x(t_0)) + v(t), \quad (3.3)$$

если $\det Q \neq 0$, где

$$Q(t_0, \dots, T) = \int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^4 H_i[t] \right) \left(\sum_{i=1}^4 H_i[t] \right)^T dt. \quad (3.4)$$

Здесь $v(t)$ – некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию ортогональности

$$\int_{t_0}^T \left(\sum_{i=1}^4 H_i[t] \right) v(t) dt = 0.$$

Следующая теорема, аналогичная теореме, приведенной в [6, 9], определяет условия существования программного управления системы (1.1).

Теорема 3.1. *Для того, чтобы существовало программное управление и соответствующее ему решение системы (1.1), удовлетворяющее условию (3.1), необходимо и достаточно, чтобы матрица (3.4) была неособой или чтобы ранги матрицы Q и $\{Q, \eta\}$ совпадали между собой.*

При заданном критерии качества $\mathfrak{A}[u]$ задача оптимального управления с интегральными условиями (3.1) является задачей условного экстремума из вариационного исчисления, где надлежит определить минимум функционала $\mathfrak{A}[u]$ при условии (3.1). Однако, как видно из (3.2), подынтегральные функции в (3.1) являются разрывными, поэтому классические методы вариационного исчисления не применимы для решения этой задачи [8].

Для решения задачи 2 заметим, что левая часть полученного условия (3.1) является линейной операцией, которая порождена функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$. Условия (3.1) с заданным функционалом $\mathfrak{A}[u]$, представляющим собой норму некоторого линейного нормированного пространства, являются проблемой моментов в соответствующем пространстве [6, 8]. Следовательно, решение задачи 2 приводится к решению соответствующей проблемы моментов, которое следует построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов [6, 8]. Тогда построенное оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющее условию (3.1) и минимизирующее функционал $\mathfrak{A}[u]$, будет решением задачи 2.

4. Пример

В качестве приложения к вышеизложенному рассмотрим задачу оптимального управления конкретной системы (с одним нагруженным слагаемым), которая состоит из двух этапов и имеет вид

$$\dot{x} = A_0(t)x + B(t)u, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.1)$$

$$\dot{x} = A_0(t)x + A_1(t)x(t_1) + B(t)u, \quad t \in [t_1, T] \quad (4.2)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a — постоянная величина.

Пусть заданы начальное и конечное фазовые состояния

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix}, \quad x(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

а критерий качества управления имеет вид

$$\mathfrak{K}[u] = \left(\int_{t_0}^T u^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Нормированная фундаментальная матрица решения однородной части системы (4.1), (4.2) и их переходные матрицы имеют следующий вид:

$$X[t, \tau] = \begin{pmatrix} 1 & t - \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H[t_1, t] = \begin{pmatrix} t_1 - t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H[T, t] = \begin{pmatrix} T - t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из формулы (2.6) для матрицы $\tilde{X}[t, t_1]$ будем иметь

$$\tilde{X}[t, t_1] = X[t, t_1] + \int_{t_1}^t X[t, \tau] A_1(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2}(T - t_1)^2 & T - t_1 \\ a(T - t_1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно обозначениям (3.2) будем иметь

$$H[t] = \tilde{X}[T, t_1] \bar{H}[t_1, t] + \bar{H}[T, t] = \begin{pmatrix} \alpha h_1^{(1)}[t_1, t] + \beta h_2^{(1)}[t_1, t] + h_1^{(2)}[T, t] \\ \gamma h_1^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(2)}[T, t] \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}[t_1, t] &= \begin{pmatrix} h_1^{(1)}[t_1, t] \\ h_2^{(1)}[t_1, t] \end{pmatrix} = \begin{cases} H[t_1, t], & t_0 \leq t < t_1, \\ 0, & t_1 \leq t \leq T, \end{cases} \\ \bar{H}[T, t] &= \begin{pmatrix} h_1^{(2)}[T, t] \\ h_2^{(2)}[T, t] \end{pmatrix} = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t < t_1, \\ H[T, t], & t_1 \leq t \leq T, \end{cases} \\ \alpha &= 1 + \frac{a}{2}(T - t_1)^2, \quad \beta = T - t_1, \quad \gamma = a(T - t_1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Интегральное соотношение (3.1) запишется в виде

$$\int_{t_0}^T h_1(t)u(t)dt = \eta_1, \quad \int_{t_0}^T h_2(t)u(t)dt = \eta_2, \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \alpha h_1^{(1)}[t_1, t] + \beta h_2^{(1)}[t_1, t] + h_1^{(2)}[T, t], & h_2(t) &= \gamma h_1^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(1)}[t_1, t] + h_2^{(2)}[T, t], \\ \eta_1 &= x_1(T) - \alpha x_1(t_0) - [\alpha(t_1 - t_0) + \beta] x_2(t_0), \\ \eta_2 &= x_2(T) - \gamma x_1(t_0) - [\gamma(t_1 - t_0) + 1] x_2(t_0). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Задача определения функции оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющего интегральным соотношениям (4.6) и минимизирующего функционал (4.4), рассматриваем как проблему моментов [6, 8].

Решая полученную задачу условного экстремума (4.4) и (4.6) как проблему моментов, для искомого оптимального управляющего воздействия получим следующие выражения:

$$u^0(t) = \begin{cases} c[(\alpha d_1 + \gamma d_2)(t_1 - t) + \beta d_1 + d_2], & t \in [t_0, t_1], \\ c[d_1(T - t) + d_2], & t \in [t_1, T], \end{cases} \quad (4.8)$$

где $c = (\eta_1 d_1 + \eta_2 d_2)(d_1^2 q_1 + 2d_1 d_2 q_2 + d_2^2 q_3)^{-1}$, $d_1 = (\eta_1 q_3 - \eta_2 q_2)$, $d_2 = (\eta_2 q_1 - \eta_1 q_2)$,

$$q_1 = \int_{t_0}^T (h_1(t))^2 dt = \alpha^2 \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + \alpha^2 (t_1 - t_0) + \frac{(T - t_1)^3}{3} + \alpha \beta (t_1 - t_0)^2,$$

$$q_2 = \int_{t_0}^T h_1(t) h_2(t) dt = \alpha \gamma \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + (\alpha + \beta \gamma) \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \beta (t_1 - t_0) + \frac{(T - t_1)^2}{2},$$

$$q_3 = \int_{t_0}^T (h_2(t))^2 dt = \gamma^2 \frac{(t_1 - t_0)^3}{3} + (t_1 - t_0) + (T - t_1) + \gamma (t_1 - t_0)^2.$$

Отметим, что при вычислении значения интегралов для функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ (4.7) учтены обозначения (4.5).

Подставляя выражение для $u^0(t)$ из (4.8), соответственно, в формулы (2.2) и (2.3), написанные для системы (4.1) и (4.2), получим явные выражения для оптимального движения $x^0(t)$ при $t \in [t_0, T]$.

5. Заключение.

Предложен конструктивный подход исследования задач оптимального управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений. Сформулировано условие существования программного управления и движения. Приведен явный вид управляющего воздействия для задачи управления и предложен конструктивный подход решения задачи оптимального управления. Для иллюстрации указанного способа построено решение задачи оптимального управления конкретной нагруженной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. *Джсеналиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы, 2010. 334 с.
3. *Джсеналиев М.Т.* Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 4. С. 641-651.
4. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 4. С. 694-716.
5. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016. 230 с.
6. *Барсегян В.Р.* Задача управления для одной системы линейных нагруженных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными промежуточными условиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 21. С. 19-32.
7. *Barseghyan V.R.* Control of stage by stage changing linear dynamic systems // Yugoslav Journal of Operations Research. 2012. Vol. 22. № 1. P. 31-39.
8. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
9. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Барсегян Вая Рафаелович, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики; Институт механики НАН Армении, ведущий научный сотрудник, e-mail: barseghyan@sci.am

Барсегян Тигран Ваяевич, Институт механики НАН Армении, г. Ереван, Армения, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: t.barseghyan@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209

THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL FOR ONE SYSTEM OF LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. R. Barseghyan^{1,2)}, T. V. Barseghyan²⁾

¹⁾ Yerevan State University

1 Alek Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

E-mail: barseghyan@sci.am

²⁾ Institute of Mechanics of National Academy Science of Armenia

24B Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Armenia

E-mail: t.barseghyan@mail.ru

Abstract. The problems of control and of optimal control of a system of linear loaded differential equations are considered. The condition for the existence of program control and motion is formulated. An explicit form of the control action for the control problem is given and a constructive approach to solve the optimal control problem is proposed. As an application, a solution to the problem of optimal control of a concrete loaded system is constructed.

Keywords: loaded differential equations; stage-by-stage changing systems; control; optimal control

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded Equations and their Applications]. Moscow, Nauka Publ., 2012, 232 p. (In Russian).
2. Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded Equations as a Perturbation of Differential Equations]. Almaty, 2010, 334 p. (In Russian).
3. Dzhenaliev M.T. Optimal'noe upravlenie lineynymi nagruzhennymi parabolicheskimi uravneniyami [Optimal control of linear loaded parabolic equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 4, pp. 641-651. (In Russian).
4. Kozhanov A.I. Nelineynye nagruzhennye uravneniya i obratnye zadachi [Nonlinear loaded equations and inverse problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 4, pp. 694-716. (In Russian).
5. Barseghyan V.R. *Upravlenie sostavnykh dinamicheskikh sistem i sistem s mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami* [Control of Compound Dynamic Systems and of Systems with Multipoint Intermediate Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 2016, 230 p. (In Russian).
6. Barseghyan V.R. Zadacha upravleniya dlya odnoy sistemy lineynykh nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy s nerazdelennymi mnogotochechnymi promezhutochnymi usloviyami [The control problem for a system of linear loaded differential equations with nonseparated multi-point intermediate conditions]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika – The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*, 2017, vol. 21, pp. 19-32. (In Russian).
7. Barseghyan V.R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 31-39.

8. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).
9. Zubov V.I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the Theory of Control]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 496 p. (In Russian).

Received 26 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Barseghyan Vanya Rafayelovich, Yerevan State University, Yerevan, Armenia, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mechanics; Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, Leading Researcher, e-mail: barseghyan@sci.am

Barseghyan Tigran Vanyaevich, Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, e-mail: t.barseghyan@mail.ru

For citation: Barseghyan V.R., Barseghyan T.V. Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya odnoy sistemy lineynykh nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy [The problem of optimal control for one system of linear loaded differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 200–209. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-200-209 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215

УДК 517.988.63, 512.562

О НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ С РЕФЛЕКСИВНЫМ БИНАРНЫМ ОТНОШЕНИЕМ

© С. Бенараб, Е. С. Жуковский

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

E-mail: benarab.sarraa@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Аннотация. Понятие упорядоченного накрывания распространяется на отображения, действующие из упорядоченного пространства X в пространство Y с рефлексивным бинарным отношением. Получено утверждение о существовании решения $x \in X$ уравнения $\Upsilon(x, x) = y$, где $y \in Y$, отображение $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$ по одному из аргументов является накрывающим, а по другому — антитонным. Приведен пример конкретного уравнения, удовлетворяющего предположениям доказанного утверждения, к которому не применимы известные результаты, так как Y не является упорядоченным пространством.

Ключевые слова: упорядоченное пространство; рефлексивное бинарное отношение; накрывающее отображение; антитонное отображение; разрешимость операторного уравнения

Введение

Понятие накрывания отображений, действующих в упорядоченных пространствах, определено в работах [1], [2] в связи с исследованием точек совпадения. На основе этого понятия в [3], [4] получены условия разрешимости операторных отображений в упорядоченных пространствах и эти результаты использованы для распространения теоремы Чаплыгина о неравенстве на неявные дифференциальные и интегральные уравнения. Нами в [5] было замечено, что в утверждениях о точках совпадения отображений $X \rightarrow Y$ бинарное отношение на множестве Y не обязано быть порядком. Здесь мы предлагаем аналог утверждений [3], [4] о разрешимости операторных уравнений, в котором также ослабляем требования к бинарному отношению на множестве Y : предполагается только его рефлексивность.

1. Основные понятия

Пусть задано частично упорядоченное пространство $X = (X, \preceq_X)$. Для элементов $x', x \in X$, удовлетворяющих этому отношению, наряду с обозначением $x' \preceq_X x$ используем также обозначение $x \succeq_X x'$. Если $x' \preceq_X x$ и $x' \neq x$, пишем $x' \prec_X x$ или $x \succ_X x'$. Для элементов $u, v \in X$ определим множества

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq_X u\}, \quad [v, u]_X \doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}.$$

Заметим, что $[v, u]_X \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $v \preceq u$.

Пусть также задано непустое множество Y , на котором определено бинарное отношение $\preceq_Y$, являющееся рефлексивным (то есть для любого $y \in Y$ выполнено $y \preceq_Y y$). Отношение $\preceq_Y$ не предполагается ни антисимметричным, ни транзитивным. В пространстве Y также пользуемся равносильными обозначениями $y' \preceq_Y y \Leftrightarrow y \succeq_Y y'$ и $y' \neq y, y' \preceq_Y y \Leftrightarrow y' \prec_Y y \Leftrightarrow y \succ_Y y'$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем *антитонным на множестве* $U \subset X$, если для любых $x_1, x_2 \in U$ таких, что $x_1 \succeq_X x_2$, выполнено

$$f(x_1) \preceq_Y f(x_2).$$

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $W \subset Y$, если

$$\forall x_0 \in X \quad \forall y \in W \quad y \preceq_Y f(x_0) \Rightarrow \exists x \in X \quad f(x) = y \text{ и } x \preceq_X x_0.$$

Пусть заданы: отображение $\Phi : X^2 \rightarrow Y$, элементы $\tilde{y} \in Y, x_0 \in X$. Определим совокупность $\mathcal{S}(x_0, \Phi, \tilde{y})$ всех таких цепей $S \subset X$, что

$$\forall x \in S \quad \Phi(x, x) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x_1, x_2 \in S \quad x_2 \prec_X x_1 \Rightarrow \Phi(x_2, x_1) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, x) = \tilde{y}. \tag{1}$$

Теорема 1. Пусть для некоторого элемента $x_0 \in X$ имеет место неравенство $\Phi(x_0, x_0) \succeq_Y \tilde{y}$ и выполнены следующие условия:

(а) Для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображение $\Phi(\cdot, x) : X \rightarrow Y$ является накрывающим множеством $W \doteq \{\tilde{y}\}$.

(б) Для любого $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ отображение $\Phi(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ является антитонным на множестве $[x, x_0]$.

(с) Для любой цепи $S \subset \mathcal{S}(x_0, \Phi, \tilde{y})$ существует элемент $u \in X$ такой, что

$$\forall x \in S \quad u \preceq_X x, \quad \Phi(u, u) \succeq_Y \tilde{y}.$$

Тогда существует решение $\xi \in \mathcal{O}_X(x_0)$ уравнения (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим множество

$$U = \{x \in O_X(x_0) : \Phi(x, x) \succeq_Y \tilde{y}\}.$$

Это множество не пусто, так как $x_0 \in U$. Определим на U порядок $\trianglelefteq$, полагая

$$u_2 \triangleleft u_1 \Leftrightarrow u_2 \prec u_1 \text{ и } \Phi(u_2, u_1) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Покажем что отношение $\trianglelefteq$ является порядком. Свойства антисимметричности и рефлексивности очевидны. Проверим свойство транзитивности. Пусть $u_3 \triangleleft u_2 \triangleleft u_1$. Тогда $u_3 \prec u_2 \prec u_1$ и $\Phi(u_3, u_2) \preceq_Y \tilde{y}$. Из условия (b) следует, что $\Phi(u_3, u_1) \preceq_Y \tilde{y}$; таким образом $u_3 \triangleleft u_1$.

Согласно принципу максимума Хаусдорфа существует максимальная цепь (относительно порядка $\trianglelefteq$) $S \subset U$, а в силу предположения (с) у этой цепи (уже относительно порядка $\preceq_X$) существует точная нижняя граница ξ . Покажем, что ξ является решением уравнения (1). Для этого элемента выполнено

$$\Phi(\xi, \xi) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x \in S \quad \xi \preceq_X x.$$

В силу предположения (a) существует элемент $\sigma \preceq_X \xi$ такой, что $\Phi(\sigma, \xi) = \tilde{y}$. Из этого равенства, в силу предположения (b) выполнено

$$\Phi(\sigma, \sigma) \succeq_Y \tilde{y}, \quad \forall x \in S \quad \Phi(\sigma, x) \preceq_Y \tilde{y}.$$

Полученные неравенства означают, что $\sigma \in U$ и $\sigma \trianglelefteq x$ при любом $x \in S$. Так как цепь S максимальная, должно выполняться включение $\sigma \in S$. Элемент ξ является нижней границей этой цепи, поэтому $\xi \succeq_X \sigma$. В то же время, по построению, $\xi \preceq_X \sigma$. Итак $\xi = \sigma$, и поэтому $\Phi(\xi, \xi) = \tilde{y}$. $\square$

Приведем пример отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 1, со значениями во множестве, на котором определено бинарное отношение, не являющееся порядком. В этой ситуации результаты работ [1]–[4] применять нельзя.

П р и м е р 1. Определим множество $X = \{w, x_1, u_1, x_2, u_2, \dots\}$, на котором зададим частичный порядок, полагая для натуральных $i \leq j$ выполненными неравенства $x_i \succ_X x_j \succ_X w$, $u_i \succ_X u_j \succ_X w$, а элементы x_i, u_j при любых i, j полагаем несравнимыми. Далее, определим множество $Y = \{z, y_1, y_2, y_3\}$ и на нем зададим бинарное отношение

$$y_1 \succeq_Y y_2, \quad y_2 \succeq_Y y_3, \quad y_3 \succeq_Y y_1, \quad z \succeq_Y z, \quad y_i \succeq_Y y_i, \quad y_i \succeq_Y z, \quad i = 1, 2, 3.$$

Это отношение не обладает свойством транзитивности (так как $y_1 \succeq_Y y_2$, $y_2 \succeq_Y y_3$, но $y_1 \not\succeq_Y y_3$), таким образом, множество Y не является упорядоченным.

Определим отображение $\Phi : X^2 \rightarrow Y$ следующим образом. Каждому натуральному i поставим в соответствие $r(i) \in \{1, 2, 3\}$ так, что $i \equiv r(i) \pmod{3}$. При всех натуральных i и произвольном элементе $x \in X$ полагаем

$$\Phi(x_i, x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(u_i, x) = y_{r(i)}, \quad \Phi(w, x) = z.$$

Для определенного такими соотношениями отображения рассмотрим уравнение (1) с любой правой частью $\tilde{y} \in Y$. Для проверки условий теоремы 1 необходимо по элементу $\tilde{y} \in Y$ определить $x_0 \in X$ так, чтобы $\Phi(x_0, x_0) \succeq_Y \tilde{y}$. Если $\tilde{y} \doteq y_1$, то в качестве x_0 можно выбрать x_3 , так как $\Phi(x_3, x_3) = y_3 \succ y_1$. Аналогично, для $\tilde{y} \doteq y_2$, можно в качестве x_0 выбрать x_1 ; для $\tilde{y} \doteq y_3$, следует принять x_2 ; а для $\tilde{y} \doteq z$ — любое x_i . Далее, для уравнения (1) с определенным здесь отображением Φ легко проверяются условия теоремы 1, уравнение, очевидно, имеет решение во множестве $\mathcal{O}_X(x_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. № 1. P. 13-33.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475-478.
3. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610-1627.
4. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96-127.
5. Бенараб С., Жуковский Е.С. Об условиях существования точек совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. Вып. 121. С. 10-16.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Бенараб Сарра, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: benarab.sarra@gmail.com

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215

ABOUT COVERING MAPPINGS WITH VALUES IN THE SPACE WITH A REFLEXIVE BINARY RELATION

S. Benarab, E. S. Zhukovskiy

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: benarab.sarra@gmail.com, zukovskys@mail.ru

Abstract. The concept of orderly covers extend to mappings acting from an ordered space X into space Y with a reflexive binary relation. An assertion is obtained about the existence of a solution $x \in X$ of the equation $\Upsilon(x, x) = y$, where $y \in Y$, the mapping $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$ one by one from the arguments is a covering, and on the other — antitone. An example of a concrete an equation satisfying the assumptions of the proved assertion, to which are not applicable known results, since Y is not an ordered space.

Keywords: ordered space; reflexive binary relation; covering mapping; antitone mapping; solvability of the operator equation

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13-33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochках sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On the points of coincidence of maps in partially ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 5, pp. 475-478. (In Russian).
3. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610-1627. (In Russian).
4. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96-127. (In Russian).
5. Benarab S., Zhukovskiy E.S. Ob usloviyakh sushchestvovaniya toček sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On the conditions of existence coincidence points for mapping in partially ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 121, pp. 10-16. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-41-680975, № 17-01-00553, № 16-01-00386).

Received 27 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Benarab Sarra, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

For citation: Benarab S., Zhukovskiy E.S. O nakryvayushchih otobrazheniyah so znacheniyami v prostranstve s refleksivnym binarnym otnosheniem [About covering mappings with values in the space with a reflexive binary relation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 210–215. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-210-215 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227

УДК 517.98

О ДИСКРЕТНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© В. Б. Васильев

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: vbv57@inbox.ru

Аннотация. Мы рассматриваем дискретную версию псевдодифференциальных операторов как первый этап построения приближенных методов решения псевдодифференциальных уравнений и их численной реализации. С этой целью вводятся классы периодических символов и дискретных операторов, рассматриваются вопросы разрешимости соответствующих дискретных уравнений и предлагаются некоторые вычислительные алгоритмы.

Ключевые слова: дискретный псевдодифференциальный оператор; дискретное уравнение; приближенное решение

Введение

Теория псевдодифференциальных операторов и уравнений к настоящему моменту представляет собой вполне сформировавшийся раздел современной математики [1-3]. Однако вопросы приближенного решения таких уравнений, на наш взгляд, практически не рассматривались в математической литературе. В связи с этим предлагается начать исследование псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач на дискретных структурах, с которыми достаточно просто проводить компьютерные вычисления. Мы начинаем с модельных операторов и уравнений и модельных областей евклидова пространства. Принцип изучения состоит в последовательной процедуре дискретизации: континуальный объект $\rightarrow$ бесконечный дискретный объект $\rightarrow$ конечный дискретный объект. Задача заключается в исследовании разрешимости и нахождения решений дискретных уравнений [5-6] и сравнений полученных решений дискретных уравнений с их континуальными аналогами.

1. Основные понятия

Пусть $A(\xi)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^m$ и удовлетворяющая условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha, \quad (1)$$

где c_1, c_2 – положительные постоянные, и $S(\mathbb{R}^m)$ – пространство Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций. Функция $A(\xi)$ порождает псевдодифференциальный оператор

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} A(\xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) d\xi dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad (2)$$

который изначально определяется на $u \in S(\mathbb{R}^m)$, а затем распространяется на более широкие пространства. Функция $A(\xi)$ называется символом псевдодифференциального оператора A .

З а м е ч а н и е 1. Обычно рассматривают более общие псевдодифференциальные операторы

$$(Au)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} A(x, \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} u(y) d\xi dy, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

порожденные символом $A(x, \xi)$, определенном на $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Однако учитывая локальный принцип наша ближайшая задача – исследование более простого оператора (2) и его дискретного аналога.

Пусть $A_d(\xi)$ – периодическая функция в $\mathbb{R}^m$ такая, что

$$c_1(1 + |\zeta_h^2|)^{\frac{\alpha}{2}} \leq |A_d(\xi)| \leq c_2(1 + |\zeta_h^2|)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (3)$$

где $\zeta_h^2 = h^{-2} \sum_{k=1}^m (e^{-ih\xi_k} - 1)^2$, и постоянные c_1, c_2 не зависят от h .

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – область (конечная или бесконечная). Мы будем рассматривать функции $u_d(\tilde{x})$, определенные на $D_d \equiv D \cap h\mathbb{Z}^m, h > 0$, и вводим следующий оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^m} \int_{\mathbb{T}^m} A_d(\xi) u_d(\tilde{y}) e^{i(\tilde{x}-\tilde{y}) \cdot \xi} h^m d\xi, \quad \tilde{x} \in D_d,$$

где $h \equiv h^{-1}, \mathbb{T}^m \equiv [-\pi, \pi]^m$.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор A_d называется дискретным псевдодифференциальным оператором или коротко h -оператором. Периодическая функция $A_d(\xi)$ называется его h -символом.

Напомним, что символ (оператор) называется эллиптическим, если

$$\text{ess} \inf_{\xi \in h\mathbb{R}^m} |A_d(\xi)| > 0,$$

и, очевидно, все рассматриваемые символы эллиптические.

1.1. Дискретное преобразование Фурье. Если $u_d(\tilde{x}), \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$, – функция дискретной переменной, мы используем термин «дискретная функция». Для таких дискретных функций можно определить дискретное преобразование Фурье

$$(F_d u_d)(\xi) \equiv \tilde{u}_d(\xi) = \sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} e^{-i\tilde{x} \cdot \xi} u_d(\tilde{x}) h^m, \quad \xi \in h\mathbb{T}^m,$$

если ряд сходится; полученная функция $\tilde{u}_d(\xi)$ является периодической на $\mathbb{R}^m$ с основным кубом периодов $h\mathbb{T}^m$. Такое дискретное преобразование Фурье сохраняет все основные свойства интегрального преобразования Фурье, в частности, обратное дискретное преобразование Фурье дается формулой

$$(F_d^{-1} \tilde{u}_d)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{h\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}_d(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m.$$

Дискретное преобразование Фурье осуществляет изоморфизм между пространствами $L_2(h\mathbb{Z}^m)$ и $L_2(h\mathbb{T}^m)$ с нормами

$$\|u_d\|_2 = \left(\sum_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} |u_d(\tilde{x})|^2 h^m \right)^{1/2} \quad \|\tilde{u}_d\|_2 = \left(\int_{\xi \in h\mathbb{T}^m} |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

1.2. Дискретные пространства. Поскольку в определении пространств Соболева–Слободецкого участвовали частные производные (по крайней мере, в начальной стадии их развития), мы используем их дискретные аналоги – хорошо известные разделенные (конечные) разности первого порядка

$$(\Delta_k^{(1)} u_d)(\tilde{x}) = h^{-1} (u_d(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_m) - u_d(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)),$$

для которых преобразование дискретное преобразование Фурье выглядит следующим образом:

$$\widetilde{(\Delta_k^{(1)} u_d)}(\xi) = h^{-1} (e^{-ih \cdot \xi_k} - 1) \tilde{u}_d(\xi).$$

Для разделенной разности второго порядка, мы, очевидно, получим

$$\begin{aligned} (\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}) &= h^{-2} (u_d(x_1, \dots, x_k + 2h, \dots, x_m) \\ &\quad - 2u_d(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_m) + u_d(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)) \end{aligned}$$

и ее преобразованием Фурье будет функция

$$\widetilde{(\Delta_k^{(2)} u_d)}(\xi) = h^{-2} (e^{-ih \cdot \xi_k} - 1)^2 \tilde{u}_d(\xi).$$

Тогда для дискретного лапласиана

$$(\Delta_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^m (\Delta_k^{(2)} u_d)(\tilde{x}),$$

мы имеем

$$\widetilde{(\Delta_d u_d)}(\xi) = h^{-2} \sum_{k=1}^m (e^{-ih \cdot \xi_k} - 1)^2 \tilde{u}_d(\xi).$$

Теперь мы определим основное пространство $S(h\mathbb{Z}^m)$, состоящее из дискретных функций с конечными полунормами

$$|u_d| = \sup_{\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m} (1 + |\tilde{x}|)^l |\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x})|$$

для любых $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m)$, $k_r \in \mathbb{N}$, $r = 1, \dots, m$, где

$$\Delta^{(\mathbf{k})} u_d(\tilde{x}) = \Delta_1^{k_1} \dots \Delta_m^{k_m} u_d(\tilde{x}).$$

Другими словами, пространство $S(h\mathbb{Z}^m)$ – это дискретный аналог пространства Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций.

О п р е д е л е н и е 2. По определению, пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$ – это замыкание пространства $S(h\mathbb{Z}^m)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{h\mathbb{T}^m} (1 + |\zeta_h^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (4)$$

О п р е д е л е н и е 3. Пространство $H^s(D_d)$ состоит из дискретных функций из $H^s(h\mathbb{Z}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{D_d}$. Норма в $H^s(D_d)$ индуцирована нормой пространства $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Пространство $H_0^s(D_d)$ состоит из дискретных функций (функционалов из $S'(\mathbb{R}^m)$) u_d с носителем в D_d , причем эти дискретные функции должны допускать продолжение на все пространство $H^s(h\mathbb{Z}^m)$. Норма в $H_0^s(D_d)$ дается формулой

$$\|u_d\|_s^+ = \inf \|\ell u_d\|_s,$$

где infimum берется по всевозможным продолжениям ℓ .

Разумеется, все нормы (4) эквивалентны L_2 -норме, но постоянные эквивалентности будут зависеть от h . В связи с этим отметим, что все постоянные, которые встретятся ниже, не зависят от h .

2. Основные результаты

Мы будем рассматривать псевдодифференциальное уравнение

$$(Au)(x) = v(x), \quad x \in D, \quad (5)$$

и предложим для его решения некие вычислительные алгоритмы.

Поскольку нам известна картина разрешимости псевдодифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}_+^m$ [3], нам следует выбрать такие дискретные псевдодифференциальные операторы, которые сохраняли бы все нужные свойства своих континуальных аналогов.

Пусть P_h – оператор сужения на $h\mathbb{Z}^m$, т. е. для $u \in S(\mathbb{R}^m)$

$$(P_h u)(x) = \begin{cases} u(\tilde{x}), & x = \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m; \\ 0, & x \notin h\mathbb{Z}^m. \end{cases}$$

Мы апробировали этот проектор для простейших псевдодифференциальных операторов, именно, для операторов Кальдерона–Зигмунда (эти операторы можно трактовать как псевдодифференциальные операторы порядка ноль) и получили вполне приемлемые результаты [7–10]. Однако структура псевдодифференциального оператора такова, что в данной ситуации более удобна другая конструкции проектора (оператора сужения).

Здесь мы введем новый оператор сужения Q_h для функций $u \in S(\mathbb{R}^m)$. Мы берем преобразование Фурье $\tilde{u}(\xi)$, далее – его сужение на $h\mathbb{T}^m$, и периодически продолжаем его на все $\mathbb{R}^m$. Далее мы применяем обратное дискретное преобразование Фурье F_d^{-1} , – это будет дискретная функция, которую мы обозначаем $(Q_h u)(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m$. По многим причинам такой проектор Q_h намного удобней введенного выше проектора P_h . Оказывается, на самом деле проекторы P_h и Q_h почти одно и то же, в соответствии со следующим результатом.

Лемма 1. Для $u \in S(\mathbb{R}^m)$, $\forall \beta > 0$, справедлива оценка

$$|(P_h u)(\tilde{x}) - (Q_h u)(\tilde{x})| \leq Ch^\beta, \quad \forall \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

где постоянная C зависит только от u .

Доказательство. На самом деле здесь речь будет идти о сравнении двух преобразований Фурье. Действительно, по определению

$$(P_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi,$$

и, соответственно,

$$(Q_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{h\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi,$$

таким образом, их разность представляется интегралом

$$(P_h u)(\tilde{x}) - (Q_h u)(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m \setminus h\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} \tilde{u}(\xi) d\xi.$$

Утверждение леммы теперь следует из инвариантности класса Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ относительно преобразования Фурье и простой оценки

$$|\tilde{u}(\xi)| \leq C_u |\xi|^{-\gamma}$$

для $\forall \gamma > 0$.

Далее, символ $A_d(\xi)$ мы определим следующим образом. Мы берем сужение $A(\xi)$ на куб $h\mathbb{T}^m$ и периодически продолжаем его на все $\mathbb{R}^m$. Мы будем рассматривать такой

h -оператор как аппроксимирующий оператор для A . Таким образом, для нахождения дискретного приближенного решения уравнения

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \quad (6)$$

в случае $D = \mathbb{R}^m$, мы можем использовать следующее дискретное уравнение

$$A_d u_d = Q_h v. \quad (7)$$

Его решение дается формулой

$$u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{h\mathbb{T}^m} e^{i\tilde{x} \cdot \xi} A^{-1}(\xi) \tilde{v}(\xi) d\xi, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

так что нам не нужно находить (приближенное) решение бесконечной системы линейной алгебраических уравнений как в [7, 8]. В нашем случае достаточно применить какую-нибудь кубатурную формулу для вычисления последнего интеграла и еще одну кубатурную формулу для вычисления преобразования Фурье $\tilde{v}(\xi)$.

С учетом леммы 1 можно сравнить континуальное и дискретное решения для достаточно гладких правых частей и символов.

Теорема 1. *Если символ $A(\xi)$ удовлетворяет условию (1) и бесконечно дифференцируем на $\mathbb{R}^m$, u – решение уравнения (5), u_d – решение уравнения (7), то для $v \in S(\mathbb{R}^m)$ имеется следующая оценка погрешности*

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq Ch^\beta, \quad \forall \tilde{x} \in h\mathbb{Z}^m,$$

для произвольного $\beta > 0$.

3. Вариации D : случай полупространства

Этот случай кардинально отличается от случая пространства $\mathbb{R}^m$, и условия эллиптичности символа уже недостаточно для разрешимости. Здесь принципиальную роль, обуславливающую картину разрешимости уравнений, играет индекс периодической факторизации.

Обозначим $\Pi_\pm = \{(\xi', \xi_m \pm i\tau), \tau > 0\}$, $\xi = (\xi', \xi_m) \in \mathbb{T}^m$.

О п р е д е л е н и е 4. Периодической факторизацией эллиптического символа $A_d(\xi)$ называется его представление в виде

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi) A_{d,-}(\xi),$$

где сомножители $A_{d,\pm}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в полу-полосы $h\Pi_\pm$ по последней переменной ξ_m при почти всех фиксированных $\xi' \in h\mathbb{T}^{m-1}$ и удовлетворяют оценкам

$$|A_{d,+}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_1(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{\alpha}{2}}, \quad |A_{d,-}^{\pm 1}(\xi)| \leq c_2(1 + |\hat{\zeta}^2|)^{\pm \frac{\alpha - \alpha_0}{2}},$$

с постоянными c_1, c_2 , не зависящими от h ,

$$\hat{\zeta}^2 \equiv \hbar^2 \left(\sum_{k=1}^{m-1} (e^{-ih\xi_k} - 1)^2 + (e^{-ih(\xi_m + i\tau)} - 1)^2 \right), \quad \xi_m + i\tau \in \hbar\Pi_{\pm}.$$

Число $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}$ называется индексом периодической факторизации.

Теорема 2. Если эллиптический символ $\tilde{A}_d(\xi)$ допускает периодическую факторизацию с индексом $\mathfrak{x}$, так что $|\mathfrak{x} - s| < 1/2$, то уравнение (6) имеет единственное решение в пространстве $H^s(D_d)$ для любой правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(D_d)$,

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) P_{\xi'}^{per}(\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi) \widetilde{\ell v_d}(\xi)),$$

$$(P_{\xi'}^{per} \tilde{u}_d)(\xi) \equiv \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_d(\xi) + \frac{h}{2\pi i} v.p. \int_{-h\pi}^{h\pi} \tilde{u}_d(\xi', \eta_m) \operatorname{ctg} \frac{h(\xi_m - \eta_m)}{2} d\eta_m \right). \quad (8)$$

З а м е ч а н и е 2. Нетрудно заключить, что решение не зависит от выбора продолжения ℓv_d .

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{x} - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$. Тогда общее решение уравнения (6) в образах Фурье имеет следующий вид

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) X_n(\xi) P_{\xi'}^{per}(X_n^{-1}(\xi) \tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi) \widetilde{\ell v_d}(\xi)) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\xi') \hat{\zeta}_m^k,$$

где $X_n(\xi)$ – произвольный многочлен степени n переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar(e^{-ih\xi_k} - 1)$, $k = 1, \dots, t$, удовлетворяющий условию (3), $c_j(\xi'), j = 0, 1, \dots, n-1$, – произвольные функции из $H_{s_j}(h\mathbb{T}^{m-1})$, $s_j = s - \mathfrak{x} + j - 1/2$.

Для случая $\mathfrak{x} - s = -n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$, мы рассмотрим следующее достаточно общее уравнение

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) + \sum_{j=0}^n K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = v_d(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in D_d, \quad (9)$$

с неизвестными функциями $u_d, \tilde{b}_j, j = 0, 1, \dots, n$, а K_j – заданные псевдодифференциальные операторы с символами $\hat{K}_j(\xi)$, удовлетворяющими условию (3) с показателем α_j .

З а м е ч а н и е 3. Оператор K_j действует следующим образом. Если обозначить $\hat{K}_j(\tilde{x})$ «ядро» псевдодифференциального оператора K_j , мы получим

$$K_j \left(\tilde{b}_j(\tilde{x}') \otimes \delta(\tilde{x}_m) \right) = \sum_{\tilde{y} \in h\mathbb{Z}^{m-1}} \hat{K}_j(\tilde{x}' - \tilde{y}', \tilde{x}_m) b_j(\tilde{y}') h^{m-1}.$$

Продолжив правую часть на все пространство $\mathbb{R}^m$ и применив дискретное преобразование Фурье, мы получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^n t_{kj}(\xi') \tilde{b}_j(\xi') = f_k(\xi'), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

где

$$t_{kj}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{-i\hbar\xi_m} - 1}{\hbar} \right)^k \frac{K_j(\xi', \xi_m)}{A_{d,-}(\xi', \xi_m)} d\xi_m,$$

$$f_k(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \left(\frac{e^{-i\hbar\xi_m} - 1}{\hbar} \right)^k A_{d,-}^{-1}(\xi', \xi_m) \widetilde{(\ell v_d)}(\xi', \xi_m) d\xi_m.$$

Теорема 4. Пусть $\varkappa - s = -n + \delta$, $n \in \mathbb{N}$, $|\delta| < 1/2$. Тогда уравнение (9) имеет единственное решение $u_d \in H^s(D_d)$, $c_j \in H^{s_j}(\hbar\mathbb{Z}^{m-1})$, $s_j = s - \alpha + \alpha_j + 1/2$, $j = 0, 1, \dots, n$, тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{ess} \inf_{\xi' \in \hbar\mathbb{T}^{m-1}} |\det(t_{kj}(\xi'))_{k,j=0}^n| > 0.$$

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \leq a \|v_d\|_{s-\alpha}^+, \quad \|b_j\|_{s_j} \leq a_j \|v_d\|_{s-\alpha}^+, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

с постоянными $a, a_1, \dots, a_n$, не зависящими от $\hbar$.

3.1. Предельный переход. Хорошо известно [4], что

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad -\pi < x < \pi,$$

где B_{2n} – числа Бернулли.

Если посмотреть на формулу (8), можно заметить, что ядро оператора $P_{\xi'}^{\text{per}}$, то есть $\hbar \cot \frac{\hbar\xi_m}{2}$ имеет следующее представление

$$\hbar \cot \frac{\hbar\xi_m}{2} = \frac{2}{\xi_m} - \hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} \left(\frac{\hbar\xi_m}{2} \right)^{2n-1},$$

так что мы получим при $\hbar \rightarrow 0$ знакомое ядро преобразования Гильберта $\frac{1}{\pi i} \frac{1}{\xi_m}$ по последней переменной. Кроме этого, нетрудно заметить, что в пределе при $\hbar \rightarrow 0$ все «периодические» многочлены теоремы 2 переходят в обычные многочлены по переменной ξ_m . Это хорошо согласуется с континуальным случаем [3].

К сожалению, для этого случая получение оценок погрешности для u и u_d не так просто как в теореме 1; пока можно лишь утверждать, что наблюдается сходимость $\tilde{u}_d$ к $\tilde{u}$ при $\hbar \rightarrow 0$.

3.2. Оценка погрешности. При достаточно сильных ограничениях на правую часть и элементы факторизации все же можно дать сравнение дискретного и континуального решений.

Лемма 2. Если $u \in S(\mathbb{R}^m)$, то имеет место оценка

$$|(F^{-1}P_{\xi'}\tilde{u})(\tilde{x}) - (F_d^{-1}P_{\xi'}^{per}\widetilde{Q_h u})(\tilde{x})| \leq Ch^\beta, \quad \tilde{x} \in h\mathbb{Z}_+^m,$$

для $\forall \beta > 0$, постоянная C зависит только от u .

Доказательство. Здесь понадобится описание и сравнение двух проекторов, связанным с преобразованием Гильберта – стандартным и периодическим. Обозначим $\chi(x)$ характеристическую функцию полупространства $\mathbb{R}_+^m$, и $\chi_d(\tilde{x})$ – характеристическую функцию дискретного полупространства $h\mathbb{Z}_+^m$. Тогда в соответствии со структурными свойствами двух упомянутых преобразований мы имеем следующие равенства

$$F^{-1}P_{\xi'}\tilde{u} = \chi \cdot u, \quad F_d^{-1}P_{\xi'}^{per}\widetilde{Q_h u} = \chi_d \cdot (Q_h u).$$

Далее можно применить лемму 1.

На основании леммы 2 и теоремы 1 можно дать какое-то сравнение дискретного и континуального решений для полупространства. В нижеследующей теореме дается такое сравнение при выполнении условий теоремы 2, когда решение существует и единственно.

Теорема 5. Если символ $A(\xi)$ удовлетворяет условию (1), бесконечно дифференцируем на $\mathbb{R}^m$ вместе с множителями его факторизации $A_\pm(\xi)$, u – решение уравнения (5), u_d – решение уравнения (7), то для $v \in S(\mathbb{R}^m)$ имеет следующая оценка погрешности

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq Ch^\beta, \quad \forall \tilde{x} \in h\mathbb{Z}_+^m,$$

для произвольного $\beta > 0$.

Замечание 4. Чтобы правильно понимать трактовку этой теоремы, мы поясним как выбирается правая часть для решения уравнения (7). Решение уравнения (5) в образах Фурье имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_+^{-1}(\xi)P_{\xi'}A_-^{-1}(\xi)\tilde{\ell}v(\xi),$$

где $P_{\xi'} = \frac{1}{2}(I + H_{\xi'})$ – проектор, определяемый классическим преобразованием Гильберта по переменной ξ_m [3]:

$$(H_{\xi'}\tilde{u})(\xi) = \frac{1}{\pi i} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\xi', \eta_m) d\eta_m}{\xi_m - \eta_m},$$

ℓv – произвольное продолжение v с $\mathbb{R}_+^m$ на все $\mathbb{R}^m$ в соответствующих функциональных пространствах. Поскольку в уравнении (6) правая часть определена только на $h\mathbb{Z}_+^m$, в качестве продолжения ℓv_d удобно выбрать $Q_h(\ell v)$ для получения искомой оценки.

Заключение

В заключение отметим, что здесь были рассмотрены только две канонические области $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}_+^m$. У нас уже имеются некоторые результаты о разрешимости дискретных уравнений в конусе $C_+^a = \{x \in \mathbf{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$ [11, 12, 13]. Мы надеемся продолжить исследования в этом направлении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.
2. Трев Ф. Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. М.: Мир, 1984. 760 с.
3. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 236 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений. М.: ГИФМЛ, 1963. 1108 с.
5. Васильев В.Б. О разрешимости некоторых дискретных уравнений // Современные проблемы физико-математических наук: материалы Междунар. конф. Орел, 2017. С. 37-41.
6. Васильев В.Б. О краевых задачах для дискретного лапласиана в полупространстве // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2017. Т. 11. С. 95-102.
7. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular operators and equations in a half-space // Azerb. J. Math. 2013. Vol. 3. № 1. P. 84-93.
8. Васильев А.В., Васильев В.Б. О разрешимости некоторых дискретных уравнений и связанных с ними оценок дискретных операторов // Доклады Академии наук. 2015. Т. 464. № 6. С. 651-655.
9. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular integrals in a half-space // Current Trends in Analysis and its Applications. Trends in Mathematics / V. Mityushev, M. Ruzhansky (eds.). Basel: Birkhäuser, 2015. P. 663-670.
10. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On a digital approximation for pseudo-differential operators // Proc. Appl. Math. Mech. 2017. Vol. 17. Issue 1. P. 763-764.
11. Vasilyev V.B. Discrete equations and periodic wave factorization // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1759. P. 0200126-1-5.
12. Vasilyev V.B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1863. P. 140014-1-4.
13. Vasilyev V.B. Discrete operators in canonical domains // WSEAS Trans. Math. 2017. Vol. 16. P. 197-201.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 25 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Васильев Владимир Борисович, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений, e-mail: vbv57@inbox.ru

Для цитирования: Васильев В.Б. О дискретных приближениях для псевдодифференциальных уравнений и связанных с ними краевых задач // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 216–227. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227

ON DIGITAL APPROXIMATIONS FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND RELATED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

V. B. Vasilyev

Belgorod State National Research University
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation
E-mail: vbv57@inbox.ru

Abstract. We consider a discrete version of pseudo-differential operators as a first stage for constructing approximate methods of solving pseudo-differential equations and their numerical realization. For this purpose we introduce the classes of periodic symbols and discrete operators, study a solvability of corresponding discrete equations and suggest some computations algorithms.

Keywords: digital pseudo-differential operator; discrete equation; approximate solution

REFERENCES

1. Taylor M.E. *Pseudodifferential Operators*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1981, 464 p.
2. Treves J.-F. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. New York, Springer, 1980, 299 p.
3. Eskin G. *Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations*. Providence, AMS, 1981, 375 p.
4. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tables of Integrals, Series, and Products*. New York, Academic Press, 2007, 1200 p.
5. Vasilyev V.B. O razreshimosti nekotorykh diskretnykh uravneniy [On solvability of some discrete equations]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Sovremennye problemy fiziko-matematicheskikh nauk»* [Proceedings of International Conference “Modern Problems of Physical and Mathematical Sciences”]. Orel, 2017, pp. 37-41. (In Russian).
6. Vasilyev V.B. O kraevykh zadachakh dlya diskretnogo laplasiana v poluprostranstve [On boundary value problems for the discrete Laplacian in the half-space]. *Matematicheskiiy forum (Itogi nauki. Yug Rossii) – Mathematical Forum (Results of Science. South of Russia)*, 2017, vol. 11, pp. 95-102. (In Russian).
7. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular operators and equations in a half-space. *Azerb. J. Math.*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 84-93.
8. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. O razreshimosti nekotorykh diskretnykh uravneniy i svyazannykh s nimi otsenkakh diskretnykh operatorov [On the solvability of certain discrete equations and related estimates of discrete operators]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2015, vol. 464, no. 6, pp. 651-655. (In Russian).

This work was supported by the State contract of the Russian Ministry of Education and Science (contract No 1.7311.2017/8.9).

9. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. Discrete singular integrals in a half-space. In: Mityushev V., Ruzhansky M. (eds.). *Current Trends in Analysis and its Applications. Trends in Mathematics*. Basel, Birkhäuser, 2015, pp. 663-670.
10. Vasilyev A.V., Vasilyev V.B. On a digital approximation for pseudo-differential operators. *Proc. Appl. Math. Mech.*, 2017, vol. 17, issue 1, pp. 763-764.
11. Vasilyev V.B. Discrete equations and periodic wave factorization. *AIP Conference Proceedings*, 2016, vol. 1759, pp. 0200126-1-5.
12. Vasilyev V.B. The periodic Cauchy kernel, the periodic Bochner kernel, and discrete pseudo-differential operators. *AIP Conference Proceedings*, 2017, vol. 1863, pp. 140014-1-4.
13. Vasilyev V.B. Discrete operators in canonical domains. *WSEAS Trans. Math.*, 2017, vol. 16, pp. 197-201.

Received 27 March 2018

Reviewed 25 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Vasilyev Vladimir Borisovich, Belgorod State National Research University, Belgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Differential Equations Department, e-mail: vbv57@inbox.ru

For citation: Vasilyev V.B. O diskretnykh approksimatsiyakh dlya psevdodifferentsial'nykh uravneniy i svyazannykh s nimi kraevykh zadach [On digital approximations for pseudo-differential equations and related boundary value problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 216–227. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-216-227 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234

УДК 517.935

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

© А. Ю. Вдовин, С. С. Рублева

ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический университет»
620100, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Сибирский тракт, 37
E-mail: vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Аннотация. Рассматривается численный метод построения неизвестного воздействия в нелинейной системе ОДУ.

Ключевые слова: обратные задачи динамики; динамический регуляризирующий алгоритм

Пусть движение динамической системы, функционирующей на временном промежутке $T = [a, b]$, описывается дифференциальным уравнением

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \quad x(a) = x_0. \quad (1)$$

Здесь $v(t) \in R^q$ — величина входного воздействия на систему в момент t . Допустимыми воздействиями будем считать всякую измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot) : T \rightarrow Q \subset R^q$, где Q — известный выпуклый компакт. Функцию $x(\cdot) : T \rightarrow R^m$, являющуюся решением по Каратеодори задачи (1), станем называть движением, порожденным воздействием $v(\cdot)$.

Будем предполагать существование компакта $\mathbf{X} \subset R^m$, для которого включение $x(t) \in \mathbf{X}$ справедливо для всех $t \in T$ и движений $x(\cdot)$, порожденных допустимыми воздействиями.

Обозначим $W = T \times \mathbf{X} \times Q$, а W_ε — его ε — окрестность. Пусть функция $f(\cdot) : W_\varepsilon \rightarrow R^m$ — непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных на W_ε . Это гарантирует существование и единственность движения, порождаемого допустимым воздействием.

Обратную задачу для системы (1) станем трактовать, как проблему восстановления неизвестного воздействия $v(\cdot)$ по информации о порождаемом им движении $x(\cdot)$. Как известно, эта задача является некорректно поставленной. Методы решения некорректных задач называются методами регуляризации, а их конкретные реализации — регуляризирующими алгоритмами. Следуя общей теории некорректных задач, рассмотрим задачу (1) как операторное уравнение первого рода

$$Au = z, \quad (2)$$

относительно неизвестного $u \in L_2 = L_2[T, R^q]$, где $z \in L = L[T, R^m]$, $A : L_2 \rightarrow L$.

В классической работе [1] была предложена общая схема построения регуляризующих алгоритмов, за счет введения в рассмотрение сглаживающего функционала. Пусть в задаче (2) вместо точных значений оператора A и элемента z известны аппроксимирующие их последовательности A_δ и z_h , где δ и h стремятся к нулю справа. Тогда, если параметр α удачно согласовать с характеристиками погрешностей δ и h , то последовательность $u(h, \alpha, \delta)$, на элементах которой достигается минимум функционала $\|A_\delta u - z_h\|_L^2 + \alpha \|u\|_{L_2}^2$, сходится к нормальному решению задачи (2).

Описанная схема нахождения приближенного решения изначально ориентирована на решение линейных задач.

Проблемы использования такого подхода к решению задачи (1) связаны с одной стороны со сложностью бесконечномерной оптимизации, и с необходимостью обладания и хранения информации о z на T с другой стороны. Опыт реализации метода сглаживающего функционала для решения задачи подобной (1) приведен в [2].

Динамический подход, позволивший избежать упомянутых выше проблем был предложен в [3], для случая линейного оператора из (2):

$$f(t, x, u) = f_1(t, x) + f_2(t, x)u$$

Использование метода управляемых моделей Н.Н. Красовского [4], позволило свести бесконечномерную задачу к серии решений конечномерных, проводимых на интервалах разбиения временного промежутка T .

Численный метод трактовался как процесс позиционного управления вспомогательной системой моделью по принципу обратной связи. При этом регуляризация метода экстремального сдвига осуществлялась с использованием сглаживающего функционала, но уже для конечномерной задачи. Сам процесс построения значения кусочно-постоянного элемента последовательности $u(h, \alpha, \delta)$ за счет необходимости выполнения конечного числа арифметических операций на каждом отрезке разбиения T мог быть реализован за время, соответствующее этому промежутку. В работе доказано, что предлагаемый конечношаговый динамический алгоритм является регуляризующим. В монографии [5] авторы распространили динамический подход на более широкий круг задач, в том числе и в более общих пространствах. В частности рассматривался нелинейный вариант задачи (1).

В работе [6] отмечено, что схема применения сглаживающего функционала может быть перенесена на нелинейный случай, с использованием конструкции компактного вложения. При этом существенное значение может иметь дополнительная информация об искомом решении задачи. В частности это может быть информация о том, что точное решение задачи (1) является непрерывным и обладает ограниченной вариацией. В последнем случае предполагается наличие информации о значении $v(\cdot)$ в точке a .

В настоящей работе предлагается вариант динамического регуляризующего алгоритма для нелинейной задачи (1), построенный по схеме, изложенной в [7]. Построенный алгоритм обладает важным свойством понижения зашумленности решения.

В дополнение к допущениям о задаче (1), сделанным выше, будем предполагать, что $q \leq m$, а также существование, липшицевость и наличие полного ранга матрицы

– функции $\frac{\partial f}{\partial v}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f_v(\cdot)$ на W_ε , непрерывность и ограниченность вариации $v(\cdot)$.

Систему (1) представим в удобном для дальнейшего изучения в виде:

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t - \Delta)) + f_v(t, x(t), v(t - \Delta))(v(t) - v(t - \Delta)) + R(t, \Delta).$$

Из равенства

$$\begin{aligned} f(t, x(t), v(t)) - f(t, x(t), v(t - \Delta)) - f_v(t, x(t), v(t - \Delta))(v(t) - v(t - \Delta)) = \\ = \int_0^1 \left(f_v(t, x(t), \tau v(t)) - f_v(t, x(t), (1 - \tau)v(t - \Delta)) \right) d\tau (v(t) - v(t - \Delta)) \end{aligned}$$

следует существование $\lambda \geq 0$ такого, что

$$|R(t, \Delta)| \leq \frac{1}{2}\lambda |v(t) - v(t - \Delta)|^2. \quad (3)$$

Рассмотрим задачу

$$y'(t) = f(t, x(t), v(t - \Delta)) - f_v(t, x(t), v(t - \Delta))(v(t) - v(t - \Delta)).$$

При этом

$$x'(t) - y'(t) = R(t, \Delta). \quad (4)$$

Также рассмотрим систему, моделирующую как движение $x(\cdot)$, так и $x'(\cdot)$.

$$w'_0(t) = \frac{x(t) - w_0(t)}{\alpha} \quad (5)$$

Система (5) является классической жесткой задачей, поэтому для ее численного решения целесообразно использовать неявные методы, обладающие внутренним регуляризирующим эффектом.

Зададим разбиение T узлами t_i :

$$t_0 = a, \quad t_n = b, \quad t_i - t_{i-1} = \Delta \quad (0 \leq i \leq n).$$

Для функции $\varphi(\cdot)$, определенной на T , условимся $\varphi(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_i$. Будем предполагать возможность получения неточной информации о движении в узлах разбиения:

$$|x_i - \xi_i| \leq h.$$

Реализация метода Эйлера для решения (5) при использовании неточной информации дает

$$w_{i+1}^h = w_i^h + (\xi_{i+1} - w_{i+1}^h) \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}; \quad w_0^h = \xi_0. \quad (6)$$

Как отмечалось выше, параметры метода должны зависеть от погрешности h .

Из (6) следует, что

$$w_{i+1}^h = \xi_{i+1} - \frac{\alpha(h)}{\Delta(h) + \alpha(h)} (\xi_{i+1} - w_i^h), \quad (7)$$

$$\frac{\xi_{i+1} - w_{i+1}^h}{\alpha(h)} = \frac{\xi_{i+1} - w_i^h}{\Delta(h) + \alpha(h)}. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) позволяют выбрать такое согласование параметров, что переменные $h, \Delta(h), \frac{\alpha(h)}{\Delta(h)}, \frac{h}{\alpha(h)}$ вместе стремятся к нулю справа.

Далее для упрощения записей примем следующую договоренность: произведение функций одинакового аргумента $r_1(\cdot)r_2(\cdot)\dots r_k(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \{r_1r_2\dots r_k\}(\cdot)$. Систему (5) за счет выбора управления $u^0(\cdot)$ приведем к виду

$$w'_0(t) = f(t, x(t), u^0(t - \Delta)) + f_v(t, x(t), u^0(t - \Delta))(u^0(t) - u^0(t - \Delta)).$$

Отсюда

$$u^0(t) = u^0(t - \Delta) + \{(f_v^T f_v)^{-1} f_v^T\}(t, x(t), u^0(t - \Delta))(w'_0(t) - f(t, x(t), u^0(t - \Delta))).$$

Дискретизация с учетом неточности информации и (8) приводят к соотношению

$$u_{i+1}^h = u_i^h + \{(f_v^T f_v)^{-1} f_v^T\}(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^h) \left(\frac{\xi_{i+1} - w_i}{\Delta(h) + \alpha(h)} - f(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^h) \right). \quad (9)$$

Таким образом, возникает необходимость иметь информацию о значении u_0^h с точностью $\delta(h)$ и согласованием $\frac{\delta(h)}{\Delta(h)} \rightarrow +0$ вместе с h . Поскольку в силу (3), (4) и свойств метода Эйлера имеет место последовательность сходимостей в $L(T, R^m)$

$$w^h(\cdot) \rightarrow w'_0(\cdot) \rightarrow y'(\cdot) \rightarrow x'(\cdot),$$

то последовательность $u^h(\cdot)$ сходится к $v(\cdot)$ при $h \rightarrow +0$.

Таким образом, формулы (6), (9) и значение u_0^h при выполнении предлагаемого согласования параметров $h, \alpha(h), \Delta(h), \delta(h)$ задают динамический регуляризирующий алгоритм.

Отметим положительные моменты рассматриваемого метода.

1. Малый объем используемой памяти: для выполнения операции на шаге требуется информация об одном значении функций $x(\cdot)$, $w(\cdot)$, $f(\cdot)$, $f_v(\cdot)$.
2. Используемый для моделирования $x'(\cdot)$ метод обладает регуляризирующим эффектом.
3. Элемент $u_{i+1} - u_i$ минимизирует сглаживающий функционал на шаге, тем самым минимизируется вариация решения.
4. Величина шага разбиения метода равна корню из шага обычного метода Эйлера, в связи с этим, несмотря на необходимость псевдообращения матрицы $f_v(\cdot)$, его результирующая трудоемкость существенно ниже.
5. Пункты 2 и 3 позволяют снизить зашумленность приближенного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151. № 3. С. 501-504.
2. *Аникин С.А.* Об оценке погрешности метода регуляризации А.Н. Тихонова в задачах восстановления входов динамических систем // ЖВМ и МФ. 1997. Т. 37. № 9. С. 1056-1057.
3. *Кряжжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51-60.
4. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.
6. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 200 с.
7. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* О реконструкции воздействия в системе обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1093-1096.

Поступила в редакцию 19 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 27 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Вдовин Андрей Юрьевич, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Рублева Светлана Сергеевна, Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: rublevas@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234

NUMERICAL SIMULATION OF THE INPUT IMPACT
IN A NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEM

A. Y. Vdovin, S. S. Rubleva

Ural State Forest Engineering University
37 Sibirsky tract, Yekaterinburg 620100, Russian Federation
E-mail: vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Abstract. A numerical method for constructing an unknown effect in a nonlinear system of ODEs is considered.

Keywords: inverse problems of dynamics; the dynamic regularization algorithm

REFERENCES

1. Tikhonov A.N. O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regularizatsii [The solution of ill-posed problems and regularization method]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1963, vol. 151, no. 3, pp. 501-504. (In Russian).
2. Anikin S.A. Ob otsenke pogreshnosti metoda regularizatsii A.N. Tikhonova v zadachakh vosstanovleniya vkhodov dinamicheskikh sistem [On the error estimation of the regularization method Tikhonov in problems of restoration of inputs of dynamic systems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1997, vol. 37, no. 9, pp. 1056-1057. (In Russian).
3. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. O modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme [On the modeling of control in a dynamic system]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1983, no. 2, pp. 51-60. (In Russian).
4. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata* [The Control of Dynamic System. The Problem of Minimum Guaranteed Result]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. *Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions*. London, Gordon and Breach, 1995.
6. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya* [Regularizing Algorithms and a priori Information]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 200 p. (In Russian).
7. Vdovin A.Yu., Rubleva S.S. O rekonstruktsii vozdeystviya v sisteme obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The reconstruction of impact in the system of ordinary differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1093-1096. (In Russian).

Received 19 March 2018

Reviewed 27 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Vdovin Andrey Yurievich, Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the High Mathematics Department, e-mail: vdovin@usfeu.ru

Rubleva Svetlana Sergeevna, Ural State Forest Engineering University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the High Mathematics Department, e-mail: rublevas@mail.ru

For citation: Vdovin A.Y., Rubleva S.S. Chislennoye modelirovaniye vkhodnogo vozdeystviya v nelineynoy dinamicheskoy sisteme [Numerical simulation of the input impact in a nonlinear dynamical system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 228–234. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-228-234 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242

УДК 517.977

О ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ С УСЛОВИЕМ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ТИПА

© Н. И. Восковская, М. Б. Зверева, М. И. Каменский

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

E-mail: natashavskvskaia@rambler.ru, margz@rambler.ru, mikhaillkamenski@mail.ru

Аннотация. В настоящей работе мы исследуем начально-краевую задачу, описывающую колебательный процесс с краевым условием гистерезисного типа. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны, натянутой вдоль отрезка $[0, l]$, движение которой в точке $x = l$ ограничено втулкой. При этом втулка сама может двигаться в перпендикулярном к $[0, l]$ направлении. Получен аналог формулы Даламбера. Для малого промежутка времени найдено решение задачи граничного управления, заключающейся в поиске управляющей функции, обеспечивающей переход колебательного процесса из начального состояния в заданное финальное состояние.

Ключевые слова: волновое уравнение; колебания струны; формула Даламбера; задача граничного управления

Введение

Изучению задач управления распределенными системами и их оптимизации посвящено много работ. Особенно можно выделить публикации В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, Л.Н. Знаменской, А.И. Егорова, А.В. Боровских [1]–[4], в которых в явном виде выписано управление, позволяющее перевести колебательный процесс из начального состояния, определенного начальными смещениями и скоростями системы, в наперед заданное финальное состояние. Существенным для нахождения управления является возможность представления решения исследуемой задачи с помощью формулы Даламбера. В настоящей работе получен аналог формулы Даламбера для представления решения начально-краевой задачи, описывающей колебательные процессы с краевым условием гистерезисного типа. Такого рода задача возникает при моделировании колебаний струны, движение которой на одном из концов ограничено втулкой. Получено решение задачи граничного управления для случая малого промежутка времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-51-52022, № 16-01-00386), Министерства образования Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017/ПЧ).

1. Основные понятия

Пусть H — гильбертово пространство. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в H . Для замкнутого выпуклого множества $C \subset H$ множество

$$N_C(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x \rangle \leq 0 \quad \forall c \in C\}$$

называется нормальным конусом к C в точке x , где $x \in C$.

Рассмотрим так называемый "sweeping" процесс

$$-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

$$u(0) = u_0 \in C(0). \quad (2)$$

Функция $u : [0, T] \rightarrow H$ является решением начальной задачи (1), (2) если

- (а) $u(0) = u_0$;
- (б) $u(t) \in C(t)$ для всех $t \in [0, T]$;
- (с) u дифференцируема для почти всех $t \in [0, T]$;
- (д) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$.

Исследованию задач со "sweeping" процессами посвящено много работ (например, [5]–[13]). Для нас существенной является следующая теорема из [13].

Теорема 1. Пусть отображение $t \rightarrow C(t)$ удовлетворяет неравенству

$$d_H(C(t), C(s)) \leq L|t - s|,$$

где $d_H(C(t), C(s))$ — хаусдорфово расстояние между множествами $C(t)$ и $C(s)$, $C(t) \subset H$ — непустое, замкнутое, выпуклое множество для всех $t \in [0, T]$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение $u(t)$ в классе абсолютно-непрерывных функций.

Рассмотрим задачу о колебаниях струны, в которой "sweeping" процесс выступает в качестве краевого условия.

2. Основные результаты

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ натянута струна, отклонение которой от положения равновесия определяется функцией $u(x, t)$. Предположим, что левый конец струны жестко закреплен, то есть выполнено условие $u(0, t) = 0$. Правый конец струны скользит (без учета трения) по вертикальной спице внутри втулки, представляющей собой отрезок $[-h, h]$, где $h > 0$. Мы рассматриваем случай, когда втулка также движется в перпендикулярном к оси Ox направлении так, что ее движение задается отображением

$$C(t) = [-h, h] + \xi(t). \quad (3)$$

Если $-h + \xi(t) < u(l, t) < h + \xi(t)$, то правый конец струны внутри втулки остается свободным, что может быть выражено условием $u'_x(l, t) = 0$ [14]. Если же струна касается

граничной точки втулки, то некоторое время выполняется условие $u(l, t) = h + \xi(t)$, либо $u(l, t) = -h + \xi(t)$ соответственно.

Предположим, что в начальный момент времени скорость струны нулевая, а форма струны задается функцией $\varphi \in W_2^1[0, l]$. Причем, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) \in C(0)$.

Математическая модель такой задачи может быть представлена в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(l, t) \in C(t) \\ -u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Множество $N_{C(t)}(u(l, t))$ — нормальный конус к $C(t)$ в точке $u(l, t)$. Заметим, что если $u(l, t)$ — внутренняя точка множества $C(t)$, то $N_{C(t)}(u(l, t)) = \{0\}$; если $u(l, t) = -h + \xi(t)$, то $N_{C(t)}(u(l, t)) = (-\infty, 0]$; если $u(l, t) = h + \xi(t)$, то $N_{C(t)}(u(l, t)) = [0, +\infty)$. Таким образом, условие $-u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$ означает, что если $u(l, t)$ — внутренняя точка $C(t)$, то $u'_x(l, t) = 0$, то есть колебательный процесс происходит как у струны со свободным правым концом; как только происходит соприкосновение струны с граничной точкой втулки, правый конец струны перестает быть свободным: на него со стороны втулки действует сила $f(t)$, так что $-u'_x(l, t) = -f(t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$.

Решение задачи (4) понимается в обобщенном смысле в классе функций, введенном В.А. Ильиным [1], [2]. Обозначим через Q_T прямоугольник

$$Q_T = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T].$$

Как и в [1], [2] будем говорить, что $u(x, t)$ принадлежит классу $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, если функция $u(x, t)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Q_T и имеет в этом прямоугольнике обе обобщенные частные производные $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$ и, кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при любом фиксированном t из сегмента $[0, T]$ и классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при любом фиксированном x из сегмента $[0, l]$. Решением задачи (4) назовем функцию $u(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую для всех t условию $u(l, t) \in C(t)$, почти всюду условию $-u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$, а также интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Psi_{tt}(x, t) - \Psi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \Psi'_t(x, 0) \varphi(x) dx - \\ & - \int_0^T \Psi(l, t) u'_x(l, t) dt + \int_0^T \Psi'_x(l, t) u(l, t) dt = 0 \end{aligned}$$

для любой $\Psi(x, t) \in C^2(Q_T)$, удовлетворяющей условиям $\Psi(0, t) = 0$, $\Psi(x, T) = 0$, $\Psi_t(x, T) = 0$.

Теорема 2. Пусть функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию Липшица, то есть

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leq L|t - s|.$$

Тогда решение задачи (4) существует, единственно, и может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x - t) + \Phi(x + t)}{2},$$

где $\Phi(x)$ — нечетная функция, совпадающая с $\varphi(x)$ на отрезке $[0, l]$. На любом отрезке вида $[(n + 1)l, (n + 2)l]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) функция $\Phi(x)$ представима в виде конечной суммы, равной

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} g_{2k}(x - (n + 1 - 2k)l) - \varphi((n + 2)l - x),$$

если n — четное число и

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} g_{2k-1}(x - (n + 2 - 2k)l) + \varphi(x - (n + 1)l),$$

если n — нечетное число. Здесь функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ — решения следующих задач

$$\begin{cases} -g'_0(t) \in N_{C(t)}(g_0(t)) + \varphi'(l - t), t \in [0, l] \\ g_0(0) = \varphi(l), \end{cases}$$

$$\begin{cases} -g'_1(t) \in N_{C(t)}(g_1(t)) + \varphi'(t - l), t \in [l, 2l] \\ g_1(l) = g_0(l). \end{cases}$$

Функции $g_i(t)$ для четных номеров $i \geq 2$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -g'_i(t) \in N_{C(t)}(g_i(t)) + 2 \sum_{k=0}^{\frac{i-2}{2}} g'_{2k}(t - il + 2kl) + \varphi'(il + l - t), t \in [il, (i + 1)l] \\ g_i(il) = g_{i-1}(il), \end{cases}$$

а для нечетных номеров $i \geq 3$ являются решениями задач

$$\begin{cases} -g'_i(t) \in N_{C(t)}(g_i(t)) + 2 \sum_{k=1}^{\frac{i-1}{2}} g'_{2k-1}(t - l - il + 2kl) + \varphi'(t - il), t \in [il, (i + 1)l] \\ g_i(il) = g_{i-1}(il). \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи (4) может быть определено на любом прямоугольнике Q_T . Справедливость теоремы устанавливается непосредственной подстановкой полученных представлений в задачу (4) и применением цитированной теоремы 1 из [13].

Рассмотрим задачу граничного управления

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < l, 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu(t), \\ u(l, t) \in C(t) \\ -u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t)), \end{cases} \quad (5)$$

где $\varphi \in W_2^1[0, l]$, $\mu \in W_2^1[0, T]$. Решением задачи (5) мы называем функцию $u \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(l, t) \in C(t)$ для всех t , условию $-u'_x(l, t) \in N_{C(t)}(u(l, t))$ для почти всех t , а также интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Psi_{tt}(x, t) - \Psi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l \Psi'_t(x, 0) \varphi(x) dx - \\ & - \int_0^T \Psi(l, t) u'_x(l, t) dt + \int_0^T \Psi'_x(l, t) u(l, t) dt - \int_0^T \Psi'_x(0, t) \mu(t) dt = 0 \end{aligned}$$

для любой $\Psi(x, t) \in C^2(Q_T)$, такой, что $\Psi(0, t) = 0$, $\Psi(x, T) = 0$, $\Psi_t(x, T) = 0$. Задача граничного управления заключается в поиске функции $\mu(t)$, такой, что в момент времени T выполняются заданные равенства

$$u(x, T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x, T) = \psi^*(x),$$

где $\varphi^* \in W_2^1[0, l]$, $\psi^* \in L_2[0, l]$. Рассмотрим случай, когда $T < l$. Предположим, что $\varphi(0) = 0$ и $|\xi(t)| \leq h$.

Теорема 3. Пусть начальные и финальные данные задачи (5) связаны между собой равенствами

$$\widehat{\psi^*}(x) - \varphi^*(x) + \varphi(x - T) \equiv 0, \quad T \leq x \leq l,$$

$$\widehat{\psi^*}(x_0) - \varphi^*(x_0) + \varphi(x_0 - T) = 0, \quad x_0 \in [T, l]$$

$$\widehat{\psi^*}(x) + \varphi^*(x) - \varphi(x + T) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq l - T,$$

$$\widehat{\psi^*}(x) + \varphi^*(x) - 2g_0(T + x - l) - \varphi(2l - x - T) + 2\varphi(l) \equiv 0, \quad l - T \leq x \leq l,$$

$x_0 \in [T, l]$ — фиксированное число, $\widehat{\psi^*}(x)$ первообразная для функции $\psi^*(x)$. Тогда задача граничного управления (5) имеет единственное решение

$$\mu(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t) - \widehat{\psi^*}(T - t) + \varphi^*(T - t)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны // Успехи математических наук. 2005. Т. 60. Вып. 6 (366). С. 89-114.
2. Избранные труды В.А. Ильина: в 2 т. М.: МАКС Пресс, 2008. Т. 2. 692 с.
3. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. Вып. 1. С. 85-92.
4. Боровских А.В. Формулы граничного управления неоднородной струной. I. // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. Вып. 1. С. 64-89.
5. Adam L., Outrata J. On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2014. Vol. 19. № 9. P. 2709-2738.
6. Adly S., Le B.K. Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 169. № 2. P. 407-423.

7. *Castaing C., Monteiro Marques M.* BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets // *Set-Valued Anal.* 1995. Vol. 3. № 4. P. 381-399.
8. *Edmond J. F., Thibault L.* Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process // *Math. Program.* 2005. Vol. 104. № 2-3. P. 347-373.
9. *Kamenskii M., Makarenkov O.* On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations // *Set-Valued and Variational Analysis.* 2000. Vol. 24. № 4. P. 551-563.
10. *Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M.* A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type // *Optimization.* 2017. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379>
11. *Zvereva M.* A string oscillations simulation with nonlinear conditions // *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics.* 2017. Vol. 72. P. 141-150.
12. *Зверева М.Б., Каменский М.И., Шабров С.А.* Математическая модель колебаний струны с нелинейным условием // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика.* 2017. № 4. С. 88-98.
13. *Kunze M., Monteiro Marques M.* An introduction to Moreau's sweeping process // *LNP.* 2000. Vol. 551. P. 1-60.
14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Издательство МГУ, 1999. 797 с.

Поступила в редакцию 27 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Восковская Наталья Игоревна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: natashavskvskaja@rambler.ru

Зверева Маргарита Борисовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, e-mail: margz@rambler.ru

Каменский Михаил Игоревич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой функционального анализа, e-mail: mikhaillkamenski@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242

ON THE WAVE EQUATION WITH THE HYSTERESIS TYPE CONDITION

N. I. Voskovskaya, M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii

Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru, margz@rambler.ru, mikhaikamenski@mail.ru

Abstract. In this paper we investigate the initial-boundary value problem describing the oscillation process with a hysteresis-type boundary condition. This kind of problem arises in modeling of the string oscillations, where the movement is restricted by a sleeve concentrated at one point $x = l$. We suppose that the string is located along the segment $[0, l]$ and the sleeve can move in perpendicular to $[0, l]$ direction. The analog of d'Alembert formula is obtained. A boundary control problem is analyzed for a small period of time. The boundary control problem is to find a control function allowing to put the oscillation process from the initial state to the given final state.

Keywords: wave equation; string oscillations; d'Alembert formula; boundary control problem

REFERENCES

1. Ilin V.A., Moiseev E.I. Optimizatsiya granichnykh upravleniy kolebaniyami struny [Optimization of boundary controls of string vibrations]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2005, vol. 60, no. 6 (366), pp. 89-114. (In Russian).
2. *Izbrannye trudy V.A. Il'ina* [Selected Works of V.A. Il'in]. Moscow, MAKS Press Publ., 2008, vol. 2, 692 p. (In Russian).
3. Egorov A.I., Znamenskaya L.N. Ob upravlyaemosti uprugikh kolebaniy posledovatel'no soedinnennykh ob"ektov s raspredelennymi parametrami [On the controllability of elastic oscillations connected in series objects with distributed parameters]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 85-92. (In Russian).
4. Borovskikh A.V. Formuly granichnogo upravleniya neodnorodnoy strunoy. I. [Formulas of boundary control of an inhomogeneous string: I]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 1, pp. 64-89. (In Russian).
5. Adam L., Outrata J. On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, vol. 19, no. 9, pp. 2709-2738.
6. Adly S., Le B. K. Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces. *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 169, no. 2, pp. 407-423.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 17-51-52022, № 16-01-00386), the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (project № 1.3464.2017).

7. Castaing C., Monteiro Marques M. BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets. *Set-Valued Anal.*, 1995, vol. 3, no. 4, pp. 381-399.
8. Edmond J. F., Thibault L. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Math. Program.*, 2005, vol. 104, no. 2-3, pp. 347-373.
9. Kamenskii M., Makarenkov O. On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2000, vol. 24, no. 4, pp. 551-563.
10. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type. *Optimization*, 2017. <https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1388379>
11. Zvereva M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 2017, vol. 72, pp. 141-150.
12. Zvereva M.B., Kamenskiy M.I., Shabrov S.A. Matematicheskaya model' kolebaniy struny s nelineynym usloviem [A mathematical model of string oscillations with nonlinear condition]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 88-98.
13. Kunze M., Monteiro Marques M. An introduction to Moreau's sweeping process. *LNP*, 2000, vol. 551, pp. 1-60. (In Russian).
14. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999, 797 p. (In Russian).

Received 27 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Voskovskaya Natalia Igorevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Functional Analysis and Operator Equations, e-mail: natashavskvskaja@rambler.ru

Zvereva Margarita Borisovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: margz@rambler.ru

Kamenskii Mikhail Igorevich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Functional Analysis and Operator Equations, e-mail: mikhaillkamenski@mail.ru

For citation: Voskovskaya N.I., Zvereva M.B., Kamenskii M.I. O volnovom uravnenii s usloviem gisterezisnogo tipa [On the wave equation with the hysteresis type condition]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 235–242. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-235-242 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249

УДК 517.988.6

НЕРАВЕНСТВО КАРИСТИ И ОБОБЩЕННЫЕ СЖАТИЯ (СЛУЧАЙ ОДНОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ)

© Б. Д. Гельман

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: gelman@math.vsu.ru

Аннотация. В настоящей работе рассматривается новое неравенство типа Каристи и доказывается теорема о неподвижной точке. В дальнейшем опираясь на полученную теорему, изучаются отображения (обобщенные сжатия), которые сжимают относительно некоторой функции 2-х векторных аргументов. Эта функция не обязана быть метрикой и даже непрерывной.

Ключевые слова: метрическое пространство; обобщенное сжатие; неподвижная точка

Введение

Пусть отображение $f : X \rightarrow X$. Хорошо известно, при каких предположениях можно определить такую метрику ρ на X , что (X, ρ) будет полным метрическим пространством, а отображение f будет сжимающим в этой метрике (см. [1]). Невзирая на это, существует большое количество работ, посвященных различным обобщениям и вариантам принципа сжимающих отображений (см., например, обзор [2] и книгу [3]), так как это позволяет удобнее применять этот принцип в конкретных задачах. Одним из таких обобщений является теорема Каристи. Приведем формулировку однозначного варианта этой теоремы. Многочисленный вариант этой теоремы доказан в [4].

Теорема Каристи. Пусть X полное метрическое пространство, $f : X \rightarrow X$ непрерывное отображение. Пусть существует неотрицательная функция $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ и неотрицательное число c такие, что для любой точки $x \in X$ будет выполняться неравенство Каристи,

$$\alpha(f(x)) + c\rho(x, f(x)) \leq \alpha(x). \quad (K)$$

Тогда отображение f имеет неподвижную точку, то есть существует такая точка $x_* \in X$, что $f(x_*) = x_*$.

В процессе доказательства этой теоремы неравенство (K) позволяет построить сходящуюся итерационную последовательность, которая сходится к неподвижной точке x_* .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00677).

Отметим работу [5] в которой неравенство Каристи применяется для изучения неподвижных точек и точек совпадения двух многозначных отображений.

В настоящей работе мы рассмотрим новое неравенство типа Каристи и опираясь на полученную теорему, изучим отображения (обобщенные сжатия), которые сжимают относительно некоторой функции 2-х векторных аргументов, которая не обязана быть метрикой и даже непрерывной.

1. Обобщенные сжатия

Пусть (X, ρ) полное метрическое пространство, $f : X \rightarrow X$ непрерывное отображение, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ некоторая ограниченная снизу функция и $\gamma_0 = \inf_{(x,y) \in X \times X} \alpha(x, y)$.

Теорема 1. Пусть существует такое число $c > 0$, что для любых точек $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\alpha(f(x), f(y)) + c\rho(x, y) \leq \alpha(x, y). \quad (1)$$

Тогда для любой точки x_0 последовательные приближения $x_{n+1} = f(x_n)$ сходятся к единственной неподвижной точке x_* отображения f и для нее справедливо неравенство

$$\rho(x_*, x_0) \leq \frac{\alpha(x_0, f(x_0)) - \gamma_0}{c}. \quad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим итерационную последовательность точек, выходящую из точки x_0 , то есть $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... $x_n = f(x_{n-1})$, Пусть число $u_n = \alpha(x_n, x_{n+1})$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. В силу предположений теоремы для любого n справедливо неравенство:

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq c^{-1} \left(\alpha(x_n, x_{n+1}) - \alpha(x_{n+1}, x_{n+2}) \right) = c^{-1} (u_n - u_{n+1}). \quad (3)$$

Тогда последовательность $\{u_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу, следовательно, является фундаментальной. Нетрудно проверить, что в этом случае фундаментальной является и последовательность $\{x_n\}$. Действительно,

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{c} (u_i - u_{i+1}) \leq \frac{1}{c} (u_n - u_{n+p}),$$

откуда и следует фундаментальность этой последовательности.

Тогда существует точка x_* , которая является пределом последовательности $\{x_n\}$. Так как отображение f непрерывно, то $x_* = f(x_*)$, то есть x_* является неподвижной точкой этого отображения.

Покажем единственность неподвижной точки. Пусть точки x_* и x'_* являются неподвижными точками отображения f , тогда в силу неравенства (1)

$$\alpha(x_*, x'_*) + c\rho(x_*, x'_*) \leq \alpha(x_*, x'_*).$$

Следовательно, $\rho(x_*, x_*) = 0$, что и доказывает единственность неподвижной точки.

Для доказательства (2) рассмотрим следующие неравенства: если ε произвольное положительное число, то существует такое n , что $\rho(x_0, x_*) \leq \rho(x_0, x_n) + \varepsilon$. Оценим $\rho(x_0, x_n)$. В силу неравенства треугольника

$$\rho(x_0, x_n) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{n-1} c^{-1}(u_i - u_{i+1}) = c^{-1}(u_0 - u_n),$$

где $u_0 = \alpha(x_0, x_1)$, а $u_{i-1} = \alpha(x_{i-1}, x_i) \geq \gamma_0$.

Таким образом,

$$\rho(x_0, x_*) \leq \frac{(\alpha(x_0, x_1) - \gamma_0)}{c} + \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$, что и доказывает неравенство (2). Теорема полностью доказана.

Рассмотрим утверждение, которое является некоторой обобщенной формой принципа сжимающих отображений Банаха.

Следствие 1. Пусть существуют такие числа $q > 0$ и $k \in (0, 1)$ что для любых $x, y \in X$ справедливы неравенства:

(I) $\rho(x, y) \leq q \alpha(x, y)$;

(II) $\alpha(f(x), f(y)) \leq k \alpha(x, y)$.

Тогда обобщенное сжатие f имеет единственную неподвижную точку x_* и для любой точки x_0 справедливо неравенство

$$\rho(x_*, x_0) \leq \frac{\alpha(x_0, f(x_0)) - \gamma_0}{q(1 - k)}.$$

Доказательство. Из неравенства (II) вытекает, что

$$\alpha(f(x), f(y)) + (1 - k)\alpha(x, y) \leq \alpha(x, y).$$

В силу неравенства (I) имеем, что

$$\alpha(f(x), f(y)) + \frac{1 - k}{q} \rho(x, y) \leq \alpha(x, y).$$

Теперь справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим пример отображения, которое удовлетворяет условиям следствия 1.

Пример 1. Пусть $X = [-1, 1]$, отображение $f : X \rightarrow X$ определено условием $f(x) = \frac{3}{4}x^2$. Очевидно, что это отображение не является сжимающим относительно обычной метрики на числовой прямой. Однако, легко заметить, что это отображение удовлетворяет условиям следствия 1 относительно функции $\alpha(x, y) = |x| + |y|$.

Рассмотрим некоторые другие примеры функций α , удовлетворяющих неравенству (I). Каждый такой пример позволяет сформулировать некоторую теорему о неподвижной точке.

Пример 2. Пусть $g : X \times X \rightarrow X$ произвольное отображение, определим функцию α следующим образом:

$$\alpha(x, y) = \rho(x, g(x, y)) + \rho(y, g(x, y)).$$

Очевидно, что в силу неравенства треугольника эта функция удовлетворяет неравенству (I) с константой $q = 1$.

Пример 3. Пусть f наше основное отображение, рассмотрим функцию

$$\alpha(x, y) = \max\{\rho(x, y), \rho(x, f(x)), \rho(y, f(y))\}.$$

Очевидно, что эта функция также удовлетворяет неравенству (I) с константой $q = 1$.

Рассмотрим теперь локальный вариант теоремы 1. Пусть x_0 некоторая фиксированная точка в пространстве X , $B_R[x_0]$ – замкнутый шар радиуса R с центром в этой точке. Пусть $f : B_R[x_0] \rightarrow X$ непрерывное отображение, а множество $A \subset X$ содержит $B_R[x_0] \cup f(B_R[x_0])$. Пусть $\alpha : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ некоторая ограниченная снизу функция и $\inf_{x, y \in A} \alpha(x, y) = \gamma_0$.

Теорема 2. Пусть отображение f удовлетворяет следующим условиям:

- 1) существует такое число $c > 0$, что для любых точек $x, y \in B_R[x_0]$ выполняется неравенство $\alpha(f(x), f(y)) + c\rho(x, y) \leq \alpha(x, y)$;
- 2) $\alpha(x_0, f(x_0)) \leq cR + \gamma_0$.

Тогда отображение f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Как и в теореме 1 рассмотрим итерационную последовательность точек, выходящую из точки x_0 , то есть $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ... $x_n = f(x_{n-1})$, Проверим, что эта последовательность определена корректно, то есть все точки $x_n \in B_R[x_0]$. Действительно,

$$\rho(x_0, x_1) \leq \frac{1}{c}(\alpha(x_0, x_1) - \alpha(x_1, x_2)) \leq \frac{1}{c}(\alpha(x_0, x_1) - \gamma_0) \leq R,$$

то есть точка $x_1 \in B_R[x_0]$.

Пусть точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ принадлежат шару $B_R[x_0]$. Тогда

$$\rho(x_0, x_n) \leq \frac{1}{c} \left(\alpha(x_0, x_1) - \alpha(x_n, x_{n+1}) \right) \leq \frac{1}{c} \left(\alpha(x_0, x_1) - \gamma_0 \right) \leq R.$$

Как и в теореме 1 можно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является сходящейся и предельная точка x_* является неподвижной точкой отображения f . Теорема доказана.

Нетрудно также сформулировать локальную теорему для обобщенного сжатия.

Следствие 2. Пусть существуют такие числа $q > 0$ и $k \in (0, 1)$ что для любых $x, y \in B_R[x_0]$ справедливы неравенства:

- (I) $\rho(x, y) \leq q\alpha(x, y)$;
- (II) $\alpha(f(x), f(y)) \leq k\alpha(x, y)$.

Если $\alpha(x_0, f(x_0)) \leq q(1 - k)R + \gamma_0$, то отображение f имеет неподвижную точку.

2. Обобщенная теорема Немыцкого

Хорошо известна теорема Немыцкого о неподвижных точках отображений, которые на компактах удовлетворяют ослабленному условию сжатия (см., например, [6]). Рассмотрим некоторое обобщение этой теоремы.

Пусть X компактное метрическое пространство, $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывная снизу функция, $f : X \rightarrow X$ непрерывное отображение.

Теорема 3. Если $\alpha(f(x), f(y)) < \alpha(x, y)$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, то отображение f имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\beta : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta(x) = \alpha(x, f(x))$. Эта функция является полунепрерывной снизу, следовательно, имеет точку минимума. Пусть точка x_* является точкой минимума. Покажем, что она является неподвижной точкой отображения f . Если $x_* \neq f(x_*)$, то в силу условий теоремы

$$\beta(f(x_*)) = \alpha(f(x_*), f(f(x_*))) < \alpha(x_*, f(x_*)) = \beta(x_*),$$

то есть x_* не является точкой минимума. Полученное противоречие и доказывает, что x_* является неподвижной точкой отображения f .

Докажем единственность неподвижной точки. Пусть $x_* = f(x_*)$ и $y_* = f(y_*)$. Если $x_* \neq y_*$, то $\alpha(x_*, y_*) = \alpha(f(x_*), f(y_*)) < \alpha(x_*, y_*)$. Следовательно, $x_* = y_*$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bessaga C. On the convers of the Banach fixed point principle // Colloc. Math. 1959. Vol. 7. № 1. P. 41-43.
2. Иванов А.А. Неподвижные точки отображений метрических пространств // Записки научного семинара ЛОМИ. 1976. Т. 66. С. 5-102.
3. Dugundji J., Granas A. Fixed point theory. Warszawa: PWN, 1982.
4. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988.
5. Арутюнов А.В. Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 30-44.
6. Немыцкий В.В. Метод неподвижных точек в анализе // Успехи математических наук. 1936. Вып. 1. С. 141-174.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гельман Борис Данилович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и геометрии, e-mail: gelman@math.vsu.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249

THE INEQUALITY OF KARISTI AND GENERALIZED COMPRESSION (THE CASE OF SINGULAR IMAGES)

B. D. Gel'man

Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

E-mail: gelman@math.vsu.ru

Abstract. In the present paper we consider a new inequality of Caristi type and prove a theorem on a fixed point. Further, relying on the theorem obtained, we study maps (generalized contractions) that compress relative to some function of two vector arguments. This function does not need to be a metric or even continuous.

Keywords: metric space; generalized compression; fixed point

REFERENCES

1. Bessaga C. On the convers of the Banach fixed point principle. *Colloc. Math.*, 1959, vol. 7, no. 1, pp. 41-43.
2. Ivanov A.A. Nepodvizhnye točki otobrazheniy metrisheskikh prostranstv [Fixed points of mappings of metric spaces]. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI – Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 66, pp. 5-102. (In Russian).
3. Dugundji J., Granas A. *Fixed point theory*. Warszawa, PWN, 1982.
4. Oben Zh.-P. *Nelineyny analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya* [Nonlinear Analysis and Its Economic Applications]. Moscow, Mir Publ., 1988. (In Russian).
5. Arutyunov A.V. Uslovie Karisti i sushchestvovanie minimuma ogranichennoy snizu funktsii v metrisheskom prostranstve. Prilozheniya k teorii tochek sovpadeniya [Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points]. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 30-44. (In Russian).
6. Nemytskiy V.V. Metod nepodvizhnykh tochek v analize [The method of fixed points in the analysis]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1936, no. 1, pp. 141-174. (In Russian).

Received 21 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Gel'man Boris Danilovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Theory of Functions and Geometry, e-mail: gelman@math.vsu.ru

For citation: Gel'man B.D. Neravenstvo Karisti i obobshchennye szhatiya (sluchay odnoznachnykh otobrazheniy) [The inequality of Karisti and generalized compression (the case of singular images)]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 243–249. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-243-249 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 16-01-00677).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-250-260

УДК 517.925

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В MATH PARTNER

© С. А. Глазков

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: sergey.glazkov96@yandex.ru

Аннотация. Обсуждаются алгоритмы нахождения символьно-численного решения линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений Бернулли. Описываются алгоритмы нахождения решения через определитель Лагунтинского. Приводится описание языка пользователя Mathpar в той части, которая позволяет использовать сервис для решения дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейные неоднородные дифференциальные уравнения; уравнения Бернулли; система компьютерной алгебры; система Math Partner; определитель Лагунтинского

Введение

Системы символьных вычислений с каждым годом находят все больше приложений в науке, технике и образовании. Другое название для этих систем — системы компьютерной алгебры (СКА).

Одной из таких систем является Web-сервис Math Partner [1]. Этот сервис предназначен для проведения символьных вычислений в инженерных расчетах, научных исследованиях и образовании. Он позволяет оперировать с функциями и функциональными матрицами, получать как точные численно-аналитические решения, так и решения, в которых числовые коэффициенты вычисляются с требуемой степенью точности. Сервис написан на языке программирования Java [2]. Одним из развивающихся здесь направлений является нахождение символьно-численных решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В работах [3, 4] были представлены описания классов решения уравнений следующих видов: ОДУ с разделяющимися переменными, однородных ОДУ первого порядка, уравнений в полных дифференциалах.

В данной статье рассматриваются алгоритмы решения линейных неоднородных уравнений первого порядка и уравнений Бернулли и их реализация в СКА Math Partner,

а также реализация алгоритма нахождения решений дифференциальных уравнений методом М.Н. Лагутинского.

В основе языка Mathpar [5, 6] системы Math Partner лежит широко используемый математиками и физиками язык TeX, который обычно используют для набора математических текстов.

В пункте 1 дается описание общего алгоритма решения обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривается структура класса, который реализует этот алгоритм.

В пункте 2 предлагается алгоритм нахождения решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений и приводится описание реализующего его метода `solve`.

В пункте 3 приводится способ нахождения решений уравнений Бернулли.

В пункте 4 рассматривается применение метода Лагутинского для решений дифференциальных уравнений первого порядка, приводится пример.

В пункте 5 приводятся примеры решений дифференциальных уравнений в Web-сервисе Math Partner.

1. Общий алгоритм решения ОДУ

Рассмотрим ОДУ первого порядка, записанное в виде $f_1y' + g_1 = f_2y' + g_2$ или $f_1d(y) + g_1d(x) = f_2d(y) + g_2d(x)$. Все функции в общем случае могут быть функциями двух переменных $f_i = f_i(x, y)$, $g_i = g_i(x, y)$. Решение ищем в кольце $Q[x, y]$ многочленов двух переменных с рациональными коэффициентами.

Программы для решения ОДУ в системе Math Partner содержатся в пакете `DiffEq`. Основной класс пакета `DiffEq` называется `SolveDE`. Кроме него в пакете находятся классы решения уравнений следующих типов:

- уравнений с разделяющимися переменными (`SolveDESV`);
- однородных дифференциальных уравнений (`SolveHDE`);
- уравнений в полных дифференциалах (`SolveETD`);
- линейных неоднородных уравнений и уравнений Бернулли (`SolveLDE`).

В классе `SolveDE` реализованы методы подготовки уравнения к решению и вызов непосредственно самих функций решения. Заданное уравнение преобразуется в выражение $Pdx + Qdy = 0$, после чего последовательно вызываются методы решения каждого типа уравнений. Для этого в рассматриваемый класс был добавлен метод `toDifferential`. При необходимости производится обратное преобразование записи.

Кроме метода `solve` класс содержит в себе еще 7 методов: `containsDifferential`, `toDifferential`, `split`, `isETD`, `isHDE`, `HDE_replace`, `toNormalForm`.

На рис. 1 показан алгоритм определения типа дифференциального уравнения и применения соответствующего решающего алгоритма.

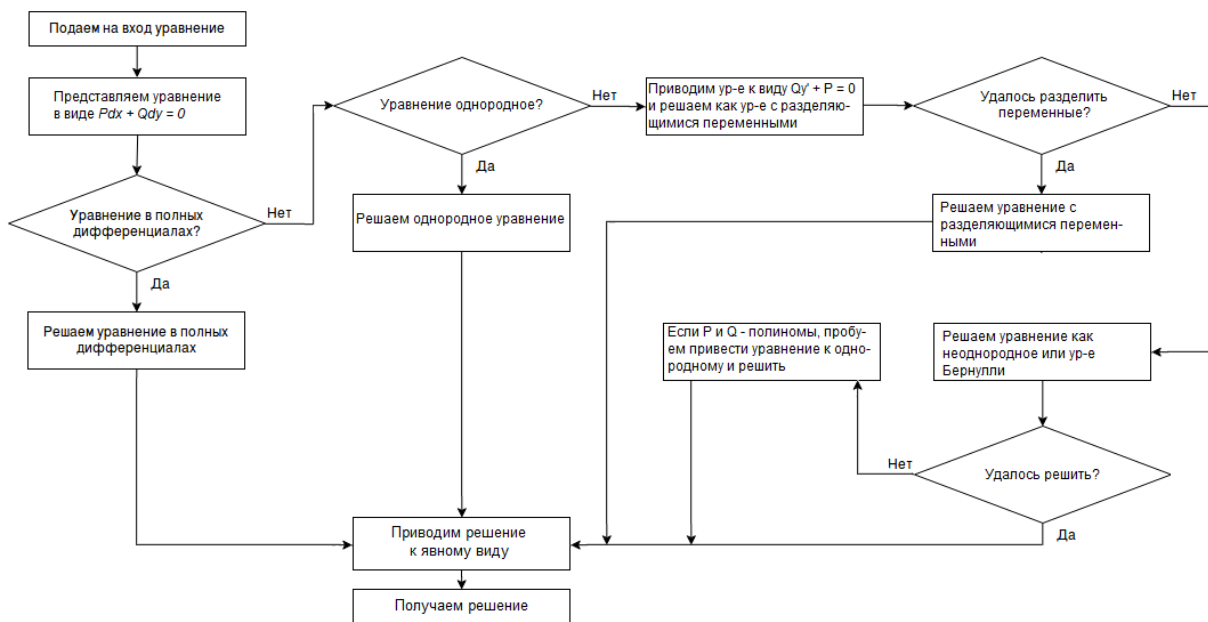


Рис. 1. Общий алгоритм решения ОДУ

Входные данные для основного метода `solve` — символьная запись дифференциального уравнения. Сначала методом `containsDifferential` проверяется представление уравнения, то есть определяется, задано ли уравнение через функцию y' или дифференциалы dx , dy . Этот метод ищет дифференциалы во входном выражении и возвращает `true` при их наличии. Если выражения dx , dy не были найдены в уравнении, то методом `toDifferential` уравнение приводится к виду $Pdx + Qdy = 0$. Затем с помощью метода `split` определяются выражения P и Q .

Теперь нужно определить тип уравнения для выбора метода его решения. Сначала проверяется, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах. Для этого вызывается метод `isETD` с параметрами P и Q . В нем выполняется сравнение выражений P'_y и Q'_x . Если выражения равны, метод возвращает `true`, иначе — `false`. Если получили `true`, значит, уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Его решаем в классе `SolveETD`.

Если уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, проверяется, является ли оно однородным в методе `isHDE`. В выражениях P и Q проводится замена переменных x и y на zx и zy соответственно. Новые выражения обозначим P_z и Q_z . Тогда, если $P_z/P = Q_z/Q = z$, то уравнение является однородным. Решаем его в классе `SolveHDE`.

Если уравнение не является ни уравнением в полных дифференциалах, ни однородным уравнением, оно решается как уравнение с разделяющимися переменными в классе `SolveDESV`. Для этого уравнение преобразуется к виду $Qy' + P = 0$ [2, 3].

Если разделить переменные не удалось, то уравнение решается как линейное неоднородное дифференциальное уравнение или уравнение Бернулли. Решение таких ОДУ производится методом Бернулли подстановкой $y = uv$.

В результате выполнения программы в случае успешного решения уравнения получится функция; если уравнение задано с ошибкой или возможностей системы недоста-

точно для его решения, то получится строковая ошибка «*ERROR: incorrect equation*».

Решение в общем случае получается в виде неявно заданной функции $g(x, y) = h(x, y)$. Затем решение приводится к явному виду $y = f(x)$ с помощью метода `toNormalForm`. Это итерационный метод, который вызывается до тех пор, пока левая часть не станет равной y , либо в левой части окажется неупрощаемое выражение.

Пример работы `toNormalForm`:

вход: $\ln(\text{abs}(y + 1)) = (1/2)x^2 + C$;

выход: $y = e^{(1/2)x^2 + C} - 1$.

2. Решение линейных неоднородных ДУ первого порядка

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения имеют вид $y' + a(x)y = b(x)$.

Алгоритмы решения были реализованы в классе `SolveLDE`.

Глобальные переменные класса: `ax`, `v`, `u`.

`ax` — функция $a(x)$, `v`, `u` — функции такие, что $y = uv$.

Методы класса: `solve`, `findAx`, `getAx`.

Метод `solve`.

Входными данными метода являются два выражения, которые стоят в левой $F1$ и правой $F2$ частях уравнения.

Алгоритм решения является классическим [7] и состоит из 5 шагов.

1. Приведение уравнения к виду $y' + a(x)y = b(x)$.

- Выполним перенос правой части в левую, для чего вычтем $F2$ из $F1$. Создадим временные переменные `leftPart` и `rightPart` с нулевыми значениями.
- В цикле пройдем по всем слагаемым левой части. Каждое из них проверим на наличие производной y' методом `factor_d` из класса `solveDESV`. Из `factor_d` возвращается множитель при производной во входном выражении. Если получим ненулевой множитель, выполним сложение слагаемого с `leftPart`. Если производная в слагаемом не найдена, проверим его на наличие y методом `findAx`. В нем производится деление входного выражения на y . Если в частном переменная y отсутствует, возвращается `true`, иначе — `false`. Если получили `true`, слагаемое представлено в виде $f(x)y$, его тоже перенесем в левую часть путем сложения с `leftPart`.
- После завершения цикла все, что не попало в левую часть, будет являться правой частью `rightPart`.
- Если в уравнении $f(x)y' + g(x)y = h(x)$ функция $f(x) \neq 1$, то выполним деление обеих частей на $f(x)$.

Теперь уравнение представлено в виде $y' + a(x)y = b(x)$.

2. Поиск коэффициента $a(x)$. С помощью метода `getAx` получаем выражение $a(x)$. Метод принимает на входе левую часть приведенного к нормальному виду уравнения, выполняет поиск коэффициента $a(x)$ и запись его значения в переменную `ax`.

3. Решение уравнения $v' + a(x)v = 0$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Для его решения вызываем метод `solve` класса `SolveDESV`. Решение без числовой константы, приведенное к явному виду, запишем в переменную `v`.

4. Решение уравнения $u'v = b(x)$. Это также уравнение с разделяющимися переменными. Результат решения записываем в переменную `u`.

5. Получение решения заданного уравнения: $y = uv$.

3. Решение уравнений Бернулли

Уравнения Бернулли имеют вид $y' + a(x)y = b(x)y^n$, где $n \neq 0; 1$. Если $n = 0$, то получим неоднородное, а при $n = 1$ — однородное линейное уравнение.

Для решения уравнений Бернулли используется немного измененный класс `SolveLDE`, описанный в пункте 2. Так как алгоритм решения уравнений Бернулли аналогичен алгоритму решения линейных неоднородных уравнений первого порядка, то для решения уравнений этих видов используется один класс.

В классе были инициализированы новые глобальные переменные `n` — показатель степени при y в правой части, `bх` — функция $b(x)$, написан метод `getBx` и внесены изменения в метод `solve`.

Метод `solve`.

В процессе решения уравнения Бернулли используется другая формула составления уравнения для нахождения функции u : $\frac{u'}{u^n} = b(x)v^{n-1}$. Тем не менее, если подставить в это уравнение $n = 0$, получим $u' = b(x)v^{-1}$, откуда $u'v = b(x)$. Получили уравнение, используемое для нахождения u при решении неоднородного линейного уравнения. Таким образом, для решения ОДУ этих двух видов можно использовать одну общую функцию $\frac{u'}{u^n} = b(x)v^{n-1}$.

Общее решение уравнения Бернулли также вычисляется по формуле $y = uv$.

Метод `getBx`.

Метод выполняет поиск в правой части уравнения функции $b(x)$ и показателя степени n с записью их значений в переменные `bх` и `n` соответственно.

Если в правой части не нашлось выражение y^n , производится выход из метода, при этом переменной `bх` присваивается значение правой части, а переменная `n` по умолчанию остается равной нулю.

4. Применение метода М.Н. Лагутинского к решению дифференциальных уравнений первого порядка

Метод М.Н. Лагутинского для решения дифференциальных уравнений первого порядка описывается в статье [8]. Данным методом можно решать уравнения первого порядка $Pdx + Qdy = 0$, в которых выражения P и Q являются многочленами.

Пусть $m_1, m_2, \dots$ — базис, образованный мономами в градуированном лексикографическом упорядочении $1, y, x, y^2, yx, x^2, \dots$.

Пусть матрица M порядка n получена следующим образом. Первая ее строка образована элементами $m_1, m_2, \dots, m_n$, вторая строка является производной первой строки $Dm_1, Dm_2, \dots, Dm_n$, третья — второй производной первой строки $D^2m_1, D^2m_2, \dots, D^2m_n$, и так далее. Здесь D — оператор дифференцирования $D = P \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x}$. Определитель такой матрицы n -ого порядка будем обозначать Δ_n и называть определителем Лагутинского n -го порядка.

Дифференцирование элементов матрицы M выполняется так:

$$M_{i+1,j} = P \frac{\partial M_{i,j}}{\partial y} - Q \frac{\partial M_{i,j}}{\partial x},$$

где $M_{i,j}$ — элемент i -той строки j -того столбца матрицы M .

О п р е д е л е н и е 1. Общим или рациональным интегралом f дифференцирования D называют элемент поля частных исходного кольца R , производная которого Df равна нулю.

Теорема 1. (М.Н. Лагутинский, 1911). Рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N , существует тогда и только тогда, когда $\Delta_n = 0$, где $n = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого определителя.

Поскольку первые три элемента первой строки матрицы M являются мономами первого порядка $(1, y, x)$, то очевидно, что при $\Delta_3 = 0$ числитель и знаменатель вычисленного интеграла будут зависеть от x и y линейно. Аналогично, дифференциальное уравнение будет иметь интеграл второго порядка в том и только том случае, если $\Delta_6 = 0$.

Для реализации метода М.Н. Лагутинского в пакете DiffEq был написан класс Lagutinsky, содержащий в себе метод solve. В классе MatrixD были написаны методы lagutinsky_matrix, lagutinsky_det_random, lagutinsky_integral.

Метод solve.

Метод решения дифференциального уравнения с использованием определителя Лагутинского на входе принимает выражения P и Q . Перед составлением матрицы проверяем, что P и Q — многочлены.

Так как оценка сверху для порядка интеграла заданного дифференциального уравнения до сих пор не найдена, выполняем построение матриц и вычисление определителей Лагутинского $\Delta_3, \Delta_6, \Delta_{10}, \dots$.

Вычисление определителя полиномиальной матрицы является трудоемкой задачей. Поэтому выбираем произвольную точку, находим значение матрицы в этой точке и вычисляем определитель получившейся числовой матрицы. Это выполняется в методе lagutinsky_det_random. Если этот определитель не равен 0, то увеличиваем порядок. Если определитель числовой матрицы равен 0, то вычисляем определитель соответствующей полиномиальной матрицы. Если он также равен 0, то рациональный интеграл существует. Иначе увеличиваем порядок определителя Лагутинского.

Когда нашли $\Delta_n = 0$, вызываем метод lagutinsky_integral, которому в качестве аргумента передаем матрицу n -ого порядка. В результате вычисляется искомый интеграл, который будет являться решением заданного дифференциального уравнения.

Метод lagutinsky_matrix.

Генерируем матрицу M , принимая на входе заданный порядок n и дифференцирование D . В первую строку записываем массив базисов $m_1, m_2, \dots, m_n$, во вторую — производную первой строки и так далее.

Метод `lagutinsky_det_random`.

Вычисляем определитель Лагутинского в одной случайной точке. Выполняем подстановку координат случайной точки в элементы матрицы, в результате чего получаем целочисленную матрицу и вычисляем ее определитель.

Метод `lagutinsky_integral`.

Принимаем на входе матрицу дифференцирования порядка n . Пусть B_{ij} — дополнительный минор этой матрицы.

Инициализируем переменные $a = 0$, $p1 = B_{n-1,a}$, $p2 = B_{n-1,n-1}$.

Затем выполняем цикл: пока $p1/p2$ — число, выполняем $a = a + 1$, $p1 = B_{n-1,a}$. Когда условие цикла не будет выполнено, отношение $p1/p2$ даст искомый интеграл.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $y' + 3y/x = 2/x^2$. Здесь $P = 3yx - 2$, $Q = x^2$. Матрица третьего порядка будет иметь следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & -3yx + 2 & x^2 \\ 0 & 6yx^2 - 6x & 2x^3 \end{pmatrix}$$

Определитель Δ_3 представленной матрицы равен $-12yx^4 + 10x^3$, что отлично от нуля. Следовательно, рациональный интеграл первого порядка для заданного уравнения не существует.

Попробуем найти интеграл второго порядка, для этого найдем

$\Delta_6 = 11612160y^4x^{19} - 47001600y^3x^{18} + 70917120y^2x^{17} - 47278080yx^{16} + 11750400x^{15}$, следовательно, функция решения этого уравнения имеет более высокий порядок.

Повышая порядок дальше, увидим, что $\Delta_{15} = 0$, поэтому рациональный интеграл четвертого порядка существует и равен $yx^3 - x^2$.

Получим решение уравнения $yx^3 - x^2 = C$, или в явном виде $y = (x^2 + C)/x^3$.

5. Решение уравнений в системе Math Partner

Чтобы решить ОДУ в Web-сервисе Math Partner, необходимо:

- перейти по адресу <http://mathpar.cloud.unihub.ru>;
- открыть электронную тетрадь по ссылке «Тетрадь»;
- задать окружение для рациональных чисел и двух переменных командой `SPACE = Q[x,y]`;
- ввести оператор для решения уравнения `solveDE` с записанным в нем уравнением;
- получить решение, нажав на кнопку в виде треугольника над рабочей областью (или с помощью комбинации клавиш Ctrl+Enter).

Пример 2.

Решим уравнение $(1+x)y' - y - 1 = 0$. Для этого в рабочей тетради введем следующий текст

```
SPACE = Q[x,y];
\solveDE((1+x)\d(y,x) - y - 1 = 0);
```

Нажав на кнопку выполнения, увидим под рабочей областью ответ: $y = e^C(x+1) - 1$.

На рис. 2 представлена страница Web-сервиса Math Partner с примерами решений уравнений Бернулли и линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка.

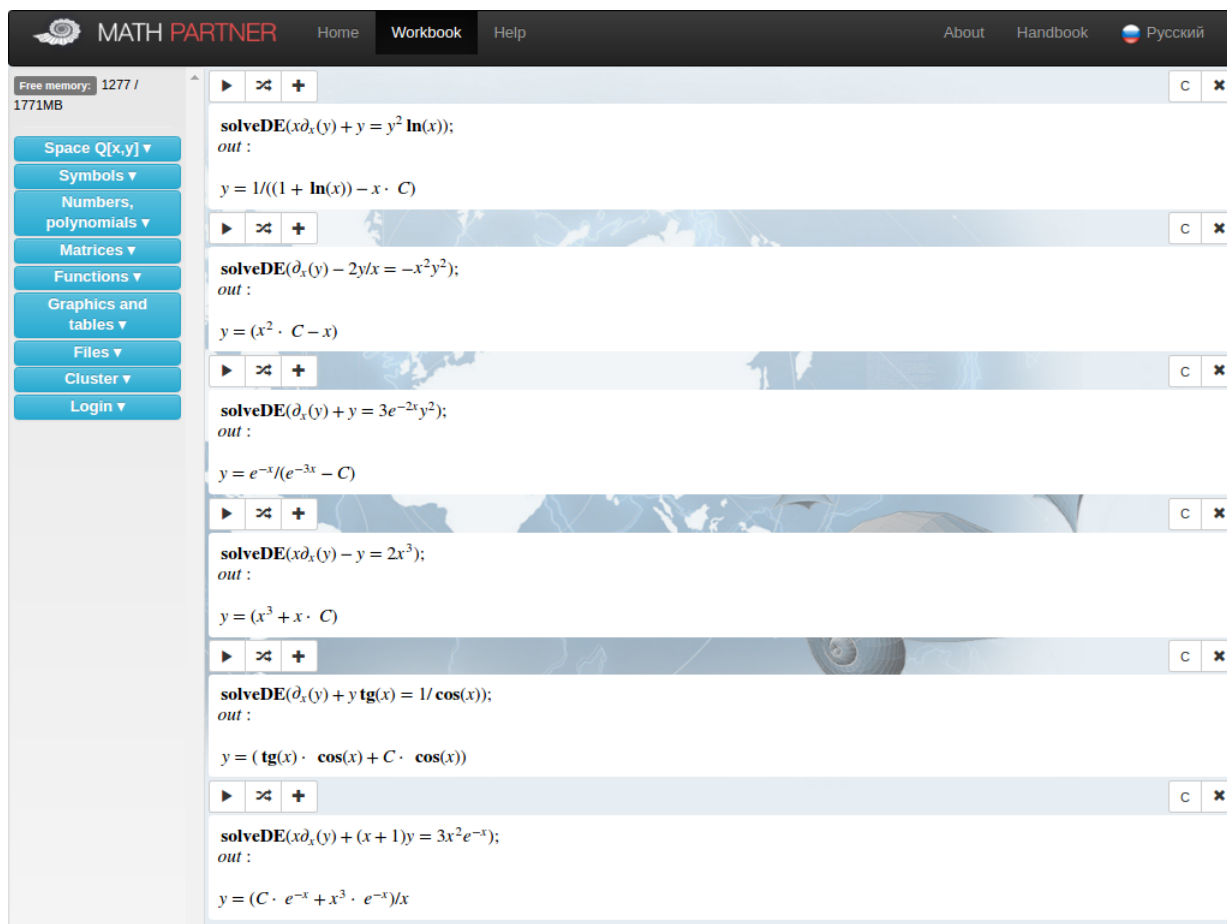


Рис. 2. Примеры

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Math Partner. URL: <http://mathpar.cloud.unihub.ru> (дата обращения: 22.02.2018).
2. Ноутон П., Шилдт Г. Java 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2008. 1072 с.
3. Глазков С.А. Символьные алгоритмы решения некоторых типов обыкновенных дифференциальных уравнений // Державинский форум. Тамбов, 2017. № 2. С. 131-140.
4. Глазков С.А., Рыбаков М.А. Алгоритмы решения простых типов обыкновенных дифференциальных уравнений в Math Partner // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6-1. С. 1268-1276. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1268-1276.
5. Малашионок Г.И. Руководство по языку «MATHPAR». Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2013.
6. Malaschonok G.I. MathPartner Computer Algebra // Programming and Computer Software. 2017. Vol. 43. № 2. P. 112118.
7. Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения. М.: Просвещение, 1984.

8. *Малых М.Д.* О применении метода М. Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 1. Отыскание алгебраических интегралов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2017. Т. 25. № 2. С. 103-112.

Поступила в редакцию 23 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Глазков Сергей Александрович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант, кафедра функционального анализа, e-mail: sergey.glazkov96@yandex.ru.

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-250-260

ALGORITHMS FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATH PARTNER

S. A. Glazkov

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: sergey.glazkov96@yandex.ru

Abstract. Algorithms for finding the symbolic-numerical solution of linear inhomogeneous ordinary differential equations, Bernoulli equations are discussed. Algorithms for finding a solution through the Lagutinsky determinant are described. The description of Mathpar user language is given in the part that allows to use the service for solving differential equations.

Keywords: linear inhomogeneous differential equations; the Bernoulli equation; computer algebra system; Math Partner system; the determinant of Lagutinsky

REFERENCES

1. *Math Partner*. Available at: <http://mathpar.cloud.unihub.ru> (accessed 22.02.2018).
2. Nouton P., Shildt G. *Java 2*. St. Petersburg, BKHV-Peterburg Publ., 2008, 1072 p. (In Russian).
3. Glazkov S.A. Simvol'nye algoritmy resheniya nekotorykh tipov obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Symbolic algorithms of some types of differential equations' solution]. *Derzhavinskiy forum – Derzhavin Forum*, 2017, no. 2, pp. 131-140. (In Russian).
4. Glazkov S.A., Rybakov M.A. Algoritmy resheniya prostykh tipov obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy v Math Partner [The symbolic solution of ordinary differential equations in the computer algebra system Math Partner]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6-1, pp. 1268-1276. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1268-1276.
5. Malashonok G.I. *Rukovodstvo po yazyku «MATHPAR»* [Mathpar Language Guide]. Tambov, Publishing House of Tambov State University named after G.R. Derzhavin, 2013. (In Russian).
6. Malaschonok G.I. MathPartner Computer Algebra. *Programming and Computer Software*, 2017, vol. 43, no. 2, p. 112118.
7. Vilenkin N.Y., Dobrokhotova M.A., Safonov A.N. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1984. (In Russian).
8. Malykh M.D. O primeneniі metoda M. N. Lagutinskogo k integrirovaniyu differentsial'nykh uravneniy 1-go poryadka. Chast' 1. Oтыskanie algebraicheskikh integralov [On Application of M.N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 1]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Matematika, informatika, fizika – RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*, 2017, vol. 25, no. 2, pp. 103-112. (In Russian).

Received 23 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Glazkov Sergey Aleksandrovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Graduate Student of the Functional Analysis Department, e-mail: sergey.glazkov96@yandex.ru.

For citation: Glazkov S.A. Algoritmy resheniya differentsial'nyh uravneniy v Math Partner [Algorithms for solving differential equations in Math Partner]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 250–260. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-250-260 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267

УДК 517.23

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КОМПОЗИЦИИ ДВУХ ФУНКЦИЙ

© М. И. Гомоюнов

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Аннотация. В работе доказана оценка сверху дробной производной Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0, 1)$ композиции двух функций в случае, когда от внутренней функции требуется лишь ее представимость в виде дробного интеграла Римана–Лиувилля от некоторой измеримой существенно ограниченной функции. Потребность в такой оценке возникает в задачах управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с дробными производными.

Ключевые слова: дробная производная Римана–Лиувилля; производная композиции двух функций; функция Ляпунова

Введение

Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и заданы функции $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Рассмотрим их композицию $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$. Если функции V и x дифференцируемы, то согласно классической теореме математического анализа для первой производной $\dot{v}$ функции v справедлива формула

$$\dot{v}(t) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle, \quad (0.1)$$

где ∇V — градиент функции V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$.

Формула (0.1) имеет обширные приложения. Так, при исследовании устойчивости динамических систем (см., например, [1]) используется операция дифференцирования композиции функции Ляпунова и движения системы. Схожие конструкции возникают в теории управления, например, при обосновании метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского, который используется для построения решений в различных задачах позиционного управления и дифференциальных играх (см., например, [2]), в обратных задачах динамического восстановления неизвестных входов систем (см., например, [3]). В настоящей работе исследуется вопрос дробного дифференцирования композиции двух функций, представляющий самостоятельный интерес и важный, в частности, для задач управления динамическими системами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями с дробными производными (см., например, [4–6]).

1. Известные результаты

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Для функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ левосторонними дробными интегралом и производной порядка α в смысле Римана–Лиувилля называются величины

$$(I^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad (D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad t \in [a, b],$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Основные свойства операций дробного интегрирования и дифференцирования могут быть найдены, например, в монографиях [4, 5].

Формула для вычисления дробной производной порядка α композиции v функций V и x известна (см., например, [5, Sect. 2.7.3]). Однако применение этой формулы весьма затруднительно, во-первых, по причине ее сложности, а во-вторых, в связи с тем, что для ее использования необходимо существование производных функций V и x всех целых порядков. Известно также [7], что простого аналога правила (0.1) для производных дробного порядка не существует. С другой стороны, при обосновании упомянутых выше методов теории управления важна лишь оценка сверху

$$\dot{v}(t) \leq \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle.$$

Таким образом, возникает вопрос о подобных оценках для дробной производной $D^\alpha v$ композиции v функций V и x .

Пусть $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ множество функций $x \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих равенству $x(a) = 0$ и условию Липшица $\|x(t_1) - x(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|$, $t_1, t_2 \in [a, b]$, с некоторой своей константой $L > 0$.

Известен (см. [8–10]) следующий результат.

Теорема 1.1. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $V(0) = 0$, является выпуклой, дифференцируемой, и для ее градиента $\nabla V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ выполняется локальное условие Липшица: для любого числа $R > 0$ существует такое число $L > 0$, что неравенство $\|\nabla V(x_1) - \nabla V(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ справедливо для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|x_1\| \leq R$, $\|x_2\| \leq R$. Тогда для любой функции $x \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ композиция $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$, удовлетворяет включению $v \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R})$ и при всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка

$$(D^\alpha v)(t) \leq \langle \nabla V(x(t)), (D^\alpha x)(t) \rangle. \quad (1.1)$$

Приведенные в работах [8–10] доказательства оценки (1.1) существенно опираются на следующее представление дробной производной:

$$(D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{\dot{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (1.2)$$

справедливое (см., например, [4, лемма 2.2]) при почти всех $t \in [a, b]$ для абсолютно непрерывной функции $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $x(a) = 0$. При этом в случае $x \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ соотношение (1.2) верно при всех $t \in [a, b]$.

Отметим, что для задач управления динамическими системами, описываемыми дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка, предположение об абсолютной непрерывности функции x в теореме 1.1 является весьма ограничительным, так как движения таких систем могут не быть абсолютно непрерывными. В качестве примера функции, у которой всюду существует непрерывная производная любого дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, но нигде не существует производной первого порядка, можно привести (см., например, [11]) функцию Вейерштрасса:

$$w(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin(2^k \pi t), \quad t \in [0, 1]. \quad (1.3)$$

В настоящей работе справедливость оценки (1.1) показана без предположения об абсолютной непрерывности функции x .

2. Основной результат

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство (классов эквивалентности) существенно ограниченных измеримых функций $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\varphi\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [a, b]} \|\varphi(t)\|.$$

Обозначим через $I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ множество функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая из которых представима в виде дробного интеграла от некоторой своей функции $\varphi \in L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$: $x(t) = (I^\alpha \varphi)(t)$, $t \in [a, b]$. Заметим, что для функции Вейерштрасса (1.3) справедливо включение $w \in I^\alpha(L^\infty([0, 1], \mathbb{R}))$. Отметим также, что классу функций $I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ принадлежат (см., например, [6]) движения широкого круга динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробной производной порядка α .

Теорема 2.1. Пусть функция $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Тогда для любой функции $x \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ композиция $v(t) = V(x(t))$, $t \in [a, b]$, удовлетворяет включению $v \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}))$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место оценка (1.1).

Поскольку $\text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n) \subset I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$, то теорема 2.1 уточняет теорему 1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p > 1/\alpha$ и $L^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ — пространство (классов эквивалентности) суммируемых с p -ой степенью функций $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_a^b \|\varphi(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Приблизим функцию $x \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}^n))$ последовательностью функций $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\|_C = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - \varphi\|_p = 0, \quad \|\varphi_k\|_\infty \leq \sqrt{n} \|\varphi\|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

где $\varphi_k(t) = (D^\alpha x_k)(t)$, $k \in \mathbb{N}$, и $\varphi(t) = (D^\alpha x)(t)$, $t \in [a, b]$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$, применяя к функциям V и x_k теорему 1.1, для композиции $v_k(t) = V(x_k(t))$, $t \in [a, b]$, получаем $v_k \in \text{Lip}^0([a, b], \mathbb{R})$ и

$$\psi_k(t) \leq \langle \nabla V(x_k(t)), \varphi_k(t) \rangle, \quad t \in [a, b], \quad (2.2)$$

где $\psi_k(t) = (D^\alpha v_k)(t)$, $t \in [a, b]$. Кроме того, опираясь на третье из соотношений в (2.1) и следуя схеме доказательства теоремы 1.1, можно показать, что существует такое число $M > 0$, для которого при всех $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|\psi_k\|_\infty \leq M$.

Учитывая, что множество $K = \{\psi \in L^p([a, b], \mathbb{R}) : \|\psi\|_\infty \leq M\}$ слабо секвенциально компактно в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ (см., например, [12, гл. V, § 7, теорема 7]), можно считать, что последовательность $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ слабо в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ сходится к некоторой функции $\psi^* \in K$. Тогда в силу вполне непрерывности оператора дробного интегрирования I^α как оператора из $L^p([a, b], \mathbb{R})$ в $C([a, b], \mathbb{R})$ (см., например, [4, Теорема 3.6]) получаем $\|I^\alpha \psi_k - I^\alpha \psi^*\|_C \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны, в силу непрерывности функции V и первого из соотношений в (2.1), имеем $\|v_k - v\|_C \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, принимая во внимание равенство $v_k(t) = (I^\alpha \psi_k)(t)$, $t \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, выводим $v(t) = (I^\alpha \psi^*)(t)$, $t \in [a, b]$. Включение $v \in I^\alpha(L^\infty([a, b], \mathbb{R}))$ доказано.

Перейдем к доказательству оценки (1.1). На базе последовательности $\{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ сконструируем последовательность $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty \subset L^\infty([a, b], \mathbb{R})$ по следующему правилу. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\psi_k\}_{k=j}^\infty$ слабо в $L^p([a, b], \mathbb{R})$ сходится к ψ^* , то найдется (см., например, [12, гл. III, § 3, теорема 2]) такая конечная выпуклая комбинация

$$\xi_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \psi_{k_{ij}}(t), \quad t \in [a, b], \quad k_{ij} \geq j, \quad \alpha_{ij} \in [0, 1], \quad i \in \overline{1, n_j}, \quad \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} = 1,$$

элементов последовательности $\{\psi_k\}_{k=j}^\infty$, для которой справедливо $\|\xi_j - \psi^*\|_p \leq 1/j$. Таким образом, имеем $\|\xi_j - \psi^*\|_p \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, а стало быть, можно считать, что $\xi_j(t) \rightarrow \psi^*(t)$ при $j \rightarrow \infty$ почти всюду на $[a, b]$. В силу неравенства (2.2) выводим

$$\xi_j(t) \leq \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \langle \nabla V(x_{k_{ij}}(t)), \varphi_{k_{ij}}(t) \rangle, \quad t \in [a, b], \quad j \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Опираясь на первые два из соотношений в (2.1) и свойство локальной липшицевости функции ∇V , учитывая при этом, что $k_{ij} \geq j$ для всех $i \in \overline{1, n_j}$ и $j \in \mathbb{N}$, можно показать, что функции

$$\eta_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} \alpha_{ij} \langle \nabla V(x_{k_{ij}}(t)), \varphi_{k_{ij}}(t) \rangle, \quad j \in \mathbb{N}, \quad t \in [a, b],$$

стоящие в правой части неравенства (2.3), сходятся при $j \rightarrow \infty$ к функции $\eta(t) = \langle \nabla V(x(t)), \varphi(t) \rangle$, $t \in [a, b]$, по норме пространства $L^p([a, b], \mathbb{R})$. Стало быть, можно считать, что $\eta_j(t) \rightarrow \eta(t)$ при $j \rightarrow \infty$ почти всюду на $[a, b]$. Переходя в (2.3) к пределу при $j \rightarrow \infty$, заключаем, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка $\psi^*(t) \leq \eta(t)$. Отсюда, учитывая равенство $\psi^*(t) = (D^\alpha v)(t)$ и определение функции η , выводим справедливость неравенства (1.1) при почти всех $t \in [a, b]$. Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Кряжиский А.В., Осипов Ю.С. О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51-60.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999. 366 p.
6. Idczak D., Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$ // Frac. Calc. Appl. Anal. 2011. Vol. 14. № 4. P. 538-553.
7. Tarasov V.E. On chain rule for fractional derivatives // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2016. Vol. 30. P. 1-4.
8. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 658-664.
9. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19. Issue 9. P. 2951-2957.
10. Chen W., Dai H., Song Y., Zhang Z. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems // IET Control Theory Appl. 2017. Vol. 11. № 7. P. 1070-1074.
11. Ross B., Samko S.G., Love E.R. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one // Real Anal. Exchange. 1994-1995. Vol. 20. № 1. P. 140-157.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гомоюнов Михаил Игоревич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267

ABOUT AN ESTIMATE FROM ABOVE OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE OF THE COMPOSITION OF TWO FUNCTIONS

M. I. Gomoyunov

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Abstract. In the paper, an estimate from above of the fractional Riemann–Liouville derivative of an order $\alpha \in (0, 1)$ of the composition of two functions is proved for the case when the inner function is assumed only to be represented by the fractional Riemann–Liouville integral of a measurable essentially bounded function. The necessity of such an estimate arises in control problems of dynamical systems described by differential equations with fractional derivatives.

Keywords: fractional Riemann–Liouville derivative; derivative of the composition of two functions; Lyapunov function

REFERENCES

1. Malkin I.G. *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of Stability of Motion]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 530 p. (In Russian).
2. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* [Control of a Dynamical System]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p. (In Russian).
3. Kryazhimskiy A.V, Osipov Yu.S. O modelirovanii upravleniya v dinamicheskoy sisteme [On modeling in a dynamic system]. *Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [News of Academy of Sciences of the USSR. Technical Cybernetics], 1983, no. 2., pp. 51-60. (In Russian).
4. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Gordon&Breach Sci. Publishers, 1993, 976 p.
5. Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego, Academic Press, 1999, 366 p.
6. Idczak D., Kamocki R. On the existence and uniqueness and formula for the solution of R-L fractional Cauchy problem in $\mathbb{R}^n$. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2011, vol. 14, no. 4, pp. 538-553.
7. Tarasov V.E. On chain rule for fractional derivatives. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2016, vol. 30, pp. 1-4.
8. Alikhanov A.A. Apriornye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniy drobnogo porjadka [A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-order equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 658-664. (In Russian).
9. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2014, vol. 19, issue 9, pp. 2951-2957.
10. Chen W., Dai H., Song Y., Zhang Z. Convex Lyapunov functions for stability analysis of fractional order systems. *IET Control Theory Appl.*, 2017, vol. 11, no. 7, pp. 1070-1074.

11. Ross B., Samko S.G., Love E.R. Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one. *Real Anal. Exchange*, 1994-1995, vol. 20, no. 1, pp. 140-157.

12. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 752 p. (In Russian).

Received 21 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Gomoyunov Mikhail Igorevich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

For citation: Gomoyunov M.I. Ob ocenke sverhu drobnnoj proizvodnoj kompozicii dvuh funkciy [About an estimate from above of the fractional derivative of the composition of two functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 261–267. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-261-267 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277

УДК 517.977

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

© М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com, nyul@imm.uran.ru, a.r.plaksin@gmail.com

Аннотация. Установлена связь между дифференциальной игрой в системах нейтрального типа и функциональным уравнением Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными. Доказано совпадение функционала цены игры и минимаксного решения этого уравнения. Указаны оптимальные стратегии игроков.

Ключевые слова: дифференциальные игры; уравнения нейтрального типа; уравнения Гамильтона–Якоби; инвариантные производные

Введение

В работе рассмотрена позиционная дифференциальная игра [1–9] для динамической системы, описываемой функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [10]. На основе понятия коинвариантных производных [5, 11] для функционала цены игры выписано функциональное уравнение Гамильтона–Якоби [9]. Нейтральный тип динамической системы диктует особые свойства этого уравнения, которые не позволяют применить к нему результаты, ранее полученные в теории уравнений Гамильтона–Якоби для обыкновенных дифференциальных систем [12] и систем запаздывающего типа [5, 6]. В [9] было показано, что если рассматриваемое уравнение Гамильтона–Якоби имеет классическое решение, удовлетворяющее подходящим условиям гладкости, то оно совпадает с функционалом цены дифференциальной игры. В [13] показано, что у рассматриваемого уравнения Гамильтона–Якоби существует и единственно минимаксное (обобщенное) решение. В данной работе доказано, что функционал цены игры совпадает с минимаксным решением уравнения Гамильтона–Якоби без дополнительного предположения о гладкости цены. При этом оптимальные стратегии игроков могут быть построены по минимаксному решению на основе подходящей модификации [7] метода экстремального сдвига на сопутствующие точки [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3047.2017.1.

1. Дифференциальная игра

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру, в которой движение динамической системы описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{d}{d\tau} \left(x[\tau] - g(\tau, x_\tau[\cdot]) \right) = f(\tau, x_\tau[\cdot], u[\tau], v[\tau]) \quad (1.1)$$

$$\tau \in [t_0, \vartheta], \quad x[\tau] \in \mathbb{R}^n, \quad u[\tau] \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_1}, \quad v[\tau] \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^{n_2},$$

а показатель качества имеет вид

$$\gamma = \sigma(x_\vartheta[\cdot]). \quad (1.2)$$

Здесь τ — переменная времени; $x[\tau]$ — вектор состояния в момент времени τ ; t_0 и ϑ — фиксированные начальный и терминальный моменты времени; $x_\tau[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке $[\tau - h, \tau]$, то есть $x_\tau[\xi] = x[\tau + \xi]$, $\xi \in [-h, 0]$, где $h > 0$ — константа запаздывания; $u[\tau]$ и $v[\tau]$ — текущие управляющие воздействия, соответственно, первого и второго игроков; $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — компакты.

Цель первого игрока — доставить показателю (1.2) как можно меньшее значение. Цель второго игрока — противоположна.

Всюду ниже угловые скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ используем для обозначения скалярного произведения векторов, а двойные скобки $\| \cdot \|$ — для евклидовой нормы. Через $\text{Lip}([a, b], \mathbb{R}^n)$ обозначаем пространство липшицевых функций, действующих из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой. Для краткости обозначим $\text{Lip} = \text{Lip}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Равномерную норму пространства Lip обозначим через $\| \cdot \|_\infty$. Через $\text{Comp}(\text{Lip})$ обозначим множество непустых компактных подмножеств пространства Lip . Через $\mathbb{G} = [t_0, \vartheta] \times \text{Lip}$ обозначим множество допустимых позиций системы (1.1).

Полагаем, что для отображений $g: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{G} \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ и $\sigma: \text{Lip} \mapsto \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

(g) Существуют такие $\alpha_g > 0$ и $\lambda_g \in (0, 1)$, что имеет место оценка

$$\|g(t, w[\cdot]) - g(\tau, r[\cdot])\| \leq \alpha_g(1 + \|w[\cdot]\|_\infty)|t - \tau| + \lambda_g\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty, \quad (t, w[\cdot]), (\tau, r[\cdot]) \in \mathbb{G}.$$

(f.1) Отображение f непрерывно.

(f.2) Существует такое $\alpha_f > 0$, что имеет место оценка

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \leq \alpha_f(1 + \|w[\cdot]\|_\infty), \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

(f.3) Для любого $D \in \text{Comp}(\text{Lip})$ существует такое $\lambda_f = \lambda_f(D) > 0$, что для всех $(t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times D$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ справедливо неравенство

$$\|f(t, w[\cdot], u, v) - f(t, r[\cdot], u, v)\| \leq \lambda_f\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty.$$

(f.4) Для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle.$$

(σ) Для любого $D \in \text{Comp}(\text{Lip})$ существует такое $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(D) > 0$, что

$$|\sigma(w[\cdot]) - \sigma(r[\cdot])| \leq \lambda_\sigma \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty, \quad w[\cdot], r[\cdot] \in D.$$

Пусть $t \in [t_0, \vartheta]$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u[\tau]$ и $v[\tau]$ на промежутке $[t, \vartheta]$ считаем измеримые функции $u[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ и $v[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$. Для позиции $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$ определим множество всех липшицевых продолжений:

$$X(t, w[\cdot]) = \{x[\cdot] \in \text{Lip}([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n): x_t[\cdot] = w[\cdot]\}.$$

Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. При условиях (g) и (f.1)–(f.3) действуя, например, по схеме из [6, раздел P1] можно показать, что пара допустимых реализаций $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$ единственным образом порождает движение $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1) — функцию, которая вместе с $u[\tau]$ и $v[\tau]$ почти всюду на $[t, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Формализацию дифференциальной игры (1.1), (1.2) будем проводить в классе позиционных стратегий управления игроков следуя подходу [1–4]. При этом в силу условия седловой точки в маленькой игре (f.4), можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [2] (см., также, [5–7]).

Пусть зафиксирована начальная позиция $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. Под стратегией управления первого игрока понимаем всякое отображение

$$U = U(\tau, r[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad (\tau, r[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad \varepsilon > 0,$$

Пусть выбраны стратегия первого игрока U , число $\varepsilon > 0$ и разбиение отрезка $[t, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \{\tau_j : 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta, j = \overline{1, J-1}, \tau_1 = t, \tau_J = \vartheta\}.$$

Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ по правилу

$$u[\tau] = U(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Из позиции $(t, w[\cdot])$ такой закон в паре с допустимой реализацией $v[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ однозначно порождает движение системы (1.1). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (1.2) обозначим через $\gamma(t, w[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[\cdot])$. Исходя из самых неблагоприятных с точки зрения первого игрока обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии U :

$$\rho_u(t, w[\cdot]; U) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[\cdot]} \gamma(t, w[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[\cdot]).$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \inf_U \rho_u(t, w[\cdot]; U). \quad (1.3)$$

Стратегию первого игрока U° назовем оптимальной, если в этом выражении на ней достигается минимум. То есть, справедливо равенство $\rho_u(t, w[\cdot], U^\circ) = \rho_u^\circ(t, w[\cdot])$.

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию $v[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ по правилу

$$v[\tau] = V(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v(t, w[\cdot]; V) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[\cdot]} \gamma(t, w[\cdot]; u[\cdot]; V, \varepsilon, \Delta_\delta),$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ(t, w[\cdot]) = \sup_V \rho_v(t, w[\cdot]; V). \quad (1.4)$$

Стратегия V° — оптимальна, если в этом выражении на ней достигается максимум.

Непосредственно из соотношений (1.3) и (1.4) вытекает $\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) \geq \rho_v^\circ(t, w[\cdot])$. В случае, когда справедливо равенство $\rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_v^\circ(t, w[\cdot])$ говорят, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену в точке $(t, w[\cdot])$, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют седловой точкой игры.

Следуя работе [7] приведем следующие вспомогательные построения. Обозначим

$$F_*(t, w[\cdot], \alpha) = \{f \in \mathbb{R}^n: \|f\| \leq \alpha(1 + \|w[\cdot]\|_\infty)\}, \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad \alpha > 0.$$

Пусть зафиксирована позиция $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$. Для числа $\alpha > 0$ определим множество

$$X_*(t, w[\cdot], \alpha) = \left\{ x[\cdot] \in X(t, w[\cdot]): \frac{d}{d\tau} (x[\tau] - g(\tau, x_\tau[\cdot])) \in F_*(\tau, x_\tau[\cdot], \alpha) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta] \right\}.$$

Пользуясь условием (g) можно показать, что множество $X_*(t, w[\cdot], \alpha)$ является непустым компактом в $\text{Lip}([t-h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$. Тогда, учитывая условие (f.1) существует такое $\bar{\alpha}_f \geq \alpha_f$, что справедливо неравенство

$$\|f(\tau, x_\tau[\cdot], u, v)\| \leq \bar{\alpha}_f, \quad \tau \in [t, \vartheta], \quad x[\cdot] \in X_*(t, w[\cdot], \alpha_f), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V},$$

где число α_f взято из условия (f.3). Определим множество

$$G(t, w[\cdot]) = \{(\tau, x_\tau[\cdot]) \in \mathbb{G}: \tau \in [t, \vartheta], x[\cdot] \in X_*(t, w[\cdot], \bar{\alpha}_f)\}.$$

Отметим, что $G(t, w[\cdot]) \in \text{Comp}(\text{Lip})$. Для $(\tau, r[\cdot]) \in G(t, w[\cdot])$ и $\varepsilon > 0$ через $Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)$ обозначим множество таких функций $z[\cdot] \in \text{Lip}$, что справедливы соотношения

$$(\tau, z[\cdot]) \in G(t, w[\cdot]), \quad \|r[0] - g(\tau, r[\cdot]) - z[0] + g(\tau, z[\cdot])\| \leq \varepsilon(\tau), \quad \|r[\cdot] - z[\cdot]\|_\infty \leq \varepsilon(\tau)/(1 - \lambda_g),$$

где $\varepsilon(\tau) = \sqrt{\varepsilon + (\tau - t_0)\varepsilon}$, а константа λ_g взята из условия (g). Отметим, что множество $Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)$ будет компактно в Lip . Определим стратегии игроков экстремальным сдвигом на сопутствующие точки, выбираемые по величинам ρ_u° и ρ_v° согласно правилу:

$$\begin{aligned} U^*(\tau, r[\cdot], \varepsilon) &\in \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(\tau, r[\cdot], u, v), s^u \rangle, \\ V^*(\tau, r[\cdot], \varepsilon) &\in \operatorname{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(\tau, r[\cdot], u, v), s^v \rangle, \end{aligned} \quad (\tau, y[\cdot]) \in G(t, w[\cdot]), \quad \varepsilon > 0, \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned} s^u &= r[0] - g(\tau, r[\cdot]) - z^u[0] + g(\tau, z^u[\cdot]), \quad z^u[\cdot] \in \operatorname{argmin}_{z[\cdot] \in Z(\tau, r[\cdot], \varepsilon)} \rho_u^\circ(\tau, z[\cdot]), \\ s^v &= z^v[0] - g(\tau, z^v[\cdot]) - r[0] + g(\tau, r[\cdot]), \quad z^v[\cdot] \in \operatorname{argmax}_{z[\cdot] \in Z(\tau, y[\cdot], \varepsilon)} \rho_v^\circ(\tau, z[\cdot]). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из результатов работы [7] следует, что при условиях (g), (f.1)–(f.4) и (σ) справедлива

Теорема 1.1. *Дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену, а пара стратегий $\{U^*, V^*\}$ составляют седловую точку игры. То есть, имеют место равенства*

$$\rho^\circ(t, w[\cdot]) := \rho_u^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_u(t, w[\cdot]; U^*) = \rho_v^\circ(t, w[\cdot]) = \rho_v(t, w[\cdot]; V^*), \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}.$$

Кроме того, функционал цены $\rho^\circ: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывен и для него справедливы свойства

(ρ_λ) Для любого $D \in \operatorname{Comp}(\operatorname{Lip})$ существует такое $\lambda_\rho = \lambda_f(D) > 0$, что справедливо

$$\|\rho^\circ(t, w[\cdot]) - \rho^\circ(t, r[\cdot])\| \leq \lambda_\rho \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_\infty, \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times D$$

(ρ_u) Для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\varepsilon > 0$ и любой допустимой реализации $v[\cdot]: [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ существует такая допустимая реализация $u[\cdot]: [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1), порожденного этими реализациями, справедливо неравенство $\rho^\circ(\tau, x_\tau[\cdot]) \leq \rho^\circ(t, w[\cdot]) + \varepsilon$.

(ρ_v) Для любых $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $\tau \in [t, \vartheta]$, $\varepsilon > 0$ и любой допустимой реализации $u[\cdot]: [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ существует такая допустимая реализация $v[\cdot]: [\tau, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$, что для движения $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ системы (1.1), порожденного этими реализациями, справедливо неравенство $\rho^\circ(\tau, x_\tau[\cdot]) \geq \rho^\circ(t, w[\cdot]) - \varepsilon$.

2. Минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

Следуя [5, 11], будем говорить, что функционал $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$ коинвариантно-дифференцируем (сi-дифференцируем) в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если существуют число $\partial_t \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}$ и вектор $\nabla \varphi(t, w[\cdot]) \in \mathbb{R}^n$, такие, что для любой функции $x[\cdot] \in X(t, w[\cdot])$ имеет место равенство

$$\varphi(\tau, x_\tau[\cdot]) - \varphi(t, w[\cdot]) = \partial_t \varphi(t, w[\cdot])(\tau - t) + \langle x_\tau[0] - w[0], \nabla \varphi(t, w[\cdot]) \rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in [t, \vartheta],$$

где величина $o(\tau - t)$ зависит от $\{t, x[\cdot]\}$, и $o(\tau - t)/(\tau - t) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow t + 0$. Число $\partial_t \varphi(t, w[\cdot])$ и вектор $\nabla \varphi(t, w[\cdot])$ называются сi-производными φ в точке $(t, w[\cdot])$.

Аналогично, отображение $\mathbb{G} \ni (t, w[\cdot]) \mapsto \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ сi-дифференцируемо в точке $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, если в этой точке сi-дифференцируемы функционалы $\psi_i: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. При этом, полагаем $\partial_t \psi = (\partial_t \psi_1, \dots, \partial_t \psi_n)$, $\nabla \psi = (\nabla \psi_1, \dots, \nabla \psi_n)$.

Обозначим через $\mathbb{G}_*$ множество всех точек $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, в которых отображение g сi-дифференцируемо. По отображению f из (1.1) определим Гамильтониан

$$H(t, w[\cdot], s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle, \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби с коинвариантными производными

$$\partial_t \varphi(t, w[\cdot]) + \langle \partial_t g(t, w[\cdot]), \nabla \varphi(t, w[\cdot]) \rangle + H(t, w[\cdot], \nabla \varphi(t, w[\cdot])) = 0, \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}_*, \quad (2.1)$$

при условии на правом конце

$$\varphi(\vartheta, w[\cdot]) = \sigma(w[\cdot]), \quad w[\cdot] \in \text{Lip}, \quad (2.2)$$

где функционал σ взят из показателя качества (1.2).

Несмотря на то, что уравнение (2.1) рассматривается только на $\mathbb{G}_*$, искомым в задаче (2.1), (2.2) является функционал φ , определенный на $\mathbb{G}$. Согласно [13] определим минимаксное (обобщенное) решение задачи (2.1), (2.2). Для это по отображению f из системы (1.1) определим следующие отображения

$$\begin{aligned} F_+(t, w[\cdot], v) &= \text{co}\{f(t, w[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n : u \in \mathbb{U}\}, \\ F_-(t, w[\cdot], u) &= \text{co}\{f(t, w[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n : v \in \mathbb{V}\}, \end{aligned} \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \quad (2.3)$$

Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$. Определим множества

$$X_+(t, w[\cdot], v) = \left\{ x[\cdot] \in X(t, w[\cdot]) : \frac{d}{d\tau} (x[\tau] - g(\tau, x_\tau[\cdot])) \in F_+(\tau, x_\tau[\cdot], v) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta] \right\}.$$

$$X_-(t, w[\cdot], u) = \left\{ x[\cdot] \in X(t, w[\cdot]) : \frac{d}{d\tau} (x[\tau] - g(\tau, x_\tau[\cdot])) \in F_-(\tau, x_\tau[\cdot], u) \text{ при п.в. } \tau \in [t, \vartheta] \right\}.$$

Отметим, что в силу условий (f.1)–(f.4) отображения F_+ и F_- удовлетворяют таким условиям (см., например, [13]), при которых множества $X_+(t, w[\cdot], v)$ и $X_-(t, w[\cdot], u)$ являются компактными в $\text{Lip}([t - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$.

Минимаксным решением задачи (2.1), (2.2) будем называть непрерывный функционал $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию (2.2), а также следующим двум условиям:

(φ_+) Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t, \vartheta]$ и $v \in \mathbb{V}$. Тогда существует такая функция $x[\cdot] \in X_+(t, w[\cdot], v)$, что справедливо неравенство $\varphi(\tau, x_\tau[\cdot]) \leq \varphi(t, w[\cdot])$.

(φ_-) Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t, \vartheta]$ и $u \in \mathbb{U}$. Тогда существует такая функция $x[\cdot] \in X_-(t, w[\cdot], u)$, что справедливо неравенство $\varphi(\tau, x_\tau[\cdot]) \geq \varphi(t, w[\cdot])$.

В работе [13] показано, что справедлива следующая

Теорема 2.1. У задачи (2.1), (2.2) существует единственное минимаксное решение $\varphi: \mathbb{G} \mapsto \mathbb{R}$.

3. Связь цены игры и минимаксного решения

Теорема 3.1. Для функционала цены ρ° дифференциальной игры (1.1), (1.2) и минимаксного решения φ задачи (2.1), (2.2) справедливо равенство

$$\rho^\circ(t, w[\cdot]) = \varphi(t, w[\cdot]), \quad (t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}.$$

Доказательство. По теореме 1 функционал цены ρ° дифференциальной игры (1.1), (1.2) существует. По теореме 2 минимаксное решение задачи (2.1), (2.2) единственно. Таким образом, для доказательства данной теоремы достаточно показать, что для функционала цены ρ° выполнены условия (2.2) и (φ_+) , (φ_-) .

Выполнение условия (2.2) вытекает из определения функционала цены ρ° . Докажем выполнение условия (φ_+) . Пусть $(t, w[\cdot]) \in \mathbb{G}$, $t < \vartheta$, $\tau \in (t, \vartheta]$ и $v \in \mathbb{V}$. Пусть выбрано $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Обозначим $\delta_k = (\tau - t)/k$ и $\tau_j = t + j\delta_k$, $j = \overline{0, k}$. Пользуясь на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0, k-1}$ свойством (ρ_u) , определим такую реализацию $u^{(k)}[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$, что для движения $x^{(k)}[\cdot]: [t - h, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$ порожденного из позиции $(t, w[\cdot])$ реализациями $u^{(k)}[\cdot]$ и $v[\cdot]: [t, \vartheta] \mapsto \{v\}$ будут справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \rho^\circ(\tau, x_\tau^{(k)}[\cdot]) &= \rho^\circ(\tau_k, x_{\tau_k}^{(k)}[\cdot]) \leq \rho^\circ(\tau_{k-1}, x_{\tau_{k-1}}^{(k)}[\cdot]) + 1/k^2 \\ &\leq \rho^\circ(\tau_{k-2}, x_{\tau_{k-2}}^{(k)}[\cdot]) + 2/k^2 \leq \dots \leq \rho^\circ(t, w[\cdot]) + 1/k. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, учитывая определение (2.3) отображения F_+ , справедливо включение $x^{(k)}[\cdot] \in X_+(t, w[\cdot], v)$. В силу компактности множества решений $X_+(t, w[\cdot], v)$ у последовательности $x^{(k)}[\cdot]$ существует сходящаяся подпоследовательность, которую будем обозначать также, а предел ее обозначим через $x^\circ[\cdot] \in X_+(t, w[\cdot], v)$. В силу свойства (ρ_λ) , полагая в нем $D = \{x_\tau^{(k)}[\cdot], k \in \mathbb{N}\} \cup \{x^\circ[\cdot]\}$ найдется такое $\lambda_\rho = \lambda_\rho(D) > 0$, что справедливо

$$\|\rho^\circ(\tau, x_\tau^\circ[\cdot]) - \rho^\circ(\tau, x_\tau^{(k)}[\cdot])\| \leq \lambda_\rho \|x_\tau^\circ[\cdot] - x_\tau^{(k)}[\cdot]\|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Переходя в соотношениях (3.1), (3.2) к пределу при $k \rightarrow \infty$ получаем неравенство $\rho^\circ(\tau, x_\tau^\circ[\cdot]) \leq \rho^\circ(t, w[\cdot])$. Выполнение условия (φ_+) доказано. Аналогично можно показать выполнение условия (φ_-) . Теорема доказана.

Из теорем 1 и 3 вытекает, что если известно минимаксное решение φ задачи (2.1), (2.2), то оно является ценой дифференциальной игры (1.1), (1.2) и, более того, оптимальные стратегии в этой игре могут быть построены согласно правилу (1.5), (1.6), в котором полагаем $\rho_u^\circ(\tau, z[\cdot]) = \rho_u^\circ(\tau, z[\cdot]) = \varphi(\tau, z[\cdot])$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. Осипов Ю.С. К теории дифференциальных игр систем с последствием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35. № 2. С. 300-311.
5. Луконов Н.Ю. Функциональные уравнения типа Гамильтона-Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Доклады РАН. 2000. Т. 371. № 4. С. 457-461.
6. Луконов Н.Ю. Функциональные уравнения Гамильтона-Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 243 с.
7. Гомоюнов М.И., Луконов Н.Ю., Плаксин А.Р. Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 2. С. 101-112.

8. Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю. К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 75-87.
9. Плаксин А.Р. Об уравнении Гамильтона–Якоби–Айзекса–Беллмана для систем нейтрального типа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 2. С. 222-237.
10. Hale J.K. Theory of functional differential equations. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1977. 365 p.
11. Kim A.V. Functional differential equations. Application of i -smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
12. Subbotin A.I. Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
13. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Минимаксное решение функциональных уравнений Гамильтона–Якоби для систем нейтрального типа // Доклады Академии наук. 2017. Т. 476. № 2. С. 136-139.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 27 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Гомоюнов Михаил Игоревич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии наук, директор, e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277

HAMILTON–JACOBI EQUATIONS IN DYNAMICAL OPTIMIZATION PROBLEMS FOR NEUTRAL-TYPE SYSTEMS

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com, nyul@imm.uran.ru, a.r.plaksin@gmail.com

Abstract. The relation between a differential game for neutral-type systems and a Hamilton–Jacobi functional equation with coinvariant derivatives is established. It is proved that the value functional of the game coincides with the minimax solution of this equation. Optimal strategies for the players are described.

Keywords: differential games; neutral-type equations; Hamilton–Jacobi equations; invariant derivatives

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).
2. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* [Control of a Dynamic System]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p. (In Russian).
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information*. Berlin, Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. Osipov Yu.S. K teorii differentsial'nykh igr sistem s posledeystviem [On the theory of differential games of systems with aftereffect]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 300–311. (In Russian).
5. Lukoyanov N.Yu. Funktsional'nye uravneniya tipa Gamil'tona–Yakobi i differentsial'nye igry s nasledstvennoy informatsiyey [Functional Hamilton–Jacobi type equations and differential games with hereditary information]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2000, vol. 371, no. 4, pp. 457–461. (In Russian).
6. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoy informatsiyey* [Functional Hamilton–Jacobi Equations and Control Problems with Hereditary Information]. Yekaterinburg, Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin Publ., 2011, 243 p. (In Russian).
7. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Sushchestvovanie tseny i sedlovoy tochki v pozitsionnykh differentsial'nykh igrakh dlya sistem neytral'nogo tipa [Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101–112. (In Russian).

This work is supported by the Grant of the President of the Russian Federation (project MK-3047.2017.1).

8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. K voprosu chislennogo resheniya differentsial'nykh igr dlya lineynykh sistem neytral'nogo tipa [On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 75-87. (In Russian).
9. Plaksin A.R. Ob uravnenii Gamil'tona–Yakobi–Ayzeksa–Bellmana dlya sistem neytral'nogo tipa [On Hamilton–Jacobi–Isaacs–Bellman equation for neutral type systems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 2, pp. 222-237. (In Russian).
10. Hale J.K. *Theory of functional differential equations*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977, 365 p.
11. Kim A.V. *Functional differential equations. Application of i -smooth calculus*. Dordrecht, Kluwer, 1999, 165 p.
12. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective*. Boston, Birkhäuser, 1995, 312 p.
13. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Minimaksnoe reshenie funktsional'nykh uravneniy Gamil'tona–Yakobi dlya sistem neytral'nogo tipa [Minimax solutions of Hamilton–Jacobi functional equations for neutral-type systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2017, vol. 476, no. 2, pp. 136-139. (In Russian).

Received 26 March 2018

Reviewed 27 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Gomoyunov Mikhail Igorevich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Lukoyanov Nikolay Yurievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding member of the Russian Academy of Sciences, Director, e-mail: nyul@imm.uran.ru

Plaksin Anton Romanovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation, Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

For citation: Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Uravneniya Gamil'tona–Yakobi v zadachah dinamicheskoy optimizatsii sistem neytral'nogo tipa [Hamilton–Jacobi equations in dynamical optimization problems for neutral-type systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 268–277. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-268-277 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284

УДК 517.95

ОБ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЯХ ПОТОЧЕЧНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ГУРСА–ДАРБУ

© И. В. Горохова¹⁾, В. И. Сумин²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
603600, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, ул. К. Минина, 24
E-mail: i_lisach@mail.ru

²⁾ ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: v_sumin@mail.ru

Аннотация. Для нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения рассматривается задача максимизации функционала достаточно общего вида, определенного на решениях системы. Изучается ситуация сильного вырождения поточечного принципа максимума (необходимого условия оптимальности первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда на особом управлении принципа максимума одновременно с ним вырождаются и условия оптимальности второго порядка. Приводятся достаточные условия сильного вырождения принципа максимума и необходимые условия оптимальности соответствующих особых управлений, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаям терминального функционала качества и более гладкой правой части уравнения.

Ключевые слова: нелинейная система Гурса–Дарбу; условия Каратеодори; решение с ограниченной смешанной производной; задача оптимизации; поточечный принцип максимума; особое управление; условие оптимальности третьего порядка

В теории оптимизации распределенных систем *необходимые условия оптимальности* (НУО) *особых управлений* (ОУ) *поточечного принципа максимума* (ППМ) изучались в основном для управляемых систем Гурса–Дарбу и близких к ним (см., например, обзоры литературы в [1–4]). При этом для систем Гурса–Дарбу рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации. Изучению ОУ ППМ для таких задач посвящено немало работ и в большинстве из них предполагалось, что правая часть

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727).

дифференциального уравнения и ее производные по «фазовым» переменным непрерывны по совокупности переменных; значительное внимание уделялось случаю, когда правая часть аффинна по производным и они в ней аддитивно отделены от управления (см., например, [1, §2], [3, 4] и библиографию в [1–4]).

Ниже описаны некоторые результаты применения схемы [2] изучения ОУ ППМ к задаче максимизации функционала достаточно общего вида, определенного на решениях нелинейной управляемой системы Гурса–Дарбу с полной каратеодориевской правой частью уравнения. Рассматривается случай, когда необходимо искать решения системы в классе AC_∞^n абсолютно непрерывных n -вектор-функций с ограниченными смешанной и первыми производными. Изучается общая ситуация сильного вырождения ППМ (НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления), когда на ОУ ППМ одновременно с принципом максимума вырождаются и условия оптимальности второго порядка. Приводятся достаточные условия сильного вырождения ППМ и НУО соответствующих ОУ, обобщающие известные сходные условия, относящиеся к случаям терминального функционала качества и более гладкой правой части уравнения.

Рассмотрим управляемую задачу Гурса–Дарбу

$$x''_{t^1 t^2}(t) = g(t, x(t), x'_{t^1}(t), x'_{t^2}(t), u(t)), \quad t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \quad (1)$$

$$x(t^1, 0) = \varphi_1(t^1), \quad t^1 \in [0, 1]; \quad x(0, t^2) = \varphi_2(t^2), \quad t^2 \in [0, 1], \quad (2)$$

где $g(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l, v): \Pi \times \mathbf{R}^{3n} \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\varphi_i(t^i): [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^n$ ($i = 1, 2$) заданы, $u(t): \Pi \rightarrow V \subset \mathbf{R}^m$ — управление, V ограничено ($\mathbf{R}^n$ — пространство n -векторов-столбцов). Предполагаем: $g(t, l, v)$ дважды дифференцируема по l при каждом v для почти всех t и вместе с производными g'_l, g''_{ll} L -измерима по t при любых $\{l, v\}$, непрерывна по $\{l, v\}$ для почти каждого t и ограничена на любом ограниченном множестве; φ_i абсолютно непрерывна, $\varphi_i(0) = 0$ и $\varphi'_i \in L_\infty^n([0, 1])$ ($i = 1, 2$); допустимы измеримые управления. При таких условиях естественно рассматривать решения (1)–(2) из класса $AC_\infty^n \equiv AC_\infty^n(\Pi)$. Гарантирована единственность такого решения для каждого допустимого управления u . Пусть Ω — множество тех допустимых u , для каждого из которых существует глобальное класса AC_∞^n решение x_u задачи (1)–(2).

Пусть $\Phi[\cdot]: C^n(\Pi) \rightarrow \mathbf{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемый по Фреше функционал на классе непрерывных на Π n -вектор-функций. Рассмотрим задачу

$$J[u] \equiv \Phi[x_u] \rightarrow \max, \quad u \in \Omega, \quad (3)$$

понимая ее как задачу нахождения $L_1^m \equiv L_1^m(\Pi)$ -локального максимума.

Введем обозначения для интегральных операторов: $A_0[z](t) \equiv \int_0^{t^1} \int_0^{t^2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$, $A_1[z](t) \equiv \int_0^{t^2} z(t^1, \xi) d\xi$, $A_2[z](t) \equiv \int_0^{t^1} z(\xi, t^2) d\xi$, $A[z](t) \equiv \{A_0[z](t), A_1[z](t), A_2[z](t)\}$, $t \equiv \{t^1, t^2\} \in \Pi, z \in L_1^n$. Формула $x(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z](t)$, $t \in \Pi$, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между классом удовлетворяющих условиям (2) функций $x(\cdot) \in AC_\infty^n$ и классом L_∞^n функций $z(\cdot)$, позволяет переписать задачу оптимизации (1)–(3) в эквивалентной форме

$$z(t) = f(t, A[z](t), u(t)), \quad t \in \Pi, \quad (4)$$

$$J[u] \equiv F[z_u] \rightarrow \max, \quad u \in \Omega, \quad (5)$$

где $f(t, l, v) \equiv f(t, l_0, l_1, l_2, v) \equiv g(t, l_0 + \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2), l_1 + \varphi'_1(t^1), l_2 + \varphi'_2(t^2), v)$ и рассматриваемое над L_∞^n уравнение (4) — эквивалентная функционально-операторная переформулировка задачи (1)–(2), z_u — отвечающее управлению u глобальное решение (4), $x_u(t) = \varphi_1(t^1) + \varphi_2(t^2) + A_0[z_u](t)$, $t \in \Pi$; $F[z] \equiv \Phi[\varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot) + A_0[z](\cdot)]$, $z \in L_1^n$. Приведенное описание задачи оптимизации (1)–(3) в терминах уравнения (4) удобно для изучения ППМ, что видно, например, уже по выписанным ниже сопряженному уравнению ППМ и соответствующим уравнениям (7₁), (7₂) и (8) НУО ОУ.

Пусть: u_0 — некоторое фиксированное допустимое управление, $x_0 \equiv x_{u_0}$, $z_0 \equiv z_{u_0}$; $S : L_1^n \rightarrow L_1^n$ — линейный оператор, задаваемый формулой $S[z](t) \equiv z(t) - f'_l(t)A[z](t)$, $f'_l(t) \equiv f'_l(t, A[z_0](t), u_0(t))$, $z \in L_1^n$, $t \in \Pi$; $F'(z_0), F''(z_0)$ — первая и вторая производные Фреше функционала $F : L_1^n \rightarrow \mathbf{R}$ в точке z_0 , $\omega \in L_\infty^n$ — функция Рисса функционала $F'(z_0) \in (L_1^n)^*$; $\Delta_w f(t) \equiv f(t, A[z_0](t), w) - f(t, A[z_0](t), u_0(t))$, $t \in \Pi$, $w \in V$ (аналогично понимаем $\Delta_w f'_l(t)$); $\pi(t, w, \xi) \equiv \langle \xi, \Delta_w f(t) \rangle$, $t \in \Pi$, $w \in V$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$. Сформулируем ППМ: *если u_0 решение задачи (1)–(3), то для каждого $w \in V$ при почти всех $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $\pi(\tau, w, \psi(\tau)) \leq 0$, где $\psi \in L_\infty^n$ — решение сопряженного уравнения $S^*[\psi](t) \equiv \psi(t) - A^*[\{f'_l(\cdot)\}^* \psi(\cdot)](t) = \omega(t)$, $t \in \Pi$.*

ППМ можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управления. Пусть: Σ — совокупность всех наборов $\sigma \equiv \{\tau, w\}$, в каждом из которых w — какой-то элемент V , $\tau \in \Pi$ — некоторая правильная точка Лебега функции $\pi(\cdot, w, \psi(\cdot))$; $\mathcal{H}$ — семейство всех пар $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\}$, в каждой из которых $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$, а ε — такое положительное число, что множество $\Pi_\varepsilon(\tau) \equiv \tau - \varepsilon\Pi$ принадлежит Π . Каждому $h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}$ отвечает допустимое управление $u_h(t) \equiv \{w, t \in \Pi_\varepsilon(\tau); u_0(t), t \in \Pi \setminus \Pi_\varepsilon(\tau)\}$, а каждому набору параметров варьирования $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$ — семейство функций $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$, простейшая одноточечная игольчатая варианта (ПОИВ) управления u_0 . Положим $\Delta_u J \equiv J[u] - J[u_0]$, $u \in \Omega$. Для любого $\sigma \equiv \{\tau, w\} \in \Sigma$ существует равный $\pi(\tau, w, \psi(\tau))$ предел $\delta J(\sigma) \equiv \delta J(\tau, w) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-2} \Delta_{u_h} J)$, который естественно назвать первой вариацией функционала J на варианте $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$. Очевидное НУО $\delta J(\sigma) \leq 0$, $\sigma \in \Sigma$, управления u_0 и есть ППМ.

Положим $\mathcal{M} \equiv \{t, w\} \in \Pi \times V : \pi(t, w, \psi(t)) = 0\}$. Если u_0 решение (1)–(3), то при почти любом $t \in \Pi$ значение $u_0(t)$ принадлежит сечению $\mathcal{M}(t) \equiv \{w \in V : \{t, w\} \in \mathcal{M}\}$ множества $\mathcal{M}$. Пусть $\Pi_* \equiv \{t \in \Pi : \mathcal{M}(t) \neq \{u_0(t)\}\}$. Управление u_0 называем ОУ ППМ, если $\text{mes} \Pi_* > 0$. Говорим, что ППМ вырождается на ОУ u_0 . Случай, когда $\text{mes} \Pi_* = \text{mes} \Pi$ и при почти каждом $t \in \Pi$ сечение $\mathcal{M}(t)$ совпадает с V , назовем случаем *полного вырождения* ППМ. Далее для примера рассмотрим именно этот случай. Пусть ППМ полностью вырождается на ОУ u_0 . Используя игольчатое варьирование, введем понятие сильного вырождения ППМ на ОУ u_0 .

Предел $\delta^{\gamma-1} J(\sigma) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\gamma} \Delta_{u_h} J$, если он существует при некотором $\gamma > 2$, назовем *вариацией порядка $\gamma - 1$ функционала J на ПОИВ $\{u_h(\cdot)\}_{h \equiv \{\sigma, \varepsilon\} \in \mathcal{H}}$* ; соответственно НУО вида $\delta^{\gamma-1} J(\sigma) \leq 0$ ($\sigma \in \Sigma$) назовем *НУО порядка $\gamma - 1$ управления u_0 при простейшем одноточечном игольчатом варьировании*. Назовем ОУ ППМ u_0 *сильно*

вырожденным ОУ для способа простейшего однотоочечного игольчатого варьирования и будем говорить, что ППМ сильно вырождается на ОУ u_0 , если тождественно зануляется вариация 2-го порядка: $\delta^2 J(\sigma) \equiv 0$, $\sigma \in \Sigma$.

Введем специальные обозначения: $f''_{ii}(\cdot)[p, q] \equiv \sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} f''_{ij}(\cdot) p^i q^j$, $p, q \in \mathbf{R}^{3n}$; $\Gamma(u_0) \equiv \{\{i, j\} : i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, 3n}; \Delta_w f^{i'}_{ij}(t) = 0 \text{ для любого } w \in V \text{ при почти всех } t \in \Pi\}$; если $X = (X_{ij})$ — $(n \times 3n)$ -матрица, то X^0 — $3n^2$ -столбец, полученный развертыванием X по правилу «столбец за столбцом» $X^0 \equiv \{X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}, X_{12}, X_{22}, \dots, X_{n3n}\}$, а $M[\cdot]$ — обратный оператор свертывания $3n^2$ -столбца в $(n \times 3n)$ -матрицу, $\tilde{X} = (\tilde{X}_{ij})$ — $(n \times 3n)$ -матрица, в которой $\tilde{X}_{ij} \equiv \{0, \{i, j\} \in \Gamma(u_0); X_{ij}, \{i, j\} \notin \Gamma(u_0)\}$,

Теорема 1. Пусть u_0 — полностью вырожденное ОУ ППМ и выполняются условия: (i) для любых $\xi \in L_\infty^{3n}$, $u \in \Omega$ формула

$$b_1(\xi, u)[p, q] \equiv 2^{-1} \int_{\Pi} \langle \psi(t), f''_{ii}(t, \xi(t), u(t)) [A[p](t), A[q](t)] \rangle dt, \quad p, q \in L_1^n,$$

определяет над $L_1^n \times L_1^n$ ограниченный билинейный функционал $b_1(\xi, u)[\cdot, \cdot]$, непрерывно в норме $L_\infty^{3n} \times L_1^n$ зависящий от $\{\xi, u\}$; (ii) формула

$$b_2[p, q] \equiv \int_{\Pi} \langle \psi(t), \widetilde{M[q(t)]} A[p](t) \rangle dt, \quad p \in L_1^n, \quad q \in L_1^{3n^2},$$

определяет над $L_1^n \times L_1^{3n^2}$ ограниченный билинейный функционал $b_2[\cdot, \cdot]$. Тогда ППМ сильно вырождается на ОУ u_0 .

Если в условиях теоремы 1 существует вариация $\delta^3 J(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma$, то можно получить для u_0 содержательные НУО третьего порядка. Воспользуемся тем, что любой ограниченный билинейный над $L_1^n \times L_1^k$ функционал $b[\cdot, \cdot]$ единственным образом представим в виде

$$b[p, q] = \int_{\Pi} dt \int_{\Pi} p^*(t) \Theta(t, s) q(s) ds, \quad p \in L_1^n, \quad q \in L_1^k, \quad (6)$$

где $\Theta \in L_\infty^{n \times k}(\Pi \times \Pi)$. Пусть: $b_0[p, q] \equiv 2^{-1} F''(z_0)[p, q]$, $p, q \in L_1^n$, где $F''(z_0)[\cdot, \cdot]$ — билинейный функционал второй производной Фреше $F''(z_0)$; $\Theta_0(t, s)$ и $\Theta_1(t, s)$ — $(n \times n)$ -матрицы, отвечающие по формуле (6) функционалам b_0 и $b_{10} \equiv b_1(A[z_0], u_0)$; $\Theta_2(t, s)$ — $(n \times 3n^2)$ -матрица, отвечающая функционалу b_2 ; I_k — тождественный оператор в L_1^k ; $L_1^n \otimes L_1^k$ — проективное тензорное произведение L_1^n и L_1^k , натянутое на элементы $p(t) \otimes q(s) \equiv p(t)q^*(s)$ ($p \in L_1^n$, $q \in L_1^k$) и совпадающее с $L_1^{n \times k}(\Pi \times \Pi)$. Уравнение

$$(S \otimes S)^*[\eta(\cdot, \cdot)](t, s) = \Theta_i(t, s), \quad \{t, s\} \in \Pi \times \Pi, \quad (7_i)$$

имеет единственное в $L_\infty^{n \times n}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_i(t, s)$ ($i = 0, 1$). Уравнение

$$(S \otimes I_{3n^2})^*[\eta(\cdot, \cdot)](t, s) = \Theta_2(t, s), \quad \{t, s\} \in \Pi \times \Pi, \quad (8)$$

имеет единственное в $L_\infty^{n \times 3n^2}(\Pi \times \Pi)$ решение $\eta_2(t, s)$. Положим

$$E(t, s; v, w) \equiv \left\langle \Delta_v f(t), \{\eta_0(t, s) + \eta_1(t, s)\} \Delta_w f(s) + \eta_2(t, s) \{\Delta_w f'_i(s)\}^0 \right\rangle, \quad t, s \in \Pi, \quad v, w \in V.$$

Теорема 2. Пусть u_0 — полностью вырожденное ОУ ППМ, выполняются условия теоремы 1, а также условие: (iii) для функции $\eta_i(t, s)$ правильные относительно 4-мерной меры Лебега на $\Pi \times \Pi$ точки Лебега образуют на «диагонали» $\{\{t, s\} \in \Pi \times \Pi : t = s\}$ множество полной меры относительно 2-мерной «диагональной» меры Лебега ($i = 0, 1, 2$). Тогда при каждом $w \in V$ для почти любого $\tau \in \Pi$ на ПОИВ с параметрами $\sigma = \{\tau, w\}$ существует третья вариация $\delta^3 J(\tau, w)$, равная $E(\tau, \tau; w, w)$. Если u_0 решение задачи (1)–(3), то при каждом $w \in V$ для почти любого $\tau \in \Pi$ выполняется неравенство $E(\tau, \tau; w, w) \leq 0$.

О возможностях проверки условия (iii) в конкретных ситуациях см. [2], пример проверки для терминального функционала качества см. в [3, 4].

Чтобы распространить приведенные результаты на общий случай неполного вырождения ППМ на ОУ, нужно воспользоваться более общим способом одноточечного игольчатого варьирования, чем описанное выше простейшее варьирование (см. [2–4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление. Новосибирск: Наука, 1990. 151 с.
2. Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20. Вып. 3. С. 70–80.
3. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях принципа максимума в терминальной задаче оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1264–1274.
4. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 483–491.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Горохова Ирина Владимировна, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: i_lisach@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

Для цитирования: Горохова И.В., Сумин В.И. Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 278–284. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284

ABOUT SINGULAR CONTROLS OF POINTWISE MAXIMUM PRINCIPLE FOR OPTIMIZATION PROBLEM CONNECTED WITH GOURSAT–DARBOUX SYSTEM

I. V. Gorokhova¹⁾, V. I. Sumin²⁾

¹⁾ Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24 Minin St., Nizhny Novgorod 603600, Russian Federation
E-mail: i_lisach@mail.ru

²⁾ Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: v_sumin@mail.ru

Abstract. In this paper, we consider the problem of maximizing a sufficiently general functional defined on solutions of the controlled nonlinear Goursat-Darboux system. The right-hand side of the differential equation is a Caratheodory function. We study singular controls in the sense of the pointwise maximum principle, i.e. the controls for which this principle degenerates. We consider strong degeneration of the pointwise maximum principle (this principle is the necessary first-order optimality conditions by using of needle-shaped variation of a control) when the maximum principle degenerates together with second-order optimality conditions. Sufficient conditions for the strong degeneration of maximum principle and necessary conditions for the optimality of corresponding singular controls are given. These conditions generalize the conditions that are known for the case of the terminal quality functional and the case of the smoother right side of the equation.

Keywords: nonlinear Goursat–Darboux system; Caratheodory conditions; solution with bounded mixed derivative; terminal optimization problem; pointwise maximum principle; singular control; third order optimality condition

REFERENCES

1. Vasilev O.V., Srochko V.A., Terletskiy V.A. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Ch. 2. Optimal'noe upravlenie* [Methods of Optimization and Their Applications. Part 2. Optimal Control]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1990, 151 p. (In Russian).
2. Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimuma v raspredelen-nykh zadachakh optimizatsii [On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 70-80. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

3. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma v terminal'noy zadache optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [About singular controls of maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1264–1274. (In Russian).

4. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [On singular controls of a maximum principle for the problem of the Goursat–Darboux system optimization]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 483–491. (In Russian).

Received 20 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Gorokhova Irina Vladimirovna, Nizhny Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: i_lisach@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Gorokhova I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochehnogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu [About singular controls of pointwise maximum principle for optimization problem connected with Goursat–Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 278–284. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-278-284 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291
УДК 517.977

К ИТЕРАЦИОННОМУ МЕТОДУ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

© И. В. Гребенникова

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: giv001@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на ресурсы управления. Предлагается процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием; оптимальное управление; фундаментальная матрица

Введение

В данной работе рассматриваются динамические объекты, математическими моделями которых являются сингулярно возмущенные системы с постоянным запаздыванием по фазовым переменным. Рассматривается задача управления по минимаксному критерию в постановке [1, 2] для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием по фазовым переменным при неопределенных начальных условиях и геометрических ограничениях на управляющие воздействия. Терминальный функционал качества зависит как от быстрых, так и от медленных переменных. В основе предлагаемого метода лежат идеи выделения асимптотики ансамбля траекторий сингулярно возмущенной системы, предложенные А. Г. Кремлёвым в работе [3], но при отсутствии запаздывания и представления фундаментальной матрицы решений, разбитой на блоки в соответствии с размерностями быстрых и медленных переменных, в виде равномерно сходящейся последовательности. Оптимальное решение аппроксимируется с любой заданной точностью (относительного малого параметра), при этом не требуется чрезмерных условий гладкости (дифференцируемость не выше первого порядка), ограничений на класс допустимых управлений.

1. Основные понятия

Рассматривается управляемая сингулярно возмущенная система (с малым параметром $\mu > 0$) с запаздыванием $h > 0$ (по состоянию):

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + G_{11}(t)x(t-h) + \mu G_{12}(t)y(t-h) + B_1(t)u(t), \\ \mu dy(t)/dt &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t) + G_{21}(t)x(t-h) + \mu G_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$; $x \in R^n$, $y \in R^m$; A_{ij} , B_i , G_{ij} , $i, j = 1, 2$ — матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами. Начальное состояние системы $x(t) = \psi_x(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $x(t_0) = x_0$, $y(t) = \psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $y(t_0) = y_0$ точно неизвестно, и заданы лишь ограничения $x_0 \in X_0$, $y_0 \in Y_0$, где X_0 , Y_0 — выпуклые компакты в соответствующих пространствах, $\psi_x(t) \in \Psi_x(t)$, $\psi_y(t) \in \Psi_y(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi_x(t)$, $\Psi_y(t)$ — заданные многозначные отображения со значениями в виде выпуклых компактов (в R^n , R^m), непрерывные по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$. В данном случае

$$P = \{u(\cdot) \mid u(t) \in P(t), t \in T\},$$

где $P(t)$ — заданное непрерывное, ограниченное, выпуклое многозначное отображение.

Будем предполагать выполненным следующее условие.

У с л о в и е 1. Корни $\lambda_s(t)$ характеристического уравнения $|A_{22}(t) - \mu \lambda E_m + \mu G_{22}(t)e^{-\lambda h}| = 0$, где E_m — единичная $m \times m$ матрица, удовлетворяют неравенству: $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -2c < 0$, при $t \in T$, $c = \text{const} > 0$.

Рассматривается минимаксная задача управления [1, 2]: среди управлений $u(\cdot) \in P$ найти оптимальное $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)), \quad (2)$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ заданная выпуклая функция (с конечными значениями); $z' = (x', y')$, $\psi' = (\psi'_x, \psi'_y)$, $z(t, u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$, $t \in T$ — решение системы (1), исходящее из $Z_0 = X_0 \times Y_0$ при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$, $\Psi = \Psi_x \times \Psi_y$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Пусть $Z[t, \tau]$ есть фундаментальная матрица решений системы (1) ($u \equiv 0$) $Z[\tau, \tau] = E_{n+m}$, $Z[t, \tau] = 0$ при $\tau > t$.

Матрицу $Z[t, \tau]$ представим в следующем блочном виде:

$$Z[t, \tau] = \begin{pmatrix} Z_{11}[t, \tau] & Z_{12}[t, \tau] \\ Z_{21}[t, \tau] & Z_{22}[t, \tau] \end{pmatrix},$$

здесь $Z_{11}[t, \tau]$, $Z_{12}[t, \tau]$, $Z_{21}[t, \tau]$, $Z_{22}[t, \tau]$ — матрицы с размерами соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$.

2. Основные результаты

Для реализации итерационной процедуры [4] построения оптимального решения задачи (2) важно правильно выбрать начальную асимптотику.

В [4] приведены рекуррентные формулы для вычисления блоков $Z_{ij}^{(k)}[t, \tau]$ ($i, j = 1, 2$), $k = 0, 1, 2, \dots$, определяющих асимптотику матрицы $Z[t, \tau]$ относительно малого параметра $\mu > 0$:

$$Z_{11}^{(k+1)}[t, \tau] = X[t, \tau] - \int_{\tau}^t (dZ_{12}^{(0)}[t, s]/ds) A_{22}^{-1}(s) (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s - h, \tau]) ds;$$

$$Z_{22}^{(k+1)}[t, \tau] = Y[t, \tau] + \int_{\tau}^t Z_{21}^{(k)}[t, s] (A_{12}(s) Y[s, \tau] + \mu G_{12}(s) Y[s - h, \tau]) ds;$$

$$Z_{12}^{(k)}[t, \tau] = \int_{\tau}^t Z_{11}^{(k)}[t, s] (A_{12}(s) Y[s, \tau] + \mu G_{12}(s) Y[s - h, \tau]) ds;$$

$$Z_{21}^{(k)}[t, \tau] = (1/\mu) \int_{\tau}^t Y[t, s] (A_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s, \tau] + G_{21}(s) Z_{11}^{(k)}[s - h, \tau]) ds;$$

предполагается существование $A_{22}^{-1}(t)$; причем $Z_{11}^{(0)}[t, \tau] = X[t, \tau]$, $Z_{22}^{(0)}[t, \tau] = Y[t, \tau]$, где $X[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений вырожденной системы (система (1) при $\mu = 0$), $X[\tau, \tau] = E_n$, $X[t, \tau] = 0$, при $\tau > t$, $Y[t, \tau]$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\mu dy/dt = A_{22}(t)y(t) + \mu G_{22}(t)y(t - h), \quad Y[t, \tau] = 0, \quad \text{при } \tau > t, \quad Y[\tau, \tau] = E_m.$$

Вычисляя в соответствии с [4] при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, имеем:

$$\varepsilon^0(t_1) = \varepsilon^{(k)}(t_1) + O(\mu^{k+1}),$$

$$\varepsilon^{(k)}(t_1) = \max\{\chi^{(k)}(p, q) \mid p \in R^n, q \in R^m\} = \chi^{(k)}(p^{(k)}, q^{(k)}), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \chi^{(k)}(p, q) = & -h_{(k)}^{**}(p, q) - \int_{t_0}^{t_1 - \alpha_k(\mu)} \rho(-r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) \mid P(\tau)) d\tau - \\ & - \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} \rho(-r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) \mid V(s)) ds, \quad V(s) = P(t_1 - \mu s), \end{aligned}$$

где $\alpha_k(\mu) > 0$: $\alpha_k(\mu) = o(1)$, $\alpha_k(\mu)/\mu \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow +0$, причем функции $r_i^{(k)}(\tau, t_1, p, q)$, $i = 1, 2$, определяются следующим образом: при $t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu)$

$$\begin{aligned} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p, q) = & (p' Z_{11}^{(k)}[t_1, \tau] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, \tau] + \\ & + G_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, \tau]) ds) B_0(\tau) - \\ & - \frac{d}{d\tau} (p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, \tau] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu s, \tau] ds) A_{22}^{-1}(\tau) B_2(\tau), \end{aligned}$$

при $0 \leq s < \alpha_k(\mu)/\mu$

$$\begin{aligned} r_2^{(k)}(s, t_1, p, q) = & [q' \Phi[t_1, s] + \frac{d}{ds} (p' Z_{12}^{(k-1)}[t_1, t_1 - \mu s] + \\ & + \int_0^s q' \Phi[t_1, \sigma] A_{21}(t_1 - \mu \sigma) Z_{12}^{(k-1)}[t_1 - \mu \sigma, t_1 - \mu s] d\sigma) A_{22}^{-1}(t_1 - \mu s)] B_2(t_1 - \mu s) + \mu \xi(p, q, \mu), \end{aligned}$$

здесь $\Phi[t_1, s] = Y[t_1, t_1 - \mu s]$, $\xi(p, q, \mu) = O(\mu^{k+1})$,

$$h_{(k)}(p, q) = \varphi^*(p, q) - \rho(p' Z_{11}^{(k)}[t_1, t_0] + \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q' \Phi[t_1, s] (A_{21}(t_1 - \mu s) Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] +$$

$+G_{21}(t_1 - \mu s)Z_{11}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds \mid X_0) - \rho(p'Z_{12}^{(k)}[t_1, t_0] +$
 $+ \int_0^{\alpha_k(\mu)/\mu} q'\Phi[t_1, s](A_{21}(t_1 - \mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s, t_0] + G_{21}(t_1 - \mu s)Z_{12}^{(k)}[t_1 - \mu s - h, t_0])ds \mid Y_0) -$
 $- \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_x}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_x(\tau - h))d\tau - \int_{t_0}^{t_0+h} \rho(r_{h_y}^{(k)}(\tau, t_1, p, q)|\Psi_y(\tau - h))d\tau,$
 $r_{h_x}^{(k)}(\tau, t, p, q) = (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])G_0(\tau) -$
 $- \frac{d}{d\tau}(p'Z_{12}^{(k-1)}[t, \tau] + (1/\mu) \int_{\tau}^{t_0+h} q'Y[t, s]A_{21}(s)Z_{12}^{(k-1)}[s, \tau]ds)A_{22}^{-1}(\tau)G_{21}(\tau);$
 $r_{h_y}^{(k)}(\tau, t, p, q) = (p'Z_{11}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{21}^{(k)}[t, \tau])\mu G_{12}(\tau) + (p'Z_{12}^{(k)}[t, \tau] + q'Z_{22}^{(k)}[t, \tau])G_{22}(\tau);$
 $\varphi^*(p, q)$ — функция, сопряженная к $\varphi(p, q)$; $h^{**}(p, q) = \overline{(co h)}(p, q)$ — замыкание выпуклой оболочки функции $h(p, q)$; $\rho(q|X)$ — опорная функция множества X на элементе q .

Рассмотрим управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$:

$$u_\mu^{(k)}(\tau) = \begin{cases} u^{(k)}(\tau), & t_0 \leq \tau \leq t_1 - \alpha_k(\mu), \\ v^{(k)}((t_1 - \tau)/\mu), & t_1 - \alpha_k(\mu) < \tau \leq t_1, \end{cases}$$

$u^{(k)}(\cdot), v^{(k)}(\cdot)$ определяются условиями:

при почти всех $\tau \in [t_0, t_1 - \alpha_k(\mu)], s \in [0, \alpha_k(\mu)/\mu]$

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u^{(k)}(\tau) = \min_{u(\tau) \in P(\tau)} r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})u(\tau),$$

$$r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v^{(k)}(s) = \min_{v(s) \in V(s)} r_2^{(k)}(s, t_1, p^{(k)}, q^{(k)})v(s).$$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Вырожденная система относительно управляема на T (определение см. [5]);
2. Для любого $t \in T$ $\text{rank}\{B_2(t_1), A_{22}(t_1)B_2(t_1), \dots, A_{22}^{m-1}(t_1)B_2(t_1)\} = m$;
3. Максимум в (3) достигается на векторе $(l^{(k)})' = (p^{(k)})', q^{(k)'}'$ таком, что

$$r_1^{(k)}(\tau, t_1, p^{(k)}, q^{(k)}) \neq 0, q^{(k)} \neq 0.$$

Тогда задача (2) разрешима, причем при $0 < \mu \leq \mu_0$, μ_0 достаточно мало, управляющее воздействие $u_\mu^{(k)}(\cdot)$ доставляет оценку

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0(\cdot)) = J(u_\mu^{(k)}(\cdot)) + O(\mu^{k+1}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Kremlev A.G. Asymptotic properties of trajectories of singularly perturbed system in the problem of optimal control // Автоматика и телемеханика. 1993. № 9. С. 61-78.

4. Гребенникова И.В., Кремлев А.Г. Итерационная процедура построения оптимального решения в минимаксной задаче управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 3. С. 272-280.

5. Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Доклады АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1260-1263.

Поступила в редакцию 21 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Гребенникова Ирина Владимировна, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий, e-mail: giv001@mail.ru.

Для цитирования: Гребенникова И.В. К итерационному методу построения оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием при геометрических ограничениях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 285–291. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291

TO THE ITERATIVE METHOD OF CONSTRUCTING OPTIMAL CONTROL OF A SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH DELAY WITH GEOMETRIC CONSTRAINTS

I. V. Grebennikova

Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: giv001@mail.ru.

Abstract. The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and geometric constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Keywords: singularly perturbed system with delay; optimal control; fundamental matrix.

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 475 p. (In Russian).
2. Kurzanskiy A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and Observation Under the Uncertainty Conditions]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p. (In Russian).
3. Kremlev A.G. Asymptotic properties of trajectories of singularly perturbed system in the problem of optimal control. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1993. no. 9. pp. 61-78.
4. Grebennikova I.V., Kremlev A.G. Iteratsionnaya protsedura postroeniya optimal'nogo resheniya v minimaksnoy zadache upravleniya singulyarno vozmushchennoy sistemoy s zapazdyvaniem pri geometricheskikh ogranicheniyakh [Iterative Procedure of Constructing Optimal Solving in the Minimax Problem of Control for Singularly Perturbed System with Delay with Geometric Constraints]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 272-280. (In Russian).
5. Kirillova F.M., Churakova S.V. Otnositel'naya upravlyaemost' lineynykh dinamicheskikh sistem s zapazdyvaniem [Relative controllability of linear dynamic systems with delay]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1967, vol. 174, no. 6, pp. 1260-1263. (In Russian).

Received 21 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Grebennikova Irina Vladimirovna, Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Information Systems and Technologies Department, e-mail: giv001@mail.ru.

For citation: Grebennikova I.V. K iteratsionnomu metodu postroeniya optimalnogo upravleniya singulyarno vozmushchennoy sistemoy s zapazdivaniem pri geometricjeskih ogranicheniyah [To the iterative method of constructing optimal control of a singularly perturbed system with delay with geometric constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 285–291. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-285-291 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302

УДК 517.911,517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

© А. А. Григоренко

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: g.anyu@mail.ru

Аннотация. Получено утверждение о существовании решений возмущенного включения и об оценке их близости к наперед заданной непрерывной функции.

Ключевые слова: возмущенное включение; оценка близости решений к наперед заданным функциям

Введение

Работа посвящена исследованию так называемого «возмущенного включения», правая часть которого состоит из алгебраической суммы значений компактнозначного многозначного отображения и отображения, не обладающего свойством замкнутости значений. К таким включениям сводятся краевые задачи для функционально-дифференциальных включений, функционально-дифференциальные системы управления. В статье доказана теорема существования и получены оценки близости решений к наперед заданным функциям. Отметим, что этот результат дает не только условия существования решения возмущенного включения, но и способ нахождения приближенного решения путем подбора соответствующей функции, а также оценку погрешности этого решения.

1. Основные понятия

Пусть X - банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Обозначим $\text{comp}[X]$ - множество всех непустых компактов пространства X , $\rho_X[\cdot, \cdot]$ - расстояние от точки до множества, $h_X[\cdot, \cdot]$ - расстояние по Хаусдорфу между множествами. Пусть $\mathbb{R}^n$ - арифметическое пространство с нормой $|\cdot|$, если $A \subset \mathbb{R}^n$, то $\|A\| = \sup\{|a| : a \in A\}$. Пусть $\mathcal{U} \subset [a, b]$ - измеримое по Лебегу множество. Обозначим: $\mathbf{L}^n(\mathcal{U})$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \int_{\mathcal{U}} |x(s)| ds$; $\Pi[\mathbf{L}^n[a, b]]$ - множество всех непустых, замкнутых, ограниченных, выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$; $\mathbf{C}^n[a, b]$ - пространство непрерывных

функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} = \max\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$; $\mathbf{C}_+^1[a, b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\mathbf{C}^1[a, b]$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a, b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \quad (1)$$

где $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbf{C}^n[a, b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \Pi[\mathbf{L}^n[a, b]]$ — многозначные операторы, $V : \mathbf{L}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}^n[a, b]$ — линейный непрерывный интегральный оператор, определенный равенством

$$(Vz)(t) = \int_a^b V(t, s)z(s)ds, \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Включение (1) назовем **возмущенным включением**.

Под **решением включения** (1) будем понимать элемент $x \in \mathbf{C}^n[a, b]$, удовлетворяющий (1). Таким образом, непрерывная функция $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ является решением включения (1) тогда и только тогда, когда найдутся такие элементы $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$.

Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a, b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$ и $w_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = r_0 + Vw_0 + e, \quad (3)$$

где $e = q_0 - r_0 - Vw_0$. Предположим, что функция $k \in \mathbf{L}^1[a, b]$ для каждого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0; \Phi(q_0)] \leq \int_{\mathcal{U}} k(s)ds, \quad (4)$$

а непрерывная функция $\nu : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ определена соотношением

$$\nu(t) = \int_a^b |V(t, s)|k(s)ds + |e(t)|, \quad (5)$$

где $|V(t, s)|$ — согласованная с пространством $\mathbb{R}^n$ норма $n \times n$ матрицы $V(t, s)$ в представлении (2), $e \in \mathbf{C}^n[a, b]$ — функция в правой части равенства (3).

Определим отображение $Z : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}_+^1[a, b]$ соотношением

$$(Zx)(t) = |x(t)|.$$

Будем говорить, что отображения $V : \mathbf{L}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}^n[a, b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbf{C}^n[a, b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \Pi[\mathbf{L}^n[a, b]]$ **обладают свойством А**, если найдутся непрерывные изотонные операторы $\Gamma : \mathbf{C}_+^1[a, b] \rightarrow \mathbf{L}_+^1[a, b]$ и $P : \mathbf{C}_+^1[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие следующим условиям:

- для любых $x, y \in \mathbf{C}^n[a, b]$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняются неравенства

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leq \|\Gamma Z(x - y)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}, \quad (6)$$

$$h_{\mathbf{C}^n[a,b]}[\Psi(x), \Psi(y)] \leq P(Z(x-y)); \quad (7)$$

• для определенной соотношением (5) функции $\nu \in \mathbf{C}_+^1[a, b]$ и непрерывного оператора $\mathcal{A} : \mathbf{C}_+^1[a, b] \rightarrow \mathbf{C}_+^1[a, b]$, определенного равенством

$$(\mathcal{A}z)(t) = \int_a^b |V(t, s)|(\Gamma z)(s)ds + P(z),$$

ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu, \quad \mathcal{A}^0 \nu = \nu, \quad \mathcal{A}^i \nu = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{i-1} \nu), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a, b]$.

Пусть $\xi(\nu)$ – сумма ряда (8), то есть

$$\xi(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \nu. \quad (9)$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $q_0 \in \mathbf{C}^n[a, b]$, $r_0 \in \Psi(q_0)$, $w_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$ и пусть функция q_0 представима равенством (3). Далее, пусть отображения $V : \mathbf{L}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}^n[a, b]$, $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbf{C}^n[a, b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \Pi[\mathbf{L}^n[a, b]]$ обладают свойством А. Тогда найдется решение x включения (1), то есть $x = v + Vz$, $v \in \Psi(x)$, $z \in \Phi(x)$, которое следующие оценки:

$$|x(t) - q_0(t)| \leq \xi(\nu)(t) \text{ при любом } t \in [a, b]; \quad (10)$$

$$\|v - r_0\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leq P(\xi(\nu)); \quad (11)$$

$$|z(t) - w_0(t)| \leq k(t) + (\Gamma \xi(\nu))(t) \text{ при почти всех } t \in [a, b]; \quad (12)$$

где ν, ξ, P, Γ, k удовлетворяют соотношениям (5), (9), (7), (6), (4), соответственно.

Доказательство. Пусть функция $q_0 \in \mathbf{C}^n[a, b]$ представима в виде (3) и пусть функция $w_1 \in \Phi(q_0)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет равенству

$$\|w_1 - w_0\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_0, \Phi(q_0)].$$

Тогда в силу неравенства (4) при почти всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|w_1(t) - w_0(t)| \leq k(t). \quad (13)$$

Далее, пусть

$$q_1 = r_1 + Vw_1,$$

где $r_1 \equiv r_0$. Тогда согласно (13) для любого $t \in [a, b]$ получаем соотношения

$$|q_1(t) - q_0(t)| = |V(w_1 - w_0)(t) - e(t)| \leq |V(w_1 - w_0)(t)| + |e(t)| \leq$$

$$\leq \int_a^b |V(t, s)| |w_1(s) - w_0(s)| ds + |e(t)| \leq \int_a^b |V(t, s)| k(s) ds + |e(t)|.$$

Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ выполняется оценка:

$$|q_1(t) - q_0(t)| \leq (\mathcal{A}^0 \nu)(t). \quad (14)$$

Предположим, что функция $r_2 \in \Psi(q_1)$ удовлетворяет равенству

$$\|r_2 - r_1\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} = \rho_{\mathbf{C}^n[a, b]}[r_1, \Psi(q_1)].$$

Тогда в силу (7) имеют место неравенства

$$\|r_2 - r_1\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} \leq h_{\mathbf{C}^n[a, b]}[\Psi(q_0); \Psi(q_1)] \leq P(Z(q_0 - q_1)) \leq P(\mathcal{A}^0 \nu).$$

Пусть для функции $w_2 \in \Phi(q_1)$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \subset [a, b]$ справедливо соотношение

$$\|w_2 - w_1\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_1, \Phi(q_1)].$$

Из определения функции w_2 и неравенств (6), (14) для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ вытекают оценки

$$\|w_2 - w_1\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_0); \Phi(q_1)] \leq \|\Gamma Z(q_0 - q_1)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leq \|\Gamma \mathcal{A}^0 \nu\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Пусть

$$q_2 = r_2 + Vw_2.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |q_2(t) - q_1(t)| &= |r_2(t) + (Vw_2)(t) - r_1(t) - (Vw_1)(t)| \leq \\ &\leq |r_2(t) - r_1(t)| + |V(w_2 - w_1)(t)| \leq P(\mathcal{A}^0 \nu) + \int_a^b |V(t, s)| |w_2(s) - w_1(s)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|q_2(t) - q_1(t)| \leq (\mathcal{A} \nu)(t). \quad (15)$$

Пусть $r_3 \in \Psi(q_2)$ удовлетворяет равенству

$$\|r_3 - r_2\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} = \rho_{\mathbf{C}^n[a, b]}[r_2, \Psi(q_2)].$$

Тогда из соотношений (7), (15) получаем неравенства

$$\|r_3 - r_2\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} \leq h_{\mathbf{C}^n[a, b]}[\Psi(q_1); \Psi(q_2)] \leq P(Z(q_1 - q_2)) \leq P(\mathcal{A} \nu). \quad (16)$$

Далее, пусть $w_3 \in \Phi(q_2)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ удовлетворяет равенству

$$\|w_3 - w_2\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_2, \Phi(q_2)].$$

Из соотношений (6), (15) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|w_3 - w_2\|_{L^n(\mathcal{U})} &\leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_1); \Phi(q_2)] \leq \\ &\leq \|\Gamma Z(q_1 - q_2)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leq \|\Gamma \mathcal{A}\nu\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь пусть

$$q_3 = r_3 + Vw_3.$$

Тогда из (16), (17) для любого $t \in [a, b]$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} |q_3(t) - q_2(t)| &\leq |r_3(t) - r_2(t)| + |V(w_3 - w_2)(t)| \leq \\ &\leq P(\mathcal{A}\nu) + \int_a^b |V(t, s)|(\Gamma \mathcal{A}\nu)(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leq (\mathcal{A}^2\nu)(t). \quad (18)$$

Наконец, пусть для $r_4 \in \Psi(q_3)$ имеет место равенство

$$\|r_4 - r_3\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} = \rho_{\mathbf{C}^n[a, b]}[r_3, \Psi(q_3)].$$

Тогда из (18) вытекают соотношения

$$\|r_4 - r_3\|_{\mathbf{C}^n[a, b]} \leq h_{\mathbf{C}^n[a, b]}[\Psi(q_2); \Psi(q_3)] \leq P(Z(q_2 - q_3)) \leq P(\mathcal{A}^2\nu).$$

Пусть $w_4 \in \Phi(q_3)$ – такая функция, что для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ выполняется равенство

$$\|w_4 - w_3\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[w_3, \Psi(q_3)].$$

Из определения функции w_4 и из соотношений (6), (18) для любого измеримого $\mathcal{U} \subset [a, b]$ вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|w_4 - w_3\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} &\leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(q_2); \Phi(q_3)] \leq \\ &\leq \|\Gamma(Z(q_2 - q_3))\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \leq \|\Gamma(\mathcal{A}^2\nu)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$q_4 = r_4 + Vw_4.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |q_4(t) - q_3(t)| &\leq |r_4(t) - r_3(t)| + |V(w_4 - w_3)(t)| \leq \\ &\leq P(\mathcal{A}^2\nu) + \int_a^b |V(t, s)|(\Gamma \mathcal{A}^2\nu)(s) ds = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2\nu)(t) = (\mathcal{A}^3\nu)(t). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательности $\{q_i\}$, $\{r_i\}$ и $\{w_i\}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$q_i = r_i + Vw_i, \quad (19)$$

где $r_i \in \Psi(q_{i-1})$, $w_i \in \Phi(q_{i-1})$, причем имеют место следующие соотношения:

$$|q_i(t) - q_{i-1}(t)| \leq (\mathcal{A}^{i-1}\nu)(t), \quad (20)$$

$$\|r_i - r_{i-1}\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leq P(\mathcal{A}^{i-2}\nu) \quad (21)$$

и при почти всех $t \in [a, b]$

$$|w_i(t) - w_{i-1}(t)| \leq (\Gamma\mathcal{A}^{i-2}\nu)(t). \quad (22)$$

Покажем, что последовательность $\{q_i\}$ сходится. Действительно, согласно неравенству (20) для любых $j = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и $t \in [a, b]$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |q_{j+i}(t) - q_j(t)| &\leq |q_{j+i}(t) - q_{j+i-1}(t)| + |q_{j+i-1}(t) - q_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &+ |q_{j+1}(t) - q_j(t)| \leq (\mathcal{A}^{j+i-1}\nu)(t) + (\mathcal{A}^{j+i-2}\nu)(t) + \dots + (\mathcal{A}^j\nu)(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $j = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и при любом $t \in [a, b]$ выполняются соотношения

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} (\mathcal{A}^k\nu)(t). \quad (23)$$

Из сходимости ряда (8) следует, что последовательности $\{q_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}^n[a, b]$, поэтому последовательность $\{q_i\}$ сходится. Пусть

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i.$$

Докажем, что x удовлетворяет теореме. Покажем, что для x справедливо неравенство (10). Пусть в неравенстве (23) $j = 0$. Тогда, учитывая, что $\xi(\nu) \in \mathbf{C}^1[a, b]$ – сумма ряда (8), при любом $t \in [a, b]$ получим оценку

$$|q_i(t) - q_0(t)| \leq \xi(\nu)(t).$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в этом соотношении, получим неравенство (10). Докажем далее сходимость последовательности $\{r_i\}$. Так как при $t \in [a, b]$ и любых $i, j = 1, 2, \dots$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |r_{j+i}(t) - r_j(t)| &\leq |r_{j+i}(t) - r_{j+i-1}(t)| + |r_{j+i-1}(t) - r_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &+ |r_{j+1}(t) - r_j(t)|, \end{aligned}$$

то, согласно (21) справедлива оценка

$$\|r_{j+i} - r_j\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} \leq P\left(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{A}^k\nu\right). \quad (24)$$

Отсюда и из сходимости ряда (8) вытекает, что последовательность $\{r_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{C}^n[a, b]$. Пусть

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i.$$

Приняв в соотношении (24) $j = 1$ и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, при этом учитывая, что $r_1 \equiv r_0$, получим, что v удовлетворяет неравенству (11).

Наконец, рассмотрим последовательность $\{w_i\}$. Докажем ее сходимость. В самом деле, для любых $j = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} |w_{j+i}(t) - w_j(t)| &\leq |w_{j+i}(t) - w_{j+i-1}(t)| + |w_{j+i-1}(t) - w_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &+ |w_{j+1}(t) - w_j(t)| \end{aligned}$$

Поэтому из (22) следует, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка

$$|w_{j+i}(t) - w_j(t)| \leq \Gamma \left(\sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{A}^k \nu \right)(t). \quad (25)$$

Следовательно, последовательность $\{w_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$. Пусть

$$z = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i.$$

Покажем, что при почти всех $t \in [a, b]$ z удовлетворяет соотношению (12). Действительно, так как при почти всех $t \in [a, b]$ и любом $i = 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$|w_{i+1}(t) - w_0(t)| \leq |w_{i+1}(t) - w_1(t)| + |w_1(t) - w_0(t)|,$$

то из (25) для любого $i = 1, 2, \dots$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеем неравенство

$$|w_{i+1}(t) - w_0(t)| \leq \Gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \nu \right)(t) + |w_1(t) - w_0(t)|.$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $i \rightarrow \infty$ и учитывая (9), (5), при почти всех $t \in [a, b]$ получим оценку (12). Далее, переходя в равенстве (19) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получим равенство

$$x = v + Vz,$$

причем из непрерывности по Хаусдорфу отображений $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbf{C}^n[a, b]]$, $\Phi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \Pi[\mathbf{L}^n[a, b]]$ вытекают включения $v \in \Psi(x)$ и $z \in \Phi(x)$, то есть x — решение включения (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что теорема 1 дополняет результат работы [1], в которой аналогичные оценки получены в случае выпуклозначности отображения $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{compr}[\mathbf{C}^n[a, b]]$. При этом в [1] доказательство этих оценок основывалось на теореме Майкла [2], с помощью которой доказывалось существование в некотором смысле «минимальной» непрерывной ветви $g : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{C}^n[a, b]$ отображения

$\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbf{C}^n[a, b]]$, а также с помощью результата работы [3–5]. Отметим, что предложенную в работе [1] схему в доказательстве теоремы 1 применить невозможно, поскольку теорема 1 не предполагает, что отображение $\Psi : \mathbf{C}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbf{C}^n[a, b]]$ выпуклозначно.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что теорема 1 не является непосредственным следствием принципа сжимающих отображений [6], поскольку оператор, порожденный правой частью включения (1), не является замкнутозначным. Это доказывает следующий пример. Пусть отображение $\Phi : \mathbf{C}^1[0, 1] \rightarrow \Pi[\mathbf{L}^1[0, 1]]$ задано равенством

$$\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}^1[0, 1] : y(t) \in \{-1, 1\} \text{ при п.в. } t \in [0, 1]\},$$

а оператор $V : \mathbf{L}^1[0, 1] \rightarrow \mathbf{C}^1[0, 1]$ имеет вид

$$(Vz)(t) = \int_0^t z(s) ds.$$

Определим последовательность измеримых функций $y_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$ следующим образом

$$y_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{если } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, 1/4), \\ -1, & \text{если } t \in [1/4, 1/2), \\ 1, & \text{если } t \in [1/2, 3/4), \\ -1, & \text{если } t \in [3/4, 1], \end{cases}$$

и так далее. Из определения последовательности $y_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$ следует, что $Vy_m \rightarrow 0$ в пространстве $\mathbf{C}^1[0, 1]$ при $m \rightarrow \infty$. В то же время $0 \notin V\Phi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 3-32.
2. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия вузов. Математика. 1999. № 3. С. 3-16.
3. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. I // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 3. С. 371-379.
4. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. II // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 4. С. 566-571.
5. Булгаков А.И. Непрерывные ветви многозначных отображений и интегральные включения с невыпуклыми образами и их приложения. III // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 5. С. 739-746.

6. Булгаков А.И., Ефремов А.А., Панасенко Е.А. Обыкновенные дифференциальные включения с внутренними и внешними возмущениями // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 12. С. 1587-1598.

Поступила в редакцию 26 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Григоренко Анна Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: g.anya@mail.ru

Для цитирования: Григоренко А.А. О разрешимости и оценках решений возмущенного включения в пространстве непрерывных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 292–302. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302

ON THE SOLVABILITY AND ESTIMATES OF SOLUTIONS OF A PERTURBED INCLUSION IN THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

A. A. Grigorenko

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: g.any@mail.ru

Abstract. In this paper we consider the assertion on the estimate of the closeness of the solution of a perturbed inclusion to a preassigned continuous function, and the proof of this assertion is given.

Keywords: perturbed inclusion; estimation of the proximity of solutions to previously given functions

REFERENCES

1. Bulgakov A.I., Tkach L.I. Vozmushchenie vypukloznachnogo operatora mnogoznachnym otobrazheniem tipa Gammershteyna s nevypuklymi obrazami i kraevye zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nykh vkl'yucheniye [Perturbation of a convex-valued operator by a set-valued map of Hammerstein type with non-convex values, and boundary-value problems for functional-differential inclusions]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 6, pp. 3-32. (In Russian).
2. Bulgakov A.I., Tkach L.I. Vozmushchenie odnoznachnogo operatora mnogoznachnym otobrazheniem tipa Gammershteyna s nevypuklymi obrazami [Perturbation of a single-valued operator by a multi-valued mapping of Hammerstein type with nonconvex images]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1999, no. 3, pp. 3-16. (In Russian).
3. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vkl'yucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. I [Continuous branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. I]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 371-379. (In Russian).
4. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vkl'yucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. II [Continuous branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. II]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 566-571. (In Russian).
5. Bulgakov A.I. Nepreryvnye vetvi mnogoznachnykh otobrazheniy i integral'nye vkl'yucheniya s nevypuklymi obrazami i ikh prilozheniya. III [Continuous branches of multivalued mappings and integral inclusions with nonconvex images and their applications. III]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 739-746. (In Russian).

6. Bulgakov A.I., Efremov A.A., Panasenko E.A. Obyknovennye differentsial'nye vklyucheniya s vnutrennimi i vneshnimi vozmushcheniyami [Ordinary differential inclusions with internal and external perturbations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 12, pp. 1587-1598. (In Russian).

Received 26 March 2018

Reviewed 24 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Grigorenko Anna Alexandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: g.any@mail.ru

For citation: Grigorenko A.A. O razreshimosti i ocnkah resheniy vozmushchennogo vklyucheniya v prostranstve neprevnykh funkciy [On the solvability and estimates of solutions of a perturbed inclusion in the space of continuous functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 292-302. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-292-302 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

© С. П. Зубова¹⁾, Е. В. Раецкая²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, пл. Университетская, 1
E-mail: spzubova@mail.ru

²⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
E-mail: raetskaya@inbox.ru

Аннотация. Для линейной стационарной динамической системы с малым параметром при производной от функции состояния системы исследуется поведение функций управления и состояния при стремлении параметра к нулю. Формулируются полные условия равномерного стремления функций управления и состояния исходной системы к функциям управления и состояния предельной системы, а также условие наблюдения явления погранслоя вблизи краевых точек отрезка времени.

Ключевые слова: система управления; малый параметр; равномерное стремление; сингулярное возмущение; явление погранслоя

Введение

Рассматривается полностью управляемая динамическая система с малым параметром при производной от функции состояния:

$$\varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) = Bx(t, \varepsilon) + Du(t, \varepsilon) \quad (1)$$

на отрезке $[0, T]$ с условиями

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x(T, \varepsilon) = x_T, \quad (2)$$

где $x(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $u(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$; B и D — матрицы соответствующих размеров; x_0 , x_T — произвольно заданные элементы из $\mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Для допредельного уравнения (1) предельным ($\varepsilon = 0$) является уравнение :

$$0 = B\bar{x}(t) + D\bar{u}(t). \quad (3)$$

Решение $\bar{x}(t)$ уравнения (3) при любом $\bar{u}(t)$ не может, вообще говоря, удовлетворить условиям (2) в полном объеме. Но поскольку система (1) полностью управляема, то

$\bar{x}(t)$ может удовлетворить некоторой "части" этих условий, в этом случае система (1) является сингулярно возмущенной.

Всего возможны следующие случаи поведения решения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

а) $x(t, \varepsilon)$ равномерно на $[0, T]$ стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторому решению $\bar{x}(t)$ предельного уравнения (3);

б) $x(t, \varepsilon)$ отличается от решения предельного уравнения на функцию погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$;

в) другие случаи, в том числе $\nexists \lim x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, или $\|x(t, \varepsilon)\| \rightarrow \infty$.

В случае а) соответствующая динамическая система малочувствительна к возмущению ε , груба, робастна.

Свойство б) означает:

1) $x(t, \varepsilon)$ равномерно стремится к $\bar{x}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на любом отрезке $[t', t'']$, принадлежащем интервалу $(0, T)$;

2) $x(t, \varepsilon) \not\rightarrow \bar{x}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ на $[0, T]$, то есть или не стремится $x(t, \varepsilon)$ к $\bar{x}(t)$, или стремится, но неравномерно на всём отрезке $[0, T]$. То есть вблизи моментов $t = 0$ и $t = T$ (в погранслое) $x(t, \varepsilon)$ достаточно сильно отличается от $\bar{x}(t)$.

В случае б) в задаче наблюдается явление погранслоя, задача является сингулярно возмущенной.

Случаи в) крайне нежелательны, на практике они ведут к разрушению реальной динамической системы.

В связи с этим в данной работе

— формулируются свойства коэффициентов B и D , необходимые и достаточные для равномерного стремления на $[0, T]$ вектор-функций $x(t, \varepsilon)$ и $u(t, \varepsilon)$ к $\bar{x}(t)$ и $\bar{u}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

— определяется максимальная "часть" условий (3), выполняемых вектор-функцией $\bar{x}(t)$ при отсутствии свойств B и D , обозначенных выше;

— для любого решения $\bar{x}(t)$ предельного уравнения (3), удовлетворяющего соответствующей "части" условий (2), утверждается существование управляющей функции $u(t, \varepsilon)$ для системы (1), при подстановке которой в (1), решение $x(t, \varepsilon)$ удовлетворяет условиям (2) и обладает свойством:

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$.

Для исследований используются следующие свойства конечномерного оператора:

если $C : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^l$, то имеют место разложения $\mathbb{R}^s$ и $\mathbb{R}^l$ в прямые суммы

$$\mathbb{R}^s = \text{Coim } C \dot{+} \text{Ker } C, \quad \mathbb{R}^l = \text{Im } C \dot{+} \text{Coker } C, \quad (4)$$

где $\text{Ker } C$ — ядро, нуль-пространство C ; $\text{Im } C$ — образ, множество значений C , $\text{Coker } C$ — дефектное подпространство, $\text{Coim } C$ — прямое дополнение к $\text{Ker } C$ в $\mathbb{R}^s$.

Вводятся обозначения: $P(C)$ и $Q(C)$ — проекторы на $\text{Ker } C$ и $\text{Coker } C$ соответственно, отвечающие этим разложениям; $\tilde{C}$ — сужение C на $\text{Coim } C$, $C^- =$

$\tilde{C}^{-1}(I - Q(C))$ — полуобратное отображение, I — тождественное отображение в соответствующем пространстве, далее это единичная матрица. При этом $P(C) = I - C^-C$ и $Q(C) = I - CC^-$.

Отображение C называют сюръективным, если его множество значений совпадает с $\mathbb{R}^l$, то есть если $Q(C) = 0$.

Предельное уравнение (3) с помощью разложений (4) с $C = D$ расщепляется на уравнения в подпространствах $\text{Coker } D$ и $\text{Coim } D$ соответственно:

$$\begin{cases} Q(D)B\bar{x}(t) \equiv 0, & t \in [0, T], \\ \bar{u}(t) = -D^-B\bar{x}(t) + \bar{z}(t), & \forall \bar{z}(t) \in \text{Ker } D. \end{cases} \quad (5)$$

Первое равенство в этой системе при $t=0$ не может выполняться для любых $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, если $Q(D)B \neq 0$.

1. Случай $Q(D)B = 0$

Для любой вектор-функции $\bar{x}(t)$ (в том числе и для удовлетворяющей условиям (2)) существует вектор-функция $\bar{u}(t)$, такая, что выполняется равенство (3). Её можно построить по второй формуле в (5). То есть справедлива

Лемма 1. *Существует $\bar{u}(t)$, при котором решение $\bar{x}(t)$ уравнения (3) обладает свойством*

$$\bar{x}(0) = x_0, \quad \bar{x}(T) = x_T, \quad \forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$$

в том и только том случае, когда $Q(D)B=0$, то есть либо D — сюръекция ($Q(D)=0$), либо $\text{Im } B \subseteq \text{Im } D$.

2. Случай $Q(D)B = 0, Q(D) \neq 0$

Случай $Q(D)B = 0, Q(D) \neq 0$ невозможен, иначе допредельная система (1) была бы неуправляемой.

3. Случай сюръективного D

Допредельное уравнение (1) в случае сюръективного D для любого $x(t, \varepsilon)$ имеет решение $u(t, \varepsilon)$:

$$u(t, \varepsilon) = D^-(\varepsilon \dot{x}(t, \varepsilon) - Bx(t, \varepsilon)) + z(t, \varepsilon), \quad \forall z(t, \varepsilon) \in \text{Ker } D.$$

Положим $x(t, \varepsilon) \equiv \bar{x}(t)$, $z(t, \varepsilon) \equiv \bar{z}(t)$, тогда $u(t, \varepsilon) \rightrightarrows \bar{u}(t)$, $\varepsilon \rightarrow 0, t \in [0, T]$.

Теорема 1. *Случай а) поведения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место тогда и только тогда, когда D — сюръекция. При выполнении этого условия для любой функции состояния $\bar{x}(t) \in C^1([0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ предельной системы (3) с условиями (2) существует управляющая функция $u(t, \varepsilon)$ допредельной системы (1) такая, что*

$$x(t, \varepsilon) \equiv \bar{x}(t)$$

и

$$u(t, \varepsilon) \rightrightarrows \bar{u}(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad t \in [0, T].$$

Например, если

$$u(t, \varepsilon) = \frac{1}{T} D^- \left(\varepsilon(-x_0 + x_T) - B((T-t)x_0 + tx_T) \right),$$

то

$$x(t, \varepsilon) = \frac{T-t}{T} x_0 + \frac{t}{T} x_T = \bar{x}(t)$$

и

$$u(t, \varepsilon) \Rightarrow \bar{u}(t) = -\frac{1}{T} D^- B((T-t)x_0 + tx_T).$$

4. Случай $Q(D)B \neq 0$

Для исследования системы (1) применяется метод каскадной декомпозиции [1–2], для чего вводятся в рассмотрение операторы

$$B_0 = B, D_0 = D, B_j = Q(D_{j-1})B_{j-1}Q(D_{j-1}), D_j = Q(D_{j-1})B_{j-1}(I - Q(D_{j-1})),$$

где $Q(D_{j-1})$ и $P(D_{j-1})$ — проекторы на $\text{Coker } D_{j-1}$ и $\text{Ker } D_{j-1}$, соответственно, отвечающие разложениям

$$\text{Im } D_{j-2} = \text{Coim } D_{j-1} \dot{+} \text{Ker } D_{j-1}, \quad \text{Coker } D_{j-2} = \text{Im } D_{j-1} \dot{+} \text{Coker } D_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поскольку система (1) полностью управляемая, то $\exists p \in \mathbb{N}$ такое, что $Q(D_p) \equiv 0$, тогда $\text{Coker } D_{p-1} = \text{Im } D_p$ и

$$\mathbb{R}^n = \text{Im } D \dot{+} \text{Im } D_1 \dot{+} \dots \dot{+} \text{Im } D_{p-1} \dot{+} \text{Im } D_p.$$

Схожие разложения пространства $\mathbb{R}^n$ на прямые суммы подпространств получены другими методами в [3].

Функция состояния $\bar{x}(t)$ предельной системы (3) может удовлетворить лишь "части" условий (2), принадлежащих подпространству $\text{Im } D_p$:

$$\bar{x}(0) = Q(D_{j-1})x_0, \quad \bar{x}(t) = Q(D_{j-1})x_T. \quad (6)$$

Лемма 2. Из полной управляемости системы (1) следует существование $\bar{x}(t)$ и $\bar{u}(t)$, удовлетворяющих равенству (3) и условиям (6), $\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Если $Q(D)B \neq 0$, то для произвольной непрерывной управляющей функции $\bar{u}(t)$ предельной системы (3) существует управляющая функция $u(t, \varepsilon)$ полностью управляемой системы (1) с условиями (2), под воздействием которой функция состояния $x(t, \varepsilon)$ системы (1), (2) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t, \varepsilon),$$

где $\bar{x}(t)$ — состояние предельной системы (3), соответствующее управляющей функции $\bar{u}(t)$. При этом

$$u(t, \varepsilon) = \bar{u}(t) + w(t, \varepsilon)$$

и каждая из функций $v(t, \varepsilon)$, $w(t, \varepsilon)$ является функцией погранслоя вблизи точек $t = 0$ и $t = T$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zubova S.P., Raetskaya E.V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78. № 7. P. 1189-1202. DOI: 10.1134/S0005117917070025.
2. *Zubova S.P.* Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86. № 3. P. 846-849.
3. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 375 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 11 мая 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, e-mail: spzubova@mail.ru

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, доцент кафедры математики, e-mail: raetskaya@inbox.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308

THE STUDY OF A SINGULARLY PERTURBED CONTROL SYSTEM

S. P. Zubova¹⁾, E. V. Raetskaya²⁾¹⁾ Voronezh State University

1 University pl., Voronezh 394018, Russian Federation

E-mail: spzubova@mail.ru

²⁾ Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov

8 Timiryazev Str. , Voronezh 394087, Russian Federation

E-mail: raetskaya@inbox.ru

Abstract. The behavior of the control-functions and the state-functions (as the parameter tends to zero) for a linear stationary dynamical system with a small parameter at the system's state functions derivative is studied. Complete conditions are formulated for the uniform aspiration of the control functions and the state of the initial system to the control functions and the state of the limiting system are formulated. A conditions at which the boundary layer phenomena near the edge points of the time interval appears are also formulated.

Keywords: control system; small parameter; uniform tendention; singular disturbance; the boundary layer phenomenon

REFERENCES

1. Zubova S.P., Raetskaya E.V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1189-1202. DOI: 10.1134/S0005117917070025.
2. Zubova S.P. Solution of Inverse Problems for Linear Dynamical Systems by the Cascade Method. *Doklady Mathematics*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 846-849.
3. Uonem M. *Lineynye mnogomernye sistemy upravleniya. Geometricheskiiy podkhod* [Linear Multidimensional Control Systems. Geometric Approach]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 375 p. (In Russian).

Received 28 March 2018

Reviewed 11 May 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Zubova Svetlana Petrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Analysis Department, e-mail: spzubova@mail.ru

Raetskaya Elena Vladimirovna, Voronezh State University of Forestry and Technologies Named after G.F. Morozov, Voronezh, the Russian Federation, Associate Professor of the Mathematics Department, e-mail: raetskaya@inbox.ru

For citation: Zubova S.P., Raetskaya E.V. Issledovanie singulyarno vozmushchennoy sistemy upravleniya [The study of a singularly perturbed control system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 303–308. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-303-308 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-309-316

УДК 519.71

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© И. В. Зыков

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
E-mail: zykoviustu@mail.ru

Аннотация. Предлагается способ построения множеств достижимости для управляемых систем с интегральными ограничениями на управление и траекторию системы, который базируется на использовании принципа максимума Понтрягина для характеристики граничных точек множества достижимости.

Ключевые слова: множество достижимости; управляемая система; интегральные ограничения; изопериметрические ограничения; принцип максимума

Введение

Свойства множеств достижимости нелинейных систем с интегральными ограничениями и алгоритмы их построения изучались во многих работах (см. [1–3]). В статье [4] было показано, что при интегральных квадратичных ограничениях на управление любое допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления с интегральным функционалом. В работах [5, 6] результаты обобщены на случай систем с совместными ограничениями на управление и траекторию, а в [7] на случай нескольких интегральных (изопериметрических) ограничений. В данной работе результаты конкретизируются для случая линейной системы с квадратичными изопериметрическими ограничениями. Приведено описание способа построения множеств достижимости при двух квадратичных интегральных ограничениях на управление и траекторию.

В дальнейшем приняты следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через A^T мы обозначаем транспонированную матрицу. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ (x, y) — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма. Для вещественной прямоугольной $k \times t$ матрицы A через $\|A\|$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначается граница S . Через $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ и C будем обозначать, соответственно, пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_1}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2}$, $\|\cdot\|_C$.

1. Нелинейные системы с несколькими интегральными ограничениями

Рассмотрим управляемую нелинейную систему, линейную по управлению

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) \in X^0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывные отображения, X^0 — заданное подмножество $\mathbb{R}^n$.

Решением (траекторией) системы (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, называется абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x , а также удовлетворяют, соответственно, условиям подлинейного роста и ограниченности: $\|f_1(t, x)\| \leq l_1(t)(1 + \|x\|)$, $\|f_2(t, x)\|_{n \times r} \leq l_2(t)$, где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$. Для любых $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ существует единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $x(t_0) = x^0$, которое будем обозначать как $x(t, x^0, u(\cdot))$.

Пусть заданы функционалы $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [Q_i(t, x(t)) + u^\top(t)R_i(t, x(t))u(t)] dt$, $i = 1, \dots, k$. Здесь $x(t)$ — решение системы (1), отвечающее управлению $u(t)$ и начальному вектору x^0 , функции $Q_i(t, x)$ и симметричные матрицы $R_i(t, x)$ предполагаются непрерывными на $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. Пару функций $(x(\cdot), u(\cdot))$ назовем *управляемым процессом*, если $(x(\cdot), u(\cdot))$ удовлетворяют уравнению (1). Пусть задан вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_k) \in \mathbb{R}^r$ с положительными координатами.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1) будем называть совокупность концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управляемым процессам $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющим условиям

$$J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \leq \mu_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad x(t_0) \in X^0. \quad (2)$$

Обозначим через $J(x(\cdot), u(\cdot)) = (J_1(x(\cdot), u(\cdot)), \dots, J_k(x(\cdot), u(\cdot)))$ векторный функционал, компонентами которого являются функции $J_i(x(\cdot), u(\cdot))$. Рассмотрим следующую многокритериальную задачу оптимального управления для системы (1)

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \rightarrow \min, \quad x(t_0) \in X^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \quad (3)$$

где x^1 — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$. Управляемый процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ назовем допустимым в задаче (3), если $x(t_0) \in X^0$, $x(t_1) = x^1$.

О п р е д е л е н и е 2. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ называется слабо эффективным (оптимальным по Слейтеру) в задаче 3, если не существует допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ такого, что $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) < J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, $i = 1, \dots, k$. Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ называется слабо локально эффективным (локально оптимальным по Слейтеру), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющего неравенствам $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_C < \varepsilon$, $\|u(\cdot) - \hat{u}(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon$, существует i , для которого $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Управляемый процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющий ограничениям (2), будем называть *граничным*, если $x(t_1) \in \partial G(t_1)$.

Теорема 1. [7] Пусть управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является граничным, и пусть линеаризация системы (1) вдоль $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ вполне управляема. Тогда $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ является локально слабо эффективным решением в задаче (3), где $x^1 = \hat{x}(t_1)$ и $J_i(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = \mu_i$ хотя бы для одного i , $1 \leq i \leq k$.

Рассмотрим функцию Понтрягина следующего вида $H(t, p, \nu, x, u) = p^\top (f_1(t, x) + f_2(t, x)u) - \sum_{i=1}^k \nu_i (Q_i(t, x) + u^\top R_i(t, x)u)$. Для допустимого процесса $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ справедливы условия оптимальности в форме принципа максимума: существует вектор $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k) \neq 0$ с неотрицательными координатами и решение $p(t)$ дифференциального уравнения $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ такие, что $H(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^r} H(t, p(t), \nu, \hat{x}(t), u)$ и, следовательно, $\hat{u}(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \nu_i R_i(t, \hat{x}(t)) \right)^{-1} f_2(t, \hat{x}(t)) p(t)$. На концах промежутка $[t_0, t_1]$ выполняются условия трансверсальности.

2. Линейная система с двумя интегральными ограничениями

Конкретизируем условия оптимальности для случая линейной системы с двумя ограничениями. Пусть дана управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x^0, \quad (4)$$

и функционалы имеют вид $J_i(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} [x^\top(t)Q_i(t)x(t) + u(t)^\top R_i(t)u(t)] dt$, где $Q_i(t), R_i(t)$ — непрерывные симметричные матрицы; $Q_i(t)$ неотрицательно определена, $R_i(t)$ положительно определена для всех $t \in [t_0, t_1]$. Рассмотрим вначале случай одного интегрального ограничения. В этом случае задающий ограничения функционал обозначаем как $J(x(\cdot), u(\cdot)) = J(u(\cdot))$ и ограничения на $u(\cdot)$ заданы неравенством $J(u(\cdot)) \leq \mu$. Будем далее предполагать, что: система (4) вполне управляема и существует $\bar{u}(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ такое, что $J(\bar{u}(\cdot)) < \mu$. Из данных предположений следует, что множество достижимости $G(t_1)$ имеет непустую внутренность. Так как функционал $J(\bar{u}(\cdot))$ — выпуклый, то $G(t_1)$ — выпуклое множество. Применяя теорему об отделимости выпуклых множеств и теорему Куна–Таккера получим: чтобы $\hat{x}(t_1) \in \partial G(t_1)$, необходимо и достаточно существования вектора $l \neq 0$ такого, что управление $\hat{u}(\cdot)$ решает задачу оптимального управления

$$(l, x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} [x^\top(t)Q(t)x(t) + u(t)^\top R(t)u(t)] dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in \mathbb{L}_2} \quad (5)$$

и $J(\hat{u}(\cdot)) = \mu$. Из принципа максимума для задачи (5) следует, что

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2} R^{-1}(t) B^\top(t) p(t), \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2} B(t) R^{-1}(t) B^\top(t) \\ 2Q(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $x(t_0) = x^0$, $p(t_0) = p^0$. Для линейной управляемой системы с выпуклым критерием (5) принцип максимума дает необходимые и достаточные условия оптимальности. Из этого факта несложно получить следующее утверждение.

Теорема 2. Для того, чтобы пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, удовлетворяющая (6), являлась граничным процессом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $J(\hat{u}(\cdot)) = \mu$.

Представим решение системы (6) с начальным условием $x(t_0) = x^0$, $p(t_0) = p^0$ в виде $x(t) = Y_{11}(t)x^0 + Y_{12}(t)p^0$, $p(t) = Y_{21}(t)x^0 + Y_{22}(t)p^0$, $u(t) = \frac{1}{2}R^{-1}(t)B^T(t)(Y_{21}(t)x^0 + Y_{22}(t)p^0)$, где $Y_{ij}(t)$ $n \times n$ блоки фундаментальной матрицы системы (6). Подставляя $x(t)$ и $u(t)$ в формулу для $J(u(\cdot))$, будем иметь $J(u(\cdot)) = x^{0\top}S_1x^0 + x^{0\top}S_2p^0 + p^{0\top}S_3p^0$, где матрицы S_1, S_3 неотрицательно определены. Из управляемости системы (4) следует положительная определенность матрицы S_3 . Равенство $J(u(\cdot)) = \mu$ задает границу эллипсоида $E_p \subset \mathbb{R}^n$, $E_p = \{p^0 : x^{0\top}S_1x^0 + x^{0\top}S_2p^0 + p^{0\top}S_3p^0 \leq \mu\}$, центр которого $\bar{p}$ определяется формулой $\bar{p} = -\frac{1}{2}S_3^{-1}S_2x^0$. После несложных преобразований получим $E_p = \{p^0 : (p^0 - \bar{p})^\top S_3(p^0 - \bar{p}) \leq \mu + h(x^0)\}$, где $h(x^0)$ определяется равенством $h(x^0) = \frac{1}{4}x^{0\top}S_2S_3^{-1}S_2x^0 - x^{0\top}S_1x^0$. Из теоремы 2 следует, что при аффинном преобразовании $p^0 \rightarrow x = Y_{11}(t_1)x^0 + Y_{12}(t_1)p^0$ граница эллипсоида E_p переходит в границу множества достижимости $G(t_1)$. Образом эллипсоида E_p при аффинном преобразовании $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ является эллипсоид, это означает, что данный эллипсоид совпадает с $G(t_1)$. Так как $G(t_1)$ имеет непустую внутренность, отсюда следует невырожденность матрицы преобразования $Y_{12}(t_1)$. Положим $\bar{x} = Y_{11}(t_1)x^0 + Y_{12}(t_1)\bar{p}$, тогда $p^0 - \bar{p} = Y_{12}^{-1}(t_1)(x - \bar{x})$. Подставляя данное выражение в формулу для E_p получим

$$G(t_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - \bar{x})^\top Y_{12}^{-1}(t_1)^\top S_3 Y_{12}^{-1}(t_1)(x - \bar{x}) \leq \mu + h(x^0)\}.$$

Перейдем теперь к задаче с двумя интегральными ограничениями, сохранив и в этом случае обозначение $G(t_1)$ для множества достижимости. Не ограничивая общности можно считать, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Обозначим через $G_i(t_1)$, $i = 1, 2$ множество достижимости для системы с одним интегральным ограничением $J_i(u(\cdot)) \leq \mu$. Очевидно, что $G(t_1) \subset G_1(t_1) \cap G_2(t_1)$.

Как и в случае одного ограничения внутренность $G(t_1)$ непустая. Точка $\hat{x}(t_1)$ принадлежит границе $G(t_1)$ тогда и только тогда, когда найдется ненулевой вектор $l \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(l, \hat{x}(t_1)) = \min_{u(\cdot): J_i(u(\cdot)) \leq \mu, i=1,2} (l, x(t_1))$, где минимум берется по всем траекториям, отвечающим допустимым управлениям. Рассмотрим функционал Лагранжа $L(u(\cdot), \lambda) = (l, \hat{x}(t_1)) + \sum_i \lambda_i (J_i(u(\cdot)) - \mu)$, $(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ — множитель Лагранжа).

По теореме Куна–Таккера найдется вектор $\lambda \geq 0$ такой, что выполняется неравенство $L(\hat{u}(\cdot), \lambda) \leq L(u(\cdot), \lambda)$, $\forall u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ и условие дополняющей нежесткости $\lambda_i (J_i(\hat{u}(\cdot)) - \mu) = 0$. Не ограничивая общности можно считать, нормируя в случае необходимости множители Лагранжа, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Вышеприведенные условия являются и достаточными для того, чтобы точка $x(t_1)$ принадлежала $\partial G(t_1)$.

Рассмотрим случай, когда один из множителей Лагранжа, например λ_2 , равен нулю. Тогда $\lambda_1 = 1$, $J_1(\hat{u}(\cdot)) = \mu$, и мы приходим к тому, что начальный вектор p^0 для решения сопряженной системы принципа максимума должен лежать в эллипсоиде $E_p^1 = \{p^0 : x^{0\top}S_1^1x^0 + x^{0\top}S_2^1p^0 + p^{0\top}S_3^1p^0 \leq \mu\}$. Здесь матрицы S_i^1 , $i = 1, 2, 3$ отличаются от матриц S_i , $i = 1, 2, 3$ только тем, что в определяющих их формулах вместо $Q(t)$, $R(t)$ подставляются $Q_1(t)$, $R_1(t)$, а через $Y_{ij}(t)$ обозначены блоки фундаментальной матрицы системы (6) при $Q(t) = Q_1(t)$, $R(t) = R_1(t)$. Граничные точки

эллипсоида E_p^1 при сдвиге по траекториям системы переходят в граничные точки эллипсоида $G_1(t_1)$. Однако необходимо учитывать и второе ограничение, вытекающее из условий дополняющей нежесткости: $J_2(\hat{u}(\cdot)) \leq \mu$. Следовательно, p^0 принадлежит эллипсоиду $E_p^{12} = \{p^0 : x^{0\top} S_1^{12} x^0 + x^{0\top} S_2^{12} p^0 + p^{0\top} S_3^{12} p^0 \leq \mu\}$. Таким образом, для нахождения начальных состояний p^0 , отвечающих точкам границы $G(t_1)$, в данном случае надо пересечь границу эллипсоида E_p^1 с эллипсоидом E_p^{12} . Аналогично, при $\lambda_1 = 0$ надо искать пересечение границы эллипсоида E_p^2 с эллипсоидом E_p^{21} , эти эллипсоиды определяются также, как E_p^1 и E_p^2 , только индексы 1 и 2 меняются местами. Подчеркнем, что односимвольный верхний индекс (например 1) в обозначениях матриц S и эллипсоидов означает, что в соответствующих уравнениях и формулах для S надо использовать матрицы $Q_1(t)$, $R_1(t)$. Рассмотрим случай, когда $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$. Обозначим $Q_\lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i Q_i(t)$, $R_\lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i R_i(t)$, где матрица $Q_\lambda(t)$ неотрицательно определена, $R_\lambda(t)$ положительно определена для любого $t \in [t_0, t_1]$. Выписывая принцип максимума для задачи (5), получим, что существует решение $p(t)$ сопряженной системы такое, что $\hat{u}(t) = \frac{1}{2} R_\lambda^{-1}(t) B^\top(t) p(t)$. Для пары $(x(t), p(t))$ ($x(t)$ — отвечающая $\hat{u}$ траектория) получим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & \frac{1}{2} B(t) R_\lambda^{-1}(t) B^\top(t) \\ 2Q_\lambda(t) & -A^\top(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad p(t_0) = p^0.$$

Условия дополняющей нежесткости можно заменить системой уравнений

$$x^{0\top} S_{1\lambda}^i x^0 + x^{0\top} S_{2\lambda}^i p^0 + p^{0\top} S_{3\lambda}^i p^0 = \mu, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

относительно p^0 . Здесь $S_{1\lambda}^i$, $S_{2\lambda}^i$, $S_{3\lambda}^i$, $i = 1, 2$ — $n \times n$ матрицы, которые определяются формулами для S_1, S_2, S_3 , где в качестве $Y_{mk}(t, t_0)$, $m, k = 1, 2$ надо взять блоки фундаментальной матрицы системы (7), а в качестве $Q(t), R(t)$ — соответственно $Q_i(t), R_i(t)$. Матрицы $S_{1\lambda}^i$ неотрицательно определены, а $S_{3\lambda}^i$ положительно определены. Решения системы уравнений (8) при сдвигах по траекториям дифференциального уравнения (7) переходят в граничные точки множества достижимости $G(t_1)$.

Резюмируем сказанное выше, приведя краткое описание процедуры построения множества достижимости. Граница $G(t_1)$ представима в виде объединения множеств $\partial G(t_1) = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Здесь $D_i = T_i(\partial E_p^i \cap E_p^{ij})$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, T_i — линейный оператор сдвига по траекториям соответствующей системы вида (6). Имеют место включения $D_i \in \partial G_i(t_1)$, $i = 1, 2$. Множество D_3 определяется как $D_3 = \bigcup_{0 < \lambda < 1} T_\lambda(P_\lambda)$, где P_λ — множество решений системы (8), T_λ — оператор сдвига по траекториям системы (7). Множества D_i , $i = 1, 2, 3$ могут оказаться пустыми, но их объединение непусто. При $n = 2$ каждое из множеств P_λ состоит не более чем из 4-х точек. При численной реализации процедуры интервал $(0, 1)$ заменяется равномерной сеткой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Polyak B. T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis. 2004. № 11. P. 255-267.

2. *Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N.* The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls // *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 2007. Vol. 14. № 1-2. P. 57-73.

3. *Guseinov K.G., Nazlipinar A.S.* Attainable sets of the control system with limited resources // *Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН*. 2010. № 5. С. 261-268.

4. *Gusev M.I., Zykov I.V.* On Extremal Properties of Boundary Points of Reachable Sets for a System with Integrally Constrained Control // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50. № 1. P. 4082-4087.

5. *Gusev M.I.* On Reachability Analysis of Nonlinear Systems with Joint Integral Constraints // *Lirkov I., Margenov S. (eds.). Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2017. Lecture Notes in Computer Science*. Cham: Springer, 2018. Vol. 10665. P. 219-227.

6. *Zykov I.V.* On the reachability problem for a nonlinear control system with integral constraints // *CEUR-WS Proceedings: Modern Problems in Mathematics and its Applications*. 2017. Vol. 1894. P. 88-97.

7. *Гусев М.И., Зыков И.В.* О геометрии множеств достижимости управляемых систем с изопериметрическими ограничениями // *Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН*. 2018. Т. 24. № 1. С. 63-75. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-63-75.

Поступила в редакцию 23 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 26 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Зыков Игорь Владимирович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, e-mail: zykoviustu@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-309-316

ON THE ALGORITHM FOR CONSTRUCTING REACHABLE SETS OF CONTROL SYSTEMS WITH ISOPERIMETRIC CONSTRAINTS

I. V. Zykov

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 Sophia Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: zyковиustu@mail.ru

Abstract. We propose a method for constructing attainability sets for controllable systems with integral constraints on the control and trajectory of the system, which is based on the use of the Pontryagin maximum principle for characterizing the boundary points of the attainable set.

Keywords: reachability set; control system; integral constraints; isoperimetric constraints; maximum principle

REFERENCES

1. Polyak B.T. Sonvexity of the reachable set of nonlinear systems under l_2 bounded controls. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, 2004, no. 11, pp. 255-267.
2. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57-73.
3. Guseinov K.G., Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, no. 5, pp. 261-268.
4. Gusev M.I., Zykov I.V. On Extremal Properties of Boundary Points of Reachable Sets for a System with Integrally Constrained Control. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 4082-4087.
5. Gusev M.I. On Reachability Analysis of Nonlinear Systems with Joint Integral Constraints. In: Lirkov I., Margenov S. (eds.). *Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2017. Lecture Notes in Computer Science*. Cham, Springer, 2018, vol. 10665, pp. 219-227.
6. Zykov I.V. On the reachability problem for a nonlinear control system with integral constraints. *CEUR-WS Proceedings: Modern Problems in Mathematics and its Applications*, 2017, vol. 1894, pp. 88-97.
7. Gusev M.I., Zykov I.V. O geometrii mnozhestv dostizhimosti upravlyaemykh sistem s izoperimetricheskimi ogranicheniyami [On the geometry of reachable sets for control systems with isoperimetric constraints]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 63-75. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-63-75.

Received 23 March 2018

Reviewed 26 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

Zykov Igor Vladimirovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Post-Graduate, e-mail: zykoviustu@mail.ru

For citation: Zykov I.V. Ob algoritme postroeniya mnozhestv dostizhimosti upravlyaemyh sistem s izoperimetricheskimi ograniceniyami [On the algorithm for constructing reachable sets of control systems with isoperimetric constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 309–316. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-309-316 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324

УДК 517.95

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЯЕМОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

© М. С. Коржавина, В. И. Сумин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: maryasha_f@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается первая начально-краевая задача для полулинейного параболического уравнения с управляемыми коэффициентами главной части. Формулируются достаточные условия устойчивости (при возмущении управляемых коэффициентов) существования глобальных решений начально-краевой задачи.

Ключевые слова: полулинейное параболическое уравнение; первая начально-краевая задача; управляемая главная часть; устойчивость существования глобальных решений

В теории оптимального управления при выводе необходимых условий оптимальности, при обосновании численных методов оптимизации и во многих других случаях важную роль играют условия *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) управляемых начально-краевых задач (см., например, [1–6]; история вопроса кратко описана в [6]). Условиям УСГР начально-краевых задач для полулинейных параболических уравнений с управлением в правой части посвящены публикации [7], [1, гл. 2, §5] (при фиксированных гладких коэффициентах главной части уравнения) и [8, 9] (при фиксированных измеримых главных коэффициентах); см. также [2]. Ниже такие условия формулируются для параболического уравнения с гладкими управляемыми коэффициентами главной части. Рассматривается первая начально-краевая задача с однородными граничными и начальными условиями в случае, когда первые производные входят в уравнение линейно (частный случай такой задачи, когда первые производные по пространственным переменным в уравнение не входят, был рассмотрен в [10]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727).

Пусть: заданы числа $T > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ ($d_1 \leq d_2$) и ограниченная односвязная область $Q \subset \mathbf{R}^n$ ($\partial Q \in C_2$); элементы Q обозначаем $x = \{x^1, \dots, x^n\}$; $\Pi_\sigma \equiv Q \times (0, \sigma)$, $\sigma \in (0, T)$; $\Pi \equiv \Pi_T$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\mathcal{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(x, t) y'_{xj})'_{xi} + \sum_{j=1}^n b_j(x, t) y'_{xj} = g(\{x, t\}, y(x, t)), \{x, t\} \in \Pi; \quad (1)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad x \in Q; \quad (2)$$

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где c_{ij} — управления, $1 \leq i, j \leq n$; функция $g(\{x, t\}, y) : \Pi \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, и коэффициенты b_j , $1 \leq j \leq n$, заданы. Предполагаем, что функции g и g'_y непрерывны по y , измеримы по $\{x, t\}$ и ограничены на любом ограниченном множестве; последнее означает существование неубывающей функции $N(\cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такой, что $|g(\{x, t\}, y)|, |g'_y(\{x, t\}, y)| \leq N(M)$, если $\{x, t\} \in \Pi, |y| \leq M$, каково бы ни было $M \geq 0$. Пусть D — некоторое множество элементов пространства $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi})$ (определения используемых функциональных пространств см. в [11]). Множество $\mathbf{D}$ допустимых управлений $\mathbf{c} \equiv \{c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$ состоит из всех тех наборов, для каждого из которых: $c_{ij} \in D$, $1 \leq i, j \leq n$; производные $(c_{ij})'_{xi}$, $1 \leq i, j \leq n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi})$; выполняется условие равномерной параболичности: $d_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(x, t) \xi^i \xi^j \leq d_2 |\xi|^2$, $\{x, t\} \in \bar{\Pi}$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Считаем, что коэффициенты b_j , $1 \leq j \leq n$, принадлежат классу $\mathcal{H}^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Pi})$. Положим $d_3 \equiv \max \{\|b_j\|_{C(\Pi)} : 1 \leq j \leq n\}$.

Чтобы определить понятие решения задачи (1)-(3), рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу для уравнения

$$\mathcal{L}[y] = z(x, t), \quad \{x, t\} \in \Pi \quad (4)$$

с условиями (2), (3). Для любых $y \in V_2^{1,0}(\Pi)$, $\eta \in W_2^{1,1}(\Pi)$, $z \in L_\infty(\Pi)$, $\xi \in [0, T]$ положим: $J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] \equiv$

$$\equiv \int_0^\xi dt \int_Q \left\{ -y \eta'_t + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} y'_{xj} \eta'_{xi} + \sum_{j=1}^n b_j y'_{xj} \eta - \eta z \right\} dx + \int_Q y(x, \xi) \eta(x, \xi) dx.$$

Следуя [11, гл. 3], будем рассматривать ограниченные обобщенные решения задачи (2)-(4) класса $V_2^{\circ 1,0}$. Функцию $y(\cdot)$ из $V_2^{\circ 1,0}(\Pi_\sigma)$, $0 < \sigma \leq T$, назовем решением задачи (2)-(4) на цилиндре Π_σ , отвечающим управлению $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, если она ограничена на Π_σ и для почти каждого $\xi \in [0, \sigma]$ удовлетворяет интегральному тождеству:

$$J[y(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot), \xi] = 0, \quad \eta \in W_2^{\circ 1,1}(\Pi_\sigma).$$

Для любых $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ и $z \in L_\infty(\Pi)$, задача (2)-(4) имеет единственное ограниченное обобщенное класса $V_2^{\circ 1,0}(\Pi)$ решение на цилиндре Π [11, гл. 3]. Оператор, ставящий в соответствие функции z это решение при данном $\mathbf{c}$, обозначим $A_{\mathbf{c}}$:

$$y(t, x) = A_{\mathbf{c}}[z](t, x), \quad \{x, t\} \in \Pi, \quad z \in L_\infty(\Pi).$$

Из результатов [1, гл. 2, §5], [7], [11, гл. 4] получаем следующие свойства этого оператора.

Лемма 1. При любом $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ оператор $A_{\mathbf{c}}$ — это линейный ограниченный оператор в $L_{\infty}(\Pi)$, имеющий интегральное представление

$$A_{\mathbf{c}}[z](x, t) = \int_0^t d\tau \int_Q G_{\mathbf{c}}(\{x, t\}, \{s, \tau\}) z(s, \tau) ds, \quad \{x, t\} \in \Pi,$$

где $G_{\mathbf{c}}$ — функция Грина задачи (2)-(4). Она является оператором типа потенциала, так как функция $G_{\mathbf{c}}$ представима в виде

$$G_{\mathbf{c}}(\{x, t\}, \{s, \tau\}) = \Gamma_{\mathbf{c}}(\{x, t\}, \{s, \tau\}) \left((t - \tau)^2 + |x - s|^2 \right)^{-\frac{n}{2}}, \quad \{x, t\} \in \Pi, \{s, \tau\} \in \Pi,$$

где $\Gamma_{\mathbf{c}}(\{x, t\}, \{s, \tau\})$ — функция, ограниченная по модулю на $\Pi \times \Pi$ некоторой величиной, зависящей лишь от d_1, d_2, d_3, α . Для любого $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ величина

$$\mu_{\mathbf{c}} \equiv \text{vraisup}_{x \in Q, 0 \leq \tau \leq t \leq T} \int_Q |G_{\mathbf{c}}(\{x, t\}, \{s, \tau\})| ds$$

конечна.

Решением задачи (1)-(3) на цилиндре Π_{σ} , $0 < \sigma \leq T$, отвечающим набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, назовем функцию $y(\cdot)$, являющуюся при данном $\mathbf{c}$ и $z(x, t) \equiv g(\{x, t\}, y(x, t))$ ограниченным обобщенным класса $V_2^{o1,0}(\Pi_{\sigma})$ решением задачи (2)-(4) на этом цилиндре. На любом цилиндре Π_{σ} , $0 < \sigma \leq T$, набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ не может отвечать более одного решения задачи (1)-(3). Из результатов [7] получаем для этой задачи следующую теорему существования и единственности решения.

Теорема 1. Если набор $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ и число $\sigma \in (0, T]$ таковы, что при некотором $M > 0$ выполняется неравенство $\mu_{\mathbf{c}} \sigma N(M) < M$, то набору $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ отвечает на цилиндре Π_{σ} единственное решение задачи (1)-(3).

Пусть Ω — та часть $\mathbf{D}$, каждому элементу $\mathbf{c}$ которой отвечает единственное глобальное (то есть на цилиндре Π) решение $y_{\mathbf{c}}(\cdot)$ задачи (1)-(3). Для $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$, $\mathbf{c}_0 \in \Omega$ положим $r(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0) \equiv \|A_{\mathbf{c}} - A_{\mathbf{c}_0}\|_{L_{\infty}(\Pi) \rightarrow L_{\infty}(\Pi)}$. Сказанное выше позволяет, используя вольтеррову функционально-операторную переформулировку в смысле [1] (см. также [2, 6]) начально-краевой задачи (1)-(3), доказать следующую теорему УСГР.

Теорема 2. Для любого $\mathbf{c}_0 \in \Omega$ существуют числа $\delta > 0$ и $C > 0$ такие, что, если для некоторого $\mathbf{c} \in \mathbf{D}$ выполняется неравенство $r(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0) < \delta$, то $\mathbf{c} \in \Omega$, при этом $\|y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{c}_0}\|_{V_2^{1,0}(\Pi)} \leq C r(\mathbf{c}, \mathbf{c}_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 112 с.
2. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145-155.
3. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198-204.
4. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164-174.
5. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. IV // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1 (27). С. 185-193.
6. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математика. 2003. Вып. 1. С. 91-107.
7. *Сумин В.И.* Об устойчивости существования глобального решения первой краевой задачи для управляемого параболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1587-1595.
8. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493-495.
9. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного управляемого параболического уравнения // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». Воронеж, 2017. С. 187-189.
10. *Сумин В.И., Филюшкина М.С.* Условия сохранения глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-28». Воронеж, 2017. С. 158-160.
11. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 23 апреля 2018 г.

Принята в печать 5 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Коржавина Марьяна Сергеевна, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, аспирант кафедры прикладной математики, e-mail: maryasha_f@mail.ru

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324

ON THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH CONTROLLED PRINCIPAL PART

M. S. Korzhavina, V. I. Sumin

Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: maryasha_f@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Abstract. The first initial-boundary value problem for a semilinear parabolic equation with controlled coefficients of the main part is considered. Sufficient stability conditions (at perturbation of the controlled coefficients) of the existence of global solutions of the initial-boundary value problem are formulated.

Keywords: semilinear parabolic equation; the first initial-boundary value problem; the controlled main part; the stability of the existence of global solutions

REFERENCES

1. Sumin V.I. *Funktsional'nye vol'terrovyye uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems]. Nizhny Novgorod, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod Publ., 1992, 112 p. (In Russian).
2. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. I [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. I]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 1999, no. 2 (21), pp. 145-155. (In Russian).
3. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. II [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. II]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2001, no. 1 (23), pp. 198-204. (In Russian).
4. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. III [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. III]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2002, no. 1 (25), pp. 164-174. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

5. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyaemykh sistem. IV [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. IV]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control], 2004, no. 1 (27), pp. 185-193. (In Russian).
6. Sumin V.I. Problema ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyaemykh kraevykh zadach i vol'terovy funktsional'nye uravneniya [The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematika* [Lobachevsky Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematics], 2003, no. 1, pp. 91-107. (In Russian).
7. Sumin V.I. Ob ustoychivosti sushchestvovaniya global'nogo resheniya pervoy kraevoy zadachi dlya upravlyaemogo parabolicheskogo uravneniya [Stability of the existence of a global solution to the first boundary value problem for a controllable parabolic equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1986, vol. 22, no. 9, pp. 1587-1595. (In Russian).
8. Sumin V.I. Usloviya ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyaemykh kraevykh zadach dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy [The stability conditions of existence global solutions of controlled boundary value problems for nonlinear parabolic equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 493-495. (In Russian).
9. Sumin V.I., Filyushkina M.S. Usloviya sokhraneniya global'noy razreshimosti nachal'no-kraevoy zadachi dlya nelineynogo upravlyaemogo parabolicheskogo uravneniya [Conditions for preserving the global solvability of the initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola» «Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy»* [Proceedings of the International Conference “Voronezh Winter Mathematical School” “Modern Methods of Function Theory and Related Problems”]. Voronezh, 2017, pp. 187-189. (In Russian).
10. Sumin V.I., Filyushkina M.S. Usloviya sokhraneniya global'noy razreshimosti nachal'no-kraevoy zadachi dlya nelineynogo parabolicheskogo uravneniya s upravlyaemoy glavnoy chast'yu [Conditions for preserving the global solvability of the initial-boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with a controlled principal part]. *Materialy Mezhdunarodnoy konferentsii «Voronezhskaya vesenniyaya matematicheskaya shkola «Pontryaginskije chteniya-28» «Sovremennye metody teorii funktsiy i smezhnye problemy»* [Proceedings of The International Conference “Voronezh Spring Mathematical School “The Pontryagin Readings-28” “Modern Methods of Function Theory and Related Problems”]. Voronezh, 2017, pp. 158-160. (In Russian).
11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uraltseva N.N. *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p. (In Russian).

Received 20 March 2018

Reviewed 23 April 2018

Accepted for press 5 June 2018

There is no conflict of interests.

Korzhavina Mar'yana Sergeevna, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Graduate student of the Applied Mathematics Department, e-mail: maryasha_f@mail.ru

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Korzhavina M.S., Sumin V.I. O nachal'no-craevoy zadache dlya polulineynogo parabolicheskogo uravneniya s upravlyaemoy glavnoy chast'yu [On the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equation with controlled principal part]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 317–324. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324 (In Russian, Abstr. in Engl.).