

ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический
журнал

Серия:
естественные и технические науки

Том 24, № 125, 2019

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,
на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам
(распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	3
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>В.А. Бызов</i>	Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью 5
<i>А.Н. Дорохов, М.Г. Карпов</i>	О существовании неподвижных точек у вполне непрерывных операторов в F -пространстве 26
<i>З.Т. Жуковская, С.Е. Жуковский, Р. Сенгупта</i>	О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах 33
<i>Т.В. Жуковская, Е.А. Плужникова</i>	Множество метрической регулярности многозначного отображения в пространстве с векторнозначной метрикой 39
<i>Н.А. Ибрагимова</i>	Построение фундаментального решения для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя 47
<i>А.Ф. Измаилов, А.С. Куренной, П.И. Стецюк</i>	Метод Левенберга–Марквардта для задач безусловной оптимизации 60
<i>В.А. Корабельников</i>	Алгоритмы символьного интегрирования в системе MathPartner 75
<i>Л.Ф. Логачева</i>	О дифференциально-операторных уравнениях в частных производных в локально выпуклых пространствах 90
<i>А.А. Николаев</i>	Убывание решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза 99
<i>В.В. Обуховский, Е.Н. Гетманова, М.Г. Карпов</i>	О случайных точках равновесия
<i>А.А. Шабуров</i>	Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных 112

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-70572 от 03 августа 2017 г.

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: А.А. Манаенкова, М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: С.Ю. Можаров, Т.А. Сустина

Технический секретарь М.В. Борзова

Для цитирования:

Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. – Тамбов, 2019. – Т. 24, № 125. – 136 с. – ISSN 1810-0198. – DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125

Подписано в печать 29.03.2019. Дата выхода в свет 22.04.2019.

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 17,0. Усл. печ. л. 15,8. Тираж 1000 экз. Заказ № 19096. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2019

© Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки», 2019

При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

Tambov University REPORTS

Scientific-Theoretical
Journal

Series:
Natural and Technical Sciences

Volume 24, no. 125, 2019

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

Journal of Tambov State University named after G.R. Derzhavin

The journal is on the official list of scientific reviewed periodicals recommended by High Attestation Commission for publication principal scientific researches of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF of 28 December 2018 № 90-p)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>V.A. Byzov</i>	Enumeration problems associated with Donaghey's transformation	5
<i>A.N. Dorokhov, M.G. Karpov</i>	On the existence of fixed points in completely continuous operators in F -space	26
<i>Z.T. Zhukovskaya, S.E. Zhukovskiy, R. Sengupta</i>	On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces	33
<i>T.V. Zhukovskaya, E.A. Pluzhnikova</i>	The set of regularity of a multivalued mapping in a space with a vector-valued metric	39
<i>N.A. Ibragimova</i>	Construction of a fundamental solution for a one degenerating elliptic equation with a Bessel operator	47
<i>A.F. Izmailov, A.S. Kurennoy, P.I. Stetsyuk</i>	Levenberg–Marquardt method for unconstrained optimization	60
<i>V.A. Korabelnikov</i>	Symbolic integration algorithms in CAS MathPartner	75
<i>L.F. Logacheva</i>	On differential-operator partial differential equations in locally convex spaces	90
<i>A.A. Nikolayev</i>	Decay of the solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation at large times	99
<i>V.V. Obukhovskii, E.N. Getmanova, M.G. Karpov</i>	On random equilibrium points	112
<i>A.A. Shaburov</i>	Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints	119

Founder: Federal State Budget Educational Institution of High Education
“Tambov State University named after G.R. Derzhavin”
(392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St.)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. G.I. Malaschonok (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasynkov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, France), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portugal), Prof., Dr. A.V. Ponomosov (Ås, Norway), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate ПИ № ФС77-70572 of August 3, 2017

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

Editors: A.A. Manaenkova, M.I. Filatova

English texts editors: S.Y. Mozharov, T.A. Sustina

Technical editor M.V. Borzova

For citation:

Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2019. – Vol. 24, no. 125. – 136 p. – ISSN 1810-0198. – DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125

Podpisano v pechat' 29.03.2019. Data vykhoda v svet 22.04.2019.

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.

Pech. list 17,0. Usl. pech. list 15,8. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 19096. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St., FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”.

392008, Tambov Region, Tambov, 190g Sovetskaya St. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

© FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”, 2019

© The journal “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”, 2019

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications

© Бызов В.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25

УДК 519.115.1

Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью

Виктор Александрович БЫЗОВ

ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»

610000, Российская Федерация, г. Киров, ул. Московская, 36

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>, e-mail: vbyzov@yandex.ru

Enumeration problems associated with Donaghey's transformation

Viktor A. BYZOV

Vyatka State University

36 Moskovskaya St., Kirov 610000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>, e-mail: vbyzov@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена рассмотрению перечислительных задач, связанных с преобразованием Донахью. Обсуждаются две группы вопросов. Первая группа связана с перечислением фрагментов орбит преобразования, называемых «дугами». Вторая часть работы посвящена нахождению количества вершин в графах поворотов — специфическом семействе графов, представляющем собой «аппроксимацию» преобразования Донахью. Основные результаты данной работы сформулированы в виде производящих функций и соответствующих асимптотик.

Ключевые слова: плоские деревья; примитивные деревья; преобразование Донахью; производящие функции; дуги преобразования; графы поворотов

Для цитирования: Бызов В. А. Перечислительные задачи, связанные с преобразованием Донахью // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 5–25. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25

Abstract. In this paper we consider enumeration problems associated with Donaghey's transformation. We discuss two groups of questions. The first one is related to the enumeration of fragments of transformation orbits, which are referred to as the “arcs”. The second group of questions is concerned with finding the number of vertices in rotation graphs — a specific family of graphs that is by nature an approximation of Donaghey's transformation. The basic results of this work are formulated in the form of generating functions and corresponding asymptotics.

Keywords: plane trees; primitive trees; Donaghey's transformation; generating functions; arcs of transformation; graphs of rotations

For citation: Byzov V. A. Perechislitel'nyye zadachi, svyazannyye s preobrazovaniyem Donakh'yu [Enumeration problems associated with Donaghey's transformation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 5–25. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-5-25 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Напомним, что преобразование Донахью (см., например, [1]) называется преобразование плоских кубических деревьев с висячим корнем (для краткости будем использовать аббревиатуру ПКДВК).

Между ПКДВК и плоскими некубическими деревьями с висячим корнем (далее – ПДВК) существуют два варианта биекции: правая биекция и левая биекция. При правой биекции r правые цепи в ПКДВК переходят в вершины ПДВК; при левой биекции l левые цепи ПКДВК переходят в вершины ПДВК. Рис. 1 иллюстрирует эти биекции. В верхней части рисунка к дереву T применяется правая биекция, в нижней части рисунка к $r(T)$ применяется биекция обратная к левой. Правые и левые цепи на этом рисунке выделены пунктиром. Цепи, содержащие сына корня, будем называть старшей правой и старшей левой цепями.

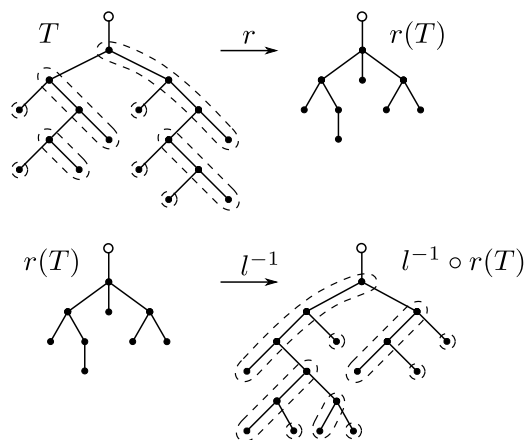


Рис. 1: Биекции r и l между множествами ПКДВК и ПДВК

О п р е д е л е н и е 0.1. Преобразованием Донахью ПКДВК T называется дерево $\tau(T) = l^{-1} \circ r(T)$.

Таким образом, на рис. 1 построен образ дерева T при преобразовании Донахью.

Каждое ПКДВК можно разбить на фрагменты, которые назовём *триадами*. Под триадой будем понимать вершину, не являющуюся листом и корнем, с тремя половинками смежных с ней рёбер. Листья с единственными смежными половинками рёбер поглощаются. Для каждой триады естественно определены не более чем по одной другой триаде, играющих для неё роль отца, правого и левого сыновей. Триаду, содержащую сына корня, будем называть корневой триадой.

На деревья, представленные в виде наборов триад, также можно действовать преобразованием Донахью. В качестве примера выполним преобразование Донахью для дерева T с рис. 1, разбитого на триады. Результат этой операции изображён на рис. 2.

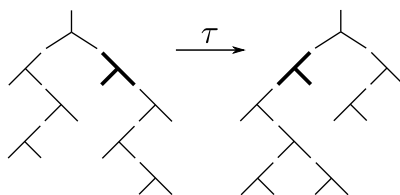


Рис. 2: Преобразование Донахью дерева, разбитого на триады

Технически преобразование Донахью является просто перестановкой деревьев, которая может быть легко (правда, строго говоря, не однозначно) перенесена на любую другую комбинаторную интерпретацию чисел Каталана, точнее – семейством перестановок деревьев каждого определённого размера.

Однако циклическая структура перестановок этого семейства настолько сложна, что позволяет говорить об обратимой комбинаторной динамической системе, представляющей самостоятельный интерес и заслуживающей отдельного изучения.

При изучении преобразования Донахью естественно возникает большое количество перечислительных задач. Фактически многие основные проблемы, связанные с ним, изначально имеют форму перечислительной задачи. Таковыми, например, являются задачи об общем количестве циклов (орбит) этих перестановок, о количестве циклов с заданными длинами (наиболее интересными представляются задачи о перечислении циклов с длинами 2, 6 и 9). Примечательно, что эти просто формулируемые проблемы привлекали внимание многочисленных специалистов (см., например, [2]–[4], [5, с. 472]), однако обычной реакцией на возникающие при этом трудности являлось то, что автор отмечал какое-нибудь несложное свойство и переходил к некоторой смежной задаче.

Проблемы, рассмотрению которых посвящена данная работа, формулируются не настолько просто и возникают, когда при изучении преобразования Донахью замечается какой-либо эффект, вызывающий интерес, что неизбежно приводит к вопросу о том, является ли этот эффект массовым или экзотическим. Как правило, аккуратный анализ структуры соответствующих деревьев позволяет явно вычислить соответствующую производящую функцию. При вычислении асимптотического характера роста коэффициентов (той самой массовости) систематически используется результат, иногда именуемый теоремой Дарбу (см. [6, с. 252, предложение 12]).

1. Перечисление дуг преобразования Донахью

Для формулирования результатов этого раздела нам потребуется понятие *правой огибающей цепи*.

О п р е д е л е н и е 1.1. Правой огибающей цепью называется последовательность триад дерева, полученная по следующим правилам:

- 1) первым элементом этой последовательности становится корневая триада;
- 2) если у последнего добавленного в последовательность элемента есть правый сын, то этот правый сын становится следующим элементом последовательности;
- 3) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет правого сына, но есть левый сын, то этот левый сын становится следующим элементом последовательности;
- 4) если у последнего добавленного в последовательность элемента нет ни правого, ни левого сыновей, то формирование правой огибающей цепи завершается.

Под левым и правым поддеревом исходного дерева будем понимать поддерева, присоединённые соответственно слева и справа к корневой триаде. При помощи прямолинейной проверки доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1.

1. *Дерево $\tau(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда старшая правая цепь дерева T заканчивается триадой, не имеющей левого сына.*
2. *Дерево $\tau^2(T)$ имеет пустое правое поддерево тогда и только тогда, когда правая огибающая цепь дерева T заканчивается триадой, являющейся левым сыном.*

Каждый цикл преобразования Донахью разбивается деревьями с пустым левым поддеревом на фрагменты. Будем называть эти фрагменты *дугами* преобразования. Естественным образом возникает задача перечисления дуг заданной длины.

О п р е д е л е н и е 1.2. Для дерева T с пустым левым поддеревом назовем *дугой* такую последовательность деревьев $T, \tau(T), \tau^2(T), \dots, \tau^k(T)$, что $\tau^k(T)$ обладает пустым правым поддеревом, и k — минимально возможное. Число k назовем *длиной дуги*.

Дерево с пустым правым поддеревом $\tau^k(T)$ при однократном преобразовании переходит в дерево $\tau^{k+1}(T)$ с пустым левым поддеревом. Дугу дерева $\tau^{k+1}(T)$ назовем второй дугой дерева T . Аналогично определяется третья дуга дерева, четвертая и т. д. В качестве иллюстрации введённого определения на рис. 3 изображено дерево T , длина дуги которого равна трём. Также данный рисунок демонстрирует тот факт, что при преобразованиях Донахью происходит перемещение триад из правого поддерева в левое через корневую триаду.

Рассмотрим деревья, имеющие пустое левое поддерево и состоящие из $n+1$ триады (одна корневая триада и n некорневых). Обозначим через $T(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 и так далее, длина s -ой дуги равна k_s .

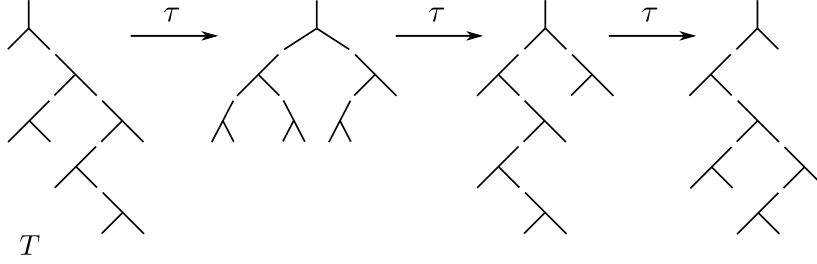


Рис. 3: Дерево с длиной дуги, равной трём

Некоторые утверждения о числах $T(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ содержатся в статье [7]. В частности, там приведено следующее рекуррентное соотношение для чисел $T(n, 1, 1, 1)$. При $n \geq 5$

$$T(n, 1, 1, 1) = \sum_{i=1}^{n-3} i \cdot T(n-i, 1, 1, 1) - \sum_{i=1}^{n-4} i \cdot C_{n-i-3} + C_{n-3},$$

где $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ — число Каталана.

Этот результат можно развить стандартным образом до производящей функции. Производящая функция для чисел $T(n, 1, 1, 1)$ имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(n, 1, 1, 1) x^n = \frac{2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 3x + 1} + x^3 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \right).$$

Выражение в скобках является производящей функцией для чисел Каталана, поэтому справедлива следующая асимптотика:

$$T(n, 1, 1, 1) \sim C_{n-3}.$$

Среди множества всех ПКДВК можно выделить подмножество деревьев, замкнутое относительно преобразования Донахью, — семейство примитивных деревьев. Дадим понятие примитивного дерева в терминах разбиения дерева на триады.

О п р е д е л е н и е 1.3. Дерево называется *примитивным*, если оно не содержит триад α , удовлетворяющих одному из следующих двух условий:

- 1) отец триады α является левым, а её единственный сын — правым;
- 2) отец триады α является правым, а её единственный сын — левым.

Так, например, деревья на рис. 3 являются примитивными. А деревья с рис. 2 примитивными не являются: триады, нарисованные на этом рисунке утолщёнными линиями, удовлетворяют условиям из приведённого выше определения.

В работе [8] показано, что количество примитивных деревьев из n триад ($n \geq 2$) равно $m_{n-2} + m_{n-1}$, где $m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$ — число Моцкина. Количество примитивных

деревьев из n триад, обладающих пустым правым поддеревом, равно m_{n-2} . Производящая функция для чисел Моцкина (см., например, [9]) имеет следующий вид:

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x^2}.$$

Перейдём к анализу дуг примитивных деревьев. Пусть количество триад в деревьях равно $n + 1$, левые поддеревья пусты. Обозначим через $\hat{T}(n, k_1, k_2, \dots, k_s)$ количество таких деревьев, которые являются примитивными, и длина первой дуги которых равна k_1 , второй — k_2 , и так далее, длина s -й дуги равна k_s .

Начнём с рассмотрения случая $s = 1$. Пусть дерево имеет вид, изображённый на рис. 4 слева, где поддерево M (обведённое пунктиром) содержит k триад.

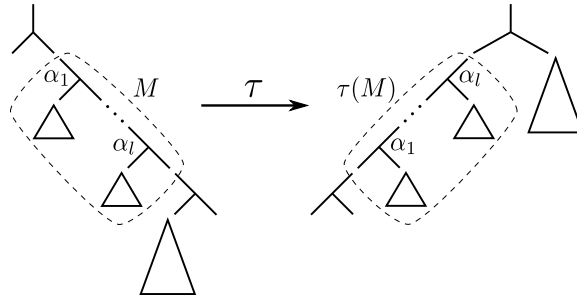


Рис. 4: Перемещение триад через корень примитивного дерева

На этом рисунке проиллюстрирован процесс перемещения $k+1$ триады через корень дерева; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ — триады старшей правой цепи дерева M . Введём обозначение: A_i — дерево, имеющее корневую триаду α_i и пустое правое поддерево ($i = \overline{1, l}$). Для того чтобы исходное дерево было примитивным, должны выполняться два условия:

- 1) триады α_i имеют левых сыновей при любом $i = \overline{1, l}$;
- 2) деревья A_i являются примитивными при любом $i = \overline{1, l}$.

Обозначим символом r_k количество способов сформировать дерево M из k триад. Оно равно

$$r_k = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_l = k} m_{i_1-2} \cdot m_{i_2-2} \cdot \dots \cdot m_{i_l-2},$$

где сумма берётся по всем упорядоченным разложениям k на слагаемые больше единицы.

Будем считать, что $r_0 = 1$, так как дерево M может быть пустым. Если дерево M состоит из одной триады, то исходное дерево не является примитивным, поэтому $r_1 = 0$.

Рассмотрим производящую функцию $R(x)$ для чисел r_k :

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = 1 + m_0 x^2 + m_1 x^3 + (m_0 m_0 + m_2) x^4 + \dots = \\ &= 1 + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n + x^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} m_n x^n \right)^2 + \dots = 1 + x^2 M(x) + \\ &+ x^4 M^2(x) + \dots = \frac{1}{1 - x^2 M(x)} = \frac{1 + x - \sqrt{1 - 2x - 3x^2}}{2x(1 + x)}. \end{aligned}$$

Эта производящая функция совпадает с производящей функцией для чисел Риордана. В работе [10] приведены различные интерпретации последовательности чисел r_k , а также получена формула

$$r_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} C_i.$$

Каждой дуге дерева соответствует композиция $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, где i_1 триад перемещены через корень за первое преобразование, i_2 — за второе и так далее, i_k триад — за k -е преобразование. Таким образом,

$$\widehat{T}(n, k) = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_k = n} r_{i_1-1} \cdot r_{i_2-1} \cdot \dots \cdot r_{i_k-1}, \quad (1.1)$$

где суммирование происходит по всем упорядоченным разложениям числа n на k слагаемых.

Используя данное соотношение, можно получить производящую функцию для чисел $\widehat{T}(n, k)$.

Утверждение 1.1.

1. $\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{T}(n, k) x^n = x^k R^k(x);$
2. $\widehat{T}(n, k) \sim \frac{k 3^{n+\frac{1}{2}}}{2^{k+2} \sqrt{\pi n^{\frac{3}{2}}}}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость первого пункта напрямую следует из формулы (1.1). Перепишем производящую функцию в виде

$$\sum_{n=k}^{\infty} \widehat{T}(n, k) x^n = (x \cdot R(x))^k = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \sqrt{1 - \frac{x}{1/3}} \right)^k.$$

Для вычисления асимптотик коэффициентов производящих функций такого вида уместно использовать результат М. Дрмота, полученный в [11, теоремы 3 и 4]. В нашем случае $g(x) = \frac{1}{2}$, $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $x_0 = \frac{1}{3}$. $\square$

Заметим, что при $k = 2$ получаем функцию $x^2 R^2(x) = \frac{1-x-\sqrt{1-2x-3x^2}}{2(1+x)}$. Эта функция совпадает с производящей функцией для 321-избегающих простых перестановок (см. [12]).

Ещё несколько свойств чисел $\hat{T}(n, k)$ напрямую следуют из соотношения (1.1) и из того, что $r_0 = 1$, $r_1 = 0$ и $r_2 = r_3 = 1$.

Утверждение 1.2.

1. $\hat{T}(n, n-1) = 0$ при $n \geq 2$;
2. $\hat{T}(n, n-2) = n-2$ при $n \geq 3$;
3. $\hat{T}(n, n-3) = n-3$ при $n \geq 4$.

Перейдем к перечислению примитивных деревьев, у которых заданы длины нескольких дуг. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.3.

1. $\hat{T}(n, 1, 1) = \hat{T}(n-1, 3)$ при $n \geq 2$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(n, 1, 1)x^n = \frac{x(3+3x-\sqrt{1-2x-3x^2})}{2(1+x)^2}$;
3. $\hat{T}(n, 1, 1) \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{32\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Пусть длина первых двух дуг дерева T равна одному. Тогда преобразование Донахью дерева T должно выглядеть так, как показано на рис. 5. Здесь α — конечная триада правой огибающей цепи дерева $\tau(\tilde{T})$, по лемме 1.1 эта триада должна быть левым сыном.

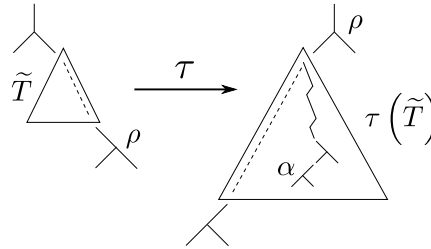


Рис. 5: Иллюстрация к доказательству утверждения 1.3

Заметим, что если убрать триаду ρ из дерева T , то оставшееся дерево будет примитивным, и длина его дуги будет равна трём. Обратное: любое примитивное дерево, длина первых двух дуг которого равна одному, может быть получено из примитивного дерева с длиной дуги, равной трём, путём присоединения триады к старшей правой цепи. Таким образом, построенное соответствие является взаимнооднозначным.

З а м е ч а н и е 1.1. Аналогичные рассуждения для непримитивных деревьев не проходят.

2. Из предыдущего пункта следует, что производящая функция для чисел $T(n, 1, 1)$ выражается через производящую функцию для чисел $T(n, 3)$. Так как $\hat{T}(1, 1, 1) = 1$, то получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(n, 1, 1)x^n = x + x \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(n, 3)x^n = x + x^4 R^3(x),$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

3. Данная асимптотика получается прямым применением теоремы Дарбу к производящей функции из предыдущего пункта. $\square$

Следствие 1.1. При $n \geq 1$ верно, что $\hat{T}(n, 1) = \hat{T}(n, 1, 1) + \hat{T}(n+1, 1, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство справедливо, потому что производящая функция для последовательности $\hat{T}(n, 1, 1) + \hat{T}(n+1, 1, 1)$ совпадает с производящей функцией для последовательности $\hat{T}(n, 1)$. $\square$

Для доказательства ещё одного соотношения нам потребуется вспомогательное утверждение. Пусть φ_i — i -й член последовательности Фибоначчи ($\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{i+2} = \varphi_{i+1} + \varphi_i$). Также будем считать, что слагаемое два в композиции числа может быть разных типов: 2 и 2'.

Лемма 1.2. Количество представлений числа n в виде упорядоченной суммы $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$, где $n_j \in \{2, 2', 3\}$, равно $\varphi_n + (-1)^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a_n — количество описанных в формулировке леммы композиций числа n , $a_0 = 1$. Рассмотрим производящую функцию $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Так как возможны три типа слагаемых: 2, 2' и 3, то производящая функция равна

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2 + x^2 + x^3)^k = \frac{1}{1 - 2x^2 - x^3}.$$

Заметим, что полученное выражение равно сумме $\frac{x}{1-x-x^2} + \frac{1}{1+x}$, где первое слагаемое является производящей функцией для чисел Фибоначчи, а второе — производящей функцией для последовательности $(-1)^n$. $\square$

При помощи непосредственной проверки можно убедиться в том, что $\hat{T}(1, 1, 1) = 1$, $\hat{T}(2, 1, 1) = 0$, $\hat{T}(3, 1, 1) = 0$. При больших n справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.4. $\hat{T}(n, 1, 1) = \hat{T}(n, 1, 1, 1) + \hat{T}(n+1, 1, 1, 1) - \varphi_{n-3} + (-1)^n$ при $n \geq 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся изложением основных идей доказательства. Пусть у примитивного дерева T длина первых двух дуг равна одному. С одной стороны, количество таких деревьев равно $\hat{T}(n, 1, 1)$. С другой стороны, возможны два случая:

1) длина третьей дуги T тоже равна одному;

2) длина третьей дуги T больше одного.

Первому условию удовлетворяют $\hat{T}(n, 1, 1, 1)$ деревьев. Предположим, что дерево T удовлетворяет второму условию. По лемме 1.1 старшая правая цепь дерева $\tau^4(T)$ заканчивается триадой, имеющей левого сына. Добавим к этой триаде ещё и правого сына. Обозначим полученное примитивное дерево с $n + 1$ некорневой триадой через $\tau^4(T')$. Можно показать, что в этом случае у дерева T' длины трёх первых дуг равны одному.

С другой стороны, возьмём примитивное дерево T' с $n + 1$ некорневой триадой, у которого длины первых трёх дуг равны одному. Обозначим дерево, получающееся удалением конечной триады старшей правой цепи дерева $\tau^4(T')$ через $\tau^4(T'')$. Если бы тогда дерево T'' всегда удовлетворяло приведённому выше второму условию, то было бы верно равенство $\hat{T}(n, 1, 1) = \hat{T}(n, 1, 1, 1) + \hat{T}(n + 1, 1, 1, 1)$. Но это не так. «Препятствием» являются те деревья T'' , для которых дерево $\tau^2(T'')$ выглядит так, как показано на рис. 6.

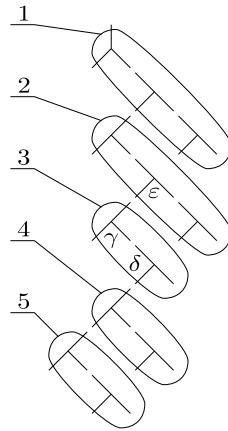


Рис. 6: Иллюстрация к доказательству утверждения 1.4

Назовём такое дерево $\tau^2(T'')$ *плохим*. Плохое дерево обладает тем свойством, что все его правые цепи имеют длину 2 или 3. Причём, если пронумеровать эти цепи так, как показано на рисунке, то первая правая цепь обязательно содержит три триады, а последняя – две.

Представим, что мы формируем плохое дерево, присоединяя цепи в обратном порядке: к последней цепи присоединяем предпоследнюю и т. д. Можно увидеть, что цепь, состоящая из двух триад, может быть присоединена двумя способами к предыдущей добавленной цепи, а цепь из трёх триад – только одним. Например, на рис. 6 цепь №3 могла бы быть присоединена к цепи №4 через триады γ или δ , а цепь №2 к цепи №3 может быть присоединена только через триаду ε . Иначе будет нарушено условие примитивности дерева.

Если из плохого дерева с $n + 1$ некорневыми триадами убрать первую и последнюю цепи (которые формируются однозначно), то останется $n - 3$ триады. Таким образом, количество плохих деревьев с n некорневыми триадами равно числу упорядоченных

разложений числа $n-3$ в сумму двоек и троек, в которой слагаемое 2 бывает двух типов. По лемме 1.2 это число равно $\varphi_{n-3} + (-1)^{n-3}$. Получаем доказываемую формулу. $\square$

Применяя стандартную технику к доказанному соотношению, можно получить производящую функцию для чисел $\widehat{T}(n, 1, 1, 1)$. Кроме того, теорема Дарбу позволяет вывести асимптотику для этих чисел.

Утверждение 1.5.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{T}(n, 1, 1, 1)x^n = \frac{x(2+7x+5x^2+2x^3+2x^4-x\sqrt{1-2x-3x^2})}{2(1+x)^3} + \frac{x^5}{(1-x-x^2)(1+x)};$
2. $\widehat{T}(n, 1, 1, 1) \sim \frac{3^{n+\frac{1}{2}}}{128\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}.$

2. Производящие функции для количества вершин в графах поворотов

Рассмотрим граф G_n , вершинами которого являются ПДВК с n некорневыми вершинами, а рёбрами – ПКДВК с n листьями. Скажем, что ориентированное ребро e идёт от вершины v_1 к v_2 , если образ дерева e при левой биекции $l(e)$ равен v_1 , и образ при правой биекции $r(e)$ равен v_2 .

Назовём полученный граф G_n *графом преобразования Донахью*. Компоненты связности этого графа – циклы, соответствующие орбитам преобразования Донахью. Исследование циклической структуры графа G_n – сложная задача. Для того чтобы приблизиться к её решению, рассмотрим граф, вершинами которого являются не произвольные деревья, а деревья фиксированной высоты.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Шаблон* k -го уровня ПДВК с n некорневыми вершинами назовём некубическое дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) высота дерева, т. е. наибольшая длина пути от корня к листу, равна $k+1$;
- 2) листья дерева, находящиеся на нижнем ярусе, помечены натуральными числами;
- 3) сумма меток и количества непомеченных некорневых вершин равна n .

Договоримся, что шаблон k -го уровня, все метки которого равны одному, является одновременно шаблоном l -го уровня для любого $l > k$. На рис. 7 слева приведён пример шаблона второго уровня для дерева с 14 некорневыми вершинами.

Пусть v – шаблон k -го уровня. Скажем, что висячий корень v находится на нулевом ярусе, сын корня – на первом ярусе, сыновья сына корня – на втором ярусе и т. д.

О п р е д е л е н и е 2.2. Поддеревья шаблона v , корнями которых являются вершины $(s+1)$ -го яруса ($0 \leq s \leq k$), назовём *компонентами s -го уровня* в шаблоне v . *Длиной компоненты* назовём количество сыновей у корневой вершины соответствующей компоненты.

Например, на рис. 7 слева шаблон содержит три компоненты первого уровня, которые имеют следующие длины: 3, 0, 1. Нумеровать компоненты первого уровня будем слева направо.

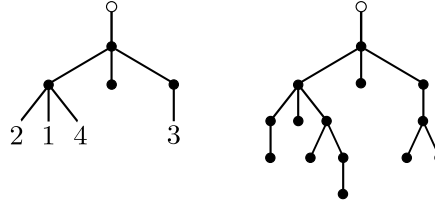


Рис. 7: Шаблон дерева

Хорошо известна биекция между некубическими деревьями и расстановками скобок, при которой листьям деревьев, расположенным на нижнем ярусе, соответствуют внутренние пары скобок максимальной вложенности. Написав между такими скобками метки соответствующих листьев, получим биективный образ шаблона дерева. Будем называть полученную расстановку скобок *модифицированной*. Например, шаблон, изображенный на рис. 7, отображается при данной биекции в модифицированную расстановку скобок $((2)(1)(4))((3))$. Такие расстановки понадобятся нам в дальнейшем для более компактного изображения графа поворотов.

О п р е д е л е н и е 2.3. Дерево T *соответствует* шаблону P , если T получается из P путём добавления на позиции листьев нижнего яруса поддеревьев, количество вершин в которых равно меткам этих листьев.

В качестве иллюстрации на рис. 7 изображены шаблон и соответствующее ему некубическое дерево.

О п р е д е л е н и е 2.4. Некубические деревья T_1 и T_2 называются *эквивалентными на уровне t* , если они соответствуют одному шаблону уровня t .

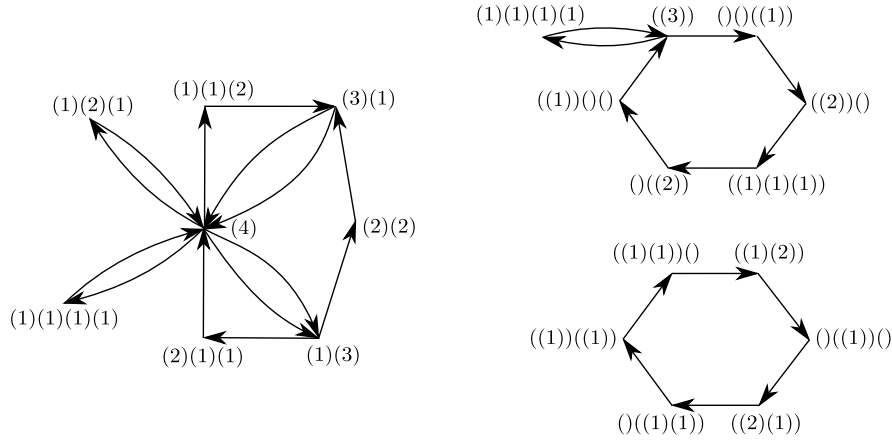
Для обозначения эквивалентности двух деревьев будем применять запись $T_1 \stackrel{m}{\sim} T_2$.

Проведём факторизацию графа преобразования Донахью по данной эквивалентности, т. е. «склеим» вершины, обладающие одним шаблоном.

О п р е д е л е н и е 2.5. *Графом поворотов t -го уровня* для деревьев с n некорневыми вершинами назовём ориентированный граф, вершинами которого являются шаблоны t -го уровня для деревьев с n некорневыми вершинами, а рёбрам соответствуют кубические деревья. Ребро e идёт от вершины v_1 к v_2 , если образ дерева e при левой биекции $l(e)$ соответствует шаблону v_1 , а образ этого дерева при правой биекции $r(e)$ — шаблону v_2 .

Для графа поворотов будем применять обозначения $G_n^m = G_n / \stackrel{m}{\sim}$. Заметим, что в этом графе допускаются кратные рёбра.

Как было отмечено выше, существует биекция между шаблонами деревьев и модифицированными расстановками скобок. Поэтому, для более компактной записи, будем маркировать вершины графа G_n^m расстановками скобок. Графы поворотов первого и второго уровня для деревьев с пятью некорневыми вершинами приведены на рис. 8.


 Рис. 8: Графы G_5^1 и G_5^2

Заметим, что количество рёбер в графах поворотов G_n^m равно количеству ПКДВК с n листьями, т. е. равно числу Каталана C_{n-1} . Обозначим символом v_n^m количество вершин в G_n^m .

Задачу вычисления чисел v_n^m можно свести к равносильной задаче нахождения количества деревьев, не содержащих паттерны-гребёнки. Перечислением таких деревьев занимались авторы работы [13]. Продемонстрируем равносильность этих задач.

В соответствии с [13] введём следующие определения. *Паттерном* назовём плоское кубическое дерево без висячего корня (корень имеет двух сыновей). Скажем, что ПКДВК T непрерывно содержит паттерн t , если дерево T содержит t как поддерево. Рис. 9 иллюстрирует данное определение: дерево T непрерывно содержит паттерн t , но не содержит непрерывно паттерн s .

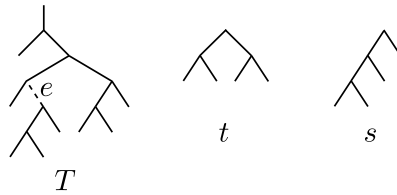


Рис. 9: Паттерны в деревьях

Говорят, что дерево T разрывно содержит паттерн t , если существует дерево T^* , получаемое из T путём применения конечного числа операций стягивания рёбер, такое что T^* непрерывно содержит паттерн t . Так, на рисунке 9 дерево T разрывно содержит паттерн s , так как дерево, получаемое из T стягиванием ребра e (обозначено пунктиром), содержит s непрерывно.

Обозначим через $av_t(n)$ количество ПКДВК с n листьями, которые не содержат разрывно паттерн t . Будем рассматривать специальный вид паттернов — *гребёнки*. Примеры левых гребёнок приведены на рис. 10. Деревья, симметричные левым гребёнкам назовём правыми гребёнками. Обозначим левые гребёнки с i листьями через c_i .

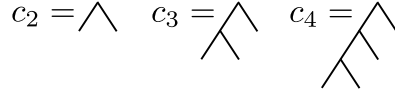


Рис. 10: Паттерны-гребёнки

Утверждение 2.1. $av_{c_{m+3}}(n) = v_n^m$ при $m \geq 1$, $n \geq 1$.

Доказательство. Будем строить биекцию между множеством вершин графа поворотов G_n^m и множеством деревьев, не содержащих разрывно паттерн c_{m+3} индукцией по m .

База индукции. Положим T — дерево с n листьями, не содержащее разрывно паттерн c_4 . Пусть это дерево имеет вид, изображенный на рис. 11 слева. Заметим, что деревья $T_1, T_2, \dots, T_s$ в этом случае либо состоят из одной вершины, либо являются правыми гребёнками. Пример дерева, удовлетворяющего этому условию, изображен на рис. 11 справа. Иначе, если к старшей правой цепи дерева T присоединено дерево, отличное от правой гребёнки, то стягиванием рёбер можно получить поддерево c_4 . Если, например, на рис. 11 к листу x присоединить любое непустое кубическое дерево, то при стягивании рёбер e_1 и e_2 получается дерево, содержащее c_4 .

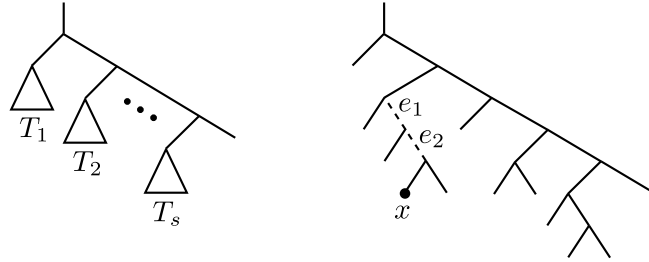


Рис. 11: Иллюстрация к доказательству утверждения 2.1

Дереву T поставим в соответствие вершину $(a_1)(a_2)\dots(a_s)$ графа G_n^1 , где a_i — количество листьев в гребёнке T_i . Понятно, что разным деревьям, не содержащим разрывно c_4 , соответствуют разные вершины в G_n^1 ; для любой вершины в G_n^1 можно построить её прообраз при данном отображении. Поэтому построенное отображение является взаимно-однозначным и $av_{c_4}(n) = v_n^1$.

Индукционный переход. Пусть доказано, что $av_{c_{k+3}} = v_n^k$. Рассмотрим дерево T , не содержащее разрывно паттерн c_{k+4} . Пусть это дерево имеет вид, изображенный на рис. 11 слева. Тогда ни одно из деревьев T_i не содержит разрывно паттерн c_{k+3} , иначе стягиванием рёбер получим паттерн c_{k+4} в дереве T . Пусть P_i — вершина-шаблон в графе G_n^k , соответствующая дереву T_i ($i = \overline{1, s}$). Тогда образом дерева T назовём шаблон $(P_1)(P_2)\dots(P_s)$. Хорошо видно, что построенное отображение является биекцией. $\square$

Заметим, что при $n \geq 2$ и $m \geq 2$ количество вершин в графе G_n^m может быть записано при помощи следующего рекуррентного соотношения:

$$v_n^m = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-1} v_{i_1}^{m-1} \cdot v_{i_2}^{m-1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}^{m-1}. \quad (2.1)$$

Здесь внутреннее суммирование происходит по всем упорядоченным разложениям числа $n-1$. Справедливость данной формулы иллюстрирует представление некубического дерева на рис. 12. Если исходное дерево T содержит n некорневых вершин, то деревья $T_1, T_2, \dots, T_k$ (без висячего корня) содержат суммарно $n-1$ вершину, так как сын корня дерева T не входит ни в одно из этих деревьев.

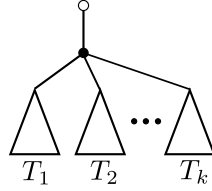


Рис. 12: Некубическое дерево

Для производящей функции последовательности чисел v_n^m будем использовать обозначение $F_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^m x^n$. Следующее утверждение представляет собой рекуррентную формулу для вычисления функций $F_m(x)$.

Утверждение 2.2.

1. $F_1(x) = \frac{x - x^2}{1 - 2x}$;
2. $F_m(x) = \frac{x}{1 - F_{m-1}(x)}$ при $m \geq 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вершины в графе поворотов первого уровня G_n^1 суть упорядоченные разложения числа $n-1$ на слагаемые, поэтому верно, что

$$v_n^1 = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 2^{n-2}, & n > 1, \end{cases}$$

откуда следует первый пункт утверждения.

Используя формулу (2.1), при $m \geq 2$ получаем

$$\begin{aligned} F_m(x) &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n-1} v_{i_1}^{m-1} \cdot v_{i_2}^{m-1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}^{m-1} \right) x^n = \\ &= x + x \cdot F_{m-1}(x) + x \cdot F_{m-1}^2(x) + x \cdot F_{m-1}^3(x) + \dots = \frac{x}{1 - F_{m-1}(x)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

При помощи доказанного утверждения можно получить явное выражение для функций $F_m(x)$. В работе [13] показано, что верна формула

$$F_m(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{m-i+1}{i} \cdot x^{i+1}}{\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor} (-1)^i \cdot \binom{m-i+2}{i} \cdot x^i}.$$

Хорошо известно, что производящую функцию для чисел Каталана можно представить в виде цепной дроби. Выпишем это разложение для производящей функции, домноженной на x :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n = \frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{\ddots}}},$$

Заметим, что

$$F_1(x) = \frac{x}{1 - \frac{x}{1-x}}, \quad F_2(x) = \frac{x}{1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{1-x}}}, \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, получена следующая комбинаторная интерпретация подходящих дробей для производящей функции последовательности Каталана.

Утверждение 2.3. *Подходящие дроби для производящей функции $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1} x^n$ равны производящим функциям $F_m(x)$ для количества вершин в графах поворотов.*

Этот результат хорошо согласуется с тем фактом, что при фиксированном количестве некорневых вершин n начиная с некоторого уровня m вершинами графа G_n^m являются вообще все некубические деревья заданного размера.

Отметим, что функция $F_2(x)$ совпадает с производящей функцией для чисел Фибоначчи с нечётными номерами, т. е.

$$v_n^2 = \frac{\tau^{2n-3} + \tau^{3-2n}}{\sqrt{5}},$$

где τ — золотое сечение, равное $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В работе [14] была получена асимптотика для последовательностей v_n^m :

$$v_n^m \sim C \cdot 4^n \cos^{2n} \frac{\pi}{m+3},$$

где C — некоторая положительная константа.

3. Производящие функции для количества вершин в примитивных графах поворотов

Образ примитивного дерева при преобразовании Донахью также является примитивным. Для изучения внутренней структуры графов поворотов целесообразно рассмотреть их подграфы, соответствующие примитивным деревьям.

О п р е д е л е н и е 3.1. Примитивным графом поворотов m -го уровня для деревьев с n листьями называется подграф графа G_n^m , ребра которого соответствуют примитивным деревьям.

Для примитивного графа поворотов будем применять обозначение $\hat{G}_n^m$, для количества вершин в нём — $\hat{v}_n^m$, для производящей функции числа вершин — $\hat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n^m x^n$. Заметим, что количество рёбер в графе G_n^m равно числу примитивных деревьев, т. е. $m_{n-2} + m_{n-3}$ ($n \geq 3$).

Утверждение 3.1. $\hat{F}_1(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ (т. е. $\hat{v}_n^1$ равно числу Фибоначчи φ_n).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В графе $\hat{G}_n^1$ вершины суть упорядоченные разложения числа $n-1$ на слагаемые, в которых единицы могут стоять только в начале или в конце. Запишем в ряд $n-1$ единицу. Поставив в образовавшиеся $n-2$ промежутков знаки «+» и «,», получим композицию числа $n-1$ (элементы композиции отделены запятыми). Если запретить написание двух запятых подряд (в соседних промежутках), то получатся нужные композиции.

То есть количество вершин в $\hat{G}_n^1$ равно количеству последовательностей длины $n-2$ из символов «+» и «,», где две запятые не идут подряд. Как известно, количество таких последовательностей равно числу Фибоначчи. $\square$

Используя формулу Бине, получаем асимптотическую оценку для чисел $\hat{v}_n^1$.

Следствие 3.1. $\hat{v}_n^1 \sim \frac{\tau^n}{\sqrt{5}}$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Найти производящую функцию для чисел $\hat{v}_n^m$ при $m \geq 2$ позволяет следующее утверждение.

Утверждение 3.2. При $m \geq 2$ верно, что

$$\hat{F}_m(x) = \frac{x(1+x+x\hat{H}_{m-1}(x))}{1+x-\hat{H}_{m-1}(x)},$$

где

$$\hat{H}_l(x) = \sum_{i=0}^{l-1} (-1)^i x^i \hat{F}_{l-i}(x) + \frac{(-1)^l x^{l+1} + x^2}{1+x} + \frac{(-1)^l x^{l+2}}{1-x}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть шаблон m -го уровня, соответствующий вершине в примитивном графе поворотов, имеет вид, изображённый на рис. 12 (напомним, что у деревьев $T_1, T_2, \dots, T_k$ нет висячего корня). Вследствие примитивности деревьев-рёбер выполняются следующие условия:

- 1) только деревья T_1 и T_k могут содержать по одной вершине;
- 2) у корней деревьев T_i ($i = \overline{1, k}$) больше одного сына (у корней T_1 и T_k может не быть сыновей).

Из второго условия следует, что для дальнейших расчётов требуется рассмотрение вершин-шаблонов в графе $\widehat{G}_n^m$, сын висячего корня которых обладает более чем одним сыном. Пусть $\widehat{w}_n^m$ — количество таких вершин. Определим $\widehat{w}_1^m = \widehat{w}_2^m = 1$. Действительно, если деревья T_i содержат по одной или по две вершины, то приведённые выше условия не нарушаются (по одной вершине может быть только в деревьях T_1 и T_k).

Поскольку только у одного шаблона первого уровня $(n-1)$ сын корня имеет одного сына, то

$$\widehat{w}_n^1 = \begin{cases} \widehat{v}_n^1 - 1, & n \geq 3, \\ \widehat{v}_n^1, & n < 3. \end{cases}$$

Количество вершин графа $\widehat{G}_n^2$, сын корня которых имеет одного сына, равно количеству вершин графа $\widehat{G}_{n-1}^1$, сын корня которых имеет двух и более сыновей (иначе нарушается примитивность). Поэтому

$$\widehat{w}_n^2 = \begin{cases} \widehat{v}_n^2 - \widehat{v}_{n-1}^1 + 1, & n \geq 4, \\ \widehat{v}_n^2 - \widehat{v}_{n-1}^1, & n = 3, \\ \widehat{v}_n^2, & n < 3. \end{cases}$$

В общем случае по индукции

$$\widehat{w}_n^m = \begin{cases} \widehat{v}_n^m + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \widehat{v}_{n-i}^{m-i} + (-1)^m, & n \geq m+2, \\ \widehat{v}_n^m + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \widehat{v}_{n-i}^{m-i}, & 3 \leq n < m+2, \\ \widehat{v}_n^m, & n < 3. \end{cases}$$

Производящая функция для последовательности $\{\widehat{w}_n^m\}_{n=1}^\infty$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{H}_m(x) &= \sum_{n=1}^\infty \widehat{w}_n^m x^n = \sum_{n=1}^\infty \widehat{v}_n^m x^n - x \sum_{n=2}^\infty \widehat{v}_n^{m-1} x^n + x^2 \sum_{n=2}^\infty \widehat{v}_n^{m-2} x^n - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{m-1} x^{m-1} \sum_{n=2}^\infty \widehat{v}_n^1 x^n + (-1)^m \sum_{n=m+2}^\infty x^n = \\ &= \widehat{F}_m(x) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i x^i \left(\widehat{F}_{m-i}(x) - x \right) + \frac{(-1)^m x^{m+2}}{1-x} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i x^i \widehat{F}_{m-i}(x) + \frac{(-1)^m x^{m+1} + x^2}{1+x} + \frac{(-1)^m x^{m+2}}{1-x}.$$

Перейдём к вычислению производящей функции для количества вершин в примитивном графе. Верно, что

$$\widehat{F}_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{v}_n^m x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i_1+\dots+i_k=n-1} \widehat{w}_{i_1}^{m-1} \cdot \dots \cdot \widehat{w}_{i_k}^{m-1} \right) x^n, \quad (3.1)$$

где индексы суммирования $i_1, i_2, \dots, i_k$ принимают значения, при которых только i_1 и i_k могут быть равны единице.

Учитывая это ограничение, получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_m(x) = & x + x\widehat{H}_{m-1}(x) + x\widehat{H}_{m-1}^2(x) + x\left(\widehat{H}_{m-1}^3(x) - x\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right) + \\ & + x\left(\widehat{H}_{m-1}^4(x) - 2x\widehat{H}_{m-1}^3(x) + x^2\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right) + \dots + x\left(\widehat{H}_{m-1}^k(x) - \right. \\ & - \binom{k-2}{1}x\widehat{H}_{m-1}^{k-1}(x) + \binom{k-2}{2}x^2\widehat{H}_{m-1}^{k-2}(x) - \binom{k-2}{3}x^3\widehat{H}_{m-1}^{k-3}(x) + \\ & \left. + \dots + (-1)^k x^{k-2}\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right) + \dots \end{aligned}$$

Действительно, если бы суммирование в формуле (3.1) происходило по всем упорядоченным разложениям числа $n-1$, то производящая функция была бы равна сумме слагаемых $x\widehat{H}_{m-1}^k(x)$. Здесь же из этих слагаемых мы должны вычесть компоненты, которые соответствуют разложениям, содержащим единицы в середине. Так, например, поставить единицу в середине трёхэлементной композиции числа можно единственным способом, поэтому четвёртое слагаемое равно $x\left(\widehat{H}_{m-1}^3(x) - x\widehat{H}_{m-1}^2(x)\right)$. При формировании других слагаемых в этой сумме использовалась формула включений-исключений.

После перегруппировки получаем следующее:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_m(x) = & x + x\left(\widehat{H}_{m-1}(x) + \widehat{H}_{m-1}^2(x) + \widehat{H}_{m-1}^3(x) + \dots\right) - \\ & - x^2\left(\binom{1}{1}\widehat{H}_{m-1}^2(x) + \binom{2}{1}\widehat{H}_{m-1}^3(x) + \binom{3}{1}\widehat{H}_{m-1}^4(x) + \dots\right) + \\ & + x^3\left(\binom{2}{2}\widehat{H}_{m-1}^2(x) + \binom{3}{2}\widehat{H}_{m-1}^3(x) + \binom{4}{2}\widehat{H}_{m-1}^4(x) + \dots\right) - \dots \end{aligned}$$

Введём обозначения: $y = \widehat{H}_{m-1}(x)$, $S(y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k$. Тогда получившееся выражение можно переписать следующим образом:

$$\widehat{F}_m(x) = x + x(S(y) - 1) - x^2 y^2 S'(y) + \frac{x^3}{2!} y^2 S''(y) - \frac{x^4}{3!} y^2 S'''(y) + \dots$$

Так как $S(y) = \frac{1}{1-y}$, то $S^{(n)}(y) = \frac{n!}{(1-y)^{n+1}}$. Следовательно,

$$\widehat{F}_m(x) = x + x \frac{y}{1-y} - x^2 \frac{y^2}{(1-y)^2} + x^3 \frac{y^2}{(1-y)^3} - \dots = \frac{x(1+x+xy)}{1+x-y}.$$

□

Список литературы

- [1] R. Donaghey, “Automorphisms on Catalan trees and bracketings”, *Journal of Combinatorial Theory*, **29**:1 (1980), 75–90.
- [2] L. W. Shapiro, “The cycle of six”, *The Fibonacci Quarterly*, **17**:3 (1979), 253–259.
- [3] D. Callan, “A bijection on Dyck paths and its cycle structure”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007), R28.
- [4] A. Karttunen, URL: <http://www.oeis.org/A080070>.
- [5] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Part 1. V.4A: Combinatorial Algorithms, Addison-Wesley Professional, New Jersey, 2011.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [7] И. А. Пущкарев, В. А. Бызов, “Дуги преобразования Донахью и треугольник Каталана”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 1, 19–22.
- [8] R. Donaghey, “Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations”, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **22**:2 (1977), 114–121.
- [9] R. Donaghey, L. W. Shapiro, “Motzkin numbers”, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **23**:3 (1977), 291–301.
- [10] F. R. Bernhart, “Catalan, Motzkin, and Riordan numbers”, *Discrete Mathematics*, **204**:1–3 (1999), 73–112.
- [11] M. Drmota, “A bivariate asymptotic expansion of coefficients of powers of generating functions”, *European Journal of Combinatorics*, **15**:2 (1994), 139–152.
- [12] M. H. Albert, V. Vatter, “Generating and enumerating 321-avoiding and skew-merged simple permutations”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **20**:2 (2013), P44.
- [13] M. Dairyko, L. Pudwell, S. Tyner, C. Wynn, “Non-contiguous pattern avoidance in binary trees”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**:3 (2012), P22.
- [14] Q. Yuan, *The catalan numbers, regular languages, and orthogonal polynomials*, URL: <https://qchu.wordpress.com/2009/06/07/the-catalan-numbers-regular-languages-and-orthogonal-polynomials/>.

References

- [1] R. Donaghey, “Automorphisms on Catalan trees and bracketings”, *Journal of Combinatorial Theory*, **29**:1 (1980), 75–90.
- [2] L. W. Shapiro, “The cycle of six”, *The Fibonacci Quarterly*, **17**:3 (1979), 253–259.
- [3] D. Callan, “A bijection on Dyck paths and its cycle structure”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, **14**:1 (2007), R28.
- [4] A. Karttunen, URL: <http://www.oeis.org/A080070>.

- [5] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Part 1. V.4A: Combinatorial Algorithms, Addison-Wesley Professional, New Jersey, 2011.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux, *Combinatorial Species and Tree-Like Structures*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [7] I. A. Pushkarev, V. A. Byzov, “Arcs of Donaghey’s Transformation and Catalan’s Triangle”, *Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2015, № 1, 19–22 (In Russian).
- [8] R. Donaghey, “Restricted plane tree representations of four Motzkin-Catalan equations”, *Journal of Combinatorial Theory. Series B*, **22**:2 (1977), 114–121.
- [9] R. Donaghey, L. W. Shapiro, “Motzkin numbers”, *Journal of Combinatorial Theory. Series A*, **23**:3 (1977), 291–301.
- [10] F. R. Bernhart, “Catalan, Motzkin, and Riordan numbers”, *Discrete Mathematics*, **204**:1–3 (1999), 73–112.
- [11] M. Drmota, “A bivariate asymptotic expansion of coefficients of powers of generating functions”, *European Journal of Combinatorics*, **15**:2 (1994), 139–152.
- [12] M. H. Albert, V. Vatter, “Generating and enumerating 321-avoiding and skew-merged simple permutations”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **20**:2 (2013), P44.
- [13] M. Dairyko, L. Pudwell, S. Tyner, C. Wynn, “Non-contiguous pattern avoidance in binary trees”, *Electronic Journal of Combinatorics*, **19**:3 (2012), P22.
- [14] Q. Yuan, *The catalan numbers, regular languages, and orthogonal polynomials*, URL: <https://qchu.wordpress.com/2009/06/07/the-catalan-numbers-regular-languages-and-orthogonal-polynomials/>.

Информация об авторе

Бызов Виктор Александрович, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики. Вятский государственный университет, г. Киров, Российская Федерация. E-mail: vbyzov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>

Поступила в редакцию 15.01.2019 г.
 Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
 Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Viktor A. Byzov, Senior Lecturer of the Applied Mathematics and Informatics Department. Vyatka State University, Kirov, the Russian Federation. E-mail: vbyzov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3613-5949>

Received 15 January 2019
 Reviewed 11 February 2019
 Accepted for press 14 March 2019

© Дорохов А.Н., Карпов М.Г., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32

УДК 517.988

О существовании неподвижных точек у вполне непрерывных операторов в F -пространстве

Александр Николаевич ДОРОХОВ, Михаил Георгиевич КАРПОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»

394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0551-7511>, e-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

On the existence of fixed points in completely continuous operators in F -space

Alexander N. DOROKHOV, Michael G. KARPOV

Voronezh State Pedagogical University

86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0551-7511>, e-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящается развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов. Приводятся доказательства новых теорем существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F -пространстве (пространстве Фреше). Данный класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счётно-нормированные и пространства $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Ключевые слова: банахово пространство; F -пространство; вполне непрерывный оператор; неподвижная точка

Для цитирования: Дорохов А. Н., Карпов М. Г. О существовании неподвижных точек у вполне непрерывных операторов в F -пространстве // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 26–32. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32

Abstract. This work is dedicated to the development of the theory of fixed points of completely continuous operators. We prove existence of new theorems of fixed points of completely continuous operators in F -space (Frechet space). This class of spaces except Banach includes such important space as a countably normed space and $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Keywords: banach space; F -space; completely continuous operator; fixed point

For citation: Dorokhov A. N., Karpov M. G. O sushestvovanii nepodvizhnykh toчек u vполне neprerivnykh operatorov v F -prostranstve [On the existence of fixed points in completely continuous operators in F -space]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 26–32. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-26-32 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Одним из важных разделов современного анализа является теория нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах с конусами, созданная М.А. Красносельским и его учениками (см. [1]–[4]). Ценность этой теории обуславливается её многочисленными приложениями в различных задачах естествознания: в задаче о критическом режиме ядерного реактора, в теории волн на поверхности тяжёлой жидкости, в задачах о формах потери устойчивости упругих систем, в задачах геометрии в целом, в теории устойчивости, в теории нелинейных краевых задач, в математической экономике и т. д.

Естественно возникает вопрос о распространении теории нелинейных операторных уравнений на более широкие классы пространств, чем банаховы, и, в частности, на F -пространства (пространства Фреше). Этот класс пространств, кроме банаховых, включает в себя такие важные пространства, как счётно-нормированные и пространства $L_p(0 < p < 1)$, $l_p(0 < p < 1)$.

Развитию теории неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F -пространстве, посвящается настоящая работа.

1. Предварительные сведения

Приведём некоторые необходимые сведения и сформулируем ранее доказанные утверждения [5], которые будем использовать в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 1.1. Линейное метрическое пространство X называется F -пространством [6], [7], если его метрика, кроме обычных свойств, обладает ещё свойствами:

- 1) $\rho(x, y) = \rho(x - y, 0)$ ($x, y \in X$);
- 2) из $\alpha_n \rightarrow \alpha$ следует $\rho(\alpha_n x, \alpha x) \rightarrow 0$ ($x \in X$), и из $x_n \rightarrow x$ следует $\rho(\alpha x_n, \alpha x) \rightarrow 0$ ($\alpha \in R$);
- 3) пространство X полно по метрике.

В дальнейшем число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0)$ будем называть ρ -нормой элемента x .

Пусть X — m -мерное F -пространство с ρ -нормой $\|x\|_\rho$, а $(l_1, \dots, l_m)$ — какой-нибудь базис в X . Тогда каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде:

$$x = \sum_{i=1}^m \xi_i l_i.$$

Положим $\|x\| = \max_{i \in \overline{1, m}} |\xi_i|$. Число $\|x\|$ является нормой в X .

Лемма 1.1. В m -мерном F -пространстве X для любой последовательности $(x_n) \subset X$ соотношения $\|x_n\|_\rho \rightarrow 0$ и $\|x_n\| \rightarrow 0$ равносильны.

О п р е д е л е н и е 1.2. Оператор A называется непрерывным на множестве $M \subset X$ F -пространства X , если он непрерывен в каждой точке x множества M .

О п р е д е л е н и е 1.3. Оператор A называется компактным на множестве M F -пространства X , если он преобразует любое ограниченное по ρ -норме $\|x\|_\rho$ множество $N \subset M$ в относительно компактное множество $AN \subset X$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Оператор A называется вполне непрерывным на множестве $M \subset X$ F -пространства X , если он непрерывен и компактен на этом множестве.

Пусть X — F -пространство. Обозначим через X^* множество всех линейных непрерывных в F -пространстве функционалов. Определим в этом множестве операции сложения элементов и умножения элементов на числа по формулам:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

С этими операциями множество X^* становится линейным (векторным) пространством, которое называется сопряжённым пространством для F -пространства X .

О п р е д е л е н и е 1.5. Сопряжённое пространство X^* называется достаточным в F -пространстве X , если для любых элементов $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ существует функционал $f \in X^*$, такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Легко видеть, что если в F -пространстве X существует норма $\|x\|$, подчинённая ρ -норме $\|x\|_\rho$, т. е. если существует число $a > 0$, такое, что $a\|x\| \leq \|x\|_\rho$ ($x \in X$), то сопряжённое пространство X^* достаточно в X .

Пусть в F -пространстве X множество $M \subset X$ относительно компактно. Тогда его выпуклая оболочка coM также будет относительно компактным множеством в том случае, если ρ -норма $\|x\|_\rho$ в X эквивалентна некоторой норме $\|x\|$, т. е. если существуют числа $a > 0$, $b > 0$, такие, что $a\|x\| \leq \|x\|_\rho \leq b\|x\|$ ($x \in X$).

Теорема 1.1. Пусть

- 1) для каждого относительно компактного множества $M \subset X$ множество coM также относительно компактно в F -пространстве X ;
- 2) сопряжённое пространство X^* достаточно в F -пространстве X ;
- 3) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ -норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Теорема 1.2. Пусть

1) при каждом $x \in X \setminus \{0\}$ функция $\varphi_x(t) = \|tx\|_\rho$ возрастает по переменной t в промежутке $[0, +\infty)$;

2) существует число $b > 0$, такое, что при всех $t \in [0, 1]$ и $x \in X$ выполняется неравенство $\|tx\|_\rho \leq bt \|x\|_\rho$;

3) в X существует норма $\|x\|$ и числа $a > 0$ и $r_0 > 0$, такие, что $a \|x\| \leq \|x\|_\rho$ ($x \in X, \|x\|_\rho \leq r_0$);

4) вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ -норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_0 \in V$, такой, что $Ax_0 = x_0$.

2. Основные результаты

Получим новые условия существования неподвижных точек вполне непрерывных операторов, действующих в F -пространстве X . Вначале рассмотрим ситуацию, когда пространство X упорядочено некоторым конусом $K \subset X$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Конус $K \subset X$ F -пространства X называется псевдонормальным, если для любых элементов $u, v \in X$ ($u \leq v$) конусной отрезок $\langle u, v \rangle$ ограничен по ρ -норме $\|x\|_\rho$.

Теорема 2.1. Пусть

1) в F -пространстве X конус K псевдонормален;

2) для любого относительно компактного множества $M \subset X$ множество coM также относительно компактно;

3) сопряжённое пространство X^* достаточно в X ;

4) вполне непрерывный оператор A преобразует конусной отрезок $\langle u, v \rangle$, где $u \leq v$ — фиксированные элементы в X , в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle u, v \rangle$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пространстве X конусной отрезок $\langle u, v \rangle$ в силу псевдонормальности конуса K является замкнутым ограниченным по ρ -норме $\|x\|_\rho$ выпуклым множеством. Следовательно, в предположениях настоящей теоремы выполняются все условия теоремы 1.1. $\square$

О п р е д е л е н и е 2.2. Оператор A , действующий в F -пространстве X , называется усиленно непрерывным, если из $x_n \xrightarrow{\text{сл}} x$ следует $Ax_n \rightarrow Ax$ по ρ -норме $\|x\|_\rho$.

В следующей теореме не предполагается, что для любого относительно компактного множества M в F -пространстве X множество coM также относительно компактно.

Теорема 2.2. Пусть действующий в F -пространстве X оператор A усиленно непрерывен, вполне непрерывен и преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ -норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Доказательство. В силу компактности оператора A множество $M = AV$ относительно компактно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ в M существует конечная ε -сеть — множество $\{y_1, \dots, y_n\}$ такое, что для произвольного $y \in M$ существует элемент $y_i \in \{y_1, \dots, y_n\}$, для которого $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$.

Построим на множестве M оператор шаудеровского проектирования

$$P_\varepsilon y = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(y)}, \quad \text{где } \mu_i(y) = \begin{cases} \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho, & \text{если } \|y - y_i\|_\rho \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \|y - y_i\|_\rho > \varepsilon. \end{cases}$$

Легко видеть, что функционалы $\mu_i(y)$ ($i \in \overline{1, n}$) неотрицательны и непрерывны на множестве M . Далее, так как для любого $y \in M$ существует элемент $y_i \in \{y_1, \dots, y_n\}$, удовлетворяющий оценке $\|y - y_i\|_\rho < \varepsilon$, то значение $\mu_i(y) = \varepsilon - \|y - y_i\|_\rho > 0$. Следовательно, $\sum_{i=1}^n \mu_i(y) > 0$ ($y \in M$). Поэтому оператор $P_\varepsilon(y)$ непрерывен на M .

Нетрудно видеть, что конечномерные операторы $A_\varepsilon x = P_\varepsilon A x$ ($\varepsilon > 0$) непрерывны на множестве V .

Обозначим через X_ε конечномерное пространство, натянутое на множество $\{y_1, \dots, y_n\}$ и положим $V_\varepsilon = V \cap X_\varepsilon$. Так как множество V выпукло и $AV \subset V$, то

$$P_\varepsilon A x = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(Ax) y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(Ax)} \in V \cap X_\varepsilon = V_\varepsilon \quad (x \in V, \varepsilon > 0).$$

Таким образом, $A_\varepsilon V_\varepsilon = P_\varepsilon A V_\varepsilon \subset V_\varepsilon$.

Далее, так как в силу леммы 1.1 непрерывность оператора $A_\varepsilon = P_\varepsilon A$ в конечномерном F -пространстве X_ε равносильна его непрерывности в X_ε по норме, то в силу теоремы Боля-Брауэра существуют элементы $x_\varepsilon \in V_\varepsilon$ такие, что $A_\varepsilon x_\varepsilon = P_\varepsilon A x_\varepsilon = x_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), построим элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$), такие, что $A_{\frac{1}{n}} x_n = P_{\frac{1}{n}} A x_n = x_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

В силу компактности оператора A без ограничения общности можно считать, что имеет место сходимость $Ax_n \rightarrow x_* \in V$ по ρ -норме $\|x\|_\rho$.

Возьмём произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора

$$P_{\frac{1}{n}}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(y) y_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(y)}$$

непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f \left(P_{\frac{1}{n}} A x_n - A x_n \right) \right| \leq \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} |f(y_i - A x_n)| \rightarrow 0.$$

Отсюда и из $\|A x_n - x_*\|_\rho \rightarrow 0$ непосредственно следует, что

$$f(x_n) = f \left(P_{\frac{1}{n}} A x_n \right) \rightarrow f(x_*).$$

Следовательно, $x_n = P_{\frac{1}{n}} A x_n \xrightarrow{\text{с.л.}} x_*$. Тогда в силу усиленной непрерывности оператора A имеет место сходимость $Ax_n \rightarrow Ax_*$ по ρ -норме $\|x\|_\rho$. Отсюда и из $\|A x_n - x_*\|_\rho \rightarrow 0$ следует, что $Ax_* = x_*$. $\square$

О п р е д е л е н и е 2.3. Оператор A , действующий в F -пространстве X , называется слабо непрерывным в X , если из $x_n \xrightarrow{\text{сЛ}} x$ следует $Ax_n \xrightarrow{\text{сЛ}} Ax$.

Теорема 2.3. Пусть

- 1) сопряжённое пространство X^* достаточно в F -пространстве X ;
- 2) слабо непрерывный, и вполне непрерывный оператор A преобразует непустое замкнутое ограниченное по ρ -норме $\|x\|_\rho$ выпуклое множество $V \subset X$ в себя.

Тогда существует элемент $x_* \in V$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.2, показывается, что существуют элементы $x_n \in V_{\frac{1}{n}} = V \cap X_{\frac{1}{n}}$, где $X_{\frac{1}{n}}$ — конечномерное пространство, натянутое на $\frac{1}{n}$ -сеть $(y_1, \dots, y_n) \subset M = AV$, такие, что $P_{\frac{1}{n}} Ax_n = x_n$ ($n \in N$).

Так как последовательность (Ax_n) относительно компактна, то без ограничения общности можно считать, что $Ax_n \rightarrow x_*$ по ρ -норме $\|x\|_\rho$.

Возьмём произвольный функционал $f \in X^*$. Из определения оператора $P_{\frac{1}{n}}$ непосредственно следует, что если $\mu_i(y) \neq 0$, то $\|y - y_i\|_\rho < \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\left| f \left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n - Ax_n \right) \right| \leq \sup_{\mu_i(Ax_n) \neq 0} |f(y_i - Ax_n)| \rightarrow 0.$$

Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \rightarrow 0$ вытекает, что

$$f(x_n) = f \left(P_{\frac{1}{n}} Ax_n \right) \rightarrow f(x_*).$$

Следовательно, $x_n \xrightarrow{\text{сЛ}} x_*$. Поэтому в силу слабой непрерывности оператора A последовательность $Ax_n \xrightarrow{\text{сЛ}} Ax_*$. Отсюда и из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \rightarrow 0$ ввиду достаточности X^* в X следует, что $Ax_* = x_*$. Действительно, из $\|Ax_n - x_*\|_\rho \rightarrow 0$ для любого $f \in X^*$ получаем $f(Ax_n) \rightarrow f(x_*)$, а из $Ax_n \xrightarrow{\text{сЛ}} Ax_*$ следует $f(Ax_n) \rightarrow f(Ax_*)$. Поэтому $f(x_*) = f(Ax_*)$. Но тогда в силу достаточности X^* в X верно $Ax_* = x_*$. $\square$

Список литературы

- [1] М. А. Красносельский, *Положительные решения операторных уравнений*, Физматгиз, М., 1962.
- [2] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Гостехиздат, М., 1956.
- [3] И. А. Бахтин, *Положительные решения нелинейных уравнений с вогнутыми операторами*, учебное пособие для спецкурса, ВГПИ, Воронеж, 1985.
- [4] И. А. Бахтин, *Нелинейные уравнения с монотонными операторами*, учебное пособие для спецкурса, ВГПИ, Воронеж, 1988.
- [5] А. Н. Дорохов, “Неподвижные точки вполне непрерывных операторов в F -пространстве”, *Известия ВГПУ*, **257** (2011), 8–15.
- [6] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.

References

- [1] M. A. Krasnoselskii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Fizmatgiz, Moscow, 1962 (In Russian).
- [2] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Gostekhizdat, Moscow, 1956 (In Russian).
- [3] I. A. Bakhtin, *Positive Solutions of Nonlinear Equations with Concave Operators*, a manual for special course, Voronezh State Pedagogical Institute, Voronezh, 1985 (In Russian).
- [4] I. A. Bakhtin, *Nonlinear Equations with Monotone Operators*, a manual for special course, Voronezh State Pedagogical Institute, Voronezh, 1988 (In Russian).
- [5] A. N. Dorokhov, "The fixed points of completely continuous operators in F -space", *News of the Voronezh State Pedagogical University*, **257** (2011), 8–15 (In Russian).
- [6] K. Yoshida, *Functional Analysis*, World, Moscow, 1967 (In Russian).
- [7] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, Science, Moscow, 1977 (In Russian).

Информация об авторах

Дорохов Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0551-7511>

Карпов Михаил Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: karpovmg57@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Дорохов Александр Николаевич
E-mail: dor-an@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.

Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the authors

Alexander N. Dorokhov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: dor-an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0551-7511>

Michael G. Karpov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: karpovmg57@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexander N. Dorokhov
E-mail: dor-an@mail.ru

Received 16 January 2019

Reviewed 11 February 2019

Accepted for press 28 March 2019

© Жуковская З.Т., Жуковский С.Е., Сенгупта Р., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38

УДК 517

О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ¹, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ^{1,2},
Ричик СЕНГУПТА¹

¹ ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4595-6685>, e-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9916-8177>, e-mail: veryricheek@hotmail.com

² ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2686-4654>, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA¹, Sergey E. ZHUKOVSKIY^{1,2}, Richik SENGUPTA¹

¹ RUDN University

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4595-6685>, e-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9916-8177>, e-mail: veryricheek@hotmail.com

² V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation,

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2686-4654>, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Для произвольного (q_1, q_2) -квазиметрического пространства доказано существование функции f , для которой f -неравенство треугольника точнее, чем (q_1, q_2) -неравенство треугольника. Показано, что найденная функция f является наименьшей функцией в классе вогнутых непрерывных функций g , для которых выполняется g -неравенство треугольника.

Ключевые слова: (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00106_а, 19-01-00080_а). Результаты §3 получены вторым автором при поддержке гранта РНФ (проект № 17-11-01168).

Для цитирования: Жуковская З. Т., Жуковский С. Е., Сенгупта Р. О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 33–38. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38

Abstract. For arbitrary (q_1, q_2) -quasimetric space, it is proved that there exists a function f , such that f -triangle inequality is more exact than any (q_1, q_2) -triangle inequality. It is shown that this function f is the least one in the set of all concave continuous functions g for which g -triangle inequality hold.

Keywords: (q_1, q_2) -quasimetric space

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00106_a, 19-01-00080_a). The results of Section 3 are due to the second author who was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01168).

For citation: Zhukovskaya Z. T., Zhukovskiy S. E., Sengupta R. O tochnikh neravenstvakh treugolnika v (q_1, q_2) -kvazimetricheskikh prostranstvakh [On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 33–38. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-33-38 (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение и постановка задачи

Пусть задано непустое множество X , функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ и числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Говорят, что для функции ρ выполняется (q_1, q_2) -неравенство треугольника, если

$$\rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X. \quad (1)$$

Функция ρ называется (q_1, q_2) -квазиметрикой, если она удовлетворяет аксиоме тождества

$$\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$$

и (q_1, q_2) -неравенству треугольника. Понятие (q_1, q_2) -квазиметрического пространства было введено и изучено в [1].

Пусть (X, ρ) — (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Обозначим через Q множество всех пар $(q'_1, q'_2) \in [1, +\infty) \times [1, +\infty)$, для которых выполняется (q'_1, q'_2) -неравенство треугольника, т. е.

$$Q := \{(q'_1, q'_2) \in [1, +\infty) \times [1, +\infty) : \rho(x, z) \leq q'_1 \rho(x, y) + q'_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X\}.$$

Очевидно, что множество Q непусто, выпукло и замкнуто. Кроме того,

$$Q + \mathbb{R}_+^2 = Q.$$

Если множество Q представимо в виде $Q = \{(q_1, q_2)\} + \mathbb{R}_+^2$, то неравенство в (1) является самым точным из всех (q'_1, q'_2) -неравенств треугольника, имеющих место для пространства (X, ρ) , т. е.

$$q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \leq q'_1 \rho(x, y) + q'_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall (q'_1, q'_2) \in Q.$$

В противном случае самого точного (q'_1, q'_2) -неравенства треугольника может не существовать. В связи с этим возникает естественный вопрос: существует ли функция $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq q'_1 \rho(x, y) + q'_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall (q'_1, q'_2) \in Q, \quad (2)$$

и какими свойствами такая функция может обладать? Ответ на этот вопрос дают приведенные ниже предложение 2 и теорема 1.

Напомним, что соотношение

$$\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X \quad (3)$$

называется f -неравенством треугольника. Если для функции ρ выполнено f -неравенство треугольника, и аксиома тождества, то она называется f -квазиметрикой, а пространство (X, ρ) называется f -квазиметрическим.

2. Уточнение (q_1, q_2) -неравенства треугольника

Положим

$$f(r_1, r_2) := \inf_{(q'_1, q'_2) \in Q} (r_1 q'_1 + r_2 q'_2), \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (4)$$

Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $c(\cdot, A) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ опорную функцию множества A , т. е.

$$c(r_1, r_2, A) = \sup_{(a_1, a_2) \in A} (r_1 a_1 + r_2 a_2), \quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Предложение 1. *Функция $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ корректно определена (т. е. при любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ инфимум в (4) существует), неотрицательна, непрерывна, вогнута и положительно однородна.*

Доказательство. При любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$, поскольку $Q \subset [1, +\infty) \times [1, +\infty)$ имеем

$$r_1 q'_1 + r_2 q'_2 \geq 0 \quad \forall (q'_1, q'_2) \in Q.$$

Следовательно, при любом $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ инфимум в (4) существует.

Покажем теперь, что функция f является вогнутой, положительно однородной и непрерывной. Имеем

$$f(r_1, r_2) \equiv \inf_{(q'_1, q'_2) \in Q} (r_1 q'_1 + r_2 q'_2) \equiv - \sup_{(q'_1, q'_2) \in -Q} (r_1 q'_1 + r_2 q'_2) \equiv -c(r_1, r_2, -Q). \quad (5)$$

Опорная функция положительно однородна, выпукла и замкнута (см., например, [2, §1.7]). Поэтому из (5) следует, что функция f положительно однородна и вогнута. Кроме того, $\mathbb{R}_+^2$ лежит в эффективном множестве выпуклой функции $c(\cdot, Q)$. Поэтому (см., например, [2, §1.5]) сужение $c(\cdot, Q)$ на $\mathbb{R}_+^2$ полунепрерывно сверху. Отсюда, из замкнутости $c(\cdot, Q)$ и соотношения (5) следует, что функция f непрерывна. $\square$

Предложение 2. Пусть функция f определена равенством (4). Тогда выполняется соотношение (2).

Доказательство. Возьмем произвольные точки $x, y, z \in X$ и число $\varepsilon > 0$. Положим $r_1 := \rho(x, y)$ и $r_2 := \rho(y, z)$. Выберем $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in Q$ такие, что $\bar{q}_1 r_1 + \bar{q}_2 r_2 < f(r_1, r_2) + \varepsilon$. Тогда

$$\rho(x, z) \leq \bar{q}_1 r_1 + \bar{q}_2 r_2 < f(r_1, r_2) + \varepsilon = f(\rho(x, y), \rho(y, z)) + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Кроме того, из (4) следует, что

$$f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq q'_1 \rho(x, y) + q'_2 \rho(y, z)$$

для любых $(q'_1, q'_2) \in Q$. Соотношение (2) доказано. $\square$

3. Сравнение неравенств треугольника

В связи с теоремой 1 представляется естественным найти наименьшую функцию $f : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что имеет место соотношение (2). Очевидно, что такой функцией является функция f , определенная равенством

$$f(r_1, r_2) = \sup\{\rho(x, z) : x, y, z \in X, \rho(x, y) = r_1, \rho(y, z) = r_2\},$$

если $\{x, y, z \in X : \rho(x, y) = r_1, \rho(y, z) = r_2\} \neq \emptyset$, и

$$f(r_1, r_2) = 0,$$

если $\{x, y, z \in X : \rho(x, y) = r_1, \rho(y, z) = r_2\} = \emptyset$.

Очевидно, что определенная таким образом функция f , как правило, меньше, чем функция f , определенная соотношением (4). Однако функция f , определенная соотношением (4), является наименьшей функцией, удовлетворяющих соотношению (3) $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X$, в классе вогнутых непрерывных положительно однородных функций. А именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция f определена равенством (4). Если некоторая функция $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ вогнута, положительно однородна, непрерывна и

$$\rho(x, z) \leq g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X, \quad (6)$$

то

$$f(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть функция $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ вогнута, положительно однородна, непрерывна и удовлетворяет соотношению (6). Предположим, что (7) нарушается. Тогда существуют точки $x, y, z \in X$ такие, что $f(\rho(x, y), \rho(y, z)) > g(\rho(x, y), \rho(y, z))$. Значит, существуют $\bar{r}_1 > 0$ и $\bar{r}_2 > 0$ такие, что

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2) > g(\bar{r}_1, \bar{r}_2). \quad (8)$$

Покажем, что существуют $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$g(r_1, r_2) \leq c_1 r_1 + c_2 r_2 \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad g(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = c_1 \bar{r}_1 + c_2 \bar{r}_2. \quad (9)$$

Поскольку функция g вогнута и непрерывна, то множество

$$A := \{(r_1, r_2, y) \in \mathbb{R}^3 : r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, y \leq g(r_1, r_2)\}$$

выпукло и замкнуто. Кроме того, точка $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, g(\bar{r}_1, \bar{r}_2))$ не лежит во внутренней части A . Поэтому из теоремы об отделимости (см., например, [2, §1.4]) следует, что существует ненулевой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \in \mathbb{R}^3$ такой, что

$$\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \beta g(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \geq \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \beta y \quad \forall (r_1, r_2, y) \in A. \quad (10)$$

Покажем, что $\beta > 0$. Предположим, что $\beta = 0$. Тогда из (10) следует, что точка $(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$ отделима от $\mathbb{R}_+^2$, что невозможно, так как $\bar{r}_1 > 0$ и $\bar{r}_2 > 0$. Предположим, что $\beta < 0$. Тогда, поскольку при фиксированном $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$ число y можно выбрать сколь угодно малым, то правая часть в (9) может быть сколь угодно большой, что невозможно. Итак, $\beta > 0$. Поэтому далее, не ограничивая общности, будем считать, что $\beta = 1$.

Умножим неравенство в (10) на произвольное $\varepsilon > 0$. В силу положительной однородности функции g имеем

$$\varepsilon(\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \beta g(\bar{r}_1, \bar{r}_2)) \geq \alpha_1 \varepsilon r_1 + \alpha_2 \varepsilon r_2 + y \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall y \leq g(\varepsilon r_1, \varepsilon r_2).$$

Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\varepsilon(\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + \beta g(\bar{r}_1, \bar{r}_2)) \geq \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + y \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall y \leq g(r_1, r_2).$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ имеем

$$0 \geq \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + y \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \forall y \leq g(r_1, r_2),$$

и, следовательно,

$$g(r_1, r_2) \leq -\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2 \quad \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (11)$$

Далее, подставляя $r_1 = \bar{r}_1/2$, $r_2 = \bar{r}_2/2$, $y = g(r_1, r_2)$ в неравенство (10), получаем

$$\alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2 + g(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \geq 0.$$

Отсюда и из (11) получаем, что $g(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = -\alpha_1 \bar{r}_1 - \alpha_2 \bar{r}_2$. Таким образом, (9) выполняется с $c_1 = -\alpha_1$ и $c_2 = -\alpha_2$.

Из (6) и (9) следует, что

$$\rho(x, z) \leq g(\rho(x, y), \rho(y, z)) \leq c_1 \rho(x, y) + c_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X.$$

Полагая $y = z$ и $x \neq y$ в этом неравенстве, получаем $c_1 \geq 1$; полагая $x = y$ и $y \neq z$ в этом неравенстве, получаем $c_2 \geq 1$. Следовательно, $(c_1, c_2) \in Q$. Поэтому из (4) и (10) следует, что

$$f(\bar{r}_1, \bar{r}_2) \leq c_1 \bar{r}_1 + c_2 \bar{r}_2 = g(\bar{r}_1, \bar{r}_2).$$

Это неравенство противоречит неравенству (8). Полученное противоречие доказывает неравенство (7). $\square$

Список литературы

- [1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *ДАН*, **469**:5 (2016), 527–531.
- [2] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014.

References

- [1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [2] A. V. Arutyunov, *Lectures on Convex and Set-Valued Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2014 (In Russian).

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Жуковский Сергей Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Сенгупта Ричик, аспирант, факультет физико-математических и естественных наук. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: veryricheek@hotmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковский Сергей Евгеньевич

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.

Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: zyxra2@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Sergey E. Zhukovskiy, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, Senior Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Richik Sengupta, Post-Graduate Student, Faculty of Physics, Mathematics and Natural Sciences. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: veryricheek@hotmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergey E. Zhukovskiy

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 24 January 2019

Reviewed 27 February 2019

Accepted for press 28 March 2019

© Жуковская Т.В., Плужникова Е.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-39-46

УДК 515.124.2, 515.126.4, 517.988.52

Множество регулярности многозначного отображения в пространстве с векторнозначной метрикой

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ¹,
Елена Александровна ПЛУЖНИКОВА²

¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

The set of regularity of a multivalued mapping in a space with a vector-valued metric

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA¹, Elena A. PLUZHNIKOVA²

¹ Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

² Tambov State University named after G.R. Derzhavin

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены многозначные отображения, действующие в пространствах с векторнозначной метрикой. Под векторнозначной метрикой понимается удовлетворяющее аксиомам «обычной метрики» отображение со значениями в конусе линейного нормированного пространства. Определено понятие множества регулярности многозначного отображения. Множество регулярности используется при исследовании включений в пространствах с векторнозначной метрикой.

Ключевые слова: многозначное отображение; пространство с векторнозначной метрикой; метрическая регулярность; липшицево отображение; включение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00553-а, № 17-41-680975-р_а, № 18-31-00227-мол_а).

Для цитирования: Жуковская Т. В., Плужникова Е. А. Множество метрической регулярности многозначного отображения в пространстве с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 39–46. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-39-46

Abstract. We consider multivalued mappings acting in spaces with a vector-valued metric. A vector-valued metric is understood as a mapping satisfying the axioms “of an ordinary metric” with values in the cone of a linear normed space. The concept of the regularity set of a multivalued mapping is defined. A set of regularity is used in the study of inclusions in spaces with a vector-valued metric.

Keywords: multi-valued mapping; space with vector-valued metric; metric regularity; Lipschitz mapping; inclusion

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00553-a, no. 17-41-680975-p_a, no. 18-31-00227-мол_a).

For citation: Zhukovskaia T. V., Pluzhnikova E. A. Mnozhestvo regulyarnosti mnogoznachnogo otobrazheniya v prostranstve s vektornoznachnoy metrikoy [The set of metric regularity of a multivalued mapping in a space with a vector-valued metric]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 39–46. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-39-46 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В связи с исследованиями систем операторных уравнений, краевых задач и задач управления в работе [1] был поставлен вопрос о применении понятий накрывания и метрической регулярности к отображениям, действующим в произведениях метрических пространств. Рассматривалась следующая задача. Пусть (X_i, ρ_{X_i}) , (Y_i, ρ_{Y_i}) ($i = \overline{1, n}$) — метрические пространства, и задано отображение $F = (F_1, \dots, F_n)$, компоненты которого $F_i : \prod_{j=1}^n X_j \rightarrow Y_i$ являются α_i -накрывающими по i -ому аргументу (как действующие из X_i в Y_i) и β_{ij} -липшицевыми по каждому из остальных аргументов (как действующие из X_j в Y_i , где $j \neq i$). Требуется исследовать систему уравнений $F_i(x_1, \dots, x_n) = y_i$, $i = \overline{1, n}$, с известной правой частью $y_i \in Y_i$. В [1]–[3] в терминах матриц коэффициентов α_i , β_{ij} были получены условия существования решения, его оценки, условия непрерывности решения от параметров. В [4], [5] рассматривались такие же системы, но в которых количество уравнений — m может не совпадать с числом неизвестных — n . В этих работах на произведениях метрических пространств $X = \prod_{j=1}^n X_j$, $Y = \prod_{i=1}^m Y_i$ была задана векторнозначная метрика (далее будем сокращенно называть ее $\mathbf{v}$ -метрикой, а соответствующее пространство — $\mathbf{v}$ -метрическим) $\bar{\rho}_X = (\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_n})$, $\bar{\rho}_Y = (\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_m})$ и определено понятие векторного накрывания. В отличие от коэффициента «обычного накрывания», являющегося положительным числом, коэффициент векторного накрывания — это $m \times n$ -матрица с неотрицательными компонентами. В [6], [7] аналогичный прием был использован для изучения задачи о точке совпадения векторных многозначных отображений, а понятие регулярности относительно $\mathbf{v}$ -метрик $\bar{\rho}_X$, $\bar{\rho}_Y$ было распространено на многозначные отображения.

В работах [8], [9] рассмотрены накрывающие свойства отображений в пространствах с $\mathbf{v}$ -метрикой, значения которой не векторы из $\mathbb{R}_+^n$, а элементы конуса некоторого нормированного пространства. В [8] предложено естественное распространение метрической регулярности, при котором коэффициентом регулярности становится линейный положительный оператор в соответствующих нормированных пространствах.

В [9] предложен способ, позволяющий определять по $\mathbf{v}$ -метрике некоторую «наилучшую» для задачи о точке совпадения метрику, что позволяет применять и к отображениям $\mathbf{v}$ -метрических пространств результаты о точках совпадения отображений «обычных» метрических пространств. В [10] введено понятие множества ($\mathbf{v}$ -метрической) регулярности, это понятие позволяет уточнить и ослабить условия существования точек совпадения и условия разрешимости уравнений некоторых видов в пространствах с $\mathbf{v}$ -метриками. В [11] получены условия существования точек совпадения многозначных отображений $\mathbf{v}$ -метрических пространств.

В настоящей статье предлагается определение множества регулярности для многозначных отображений $\mathbf{v}$ -метрических пространств. Это понятие используется для получения условий разрешимости общих операторных и конкретных функциональных включений.

1. Многозначные отображения $\mathbf{v}$ -метрических пространств

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$ и линейное нормированное пространство E , в котором выделен некоторый замкнутый выпуклый конус E_+ . Конус задает порядок в E , т. е. для любых элементов $r_1, r_2 \in E$ выполнено неравенство $r_1 \leq r_2$ тогда и только тогда, когда $r_2 - r_1 \in E_+$.

Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \rightarrow E_+$ будем называть $\mathbf{v}$ -метрикой (см., например, [12]), если оно удовлетворяет аксиомам «обычной» метрики, т. е. при любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ выполнены соотношения

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = 0 \Leftrightarrow x = u, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u, x), \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) \leq \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v, u).$$

Множество $\mathcal{X}$ с определенной на нем $\mathbf{v}$ -метрикой будем называть $\mathbf{v}$ -метрическим пространством и обозначать $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$.

На $\mathbf{v}$ -метрические пространства естественно переносятся многие определения и результаты анализа отображений метрических пространств (см. [11, с. 1975]). Приведем некоторые из таких понятий, используемых в данной статье.

Множество $B_{\mathcal{X}}(u, r) \doteq \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) \leq r\}$ называют замкнутым шаром с центром в точке $u \in \mathcal{X}$ радиуса $r \in E_+$. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ называют фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E < \varepsilon.$$

Говорим, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ сходится к элементу $x \in \mathcal{X}$, если выполнено $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \rightarrow 0$, т. е. $\|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x)\|_E \rightarrow 0$. Пространство $\mathcal{X}$ называется полным, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится. Множество $U \subset \mathcal{X}$ называется замкнутым, если для любой сходящейся последовательности его элементов $\{x_n\} \subset U$, $x_n \rightarrow x$ выполнено $x \in U$. Например, замкнутым в $\mathcal{X}$ множеством является замкнутый шар $B_{\mathcal{X}}(u, r)$.

Пусть E, M — некоторые линейные нормированные пространства, в которых заданы замкнутые выпуклые конусы $E_+ \subset E$, $M_+ \subset M$; $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — пространства с $\mathbf{v}$ -метриками $\mathcal{P}_\mathcal{X} : \mathcal{X}^2 \rightarrow E_+$, $\mathcal{P}_\mathcal{Y} : \mathcal{Y}^2 \rightarrow M_+$. Под многозначным отображением $F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ будем понимать отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in \mathcal{X}$ непустое замкнутое множество $F(x) \subset \mathcal{Y}$. Многозначное отображение F будем называть замкнутым в точке $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset \mathcal{X}$, $\{y_i\} \subset \mathcal{Y}$ таких, что $y_i \in F(x_i)$, $x_i \rightarrow x$, $y_i \rightarrow y$, выполнено включение $y \in F(x)$.

Отметим, что конусами E_+, M_+ порождается частичная, а не полная упорядоченность в E и M , поэтому для $\mathbf{v}$ -метрических пространств $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ не удастся определить аналоги расстояний от точки до множества и расстояний между множествами (в соответствующих определениях используются точные верхние и нижние границы множеств расстояний между точками, а для множеств $\mathbf{v}$ -расстояний точные границы могут не существовать). Это затрудняет перенесение на многозначные отображения $\mathbf{v}$ -метрических пространств некоторых важных свойств многозначных отображений «обычных» метрических пространств. Данное обстоятельство мы учитываем при определении следующих понятий.

В пространстве $\mathcal{L}(M, E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \rightarrow E$ определим множество $\mathcal{L}(M, E)_+ \doteq \{F : M \rightarrow E : F(M_+) \subset E_+\}$ положительных операторов. Это множество является замкнутым выпуклым конусом в $\mathcal{L}(M, E)$. Обозначим $I_M : M \rightarrow M$ — тождественный оператор. Заметим, $I_M \in \mathcal{L}(M, M)_+$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть задано отображение $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$. Множеством K -регулярности отображения $F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ будем называть множество

$$\mathfrak{M}_K(F) = \left\{ (x, y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \forall y \in F(x) \exists x' \in \mathcal{X} y' \in F(x'), \mathcal{P}_\mathcal{X}(x', x) \leq K\mathcal{P}_\mathcal{Y}(y', y) \right\}.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть задано отображение $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$. Множеством Q -липшицевости отображения $F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}$ будем называть множество

$$\mathfrak{L}_Q(F) = \left\{ (x, y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \forall x' \in \mathcal{X} y' \in F(x') \Rightarrow \exists y \in F(x) \mathcal{P}_\mathcal{Y}(y', y) \leq Q\mathcal{P}_\mathcal{X}(x', x) \right\}.$$

2. Условия разрешимости включения

Вопрос о существовании решений включений, как будет здесь показано, связан с задачей о влиянии липшицевых возмущений на множество регулярности многозначного отображения.

Пусть заданы отображения $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$, $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$, многозначное отображение $\Psi : \mathcal{X}^2 \rightrightarrows \mathcal{Y}$ и элемент $y' \in \mathcal{Y}$. Будем полагать, что при любом $x \in \mathcal{X}$ известно множество $\mathfrak{M}_K(\Psi(\cdot, x))$ K -регулярности отображения $\Psi(\cdot, x)$ и множество $\mathfrak{L}_Q(\Psi(x, \cdot))$ Q -липшицевости отображения $\Psi(x, \cdot)$. Определим отображение

$$F : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{Y}, \quad F(x) = \Psi(x, x)$$

и рассмотрим включение

$$y' \in F(x). \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. Пусть ν -метрическое пространство $\mathcal{X}$ является полным, пространство M — банаховым, и заданы элементы $x_0 \in X$, $y_0 \in \Psi(x_0, x_0)$. Пусть для спектрального радиуса оператора $QK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ имеет место оценка $sr(QK) < 1$. Определим

$$r = K(I_M - QK)^{-1}\mathcal{P}_Y(y', y_0)$$

и предположим, что для любого $x \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$ многозначное отображение F замкнуто в точке (x, y') и выполнены включения

$$(x, y') \in \mathfrak{M}_K(\Psi(\cdot, x)), \quad (2.2)$$

$$(x, y') \in \mathfrak{L}_Q(\Psi(x, \cdot)). \quad (2.3)$$

Тогда существует решение $x' \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$ включения (2.1).

Доказательство. Из предположения $sr(QK) < 1$ следует существование линейного ограниченного оператора $(I_M - QK)^{-1} : M \rightarrow M$ и его представление в виде (см., например, [13, с. 116])

$$(I_M - QK)^{-1} = I_M + QK + (QK)^2 + \dots$$

Так как $QK \in \mathcal{L}(M, M)_+$, то при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$(I_M - QK)^{-1} \geq I_M + QK + \dots + (QK)^n. \quad (2.4)$$

Построим итерационную последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ следующим образом.

В силу предположения (2.2) существует $x_1 \in \mathcal{X}$ такой, что

$$y' \in \Psi(x_1, x_0), \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leq K\mathcal{P}_Y(y_0, y').$$

Очевидно, $x_1 \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$. Определим $\Psi(x_1, x_1)$. Вследствие предположения (2.3) существует $y_1 \in \Psi(x_1, x_1)$, для которого выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_Y(y_1, y') \leq Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0).$$

Далее, снова в силу предположения (2.2) существует $x_2 \in \mathcal{X}$ такой, что

$$y' \in \Psi(x_2, x_1), \quad \mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leq K\mathcal{P}_Y(y_1, y').$$

Отсюда, учитывая предыдущие выкладки, получаем

$$\mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leq K\rho_Y(y_1, y') \leq KQ\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leq KQK\mathcal{P}_Y(y_0, y').$$

Так как

$$\mathcal{P}_X(x_2, x_0) \leq K\mathcal{P}_Y(y_0, y') + K\mathcal{P}_Y(y_1, y') \leq (K + KQK)\mathcal{P}_Y(y_0, y') \leq r,$$

выполнено $x_2 \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$. Вследствие предположения (2.3) существует $y_2 \in \Psi(x_2, x_2)$, для которого выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_Y(y_2, y') \leq Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_2, x_1).$$

Повторяя подобные рассуждения, на каждом n -м шаге ($n = 1, 2, \dots$) будем определять элементы $x_n \in \mathcal{X}$, $y_n \in \mathcal{Y}$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} y' &\in \Psi(x_n, x_{n-1}), \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_{n-1}) \leq K(QK)^{n-1}\mathcal{P}_Y(y_0, y'), \\ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) &\leq K(I_M + QK + \dots + (QK)^{n-1})\mathcal{P}_Y(y_0, y'); \\ y_n &\in \Psi(x_n, x_n), \quad \mathcal{P}_Y(y_n, y') \leq Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заметим, что согласно неравенству (2.4) выполнено $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) \leq r$, т. е. $x_n \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$.

Последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в $\mathcal{X}$. Действительно, при любом $j = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n+j}, x_n) \leq K(QK)^n(I_M + \dots + (QK)^{j-1})\mathcal{P}_Y(y_0, y') \leq K(QK)^n(I_M - QK)^{-1}\rho_Y(y_0, y').$$

Из оценки $sr(QK) < 1$ следует сходимость $\|(QK)^n\|_{\mathcal{L}(M, M)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n+j}, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Вследствие полноты $\mathcal{X}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится. Пусть $x_n \rightarrow x'$. Тогда $x' \in B_{\mathcal{X}}(x_0, r)$. Для последовательности элементов $y_n \in \Psi(x_n, x_n)$ в силу неравенства (2.5) получаем $y_n \rightarrow y'$. А так как отображение F замкнуто в точке (x', y') , элемент x' удовлетворяет включению (2.1). $\square$

Список литературы

- [1] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференц. уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455.
- [2] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями”, *Автомат. и телемех.*, 2015, № 1, 31–56.
- [3] В. С. Трещёв, “Корректная разрешимость систем операторных уравнений с векторными накрывающими отображениями”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **20**:5 (2015), 1487–1489.
- [4] Е. С. Жуковский, “О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:2 (2016), 297–311.
- [5] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения векторных отображений”, *Изв. вузов. Матем.*, 2016, № 10, 14–28.
- [6] Е. С. Жуковский, “О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 344–362.
- [7] М. В. Борзова, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, “О накрывании многозначных отображений, действующих в произведениях метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **21**:2 (2016), 363–370.
- [8] Е. С. Жуковский, “О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **21**:2 (2016), 375–379.

- [9] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, “Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам”, *Дифференц. уравнения*, **53**:11 (2017), 1473–1481.
- [10] Е. А. Плужникова, Т. В. Жуковская, Ю. А. Моисеев, “О множествах метрической регулярности отображений в пространствах с векторнозначной метрикой”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 547–554.
- [11] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Многозначные накрывающие отображения пространств с векторнозначной метрикой в исследовании функциональных включений”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **21**:6 (2016), 1974–1982.
- [12] Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко, “О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**:1 (2018), 93–105.
- [13] *Функциональный анализ*, СМБ, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.

References

- [1] E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.
- [2] E. S. Zhukovskii, E. A. Pluzhnikova, “On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations”, *Autom. Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.
- [3] V. S. Treshchev, “Well-posed solvability of systems of operator equations with vector covering mappings”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **20**:5 (2015), 1487–1489 (In Russian).
- [4] E. S. Zhukovskii, “Perturbations of vectorial coverings and systems of equations in metric spaces”, *Sibirsk. Mat. Zh.*, **57**:2 (2016), 230–241.
- [5] E. S. Zhukovskiy, “On coincidence points for vector mappings”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2016, № 10, 10–22.
- [6] E. S. Zhukovskii, “On coincidence points of multivalued vector mappings of metric spaces”, *Mathematical Notes*, **100**:3 (2016), 363–379.
- [7] M. V. Borzova, T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, “On covering of set-valued mappings in cartesian products of metric spaces”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:2 (2016), 363–370 (In Russian).
- [8] E. S. Zhukovskiy, “On perturbations of covering mappings in spaces with vector-valued metrics”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:2 (2016), 375–379 (In Russian).
- [9] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points of mappings in vector metric spaces with applications to differential equations and control systems”, *Differential Equations*, **53**:11 (2017), 1440–1448.
- [10] E. A. Pluzhnikova, T. V. Zhukovskaia, Yu. A. Moiseev, “On sets of metric regularity of mappings in spaces with vector-valued metric”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 547–554 (In Russian).
- [11] E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Multi-valued covering maps spaces with vector-valued metrics in research of functional inclusions”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:6 (2016), 1974–1982 (In Russian).
- [12] E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenکو, “On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric”, *Proceedings of Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*, **24**:1 (2018), 93–105 (In Russian).
- [13] *Functional Analysis*, SMB, ed. S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972 (In Russian).

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Плужникова Елена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Плужникова Елена Александровна
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.
Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Elena A. Pluzhnikova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation. E-mail: pluznikova_elena@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2008-3275>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Elena A. Pluzhnikova
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Received 16 January 2019
Reviewed 27 February 2019
Accepted for press 28 March 2019

© Ибрагимов Н.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59

УДК 517.956.23

Построение фундаментального решения для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя

Наиля Анасовна ИБРАГИМОВА

ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет»

420066, Российская Федерация, г. Казань, ул. Красносельская, 51

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1915-7986>, e-mail: NAI.liya@yandex.ru

Construction of a fundamental solution for a one degenerating elliptic equation with a Bessel operator

Nailya A. IBRAGIMOVA

Kazan State Energy University

51 Krasnoselskaya St., Kazan 420066, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1915-7986>, e-mail: NAI.liya@yandex.ru

Аннотация. Вырождающиеся эллиптические уравнения, содержащие оператор Бесселя, представляют собой математические модели осевой и многоосевой симметрии самых разнообразных процессов и явлений окружающего мира. Сложности в исследовании таких уравнений связаны, в том числе, с наличием особенностей в коэффициентах. В данной статье рассмотрено p -мерное, $p \geq 3$, вырождающееся эллиптическое уравнение с отрицательным параметром, в котором по одной из переменных действует оператор Бесселя. Построено фундаментальное решение этого уравнения и исследованы его свойства, в частности, поведение на бесконечности и в точках координатных плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$. Полученные результаты найдут применение при построении решений краевых задач, так как на основе фундаментального решения можно подобрать потенциал, с помощью которого сингулярная задача сводится к регулярной системе интегральных уравнений.

Ключевые слова: вырождающееся эллиптическое уравнение с оператором Бесселя; вырождающееся B -эллиптическое уравнение; фундаментальное решение

Для цитирования: Ибрагимова Н. А. Построение фундаментального решения для одного вырождающегося эллиптического уравнения с оператором Бесселя // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 47–59. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59

Abstract. Degenerating elliptic equations containing the Bessel operator are mathematical models of axial and multi-axial symmetry of a wide variety of processes and phenomena of the surrounding world. Difficulties in the study of such equations are associated, inter alia, with the presence of singularities in the coefficients. This article considers a p -dimensional, $p \geq 3$, degenerating elliptic equation with a negative parameter, in which the Bessel opera-

tor acts on one of the variables. A fundamental solution of this equation is constructed and its properties are investigated, in particular, the behavior at infinity and at points of the coordinate planes $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$. The results obtained will find application in the construction of solutions of boundary value problems, since on the basis of a fundamental solution, it is possible to choose the potential with which the singular problem is reduced to a regular system of integral equations.

Keywords: degenerating elliptic equation with a Bessel operator; degenerating B -elliptic equation; fundamental solution

For citation: Ibragimova N. A. Postroenie fundamental'nogo resheniya dlya odnogo vyrozhdaiushchegosya ellipticheskogo uravneniya s operatorom Besselya [Construction of a fundamental solution for a one degenerating elliptic equation with a Bessel operator]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 47–59. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-47-59 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В последние годы уделяется большое внимание изучению неклассических уравнений в частных производных. С одной стороны, такие уравнения мало изучены, а с другой стороны, все чаще обнаруживаются их приложения к различным задачам механики, физики и техники.

В данной статье рассматривается неклассическое вырождающееся эллиптическое уравнение относительно функции $u(x_1, \dots, x_p)$, $p \geq 3$, с отрицательным параметром

$$M_B[u] \stackrel{\text{def}}{=} x_p^m (\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \quad (1)$$

где по одной из переменных действует оператор Бесселя $B_{x_{p-1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \frac{k}{x_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$,

$\Delta_{x'} = \sum_{l=1}^{p-2} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $\lambda \in \mathbb{R}$, $m > 0$ — некоторые постоянные. Эллиптические уравнения, по одной или нескольким переменным которых действует оператор Бесселя

$$B_{x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} + \frac{k}{x_l} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

были названы И. А. Киприяновым в [1] B -эллиптическими.

Построение фундаментальных решений для новых классов дифференциальных уравнений весьма трудная, но актуальная задача. Фундаментальные результаты в этом направлении для B -эллиптических уравнений принадлежат И. А. Киприянову [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались В. В. Катраховым [2], А. Ю. Сазоновым [3]. Исследование сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Бесселя было продолжено в работах Л. Н. Ляхова [4], [5]. Построением фундаментальных решений для некоторых вырождающихся B -эллиптических уравнений,

а также исследованием краевых задач для этих уравнений занимались Ф. Г. Мухлисов [6], А. Ш. Хисматуллин [7], Э. В. Чеботарева [8], И. Б. Гарипов, Р. М. Мавлявиев [9] и др.

Вопросы постановки корректных краевых задач и разработки конструктивных методов их решения для уравнения (1) не изучены, так как применение метода потенциала для решения краевых задач требует знания фундаментального решения, которое, по нашим сведениям, еще не построено.

1. Основные результаты

Пусть $\mathbb{E}_p$ — p -мерное евклидово пространство, $\mathbb{E}_p^{++} = \{x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{E}_p \mid x_{p-1} > 0, x_p > 0\}$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно, $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \overline{D}$. Для точек евклидова пространства введем обозначения: $x'' = (x_1, \dots, x_{p-2})$, $x' = (x_1, \dots, x_{p-1}) = (x'', x_{p-1})$, $x = (x_1, \dots, x_p) = (x', x_p) = (x'', x_{p-1}, x_p)$.

Обозначим через $C_{0,B^{p-1}}^\infty(\overline{\mathbb{E}_p^{++}})$ множество функций, определенных на $\overline{\mathbb{E}_p^{++}}$, бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых, финитных в $\overline{\mathbb{E}_p^{++}}$ и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_{p-1}} = o(1)$ при $x_{p-1} \rightarrow 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $Z(x, x_0)$ называется фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in \mathbb{E}_p^{++}$, если для некоторого $k > 0$ и для любой функции $\varphi \in C_{0,B^{p-1}}^\infty(\overline{\mathbb{E}_p^{++}})$ такой, что $x_0 \in \text{Supp } \varphi$, выполняется

$$\int_{\mathbb{E}_p^{++}} Z(x, x_0) M_B[\varphi(x)] x_{p-1}^k dx = -\varphi(x_0). \quad (2)$$

Приступим к построению фундаментального решения уравнения (1). С помощью замены переменных по формулам

$$\xi_l = x_l, \quad l = \overline{1, p-1}, \quad \xi_p = (1 - \gamma) x_p^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3)$$

уравнение (1) приведем к B -эллиптическому уравнению с отрицательным параметром

$$\Delta_{\xi''} u + B_{\xi_{p-1}} u + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p^2} + \frac{\gamma}{\xi_p} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} - \lambda^2 u = 0, \quad (4)$$

где $\xi'' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-2})$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$. Ясно, что $0 < \gamma < 1$ при $m > 0$.

Ищем решение уравнения (4) в виде

$$u(\xi) = v(r),$$

где $r = \sqrt{\sum_{l=1}^p \xi_l^2}$. Относительно v получаем уравнение

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{p+k+\gamma-1}{r} \frac{dv}{dr} - \lambda^2 v = 0. \quad (5)$$

С помощью замены переменных по формулам

$$v(r) = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{-\nu} W(t), \quad r = \frac{t}{\lambda}, \quad \nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2} \quad (6)$$

уравнение (5) сводим к уравнению Бесселя от чисто мнимого аргумента

$$t^2 \frac{\partial^2 W(t)}{\partial t^2} + t \frac{\partial W(t)}{\partial t} - (t^2 + \nu^2) W(t) = 0. \quad (7)$$

Известно [10], что частными решениями уравнения (7) являются функция Бесселя от чисто мнимого аргумента $I_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$ и функция Макдональда

$$K_\nu(t) = \frac{\pi}{2} \frac{I_\nu(t) - I_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi}. \quad (8)$$

Возвращаясь в (8) к переменной r , с учетом формул (6), получим частное решение уравнения (5)

$$v(r) = \beta r^{-\nu} K_\nu(\lambda r), \quad (9)$$

где β — некоторая постоянная, подлежащая определению. Из асимптотического представления функции Макдональда на бесконечности следует, что для функции (9) при $r \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$v(r) = O(e^{-r}). \quad (10)$$

Из разложения функции Макдональда в степенной ряд следует, что функция v может быть представлена в виде

$$v(r) = \frac{\beta\Gamma(\nu)}{\lambda^\nu 2^{1-\nu}} r^{-2\nu} + \psi(r), \quad (11)$$

где $\psi(r)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$. Функция (11) является решением уравнения (4), которое имеет в начале координат степенную особенность вида $r^{-2\nu}$.

Для получения решения уравнения (4) с особенностью в точке $(\xi''_0, 0, \xi_{0p}) \in \overline{\mathbb{E}}_p^{++}$ применим к функции (11) оператор обобщенного сдвига [11]

$$\begin{aligned} Z(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p; \xi''_0, 0, \xi_{0p}) &= \frac{\beta\Gamma(\nu)C_\gamma}{\lambda^\nu 2^{1-\nu}} \int_0^\pi \left(|\xi'' - \xi''_0|^2 + \xi_{p-1}^2 + \right. \\ &\left. + \xi_p^2 + \xi_{0p}^2 - 2\xi_p \xi_{0p} \cos \varphi \right)^{-\nu} \sin^{\gamma-1} \varphi d\varphi + \psi^*(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p; \xi''_0, 0, \xi_{0p}), \end{aligned}$$

где $C_\gamma = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\gamma}{2})}$, $\psi^*(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p; \xi_0'', 0, \xi_{0p})$ — регулярная в точке $(\xi_0'', 0, \xi_{0p})$ функция. Имеем

$$Z(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p; \xi_0'', 0, \xi_{0p}) = \frac{\beta C_\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{p+k-2}{2})}{2^{2-\nu} \lambda^\nu} (\xi_p \xi_{0p})^{-\frac{\gamma}{2}} \times \\ \times r_{\xi_0}^{2-p-k} + g_2(\xi'', \xi_{p-1}, \xi_p; \xi_0'', 0, \xi_{0p}), \quad (12)$$

где $r_{\xi_0}^2 = |\xi'' - \xi_0''|^2 + \xi_{p-1}^2 + (\xi_p - \xi_{0p})^2$. Возвращаясь в (12) к переменной x , с учетом формул (3), получим

$$Z(x'', x_{p-1}, x_p; x_0'', 0, x_{0p}) = \frac{\beta C_\gamma (m+2)^\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{p+k-2}{2})}{2^{2-\nu+\gamma} \lambda^\nu} \times \\ \times (x_p x_{0p})^{-\frac{m}{4}} \rho^{2-p-k} + g_2(x'', x_{p-1}, x_p; x_0'', 0, x_{0p}), \quad (13)$$

где $\rho = \sqrt{|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2}$. Отсюда следует, что решение (13) уравнения (1) имеет в точках координатной плоскости $x_{p-1} = 0$ степенную особенность вида ρ^{2-p-k} .

Применим к функции (13) оператор обобщенного сдвига

$$Z(x, x_0) = \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{2}) \Gamma(\frac{p+k-2}{2})}{2^{2-\nu+\gamma} \lambda^\nu (x_p x_{0p})^{\frac{m}{4}}} \int_0^\pi \left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - \right. \\ \left. - 2x_{p-1}x_{0p-1} \cos \varphi + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 \right]^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi + g_2^*(x, x_0), \quad (14)$$

где $C_k = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k}{2})}$, а $g_2^*(x, x_0)$ — регулярная в точке x_0 функция.

Предложение 1. $Z(x, x_0)$ допускает при $\rho_{xx_0} \rightarrow 0$ оценку

$$Z(x, x_0) = O(\rho_{xx_0}^{2-p}),$$

$$\text{где } \rho_{xx_0}^2 = |x' - x_0'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим в (14) подынтегральную функцию

$$\left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1} \cos \varphi + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 \right]^{\frac{2-p-k}{2}} = \\ = \left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1} + 2x_{p-1}x_{0p-1}(1 - \cos \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 \right]^{\frac{2-p-k}{2}} = \left(\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{0p-1} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2-p-k}{2}}.$$

Тогда интеграл в (14) запишется в виде

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{0p-1}^2 - 2x_{p-1}x_{0p-1} \cos \varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{(m+2)^2} \left(x_p^{\frac{m+2}{2}} - x_{0p}^{\frac{m+2}{2}} \right)^2 \right]^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi = \\
&= \int_0^\pi \left(\rho_{xx_0}^2 + 4x_{p-1}x_{0p-1} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi = \\
&= (x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p-k}{2}} \int_0^\pi \left(\omega^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2-p-k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi, \tag{15}
\end{aligned}$$

где $\omega^2 = \frac{\rho_{xx_0}^2}{x_{p-1}x_{0p-1}}$. Разность между интегралом (15) и интегралом

$$(x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p-k}{2}} \int_0^\pi (\omega^2 + \varphi^2)^{\frac{2-p-k}{2}} \varphi^{k-1} d\varphi$$

является регулярной функцией в $\mathbb{E}_p^{++}$. Обозначим ее через $g_3(x, x_0)$. Тогда I можно представить в виде

$$I = (x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p-k}{2}} \int_0^\pi (\omega^2 + \varphi^2)^{\frac{2-p-k}{2}} \varphi^{k-1} d\varphi + g_3(x, x_0). \tag{16}$$

Заменой $\varphi = \omega t$ интеграл (16) приводится к виду

$$\begin{aligned}
I &= (x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p-k}{2}} \omega^{2-p} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) = \\
&= (x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p-k}{2}} \frac{\rho_{xx_0}^{2-p}}{(x_{p-1}x_{0p-1})^{\frac{2-p}{2}}} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) = \\
&= (x_{p-1}x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt + g_3(x, x_0) = \\
&= (x_{p-1}x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} [I_1 - I_2] + g_3(x, x_0),
\end{aligned}$$

где $I_1 = \int_0^\infty (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt$, $I_2 = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^\infty (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} t^{k-1} dt$.

С помощью известной формулы (см. [12]):

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{(p+qx^\nu)^{n+1}} = \frac{1}{\nu p^{n+1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \Gamma\left(n+1-\frac{\mu}{\nu}\right)}{\Gamma(n+1)}, 0 < \frac{\mu}{\nu} < n+1, \quad (17)$$

интеграл I_1 запишется в виде

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)}.$$

Разлагая подынтегральную функцию интеграла I_2 в степенной ряд, получим

$$\begin{aligned} t^{k-1} (1+t^2)^{\frac{2-p-k}{2}} &= t^{1-p} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{2-p-k}{2}} = t^{1-p} \left[1 + \frac{2-p-k}{2} t^{-2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{2-p-k}{2}(\frac{2-p-k}{2}-1)}{2!} t^{-4} - \frac{\frac{2-p-k}{2}(\frac{2-p-k}{2}-1)(\frac{2-p-k}{2}-2)}{3!} t^{-6} + \dots\right] = \\ &= t^{1-p} + \frac{2-p-k}{2} t^{-(p+1)} - \frac{\frac{2-p-k}{2} \frac{p+k}{2}}{2!} t^{-(p+3)} + \frac{\frac{2-p-k}{2} \frac{p+k}{2} \frac{p+k+2}{2}}{3!} t^{-(p+5)} + \dots \end{aligned}$$

Этот ряд сходится равномерно в промежутке $\left[\frac{\pi}{\omega}, \infty\right)$, поэтому его можно интегрировать в этом промежутке почленно. В результате получим

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+k-2}{2}\right)} (x_{p-1} x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + g_4(x, x_0).$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$\begin{aligned} Z(x, x_0) &= \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^\nu} \times \\ &\quad \times (x_p x_{0p})^{-\frac{m}{4}} (x_{p-1} x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + Z^*(x, x_0), \quad (18) \end{aligned}$$

где $Z^*(x, x_0)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$. $\square$

Докажем, что при определенном значении постоянной β функция (14) удовлетворяет равенству (2) и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $x_0 \in \mathbb{E}_p^{++}$. Для этого получим формулы Грина для оператора M_B .

Обозначим через $C_{B^l}^k(D)$ множество функций ψ класса $C^k(D)$ таких, что $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_l} = o(1)$ при $x_l \rightarrow 0$, $l = \overline{1, p}$.

Пусть функции $u, v \in C_{B^p}^2(D) \cap C_{B^{p-1}}^2(D) \cap C^1(\overline{D})$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что имеет место тождество

$$v M_B[u] x_{p-1}^k + \left(x_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k =$$

$$= \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(x_{p-1}^k x_p^m v \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_{p-1}^k v \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) - \lambda^2 x_{p-1}^k x_p^m uv.$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\begin{aligned} \int_D v M_B[u] x_{p-1}^k dx + \int_D \left(x_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx = \\ = \int_{\Gamma} v A[u] \xi_{p-1}^k d\Gamma - \lambda^2 \int_D uv x_p^m x_{p-1}^k dx, \end{aligned} \quad (19)$$

где $A = \xi_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \cos(n, \xi_l) \frac{\partial}{\partial \xi_l} + \cos(n, \xi_p) \frac{\partial}{\partial \xi_p}$ — конормальная производная, n — единичный вектор внешней нормали к границе. Формула (19) называется первой формулой Грина для оператора M_B .

Меняя в формуле (19) местами u и v , получим

$$\begin{aligned} \int_D u M_B[v] x_{p-1}^k dx + \int_D \left(x_p^m \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{\partial v}{\partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx = \\ = \int_{\Gamma} u A[v] \xi_{p-1}^k d\Gamma - \lambda^2 \int_D uv x_p^m x_{p-1}^k dx. \end{aligned}$$

Вычитая это равенство из (19), получаем вторую формулу Грина для оператора M_B :

$$\int_D [v M_B[u] - u M_B[v]] x_{p-1}^k dx = \int_{\Gamma} [v A[u] - u A[v]] \xi_{p-1}^k d\Gamma. \quad (20)$$

Пусть $\varphi \in C_{0, B^{p-1}}^\infty(\overline{\mathbb{E}_p^{++}})$, $x_0 \in \text{Supp } \varphi$ — фиксированная точка, $S_{x_0\varepsilon}$ — сфера с центром в точке x_0 и радиуса ε такая, что

$$S_{x_0\varepsilon} \subset \mathbb{E}_p^{++}, \quad S_R^+ = \{x \in \mathbb{E}_p^{++} : |x| = R, x_{p-1} > 0, x_p > 0\}$$

— часть сферы, принадлежащая $\mathbb{E}_p^{++}$ с центром в начале координат, такая, что $\text{Supp } \varphi \subset Q_R^+$, где Q_R^+ — часть шара в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная S_R^+ . Обозначим через $Q_{\varepsilon R}^+$ область, ограниченную S_R^+ , $S_{x_0\varepsilon}$ и частями плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$.

Применяя к функциям $Z(x, x_0)$ и $\varphi(x)$ вторую формулу Грина (20) в области $Q_{\varepsilon R}^+$, с учетом того, что $M_B[Z(x, x_0)] = 0$ в $Q_{\varepsilon R}^+$, получим

$$\int_{Q_{\varepsilon R}^+} Z(x, x_0) M_B[\varphi(x)] x_{p-1}^k dx = I'_\varepsilon + I''_\varepsilon, \quad (21)$$

где $I'_\varepsilon = - \int_{S_{x_0\varepsilon}} Z(x, x_0) A[\varphi(x)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$, $I''_\varepsilon = \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) A[Z(x, x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$, A — внешняя конормаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Нетрудно доказать, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I'_\varepsilon = 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла I''_ε . Воспользуемся формулой (18) для значения $Z(x, x_0)$. Получим

$$I''_{\varepsilon} = \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) A[Z(x, x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon} = (2-p) \frac{\beta C_{\gamma} C_k (m+2)^{\gamma}}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^{\nu}} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{x_{0p}^{\frac{m}{4}} x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}} \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) \rho_{xx_0}^{1-p} A[\rho_{xx_0}] x_p^{-\frac{m}{4}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_0\varepsilon} + I_{\varepsilon}^*, \quad (22)$$

где $I_\varepsilon^* = \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) A[Z^*(x, x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}$. Нетрудно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^* = 0. \quad (23)$$

Найдем предел $\overset{\circ}{I}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграла

$$\check{I}_\varepsilon = (2-p) \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}} x_{0p-1}^{\frac{k}{2}}} \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) \rho_{xx_0}^{1-p} A[\rho_{xx_0}] x_p^{-\frac{m}{4}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_0\varepsilon}.$$

Вычисляя конормальную производную $A[\rho_{xx_0}]$ и пользуясь формулой Лагранжа, приведем этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} \check{I}_\varepsilon &= (2-p) \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}} x_{0p-1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon} \times \\ &\times \int_{S_{x_{0\varepsilon}}} \varphi(x) \frac{x_p^{\frac{3m}{4}} \left[\sum_{l=1}^{p-1} (x_l - x_{0l})^2 + \left(\frac{x_{0p} + \theta(x_p - x_{0p})}{x_p} \right)^{\frac{m}{2}} (x_p - x_{0p})^2 \right]}{\left[\sum_{l=1}^{p-1} (x_l - x_{0l})^2 + (x_{0p} + \theta(x_p - x_{0p}))^m (x_p - x_{0p})^2 \right]^{\frac{p}{2}}} x_{p-1}^{\frac{k}{2}} dS_{x_{0\varepsilon}}, \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$. Переходя в этом интеграле к обобщенной сферической системе координат

[illegible]

($0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$; $0 \leq \theta_\mu < \pi$, $\mu = 2, \dots, p-1$) и учитывая то, что элемент поверхности сферы представляется в виде $dS_{x_{0\varepsilon}} = \varepsilon^{p-1} \sin \theta_2 \dots \sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_1 \dots d\theta_{p-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \check{I}_\varepsilon &= (2-p) \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^\nu x_{0p}^{\frac{m}{4}} x_{0p-1}^{\frac{k}{2}} \varepsilon} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{p-3} \theta_{p-2} d\theta_{p-2} \times \\ &\times \int_0^\pi \varphi(x_{01} + \varepsilon \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{p-1}, \dots, x_{0p} + \varepsilon \cos \theta_{p-1}) (x_{0p} + \varepsilon \cos \theta_{p-1})^{\frac{3m}{4}} \times \\ &\times \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \theta_{p-1} + \left(\frac{x_{0p} + \theta \varepsilon \cos \theta_{p-1}}{x_{0p} + \varepsilon \cos \theta_{p-1}}\right)^{\frac{m}{2}} \varepsilon^2 \cos^2 \theta_{p-1}}{\left[\varepsilon^2 \sin^2 \theta_{p-1} + (x_{0p} + \theta \varepsilon \cos \theta_{p-1})^m \varepsilon^2 \cos^2 \theta_{p-1}\right]^{\frac{p}{2}}} \times \\ &\times (x_{0p-1} + \varepsilon \cos \theta_{p-2} \sin \theta_{p-1})^{\frac{k}{2}} \varepsilon^{p-1} \sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_{p-1}. \end{aligned}$$

Сокращая на ε^{p+1} и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \check{I} &= (2-p) \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{2^{3-\nu+\gamma} \lambda^\nu} x_{0p}^{\frac{m}{2}} \varphi(x_0) \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^\pi \sin^{p-3} \theta_{p-2} d\theta_{p-2} \int_0^\pi \frac{\sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_{p-1}}{(\sin^2 \theta_{p-1} + x_{0p}^m \cos^2 \theta_{p-1})^{\frac{p}{2}}} = \\ &= (2-p) \frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right) \pi^{\frac{p-1}{2}}}{2^{2-\nu+\gamma} \lambda^\nu \Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} \times \\ &\times x_{0p}^{\frac{m}{2}} \varphi(x_0) \int_0^\pi \frac{\sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_{p-1}}{(\sin^2 \theta_{p-1} + x_{0p}^m \cos^2 \theta_{p-1})^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned} \tag{24}$$

Преобразуем интеграл в (24)

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \frac{\sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_{p-1}}{(\sin^2 \theta_{p-1} + x_{0p}^m \cos^2 \theta_{p-1})^{\frac{p}{2}}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{p-2} \theta_{p-1} d\theta_{p-1}}{(\sin^2 \theta_{p-1} + x_{0p}^m \cos^2 \theta_{p-1})^{\frac{p}{2}}} = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^{p-2} \theta_{p-1} d(\operatorname{tg} \theta_{p-1})}{(\operatorname{tg}^2 \theta_{p-1} + x_{0p}^m)^{\frac{p}{2}}} = 2 x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \operatorname{tg} \theta_{p-1}\right)^{p-2} d\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \operatorname{tg} \theta_{p-1}\right)}{\left(\left(x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \operatorname{tg} \theta_{p-1}\right)^2 + 1\right)^{\frac{p}{2}}}. \end{aligned}$$

Используя замену $x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \operatorname{tg} \theta_{p-1} = t$ и учитывая, что $t = 0$ при $\theta_{p-1} = 0$, $t = \infty$ при $\theta_{p-1} = \frac{\pi}{2}$, имеем $J = 2x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \int_0^\infty \frac{t^{p-2} dt}{(1+t^2)^{\frac{p}{2}}}$. Отсюда, на основании формулы (17), получаем

$$J = x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = x_{0p}^{-\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\frac{p-2}{2} \Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}.$$

Подставляя полученное выражение в (24), определяем

$$\check{I} = -\frac{\beta C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \pi^{\frac{p}{2}}}{2^{1-\nu+\gamma} \lambda^\nu} \varphi(x_0). \quad (25)$$

Находим нормирующую константу

$$\beta = \frac{2^{1-\nu+\gamma} \lambda^\nu}{C_\gamma C_k (m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \pi^{\frac{p}{2}}} = \frac{2^{1-\nu+\gamma} \lambda^\nu}{(m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \pi^{\frac{p-2}{2}}}. \quad (26)$$

Итак, из (22) получаем следующее предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_{x_0\varepsilon}} \varphi(x) A[Z(x, x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon} = -\varphi(x_0).$$

Следовательно, переходя к пределу в (21) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, с учетом (26), соотношений (22), (23), (25) и финитности функции $\varphi(x)$, получаем (2).

Таким образом, фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в точке x_0 при малых значениях ρ_{xx_0} представляется в виде

$$Z(x, x_0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{p}{2}}} (x_p x_{0p})^{-\frac{m}{4}} (x_{p-1} x_{0p-1})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + Z^*(x, x_0),$$

где $Z^*(x, x_0)$ — регулярная функция в $\mathbb{E}_p^{++}$.

Также нетрудно доказать, что для фундаментального решения $Z(x, \xi)$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\frac{\partial Z(x, \xi)}{\partial x_p} = o(1) \quad \text{при} \quad x_p \rightarrow 0, \quad \frac{\partial Z(x, \xi)}{\partial \xi_p} = o(1) \quad \text{при} \quad \xi_p \rightarrow 0.$$

Из формулы (10) следует, что на бесконечности имеет место асимптотическая формула $Z(x, x_0) = O(e^{-\rho_0})$, где $\rho_0^2 = |x'|^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}$.

Предложение 2. $Z(x, x_0)$ имеет в точках координатной плоскости $x_p = 0$ степенную особенность вида $\rho_{x\tilde{x}_0}^{2-p-\gamma}$, где $\rho_{x\tilde{x}_0}^2 = |x' - x'_0|^2 + \frac{4}{(m+2)^2} x_p^{m+2}$, $\tilde{x}_0 = (x'_0, 0)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 1. $\square$

Полученные в работе результаты в дальнейшем планируется использовать для решения краевых задач.

Список литературы

- [1] И. А. Киприянов, В. И. Кононенко, “Фундаментальные решения B -эллиптических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **3**:1 (1967), 114–129.
- [2] В. В. Катрахов, “Общие краевые задачи для одного класса сингулярных и вырождающихся эллиптических уравнений”, *Математический сборник*, **112**:3 (1980), 354–379.
- [3] А. Ю. Сазонов, Л. Н. Суркова, “О единственности классического решения задачи Дирихле для B -эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **12**:4 (2007), 523–524.
- [4] Л. Н. Ляхов, “Фундаментальные решения сингулярных дифференциальных уравнений с D_B -оператором Бесселя”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2012, 148–160.
- [5] Л. Н. Ляхов, А. В. Рыжков, “О решениях B -полигармонического уравнения”, *Дифференциальные уравнения*, **36**:10 (2000), 1365–1368.
- [6] Ф. Г. Мухлисов, “О существовании и единственности решения некоторых уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя”, *Изв. вузов. Матем.*, 1984, № 11, 63–66.
- [7] А. Ш. Хисматуллин, “Решение краевых задач для одного вырождающегося B -эллиптического уравнения 2-го рода методом потенциалов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2007, № 1, 63–75.
- [8] Э. В. Чеботарева, “Исследование краевых задач для сингулярного B -эллиптического уравнения методом потенциалов”, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 5, 88–90.
- [9] I. B. Garipov, R. M. Mavlyaviev, “Fundamental solution of a multidimensional axisymmetric equation”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **63**:9 (2018), 1290–1305.
- [10] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*. Т. 1, И.Л., М., 1949, 798 с.
- [11] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6**:2(42) (1951), 102–143.
- [12] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971, 1108 с.

References

- [1] I. A. Kipriyanov, V. I. Kononenko, “Fundamental solutions of B -elliptic equations”, *Differ. Equ.*, **3**:1 (1967), 114–129 (In Russian).
- [2] V. V. Katrakhov, “General boundary value problems for a class of singular and degenerate elliptic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **40**:3 (1981), 325–347.
- [3] A. Yu. Sazonov, L. N. Surkova, “On the uniqueness of the classical solution of the Dirichlet problem for a B -elliptic equation with constant coefficients”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **12**:4 (2007), 523–524 (In Russian).
- [4] L. N. Lyakhov, “Fundamental solutions of singular differential equations with a bessel D_B -operator”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278** (2012), 139–151.
- [5] L. N. Lyakhov, A. V. Ryzhkov, “Solutions of the B -polyharmonic equation”, *Differ. Equ.*, **36**:10 (2000), 1507–1511.
- [6] F. G. Mukhlisov, “On the existence and uniqueness of the solution of some partial differential equations with the Bessel differential operator”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **28**:11 (1984), 81–85.
- [7] A. Sh. Khismatullin, “Solution of boundary value problems for one degenerate B -elliptic equation of the 2nd kind by the method of potentials”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **51**:1 (2007), 58–70.

- [8] E. V. Chebatoreva, “The study of boundary value problems for a singular B -elliptic equation by the method of potentials”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2010, № 5, 88–90 (In Russian).
- [9] I. B. Garipov, R. M. Mavlyaviev, “Fundamental solution of a multidimensional axisymmetric equation”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **63**:9 (2018), 1290–1305.
- [10] G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*. V.1, Foreign Literature Publ., Moscow, 1949 (In Russian).
- [11] B. M. Levitan, “Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions”, *Russian Mathematical Surveys*, **6**:2(42) (1951), 102–143 (In Russian).
- [12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products*, The Science Publishing House, Moscow, 1971 (In Russian).

Информация об авторе

Ибрагимова Наиля Анасовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерной кибернетики. Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Российская Федерация. E-mail: NAI.liya@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1915-7986>

Поступила в редакцию 09.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.

Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Nailya A. Ibragimova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Engineering Cybernetics Department. Kazan State Energy University, Kazan, the Russian Federation. E-mail: NAI.liya@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1915-7986>

Received 9 January 2019

Reviewed 11 February 2019

Accepted for press 14 March 2019

© Измаилов А.Ф., Куренной А.С., Стецюк П.И., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-60-74

УДК 519

Метод Левенберга–Марквардта для задач безусловной оптимизации

Алексей Ферилович ИЗМАИЛОВ¹, Алексей Святославович КУРЕННОЙ²
Петр Иванович СТЕЦЮК³

¹ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
119992, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, факультет ВМК
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>, e-mail: izmaf@ccas.ru

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8216-9659>, e-mail: akurennoy@cs.msu.ru

³ Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины
03187, Украина, г. Киев, проспект Академика Глушкова, 40
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>, e-mail: stetsyukp@gmail.com

Levenberg–Marquardt method for unconstrained optimization

Alexey F. IZMAILOV¹, Alexey S. KURENNOY², Petr I. STETSYUK³

¹ Lomonosov Moscow State University
VMK Faculty, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>, e-mail: izmaf@ccas.ru

² Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8216-9659>, e-mail: akurennoy@cs.msu.ru

³ V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine
40 Akademika Glushkova Ave., Kiev 03187, Ukraine
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>, e-mail: stetsyukp@gmail.com

Аннотация. В работе предлагается и исследуется глобализованный одномерным поиском метод Левенберга–Марквардта для задач безусловной оптимизации с возможно неизоллированными решениями. Хорошо известно, что этот метод является эффективным средством решения систем нелинейных уравнений, особенно в случаях наличия вырожденных и даже неизоллированных решений. Традиционные способы глобализации сходимости метода Левенберга–Марквардта основаны на одномерном поиске для квадрата евклидовой невязки решаемого уравнения, в роли которого в случае задачи безусловной оптимизации выступает вытекающее из принципа Ферма условие равенства нулю градиента целевой функции. В контексте задач оптимизации такие способы глобализации не вполне адекватны, так как соответствующие алгоритмы не имеют «предпочтений» в плане сходимости к минимумам, максимумам, и вообще любым ста-

ционарным точкам. В связи со этим, в данной работе рассматривается другой способ глобализации сходимости метода Левенберга–Марквардта, использующий одномерный поиск для самой целевой функции исходной задачи. В работе показано, что предложенный алгоритм обладает разумными свойствами глобальной сходимости, а также сохраняет высокую скорость локальной сходимости метода Левенберга–Марквардта в слабых предположениях.

Ключевые слова: задач безусловной оптимизации; неизолированные решения; метод Левенберга–Марквардта; глобализация сходимости

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00125_а и № 19-51-12003 ННАО_а) и фонда Volkswagen (грант 90306).

Для цитирования: Измаилов А. Ф., Куренной А. С., Стецюк П. И. Метод Левенберга–Марквардта для задач безусловной оптимизации // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 60–74. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-60-74

Abstract. We propose and study the Levenberg–Marquardt method globalized by means of linesearch for unconstrained optimization problems with possibly nonisolated solutions. It is well-recognized that this method is an efficient tool for solving systems of nonlinear equations, especially in the presence of singular and even nonisolated solutions. Customary globalization strategies for the Levenberg–Marquardt method rely on linesearch for the squared Euclidean residual of the equation being solved. In case of unconstrained optimization problem, this equation is formed by putting the gradient of the objective function equal to zero, according to the Fermat principle. However, these globalization strategies are not very adequate in the context of optimization problems, as the corresponding algorithms do not have “preferences” for convergence to minimizers, maximizers, or any other stationary points. To that end, in this work we consider a different technique for globalizing convergence of the Levenberg–Marquardt method, employing linesearch for the objective function of the original problem. We demonstrate that the proposed algorithm possesses reasonable global convergence properties, and preserves high convergence rate of the Levenberg–Marquardt method under weak assumptions.

Keywords: unconstrained optimization problem; nonisolated solutions; Levenberg–Marquardt method; globalization of convergence

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00125_а and 19-51-12003 ННАО_а) and by the Volkswagen Foundation (grant 90306).

For citation: Izmailov A. F., Kurennoy A. S., Stetsyuk P. I. Metod Levenberga–Markvardta dlya zadach bezuslovnoy optimizatsii [Levenberg–Marquardt Method for Unconstrained Optimization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 60–74. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-60-74 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В этой работе исследуются численные методы решения задачи безусловной оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с по крайней мере дважды дифференцируемой целевой функцией $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и при условиях допускающих, что задача (1) может иметь неизолированные решения.

Один успешный подход к решению нелинейных задач с возможно неизолрованными решениями основан на методе Левенберга–Марквардта [1], [2], который, однако, в принципе предназначен для решения систем нелинейных уравнений, а не задач оптимизации. Для уравнения

$$f'(x) = 0, \quad (2)$$

описывающего стационарные точки задачи (1), и для текущего приближения $x^k \in \mathbb{R}^n$, этот метод определяет следующее приближение как $x^{k+1} = x^k + p^k$, где p^k является единственным решением линейного уравнения

$$(H_k^2 + \sigma_k I)p = -H_k f'(x^k), \quad (3)$$

в котором базовым выбором симметричной $n \times n$ матрицы H_k является $f''(x^k)$, а $\sigma_k > 0$ играет роль параметра регуляризации. Из результатов в [3], [4] следует, что при правильном управлении этим параметром метод Левенберга–Марквардта обладает локальной квадратичной сходимостью к стационарной точке задачи (1) при очень слабых предположениях, допускающих неизолрованность стационарных точек. Более того, сходимость метода может быть глобализована одномерным поиском для квадрата невязки уравнения (2) в роли функции качества.

Однако, в данном (оптимизационном) контексте указанный способ глобализации сходимости метода Левенберга–Марквардта не вполне удовлетворителен, поскольку получаемый глобализованный алгоритм направлен на поиск стационарных точек задачи (1), а не ее решений. В частности, такой алгоритм «не различает» максимумы и минимумы функции f , как и любые стационарные точки задачи (1). В связи с этим обстоятельством в настоящей работе разрабатывается «более оптимизационный» алгоритм, использующий направления p^k метода Левенберга–Марквардта, но с одномерным поиском для целевой функции f задачи (1) вместо невязки уравнения (2).

1. Глобализованный алгоритм

Ключевое наблюдение заключается в следующем. Направление p^k метода Левенберга–Марквардта можно явно выразить из (3) как

$$p^k = -Q_k f'(x^k), \quad (4)$$

где

$$Q_k = (H_k^2 + \sigma_k I)^{-1} H_k.$$

Предположим, что матрица H_k положительно определена; тогда матрица Q_k невырождена (как произведение двух невырожденных матриц), и

$$Q_k^{-1} = H_k^{-1}(H_k^2 + \sigma_k I) = H_k + \sigma_k H_k^{-1}. \quad (5)$$

Но полученная таким образом матрица является симметричной и положительно определенной, откуда следует, что таковой является и матрица Q_k , а значит, p^k является направлением убывания функции f в точке x^k , если $f'(x^k) \neq 0$.

Разумеется, матрица $H_k = f''(x^k)$ может не быть положительно определенной, даже при x^k сколь угодно близком к множеству решений. Поэтому глобализованный алгоритм должен включать в себя механизм выбора подходящего H_k , причем допускающий базовый выбор вблизи решений.

А л г о р и т м. Выбираем параметры $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 1$, $\bar{\sigma} > 0$, $q > 0$, $\varepsilon, \theta \in (0, 1)$. Выбираем $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $f'(x^k) = 0$, стоп.

2. Полагаем $H_k = f''(x^k)$. Если

$$\|H_k f'(x^k)\| \geq \rho_1 \|f'(x^k)\|^{\tau_1}, \quad (6)$$

вычисляем p^k как решение уравнения (3) при $\sigma_k = \min\{\bar{\sigma}, \|f'(x^k)\|^q\}$. Иначе переходим к шагу 4.

3. Если

$$\langle f'(x^k), p^k \rangle \leq -\rho_2 \|p^k\|^{\tau_2}, \quad (7)$$

переходим к шагу 5.

4. Вычисляем симметричную $n \times n$ матрицу H_k и соответствующее решение p^k задачи (3), удовлетворяющие (6) и (7).

5. Вычисляем $\alpha_k = \theta^j$, где j — наименьшее неотрицательное целое число, при котором выполняется неравенство Армихо

$$f(x^k + \theta^j p^k) \leq f(x^k) + \varepsilon \theta^j \langle f'(x^k), p^k \rangle. \quad (8)$$

6. Полагаем $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$, увеличиваем k на 1, и переходим к шагу 1.

Ключевой вопрос состоит в том как реализовать шаг 4. Очевидно, что (6) может выполняться для любого $\rho_1 > 0$, если H_k достаточно положительно определена, а именно, ее минимальное собственное значение не меньше ρ_1 . Более того, из (4) и (5) следует, что (7) также достигается достаточной положительной определенностью H_k . Последнего же можно добиться посредством модифицированного разложения Холецкого [5, разд. 4.4.2.2], [6], или посредством модифицированного симметричного знакоопределенного разложения [7] матрицы Гессе $f''(x^k)$; см. также [8, разд. 3.4]. При этом на каждой итерации алгоритма потребуются решить не более двух систем линейных уравнений, как и в случае, когда для второй системы берется просто $H_k = \rho I$ с достаточно большим $\rho > 0$.

Альтернативным образом можно выбирать H_k последовательно, заменяя H_k на $H_k + \omega I$ с некоторым $\omega > 0$, до тех пор, пока (6) и (7) не окажутся выполнены. Разумеется, при таком подходе итерация алгоритма может потребовать решения более двух систем линейных уравнений, но получаемое в результате направление может быть лучше, так как выбранная в итоге матрица H_k может быть ближе к истинной матрице Гессе функции f .

2. Глобальная сходимость

Следующая теорема описывает свойства глобальной сходимости предложенного алгоритма.

Теорема 1. *Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$.*

Тогда алгоритм корректно определен, и либо останавливается после конечного числа итераций на шаге 1 в некоторой стационарной точке x^k задачи (1), либо генерирует такую бесконечную последовательность $\{x^k\}$, что, в случае ограниченности $\{H_k\}$, любая предельная точка этой последовательности является стационарной точкой задачи (1).

Доказательство. Корректная определенность алгоритма вытекает из его конструкции.

Допустим, что алгоритм не останавливается на шаге 1, а значит, генерирует бесконечную последовательность $\{x^k\}$. Предположим далее, что последовательность $\{H_k\}$ ограничена. Покажем, что последовательность $\{p^k\}$ направлений поиска является равномерно градиентной в терминологии [9, с. 24], т. е. если некоторая подпоследовательность $\{x^{k_j}\}$ сходится к $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, причем $f'(\bar{x}) \neq 0$, то последовательность $\{p^{k_j}\}$ ограничена и

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle f'(x^{k_j}), p^{k_j} \rangle < 0. \quad (9)$$

Из (7) получаем, что для всех k

$$\|f'(x^k)\| \|p^k\| \geq \rho_2 \|p^k\|^2.$$

Отсюда и из непрерывности f' , которая автоматически следует из двукратной дифференцируемости f , вытекает ограниченность последовательности $\{p^{k_j}\}$. Кроме того, в силу (3) и (6), для всех k справедливо соотношение

$$\|(H_k^2 + \sigma_k I)p^k\| = \|H_k f'(x^k)\| \geq \rho_1 \|f'(x^k)\|.$$

Из ограниченности $\{H_k\}$ и $\{\sigma_{k_j}\}$ (где последнее следует из определения σ_k и, опять же, непрерывности f') вытекает, что если $\{p^{k_j}\}$ имеет 0 в качестве предельной точки, то $f'(\bar{x}) = 0$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, норма p^{k_j} отделена от нуля, и тогда из (7) вытекает (9).

Таким образом, $\{p^k\}$ является равномерно градиентной последовательностью направлений поиска. А значит, согласно [9, теорема 1.8], каждая предельная точка $\{x^k\}$ является стационарной точкой задачи (1). $\square$

3. Квадратичная скорость сходимости

Обозначим через S множество стационарных точек задачи (1):

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f'(x) = 0\}.$$

Лемма 1. Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности стационарной точки $\bar{x}$ задачи (1), и пусть выполняется следующая локальная липшицева оценка расстояния до множества стационарных точек:

$$\text{dist}(x, S) = O(\|f'(x)\|) \quad (10)$$

при $x \rightarrow \bar{x}$.

Тогда существует такое $\rho > 0$, что

$$\|f''(x)f'(x)\| \geq \rho\|f'(x)\|$$

выполняется для любого $x \in \mathbb{R}^n$, достаточно близкого к $\bar{x}$.

Доказательство. Согласно [10, следствие 2], в сделанных предположениях выполняется

$$\text{dist}(x, S) = O(\|f''(x)f'(x)\|)$$

при $x \rightarrow \bar{x}$. Нужное утверждение получается комбинированием данной оценки с оценкой, следующей из непрерывности f'' :

$$\|f'(x)\| = O(\text{dist}(x, S))$$

при $x \rightarrow \bar{x}$. □

Таким образом, в предположениях этой леммы, если в алгоритме либо $\tau_1 > 1$, либо $\tau_1 = 1$ и $\rho_1 > 0$ достаточно мало, то при $H_k = f''(x^k)$ (6) выполняется для всех $x^k \in \mathbb{R}^n$ достаточно близких к $\bar{x}$.

Во избежание ненужных сложностей, в утверждениях ниже будет удобно формально предполагать, что если $x^k \in S$ (и, соответственно, $\sigma_k = 0$), то $p^k = 0$. Заметим, что если $x^k \in S$, то алгоритм останавливается на шаге 1, и вычисления p^k на самом деле больше не выполняются. С другой стороны, $p^k = 0$ всегда является решением (3) при $x^k \in S$, и для целей анализа удобно предполагать, что в таких случаях выбирается именно это решение.

Лемма 2. Пусть в дополнение к предположениям леммы 1 вторая производная f удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{x}$.

Тогда для любого $q \in [1, 2]$ существует такое $\rho > 0$, что для решения p^k уравнения (3) при $H_k = f''(x^k)$ выполнено

$$\|f''(\bar{x})p^k\| \geq \rho\|p^k\|$$

для всех $x^k \in \mathbb{R}^n$, достаточно близких к $\bar{x}$.

Доказательство. Согласно [4, леммы 2.1, 2.2], в сделанных предположениях выполняются оценки

$$\|p^k\| = O(\text{dist}(x^k, S)), \quad (11)$$

$$\text{dist}(x^k + p^k, S) = O((\text{dist}(x^k, S))^{(2+q)/2}) \quad (12)$$

при $x^k \rightarrow \bar{x}$. Точнее, в [4, лемма 2.2] дополнительно предполагается, что $x^k + p^k$ остается достаточно близким к $\bar{x}$. Однако, в доказательстве в [4, теорема 2.1] установлено, что любая необходимая близость $x^k + p^k$ к $\bar{x}$ гарантируется достаточной близостью x^k к $\bar{x}$, а значит, это предположение можно опустить.

От противного: предположим, что существует последовательность $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$, сходящаяся к $\bar{x}$ и такая, что

$$f''(\bar{x})p^k = o(\|p^k\|)$$

при $k \rightarrow \infty$. Тогда согласно (11)

$$f''(\bar{x})p^k = o(\text{dist}(x^k, S)), \quad (13)$$

в то время как согласно (12)

$$f'(x^k + p^k) = O(\text{dist}(x^k + p^k, S)) = o(\text{dist}(x^k, S)). \quad (14)$$

С помощью теоремы о среднем, вновь привлекая (11), получаем

$$f'(x^k + p^k) - f'(x^k) - f''(\bar{x})p^k = o(\|p^k\|) = o(\text{dist}(x^k, S)),$$

а значит, принимая во внимание (13) и (14),

$$f'(x^k) = o(\text{dist}(x^k, S))$$

при $k \rightarrow \infty$, что противоречит (10). □

Лемма 3. Пусть f дважды дифференцируема в окрестности локального решения $\bar{x}$ задачи (1), а ее вторая производная удовлетворяет условию Липшица в этой окрестности. Допустим, что выполняется локальная липшицева оценка расстояния (10) при $x \rightarrow \bar{x}$.

Тогда для любого $q \in [1, 2]$ существует такое $\rho > 0$, что для решения p^k уравнения (3) при $H_k = f''(x^k)$ выполнено

$$\langle f''(\bar{x})p^k, p^k \rangle \geq \rho \|p^k\|^2$$

для всех $x^k \in \mathbb{R}^n$, достаточно близких к $\bar{x}$.

Доказательство. В силу необходимого условия оптимальности второго порядка $f''(\bar{x})$ является неотрицательно определенной матрицей. Но тогда $\langle f''(\bar{x})\xi, \xi \rangle > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, при которых $f''(\bar{x})\xi \neq 0$. Требуемый результат теперь получается из леммы 2 с привлечением свойств однородности и компактности. □

Следующий результат вытекает из (12) и леммы 3 посредством рассуждения в [11, следствие 5.1].

Лемма 4. В предположениях леммы 3, для каждого $q \in [1, 2]$, если либо $\tau_2 > 2$, либо $\tau_2 = 2$ и $\rho_2 > 0$ достаточно мало, то (7) выполняется для решения p^k уравнения (3) с $H_k = f''(x^k)$ при любом $x^k \in \mathbb{R}^n$, достаточно близком к $\bar{x}$. Более того, если $\varepsilon \in (0, 1/2)$, то (8) выполняется при $j = 0$, т. е. на шаге 5 алгоритма принимается $\alpha_k = 1$.

Теорема 2. Пусть в предположениях леммы 3 последовательность $\{x^k\}$ получена алгоритмом при $q \in [1, 2]$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и либо при $\tau_1 > 1$, либо при $\tau_1 = 1$ и достаточно малом $\rho_1 > 0$, и либо при $\tau_2 > 2$, либо при $\tau_2 = 2$ и достаточно малом $\rho_2 > 0$. Предположим, что при некотором k приближение x^k оказывается достаточно близким к $\bar{x}$.

Тогда последовательность $\{x^k\}$ сходится к некоторой стационарной точке задачи (1), и для любого достаточно большого k выполняется $H_k = f''(x^k)$, $\alpha_k = 1$, причем скорость сходимости квадратичная.

Доказательство. Это следует из лемм 1 и 4, а также из [4, теорема 2.2], где нужно принять во внимание, что, согласно рассуждению в [4, теорема 2.1], достаточная близость x^k к $\bar{x}$ обеспечивает нужную близость всех последующих приближений к $\bar{x}$. $\square$

Покажем теперь, что оценка расстояния (10) обеспечивается выполнением условия квадратичного роста в точке $\bar{x}$, что означает существование такого $\gamma > 0$, что

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \gamma(\text{dist}(x, S))^2 \quad (15)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, достаточно близкого к $\bar{x}$, и для некоторой проекции $\hat{x}$ точки x на S .

Предложение 1. Пусть f дважды дифференцируема в окрестности стационарной точки $\bar{x}$ задачи (1), а ее вторая производная непрерывна в $\bar{x}$, и предположим, что в точке $\bar{x}$ выполнено условие квадратичного роста.

Тогда имеет место локальная липшицева оценка расстояния (10) при $x \rightarrow \bar{x}$.

Доказательство. По теореме о среднем, и принимая во внимание, что $\hat{x} \rightarrow \bar{x}$ при $x \rightarrow \bar{x}$, получаем оценки

$$\begin{aligned} f'(x) - f''(\hat{x})(x - \hat{x}) &= f'(x) - f'(\hat{x}) - f''(\hat{x})(x - \hat{x}) = o(\text{dist}(x, S)), \\ f(x) - f(\hat{x}) - \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle &= f(x) - f(\hat{x}) - \langle f'(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle f''(\hat{x})(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle \\ &= o((\text{dist}(x, S))^2) \end{aligned}$$

при $x \rightarrow \bar{x}$. Следовательно, в силу (15),

$$\begin{aligned} \gamma(\text{dist}(x, S))^2 &\leq f(x) - f(\hat{x}) \\ &= \frac{1}{2} \langle f'(x), x - \hat{x} \rangle + o((\text{dist}(x, S))^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \|f'(x)\| \|x - \hat{x}\| + o((\text{dist}(x, S))^2) \\ &= \frac{1}{2} \|f'(x)\| \text{dist}(x, S) + o((\text{dist}(x, S))^2), \end{aligned}$$

откуда очевидным образом следует (10). $\square$

4. Численные примеры

Помимо глобализации метода Левенберга–Марквардта посредством одномерного поиска для квадрата евклидовой невязки уравнения (2), естественным конкурентом предложенного в этой работе алгоритма является регуляризованный метод Ньютона, направление p^k которого в текущем приближении x^k вычисляется из линейного уравнений

$$(H_k + \sigma_k I)p = -f'(x^k), \quad (16)$$

а глобализация сходимости осуществляется посредством одномерного поиска для функции f ; см. [12], [13]. Этот метод также может требовать модификации базового выбора $H_k = f''(x^k)$ для обеспечения того, чтобы p^k было направлением убывания функции f в точке x^k . Более того, с учетом неотрицательной определенности матрицы H_k^2 , есть основания ожидать, что итерация метода Левенберга–Марквардта будет требовать меньшего количества последовательных модификаций H_k , а значит, решения меньшего количества систем линейных уравнений. Помимо этого, важным теоретическим преимуществом метода Левенберга–Марквардта является то, что его итерационные системы (3) всегда разрешимы, поскольку их матрицы положительно определены (а значит, невырождены) при $\sigma_k > 0$.

Таким образом, в этом разделе рассматриваются следующие алгоритмы.

1. Алгоритм из разд. 1 с последовательной модификацией матрицы H_k по формуле $H_k = H_k + \omega I$ на шаге 4, в котором (3) заменено на итерационное уравнение (16) регуляризованного метода Ньютона, а тест (6) опущен, но процедура модификации H_k иницируется и в тех случаях, когда уравнение (16) решить не удастся. Такой алгоритм соответствует глобализованным версиям регуляризованного метода Ньютона в [12], [13]. Варианты этого алгоритма с выбором $q = 1$ и $q = 2$ будем обозначать RNM1 и RNM2, соответственно.

2. Алгоритм из разд. 1 с последовательной модификацией матрицы H_k по той же формуле. Варианты этого алгоритма с выбором $q = 1$ и $q = 2$ будем обозначать L-MM1-obj и L-MM2-obj, соответственно.

3. Алгоритм из разд. 1, но с опущенными тестами (6) и (7), и опущенным шагом 4, а также с функцией f на шаге 5, замененной на квадрат невязки уравнения (2), т. е.

на функцию $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \|f'(x)\|^2.$$

Такой алгоритм соответствует глобализованным версиям метода Левенберга–Марквардта в [3], [4]. Варианты этого алгоритма с выбором $q = 1$ и $q = 2$ будем обозначать L-MM1-res и L-MM2-res, соответственно.

В алгоритмах использовались следующие значения параметров: $\rho_1 = \rho_2 = 10^{-9}$, $\tau_1 = 1.1$, $\tau_2 = 2.1$, $\bar{\sigma} = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\theta = 0.5$, $\omega = 10$.

Запуск считался успешным, если для некоторого $k \leq 500$ реализовалось неравенство

$$\|f'(x^k)\| < 10^{-8}.$$

Если на некоторой итерации на шаге 5 алгоритма α становилось меньше 10^{-12} , то запуск считался неудачным и прекращался.

Для каждой из рассматриваемых ниже трех задач выполнялось 1000 запусков каждого алгоритма из случайных начальных точек, равномерно распределенных в области $\|x\|_\infty \leq 100$. Значения столбцов в приводимых ниже таблицах таковы

- «S» (от «Sucesses»): процент успешных запусков;
- «I» (от «Iterations»): среднее количество итераций на один успешный запуск;
- «LS» (от «Linear Systems»): среднее количество решенных линейных систем на один успешный запуск;
- «OV» (от «Objective function Values»): средняя величина натуральных логарифмов от значений целевой функции в точках завершения алгоритма (вне зависимости от успешности запусков). Эта величина характеризует качество получаемых приближений: чем она меньше, тем в среднем лучше получаемые приближения. При этом она более устойчива по отношению к единичным статистическим выбросам, чем средняя величина самих значений целевой функции.

Таблица 1: Результаты для примера 1

Method	S (%)	I	LS	OV
RNM1	100	32	32	-61.81
RNM2	95	32	32	-61.57
L-MM1-obj	100	32	32	-61.47
L-MM2-obj	100	32	32	-61.64
L-MM1-res	100	32	32	-61.78
L-MM2-res	96	32	32	-59.92

Пример 1. Пусть $n = 2$, $f(x) = ((x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1^2 - x_2^2))^2$. Тогда множество решений задачи (1) — это лемниската Бернулли.

Лемниската Бернулли содержится в круге с центром в нуле радиуса $\sqrt{2}$. В определенном смысле это объясняет то, что при запусках из удаленных от нуля начальных точек все рассматриваемые алгоритмы ведут себя в этом примере схожим образом; см. таблицу 1.

Таблица 2: Результаты для примера 2

Method	S (%)	I	LS	OV
RNM1	100	20	21	-44.60
RNM2	100	26	27	-27.36
L-MM1-obj	100	18	18	-53.29
L-MM2-obj	100	18	18	-51.81
L-MM1-res	100	18	18	-53.61
L-MM2-res	100	18	18	-53.16

Пример 2. Пусть $n = 2$, $f(x) = x_1^2 x_2^2$. Тогда множество решений задачи (1) задается уравнением $x_1 x_2 = 0$.

Как видно из таблицы 2, в этом примере алгоритмы, основанные на методе Левенберга–Марквардта, ведут себя схожим образом и превосходят RNM как по эффективности, так и по качеству получаемых приближений. При этом все алгоритмы демонстрируют абсолютную робастность.

Таблица 3: Результаты для примера 3

Method	S (%)	I	LS	OV
RNM1	100	28	28	-27.44
RNM2	100	27	27	-27.54
L-MM1-obj	100	17	17	-57.65
L-MM2-obj	100	19	19	-52.57
L-MM1-res	100	17	17	-57.82
L-MM2-res	99	19	19	-53.45

Пример 3. Пусть $n = 3$, $f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)^2$. Тогда множество решений задачи (1) задается уравнением $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.

Как видно из таблицы 3, в этом примере ситуация та же, что и в примере 2.

Чтобы продемонстрировать различие в поведении двух рассмотренных глобализаций методов Левенберга–Марквардта, рассмотрим еще один простой (одномерный) пример.

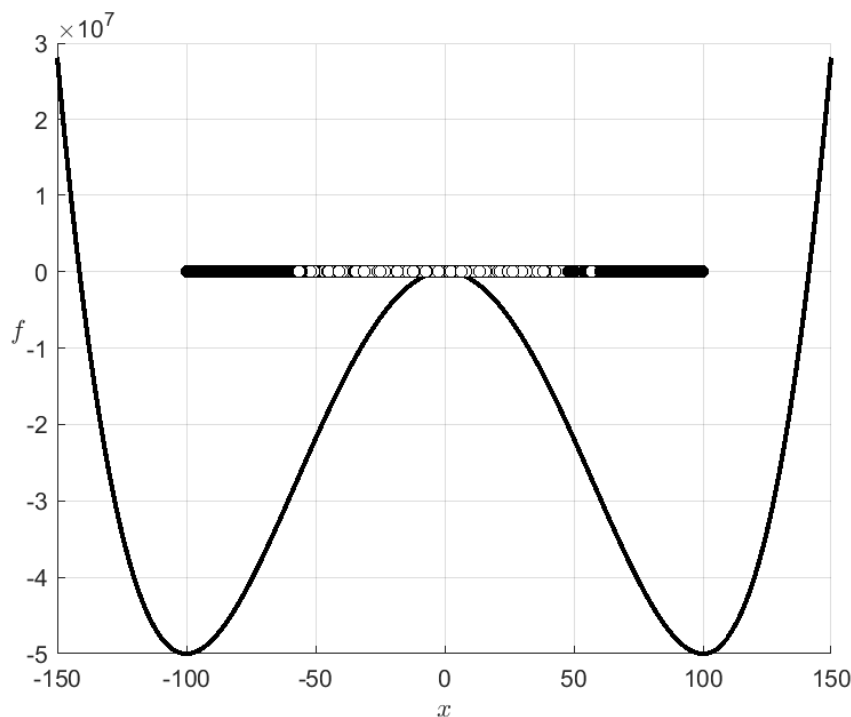


Рис. 1: Пример 4

Таблица 4: Результаты для примера 4

Method	S (%)	I	LS	OV	CS (%)
RNM1	77	6	6	-113.97	100
RNM2	77	5	6	-113.39	100
L-MM1-obj	80	5	6	-112.14	100
L-MM2-obj	80	5	6	-112.24	100
L-MM1-res	100	4	5	-45.72	49
L-MM2-res	100	4	5	-44.80	48

Пример 4. Пусть $n = 1$, $f(x) = x^4/2 - 10^4 x^2$. Тогда множество решений задачи (1) состоит из двух точек: -100 и 100 . Кроме того, функция f имеет локальный максимум в точке 0 (см. рис. 1).

Помимо данных, сообщавшихся в таблицах для предыдущих примеров, таблица 4 имеет еще столбец «CS» (от «Convergences to Solution»), в котором указан процент

успешных запусков со сходимостью к одному из решений, а именно, закончившихся в точке, значение функции f в которой отличалось от оптимального значения $-10^8/2$ не более чем на 10^{-5} .

Из таблицы 4 видно, что алгоритмы с одномерным поиском для целевой функции f существенно превосходят алгоритмы с одномерным поиском для квадрата невязки уравнения (2) в плане качества получаемых приближений.

На рис. 1 также показано распределение начальных точек, из которых имела место сходимость к одному из решений (черные точки), и тех, из которых имела место сходимость к локальному максимуму (белые точки). Распределение становится весьма сложным вблизи $\pm 100/\sqrt{3}$. Данные приведены для L-MM1-res; для L-MM2-res картина аналогичная.

Разумеется, приведенные численные результаты предназначены лишь для иллюстрации теории, разработанной в разд. 1–3, и, в частности, не подразумевают каких-либо далеко идущих выводов. Систематическое сравнительное численное тестирование описанных алгоритмов составит одно из направлений дальнейшей работы авторов.

Список литературы

- [1] K. Levenberg, “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares”, *Quarterly of Appl. Math.*, **2** (1944), 164–168.
- [2] D.W. Marquardt, “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”, *J. SIAM*, **11** (1963), 431–441.
- [3] N. Yamashita, M. Fukushima, “On the rate of convergence of the Levenberg–Marquardt method”, *Computing*, 2001, 15, 237–249.
- [4] J.-Y. Fan, Y.-X. Yuan, “On the quadratic convergence of the Levenberg–Marquardt method”, *Computing*, **74** (2005), 23–39.
- [5] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, San Diego, 1981.
- [6] R. B. Schnabel, E. Eskow, “A new modified Cholesky factorization”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **11** (1990), 1136–1158.
- [7] S. H. Cheng, N. J. Higham, “A modified Cholesky algorithm based on a symmetric indefinite factorization”, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, **9** (1998), 1097–1110.
- [8] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2, Heidelberg: Springer-Verlag, New York, Berlin, 2006.
- [9] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, Радио и связь, М., 1987.
- [10] A. Fischer, “Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions”, *Math. Program.*, **94** (2002), 91–124.
- [11] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Globalizing stabilized SQP by smooth primal-dual exact penalty function”, *J. Optim. Theory Appl.*, **169** (2016), 148–178.
- [12] K. Ueda, N. Yamashita, “Convergence properties of the regularized Newton method for the unconstrained nonconvex optimization”, *Appl. Math. Optim.*, **62** (2010), 27–46.
- [13] C. Shen, X. Chen, Y. Liang, “A regularized Newton method for degenerate unconstrained optimization problems”, *Optim. Lett.*, **6** (2012), 1913–1933.

References

- [1] K. Levenberg, “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares”, *Quarterly of Appl. Math.*, **2** (1944), 164–168.
- [2] D.W. Marquardt, “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters”, *J. SIAM*, **11** (1963), 431–441.
- [3] N. Yamashita, M. Fukushima, “On the rate of convergence of the Levenberg–Marquardt method”, *Computing*, 2001, 15, 237–249.
- [4] J.-Y. Fan, Y.-X. Yuan, “On the quadratic convergence of the Levenberg–Marquardt method”, *Computing*, **74** (2005), 23–39.
- [5] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright, *Practical Optimization*, Academic Press, San Diego, 1981.
- [6] R. B. Schnabel, E. Eskow, “A new modified Cholesky factorization”, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **11** (1990), 1136–1158.
- [7] S. H. Cheng, N. J. Higham, “A modified Cholesky algorithm based on a symmetric indefinite factorization”, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, **9** (1998), 1097–1110.
- [8] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2, Heidelberg: Springer-Verlag, New York, Berlin, 2006.
- [9] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*, Academic Press, New York, 1982.
- [10] A. Fischer, “Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions”, *Math. Program.*, **94** (2002), 91–124.
- [11] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Globalizing stabilized SQP by smooth primal-dual exact penalty function”, *J. Optim. Theory Appl.*, **169** (2016), 148–178.
- [12] K. Ueda, N. Yamashita, “Convergence properties of the regularized Newton method for the unconstrained nonconvex optimization”, *Appl. Math. Optim.*, **62** (2010), 27–46.
- [13] C. Shen, X. Chen, Y. Liang, “A regularized Newton method for degenerate unconstrained optimization problems”, *Optim. Lett.*, **6** (2012), 1913–1933.

Информация об авторах

Измаилов Алексей Ферилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@ccas.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Куренной Алексей Святославович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: akurennoy@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8216-9659>

Information about the authors

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Operations Research Department. Lomonosov Moscow State University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: izmaf@ccas.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Alexey S. Kurennoy, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher. Tambov State University named after G. R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation. E-mail: akurennoy@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8216-9659>

Стецюк Петр Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом методов негладкой оптимизации. Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев, Украина. E-mail: stetsyukp@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Измаилов Алексей Ферилович
E-mail: izmaf@ccas.ru

Поступила в редакцию 10.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 14.03.2019 г.

Petr I. Stetsyuk, Doctor of Physics and Mathematics, Head of the Nonsmooth Optimization Methods Department. V.M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine. E-mail: stetsyukp@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4036-2543>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexey F. Izmailov
E-mail: izmaf@ccas.ru

Received 10 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 14 March 2019

© Корабельников В.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89

УДК 517.312, 004.421.6

Алгоритмы символьного интегрирования в системе MathPartner

Вячеслав Алексеевич КОРАБЕЛЬНИКОВ

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>, e-mail: korabelnikov.va@gmail.com

Symbolic integration algorithms in CAS MathPartner

Vyacheslav A. KORABELNIKOV

Tambov State University named after G.R. Derzhavin

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>, e-mail: korabelnikov.va@gmail.com

Аннотация. Начало созданию библиотеки процедур для символьного интегрирования положила теорема Риша, опубликованная в 1969 году. Однако за прошедшие почти 50 лет такая библиотека все еще не создана. Известно только несколько попыток создания подобных библиотек, но не одна из них не была завершена. В системе компьютерной математики MathPartner строится новая библиотека процедур для символьного интегрирования, в основе которой лежит теорема Риша. Мы даем подробное описание основных процедур, составляющих эту библиотеку, и роль каждой из них в алгоритме символьного интегрирования. Мы приводим уточненную процедурную блок-схему всего алгоритма и примеры вычисленных интегралов.

Ключевые слова: алгоритм Риша; символьное интегрирование; неопределенный интеграл; система MathPartner; дифференциальное поле; элементарные функции

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-07-00420).

Для цитирования: Корабельников В. А. Алгоритмы символьного интегрирования в системе MathPartner // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 75–89. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89

Abstract. Risch theorem, published in 1969, gave beginning to creation of procedure library for symbolic integration. But such library, for past almost 50 years, still not been created. Some attempts of creation such libraries is known, but not one of them not finished. In computer algebra system MathPartner a new procedure library for symbolic integration, based on Risch theorem, is creating. We give detailed description of basic procedures contained in this library, and role of each procedure in symbolic integration algorithm. We represent procedural block diagram of whole algorithm and examples of computed integrals.

Keywords: Risch algorithm; symbolic integration; indefinite integral; CAS MathPartner; differential field; elementary functions

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-07-00420).

For citation: Korabelnikov V. A. Algoritmy simvol'nogo integrirvaniya v sisteme MathPartner [Symbolic integration algorithms in CAS MathPartner]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 75–89. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Алгоритм вычисления производной для произвольной композиции элементарных функций хорошо известен, а соответствующие программы давно вошли во все библиотеки, которые поддерживают символьные вычисления. Для обратной операции, операции вычисления первообразной функции по ее производной, ситуация значительно более сложная. В отличие от дифференцирования, в интегрировании есть только одно общее правило $\int(f + g) = \int f + \int g$. Но и оно применимо далеко не всегда (см. [1, с. 218]).

Алгоритм интегрирования дробно-рациональных функций был известен еще во времена И. Ньютона, Г.В. Лейбница и Д. Бернулли. Так как интеграл от дробно-рациональной функции всегда существует, то этот алгоритм позволяет проинтегрировать любую дробно-рациональную функцию. Главный недостаток этого алгоритма — это необходимость разложения знаменателя подынтегральной функции на линейные множители. В случае, если знаменатель подынтегрального выражения не раскладывается на линейные множители над кольцом Q , то потребуется добавлять к этому кольцу элементы из R или C . В 19 веке Ш. Эрмит улучшил этот алгоритм (см. [2]).

Систематическое изучение случаев, когда интеграл может быть выражен в конечном виде, началось в начале 19 века. В 1820 году П.-С. Лаплас заметил, что интеграл функции не содержит радикалов, кроме тех, что находятся в подынтегральном выражении. Около десятилетия спустя Ж. Лиувиль сформулировал и доказал более строгую и более точную теорему, которая означает, что если интеграл элементарной функции является элементарным, то он может быть выражен с использованием только функций, которые появляются в подынтегральном выражении, и линейной комбинацией логарифмов таких функций. Эта теорема теперь известна как теорема Лиувилля, или принцип Лиувилля.

В 1969 году Р. Риш [3] использовал теорему Лиувилля чтобы описать алгоритм, который находит элементарное выражение для интеграла от элементарной функции, если оно существует. Если же не удалось вычислить первообразную, то это должно означать, что первообразная не является композицией элементарных функций (см. [4]). Стоит отметить, что алгоритм Риша позволяет производить интегрирование лишь чисто трансцендентных функций. Для алгебраических функций Р. Риш доказал существование алгоритма, но алгоритм им не был получен (см. [5]).

В 1971 году Дж. Мозесом на основе алгоритма Риша была написана программа под названием SIN, которая интегрировала чисто трансцендентные функции. В 1981 г. Дж. Дэвенпорт, также основываясь на алгоритме Риша, разработал алгоритм интегрирования чисто алгебраических функций. Для интегрирования произвольных элементарных функций программы Мозеса и Дэвенпорта были непригодны (см. [5]).

Алгоритм Дэвенпорта обладал большой вычислительной сложностью. Б. Трагер в 1984 г. внёс серьёзные улучшения в алгоритм Дэвенпорта. Обновлённый алгоритм был реализован в системах компьютерной алгебры Axiom и Maple (см. [5]). М. Бронштейн в 1990 г. обобщил алгоритм Трагера на произвольные элементарные функции. В 1998 г. М. Бронштейн написал монографию [2] по символьному интегрированию, в которой достаточно популярно изложил лучшие достижения в этой области, начиная с теоремы Лиувилля и заканчивая собственными результатами.

Полная программная реализация алгоритма Риша–Трагера–Бронштейна на данное время не завершена (см. [5]).

Целью данной работы является описание алгоритмов символьного интегрирования, которые сегодня применяются в системе компьютерной алгебры MathPartner [6]. Это еще один шаг на пути к созданию доказательного алгоритма вычисления первообразной без эвристик. Под «доказательным» понимается такой алгоритм, который либо вычисляет интеграл как композицию элементарных функций, либо сообщает, что подынтегральное выражение не интегрируемо в элементарных функциях. Данная работа описывает текущее состояние создаваемой библиотеки процедур символьного интегрирования на пути решения этой сложной фундаментальной задачи.

1. Основные понятия

Сначала введем определения, необходимые для описания алгоритма Риша. Будем придерживаться терминологии, принятой в [7, с. 213–229].

О п р е д е л е н и е 1.1. Поле K называется дифференциальным полем, если на нем определен оператор дифференцирования d , удовлетворяющий двум условиям: $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, $d(a + b) = d(a) + d(b)$. Элемент $d(a)$ называется производной элемента $a \in K$, производную также обозначают a' .

О п р е д е л е н и е 1.2. Пусть K — дифференциальное поле. Тогда множество $C = \{a \in K : d(a) = 0\}$ является подполем K . Элементы этого подполя называют константами.

О п р е д е л е н и е 1.3. Пусть K — дифференциальное поле с оператором дифференцирования d . Расширение E поля K называется дифференциальным расширением K , если на E определен оператор дифференцирования d_1 , такой, что $d_1(a) = d(a)$, $\forall a \in K$. Оператор d_1 называется продолжением оператора d и часто обозначается тем же символом d .

Отметим, что если E — алгебраическое расширение поля K , то дифференцирование поля K однозначно продолжается до дифференцирования поля E (см. [7, с. 217]).

О п р е д е л е н и е 1.4. Пусть E — дифференциальное расширение дифференциального поля K . Если $\theta \in E$ удовлетворяет соотношению $f\theta' = f'$ для некоторого ненулевого элемента $f \in K$, то θ называют логарифмом элемента f над K , и обозначают $\theta = \log(f)$.

О п р е д е л е н и е 1.5. Пусть E — дифференциальное расширение дифференциального поля K . Если $\theta \in E$ удовлетворяет соотношению $\theta' = f'\theta$ для некоторого ненулевого элемента $f \in K$, то θ называют экспонентой элемента f над K , и обозначают $\theta = \exp(f)$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Пусть $K(x)$ — дифференциальное поле. Будем обозначать $K(x, \theta)$ дифференциальное расширение поля $K(x)$, которое получается добавлением в поле $K(x)$ элемента θ .

О п р е д е л е н и е 1.7. Элемент θ является регулярным мономом над дифференциальным полем K , если θ трансцендентен над K , и является либо логарифмом, либо экспонентой. Набор $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ называется набором регулярных мономов, если каждый ее элемент θ_i является регулярным мономом над $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$.

О п р е д е л е н и е 1.8. (см. [1, с. 225]) Пусть K — функциональное поле. Расширение $K(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ поля K называется полем элементарных функций над K , если каждая функция θ_i либо является регулярным мономом над K , либо алгебраична над K . Функция называется элементарной над K , если она принадлежит некоторому полю элементарных функций над K .

Сформулируем принцип Лиувилля (см. [1, с. 226]).

Теорема 1.1. Пусть K — дифференциальное поле, $f(x) \in K$, $g(x)$ — элементарная над K функция, такая, что $g'(x) = f(x)$. Тогда $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = v_0(x) + \sum_i c_i \log(v_i(x)),$$

где $v_0(x) \in K$; $v_i(x)$ принадлежат расширению K_0 поля K , получающемуся присоединением к K конечного числа констант, алгебраических над K ; c_i — константы из поля K_0 .

Нам требуется конструировать наименьшее дифференциальное поле, содержащее подынтегральную функцию. Для решения этой задачи используется следующее утверждение, приведенное в [7, с. 225].

Теорема 1.2. Пусть K — поле констант, $\theta_1, \dots, \theta_{k-1}$ ($k \geq 0$) — набор регулярных мономов, E — множество таких индексов $1 \leq i \leq k-1$, что θ_i является экспонентой $\theta_i = \exp(f_i)$, а L — множество таких индексов $1 \leq i \leq k-1$, что θ_i является логарифмом $\theta_i = \log(f_i)$.

1. Пусть $\theta_k = \exp(f_k)$ — экспонента над дифференциальным полем $F_{k-1} = K(x, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$, $f_k \in F_{k-1}$. Если элемент θ_k алгебраичен над F_{k-1} , то f_k представляется в виде линейной комбинации с рациональными коэффициентами

$$f_k = c + \sum_{i \in E} n_i f_i + \sum_{j \in L} m_j \theta_j, n_i, m_j \in \mathbb{Q},$$

где c — некоторая константа.

2. Пусть $\theta_k = \log(f_k)$ — логарифм над дифференциальным полем $F_{k-1} = K(x, \theta_1, \dots, \theta_{k-1})$, $f_k \in F_{k-1}$. Если элемент θ_k алгебраичен над F_{k-1} , то f_k представляется в виде произведения рациональных степеней

$$f_k = c \prod_{i \in E} \theta_i^{n_i} \times \prod_{j \in L} f_j^{m_j}, n_i, m_j \in \mathbb{Q},$$

где c — некоторая константа.

2. Алгоритм Риша

Пусть x — независимая переменная над полем констант K , $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ — набор регулярных мономов, $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ — дифференциальное поле и $f \in K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.

Ниже описывается алгоритм, позволяющий вычислить неопределенный интеграл от f тогда и только тогда, когда этот интеграл есть элементарная функция. Таким образом, алгоритм еще и позволяет определить ситуацию, когда интеграл не выражается через элементарные функции.

Пусть f — подынтегральная функция. Представим эту функцию в виде суммы $f = p + q/r$, где p, q, r имеют следующий вид

1. Если $f \in K(x)$, то $p, q, r \in K[x]$, $\deg(r) > \deg(q)$.

2. Если $f \in K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\theta_n = \log(u)$ и $u \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, то p, q, r — полиномы от переменной θ_n с коэффициентами из поля $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, $\deg(r) > \deg(q)$.

3. Если $f \in K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $\theta_n = \exp(u)$ и $u \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, то $p = \sum_{i=-k}^l p_i \theta_n^i$, а q и r — полиномы от переменной θ_n с коэффициентами из поля $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, $\deg(r) > \deg(q)$.

2.1. Интегрирование полиномиальной части

Алгоритм интегрирования полиномиальной части сводит вычисление интеграла в поле $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ к вычислению одного или более интегралов в поле $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$. Каждый полученный интеграл рекурсивно вычисляется при помощи алгоритма Риша (подробнее см. [7, с. 229–236], [8]).

Рассмотрим интегрирование полинома p . По теореме Лиувилля

$$p = v'_0 + \sum_{i=1}^d c_i \frac{v'_i}{v_i}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Пусть $\theta_n = \log(u)$, $u \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Для $p = \sum_{i=0}^m p_i \theta_n^i$, $v_0 = \sum_{j=0}^{m+1} t_j \theta_n^j$, где $p_i \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $i = 0, 1, \dots, m$, $t_j \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $j = 0, 1, \dots, m+1$, получаем (см. [8]) следующее выражение

$$\sum_{i=0}^m p_i \theta_n^i = \sum_{i=0}^{m+1} t'_i \theta_n^i + \sum_{i=0}^m (i+1) t_{i+1} \theta_n^i \theta'_n + \sum_{i=1}^d c_i \frac{v'_i}{v_i}.$$

Здесь старший коэффициент t_{m+1} является константой, обозначим ее a_{m+1} . Для нахождения остальных коэффициентов t_i , $i = m, m-1, \dots, 0$ приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях θ_n . Получаем систему дифференциальных уравнений

$$p_i = t'_i + (i+1) t_{i+1} \theta'_n. \quad (2.1)$$

Для того чтобы определить константу a_{i+1} и коэффициент t_i (с точностью до аддитивной константы), перепишем уравнение 2.1 в виде

$$t_i = \int (p_i - (i+1) t_{i+1} \theta'_n) = -(i+1) a_{i+1} \theta_n + \int (p_i - (i+1) t_{i+1} \theta'_n).$$

Элемент $p_i - (i+1) t_{i+1} \theta'_n$ принадлежит полю $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Воспользуемся рекурсией и вычислим этот интеграл при помощи алгоритма Риша. Необходимым условием интегрируемости f в классе элементарных функций является выполнение равенства $\int (p_i - (i+1) t_{i+1} \theta'_n) = \alpha \theta_n + \beta$, где α — константа, а $\beta \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. При его выполнении получаем $a_{i+1} = -\alpha/(i+1)$ и находим значение коэффициента t_i . Вычисляя t_0 , нужно отказаться от условия $\beta \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Достаточно, чтобы существовал элементарный интеграл $\int (p_0 - t_1 \theta'_n)$ (этот интеграл определяется с точностью до аддитивной константы).

2. Пусть $\theta_n = \exp(u)$, $u \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Для $p = \sum_{i=-k}^l p_i \theta_n^i$, $v_0 = \sum_{j=-k}^l t_j \theta_n^j$, где $p_i \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $i = -k, \dots, l$, $t_j \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $j = -k, \dots, l$, получаем следующее выражение

$$\sum_{i=-k}^l p_i \theta_n^i = \sum_{i=-k}^l t'_i \theta_n^i + \sum_{i=-k}^l i t_i \theta_n^i u' + \sum_{i=1}^d c_i \frac{v'_i}{v_i}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ_n получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} p_i = t'_i + i t_i u', i \neq 0 \\ p_0 = t'_0 + \sum_{j=1}^d c_j \frac{v'_j}{v_j}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Зафиксируем $i \neq 0$ и рассмотрим уравнение $p_i = t'_i + i t_i u'$ относительно t_i . Пусть p_i — полином. Тогда t_i — тоже полином. Если u' — полином, то оставляем уравнение

без изменений, а если $u' = v/w$, то чтобы «избавиться от знаменателей», домножаем уравнение на w .

Пусть $p_i = r/g$. Тогда t_i будет иметь вид $t_i = a/b$. Если u' — полином, то получаем уравнение

$$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{iu'a}{b}.$$

Следовательно, $b = \sqrt{g}$, $r = a'b - ab' + iu'ab = ba' + (-b' + iu'b)a$.

Если $u' = v/w$, то из соотношения

$$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{iva}{bw}$$

получаем: $b = \sqrt{\frac{g}{w}}$, $r = a'bw - ab'w + ivab = bwa' + (ivb - b'w)a$.

Во всех рассмотренных выше случаях было получено уравнение вида

$$P = c_1 a' + c_2 a, \quad (2.3)$$

где P, c_1, c_2, a — полиномы от переменной θ_{n-1} с коэффициентами из $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$.

Для определения полинома a из уравнения 2.3 возникает три ситуации.

1. $P, c_1, c_2, a \in K[x]$. Пусть $a = \sum_{i=0}^h a_i x^i$. $\deg(P) = \max\{\deg(c_1) + h - 1, \deg(c_2) + h\} = h + \max\{\deg(c_1) - 1, \deg(c_2)\}$. Из последнего равенства находим h : $h = \deg(P) - \max\{\deg(c_1) - 1, \deg(c_2)\}$. Если $h < 0$, то интеграл от функции f не является элементарной функцией. Если $h = 0$, то $a = P/c_2$. Если $h > 0$, то получаем формулу:

$$P = c_1 \left(a_0 + \sum_{i=1}^h i a_i x^{i-1} \right) + c_2 \sum_{i=0}^h a_i x^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных a_i .

2. $\theta_{n-1} = \log(u)$. Пусть $a = \sum_{i=0}^h a_i \theta_{n-1}^i$. Тогда $\deg(P) = h + \max\{\deg(c_1), \deg(c_2)\}$. Следовательно, $h = \deg(P) - \max\{\deg(c_1), \deg(c_2)\}$. Если $h < 0$, то интеграл от функции f не является элементарной функцией. Если $h \geq 0$, то получаем формулу

$$P = c_1 \left(\sum_{i=0}^h a'_i \theta_{n-1}^i + \sum_{i=1}^h i a_i \theta'_{n-1} \theta_{n-1}^{i-1} \right) + c_2 \sum_{i=0}^h a_i \theta_{n-1}^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ_{n-1} , получаем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных a_i . Все выражения, входящие в эту систему, принадлежат $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. Таким образом, мы свели решение дифференциального уравнения в $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ к решению системы дифференциальных уравнений в $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$.

3. $\theta_{n-1} = \exp(u)$. В этом случае в полиномах P, c_1, c_2, a содержатся отрицательные степени θ_{n-1} . Пусть $a = \sum_{i=-h_1}^{h_2} a_i \theta_{n-1}^i$. Обозначим через k_1 старшую степень полинома

c_1 , а через k_2 обозначим младшую степень полинома c_1 , через g_1 и g_2 старшую и младшую степени полинома c_2 соответственно, через m_1 и m_2 старшую и младшую степени полинома P . Тогда $h_1 = m_1 - \max\{k_1, g_1\}$ и $h_2 = m_2 - \max\{k_2, g_2\}$. Получаем формулу

$$P = c_1 \sum_{i=h_2}^{h_1} (a'_i + ia_i u') \theta_{n-1}^i + c_2 \sum_{i=h_2}^{h_1} a_i \theta_{n-1}^i.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях θ_{n-1} , получаем систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных a_i . Все выражения, входящие в эту систему, принадлежат $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$. Таким образом, мы свели решение дифференциального уравнения в $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ к решению системы дифференциальных уравнений в $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{n-2})$.

2.2. Интегрирование дробной части

Рассмотрим интегрирование q/r , $\deg(q) < \deg(r)$. Разложим r на свободные от квадратов множители и представим q/r в виде суммы простых дробей $q/r = \sum_i q_i/r_i^i$, где r_i — множитель r , свободный от квадратов.

В случае, если $\theta_n = \exp(\xi)$, то перед разложением r на свободные от квадратов множители нужно в полиноме r вынести в качестве отдельного множителя переменную θ_n в максимальной степени. Пусть $r = \theta_n^t r_t$, где r_t не делится на θ_n . Полином r_t раскладываем на свободные от квадратов множители (см. [4]). Другими словами, представляем полином r в виде $r = \theta_n^t \prod_i r_i^i$, где r_i — множитель r , свободный от квадратов; r_i не делится на θ_n . Раскладываем дробную функцию q/r в сумму простых дробей $q/r = a/\theta_n^t + \sum_i q_i/r_i^i$, где r_i — множитель r , свободный от квадратов. Интеграл от функции a/θ_n^t вычисляется при помощи алгоритмов интегрирования полиномиальной части.

Нам нужно проинтегрировать каждую полученную дробь. Используем следующее утверждение из [4].

Теорема 2.1. Пусть h — свободный от квадратов полином от переменной θ_n с коэффициентами из $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$, со старшим коэффициентом, равным единице. Тогда, если h не делится на θ_n в случае, когда θ_n — экспонента, то $\text{НОД}(h, h') = 1$.

Из этой теоремы, а также из того факта, что $K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ является Евклидовым кольцом, следует, что существуют такие $a, b \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$, что $r_i a + r'_i b = 1$.

Воспользуемся алгоритмом Эрмита:

$$\int \frac{q_k}{r_k^k} = -\frac{q_k b}{(k-1)r_k^{k-1}} + \int \frac{(k-1)q_k a + (q_k b)'}{(k-1)r_k^{k-1}},$$

где $a, b \in K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$, $r_i a + r'_i b = 1$; и $k > 1$. В результате применения этой формулы степень знаменателя уменьшилась, таким образом мы должны повторно применять эту формулу, пока $k \neq 1$ (подробнее см. [4]).

Остается проинтегрировать выражение u/v , где v — свободный от квадратов полином. Рассмотрим три случая (подробнее см. [1, с. 222–236]):

1. $u/v \in K(x)$. Определим $R(y) = \text{resultant}_x(u - yv', v)$. Корни полинома $R(y)$ обозначим $a_1, a_2, \dots, a_s$. Справедлива формула

$$\int \frac{u}{v} = \sum_{i=1}^s a_i \ln(\text{НОД}(u - a_i v', v)).$$

2. $u/v \in K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, где θ_n — логарифм. Пусть $R(y) = \text{resultant}_{\theta_n}(u - yv', v)$. Если хотя бы один корень $a_1, a_2, \dots, a_s$ полинома $R(y)$ не является константой, то функция f не имеет элементарного интеграла. Если его корни $a_1, a_2, \dots, a_s$ — константы, то

$$\int \frac{u}{v} = \sum_{i=1}^s a_i \ln(\text{НОД}(u - a_i v', v)).$$

3. $u/v \in K(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, где θ_n — экспонента. В этом случае положим $R(y) = \text{resultant}_{\theta_n}(u - y(v' - N\xi'v), v)$, где N — степень полинома v , ξ — аргумент функции θ_n . Если хотя бы один корень $a_1, a_2, \dots, a_s$ полинома $R(y)$ не является константой, то функция f не имеет элементарного интеграла. Если его корни $a_1, a_2, \dots, a_s$ — константы, то

$$\int \frac{u}{v} = \sum_{i=1}^s a_i (\ln(\text{НОД}(u - a_i(v' - N\xi'v), v)) - n_i \xi),$$

где n_i — степень полинома $\text{НОД}(u - a_i(v' - N\xi'v), v)$.

3. Библиотека процедур для символьного интегрирования в системе MathPartner

Все процедуры библиотеки расположены в четырёх пакетах:

- `Integrate` — содержит алгоритмы построения набора регулярных мономов.
- `StrucTheorem` — содержит алгоритмы для проверки трансцендентности функций.
- `IntPolynom` — содержит алгоритмы интегрирования полиномиальной части интеграла.
- `IntegrateFractions` — содержит алгоритмы интегрирования дробной части интеграла.

3.1. Пакет процедур `Integrate`

Содержит 11 процедур, основными являются процедуры:

integrate: Заменяет в подынтегральном выражении f тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические и показательные выражения комбинацией логарифмов и экспонент. Вызывает процедуру `mainProcOfInteg`, которая возвращает первообразную функции f . Затем при помощи

процедур из пакета обработки функций MathPartner, полученная функция упрощается. Комбинации логарифмов и экспонент заменяются на тригонометрические, обратные тригонометрические гиперболические, обратные гиперболические функции.

mainProcOfInteg: Основная процедура интегрирования функции. Возвращает первообразную от входного выражения. Выделяет в подынтегральном выражении список логарифмов и экспонент $f_0, \dots, f_n$. Этот список отсортирован следующим образом. Чем глубже в аргументах находятся логарифм или экспонента, тем ближе они находятся к началу списка. С помощью процедуры **makeRegularMonomialsSequence** (пакет процедур **StrucTheorem**) составляет из списка $f_0, \dots, f_n$ набор регулярных мономов. Отделяет полиномиальную и дробную части интеграла. Интегрирует отдельно полиномиальную часть (пакет процедур **IntPolynom**) и отдельно дробную часть интеграла (пакет процедур **IntegrateFraction**).

3.2. Пакет процедур **StrucTheorem**

Содержит 18 процедур, процедура **makeRegularMonomialsSequence** является основной. Она составляет набор регулярных мономов на основе списка всех логарифмов и экспонент, содержащихся в подынтегральном выражении.

В процедуре **makeRegularMonomialsSequence** выполняются следующие действия. Мы проходим последовательно все элементы списка логарифмов и экспонент, начиная со второго элемента. Берем очередной элемент списка логарифмов и экспонент. Если он оказывается трансцендентным, то рассматриваем следующий элемент. В противном случае выражаем его через предыдущие элементы списка, и в каждом следующем элементе списка меняем текущий элемент его выражением через предыдущие элементы, и удаляем текущий элемент из списка. В итоге получаем набор регулярных мономов.

Выражаем логарифмы и экспоненты, содержащиеся в подынтегральной функции, через элементы набора регулярных мономов.

3.3. Пакет процедур **IntPolynom**

Содержит 20 процедур, основными являются:

integPol: Интегрирование полинома от переменной x .

integPolLn: Интегрирование полинома от переменной $\ln(u)$.

integPolExp: Интегрирование полинома от переменной $\exp(u)$.

3.4. Пакет процедур **IntegrateFractions**

Содержит 17 процедур, основными являются:

Hermite: Интегрирование дробной функции по методу Эрмита.

LogarithmicPart: Вычисление интеграла от дробной функции со свободным от квадратов знаменателем.

partialFraction: Разложение дробной функции в сумму простейших дробей.

3.5. Общая схема алгоритма.

Входные данные: f — подынтегральная функция, x — переменная интегрирования. Заменяем в подынтегральной функции f тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические и показательные выражения комбинацией логарифмов и экспонент. Составляем список логарифмов и экспонент, содержащихся в функции f .

При помощи процедуры `makeRegularMonomialsSequence` составляем набор регулярных мономов. Выражаем функцию f через найденные регулярные мономы. Раскладываем функцию f в виде суммы полинома и правильной дроби $f = p + q/r$.

Если q/r не равно нулю, то используя процедуру `FactorPol_SquareFree` из пакета полиномиальных вычислений `MathPartner` раскладываем r на произведение свободных от квадратов множителей $r = \sum_i r_i^i$. Затем вызываем процедуры из пакета `integrateFractions`. Процедура `partialFraction` выражает q/r в виде суммы простейших дробей $q/r = \sum_i q_i/r_i^i$. К каждой дроби из полученной суммы применяем алгоритм Эрмита (процедура `Hermite`), и затем производим вычисление интеграла от дробной функции со свободным от квадратов знаменателем (процедура `LogarithmicPart`). Если интеграл от очередной дроби не выражается через элементарные функции, то интеграл от функции f так же не выражается через элементарные функции.

Если p не равно нулю, то вызываем процедуры из пакета `intPolynom`. Возможны три случая:

Если p — полином переменной x , то процедура `integPol` вычисляет интеграл от p .

Если p — полином от переменной $\exp(\xi)$, то процедура `integPolExp` составляет систему дифференциальных уравнений, описанных в разделе 2.2. Решение этой системы уравнений выражается через интегралы, не содержащие последний регулярный моном. Каждый такой интеграл рекурсивно вычисляем алгоритмом Риша. Если система уравнений не имеет решений, то интеграл от функции f не выражается через элементарные функции.

Если p — полином переменной $\ln(\xi)$, то процедура `integPolLn` составляет и решает систему дифференциальных уравнений, описанных в разделе 2.1. Решение этой системы уравнений выражается через интегралы, не содержащие последний регулярный моном. Каждый такой интеграл рекурсивно вычисляем алгоритмом Риша. Если система уравнений не имеет решений, то интеграл от функции f не выражается через элементарные функции.

Полученный ответ упрощается. Комбинации логарифмов и экспонент заменяются на тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические функции.

Общая схема алгоритма изображена на рис. 1.

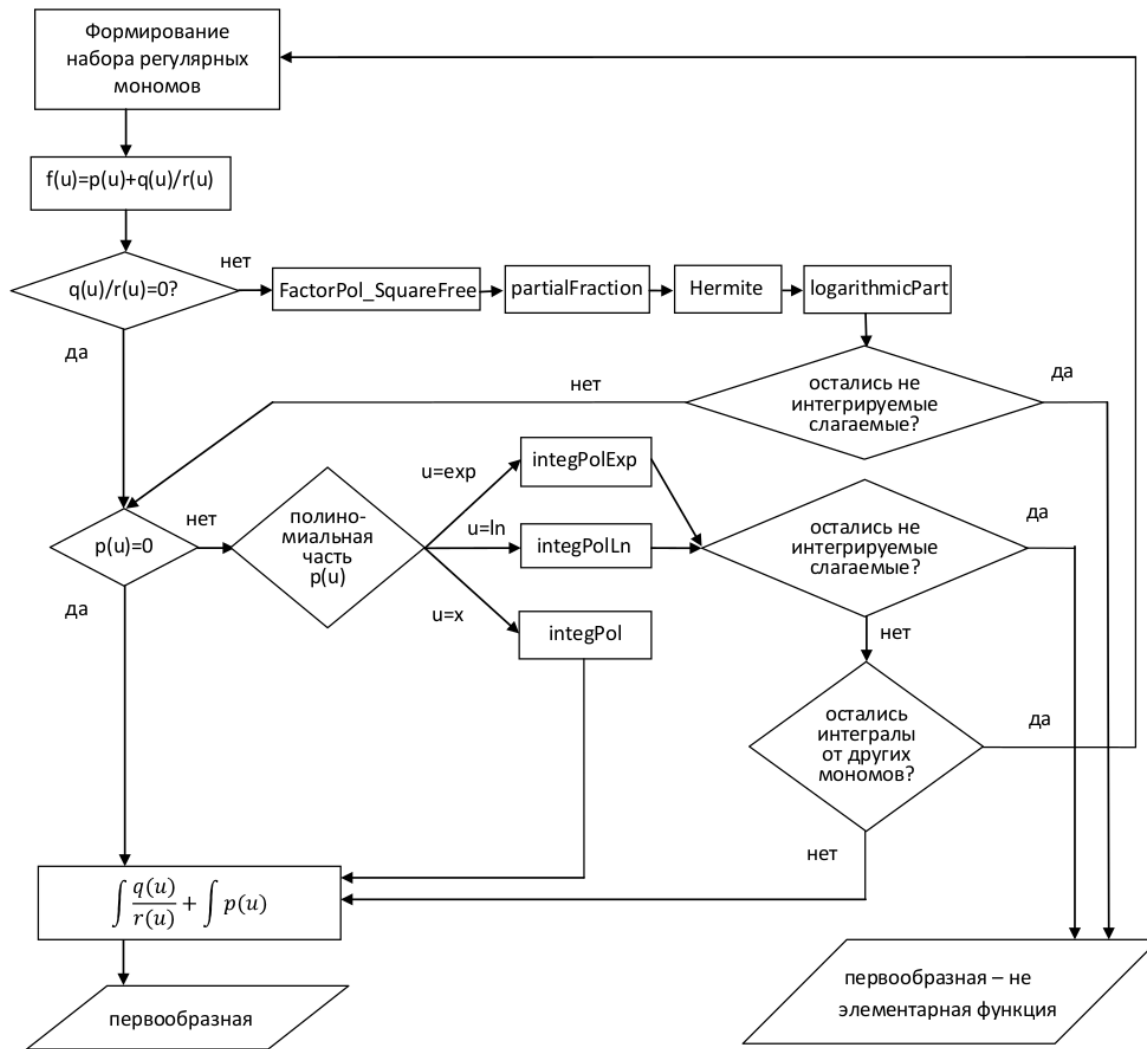


Рис. 1. Общая схема алгоритма

4. Примеры вычисления первообразных

В следующих трех таблицах показаны результаты интегрирования функций разных видов, полученных с помощью созданной в MathPartner библиотеки процедур символьного интегрирования.

Таблица 1
Дробно-рациональные функции

функция	результат
$3/(x+2)$	$3 \cdot \ln(\text{abs}(x+2))$
$3x/(x+2)$	$(3x - 6 \cdot \ln(\text{abs}(x+2)))$
$(3x+4)/(x+2)$	$(3x - 2 \cdot \ln(\text{abs}(x+2)))$
$1/(x^2+x+1)$	$2/3 \cdot 3^{(1/2)} \cdot \arctg(2/3x \cdot 3^{(1/2)} + 1/3 \cdot 3^{(1/2)})$
$(4x+5)/(x^2+2x+3)$	$(2 \cdot \ln(\text{abs}(1/2x^2+x+3/2)) + 1/2 \cdot 2^{(1/2)} \cdot \arctg(1/2x \cdot 2^{(1/2)} + 1/2 \cdot 2^{(1/2)}))$
$(4x^2+5x+6)/(x^2+2x+3)$	$(4x - (((-3/2) \cdot 2^{(1/2)} \cdot (-1) \cdot \arctg(1/2x \cdot 2^{(1/2)} + 1/2 \cdot 2^{(1/2)})) + 3/2 \cdot \ln(\text{abs}(9/2x^2+9x+27/2))))$
$1/(x^3+x)$	$\ln(\text{abs}(x)) - 1/2 \cdot \ln(\text{abs}(x^2+1))$
$1/(x^2+1)$	$\arctg(x)$

Таблица 2
Тригонометрические функции

функция	результат
$\sin(2x+3)$	$(-1/2) \cdot \cos(2x+3)$
$\cos(2x+3)$	$1/2 \cdot \sin(2x+3)$
$\sin(x)^2 \cos(x)^2$	$1/8x - 1/32 \cdot \sin(4x)$
$\text{tg}(2x+3)$	$(-1/2) \cdot \ln(\text{abs}(\cos(2x+3)))$
$\text{ctg}(2x+3)$	$1/2 \cdot \ln(\text{abs}(\sin(2x+3)))$
$1/\cos(x)^2$	$\text{tg}(x)$
$1/\sin(x)^2$	$-\text{ctg}(x)$
$1/(1-\cos(x))$	$-\text{ctg}(x/2)$
$\text{tg}(x)^2$	$(\sin(x) - x \cdot \cos(x) - i \cdot \cos(x))/\cos(x)$
$\sin(x) \cdot \text{tg}(\cos(x))$	$\ln(\text{abs}(\cos(\cos(x))))$

Таблица 3
Другие типы функций

функция	результат
$\sin(x) \exp(\cos(x))$	$-1 \cdot \exp(\cos(x))$
$\exp(x) \cdot \sin(x)$	$1/2 \cdot \exp(x) \cdot \sin(x) - 1/2 \cdot \exp(x) \cdot \cos(x)$
$(y^2 + 1) \cdot \exp(y)$	$((y^2 \cdot \exp(y) + 3 \cdot \exp(y)) - 2y \cdot \exp(y))$
$(y^2 + 1) \cdot \ln(y)$	$1/3y \cdot \ln(y^3) + 1/3y^3 \cdot \ln(y) + (-1/9)y^3 + (-y)$
$1/x \ln(x)$	$\ln(x)^2/2$
$(x + 1/x) \ln(x)$	$(1/2 \cdot (\ln(x))^2 + 1/2x^2 \cdot \ln(x)) - 1/4x^2$
$(x + \exp(x))^2$	$((1/2 \cdot \exp(2x) + 2x \cdot \exp(x) + 1/3x^3) - 2 \cdot \exp(x))$
$2 \cdot \exp(x)/(\exp(4x) - 1)$	$-1 \cdot (\arctg(\exp(x)) - 1/2 \cdot \ln(\text{abs}(\text{sh}(1/2x)))) + 1/2 \cdot \ln(\text{abs}(\text{ch}(1/2x)))$
$(\ln(x) + 1) \cdot x^x$	x^x
$\log(\pi, x)$	$(x \cdot \ln(x) - x)/\ln(\pi)$
π^x	$(\pi^x)/\ln(\pi)$

5. Заключение

Задача вычисления первообразной для композиции элементарных функций, когда результат может быть записан через элементарные функции и алгебраические и трансцендентные постоянные, привлекает внимание математиков с давних времен. И несмотря на то, что общие подходы достаточно понятны, эта задача в виде библиотеки программ все еще ждет своего решения. Мы надеемся, что настоящее описание текущего состояния библиотеки программ в системе MathPartner будет полезным и позволит приблизить полное решение этой классической математической задачи.

6. Благодарности

Автор благодарит профессора Г.И. Малашонка за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также выражает признательность участникам семинара по компьютерной алгебре ТГУ за критику.

Список литературы

- [1] Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье, *Компьютерная алгебра. Системы и алгоритмы алгебраических вычислений*, Мир, М., 1991.
- [2] М. Bronstein, *Symbolic Integration Tutorial*, ISSAC'98 and Differential Algebra Workshop (Rostock, August 1998; Rutgers, November 2000).
- [3] R. Risch, "The problem of integration in finite terms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 167–189.
- [4] B. Terelius, *Symbolic Integration*, Master of science thesis, Stockholm, 2009.
- [5] Д. А. Павлов, "Символьное интегрирование", *Компьютерные инструменты в образовании*, 2010, № 2, 38–43.

- [6] Г. И. Малашонок, *Руководство по языку "Mathpar"*, Издательство Тамбовского университета, Тамбов, 2013.
- [7] Е. В. Панкратьев, *Элементы компьютерной алгебры*, МГУ, М., 2007.
- [8] С. М. Тарарова, "К проблеме построения алгоритма символьного интегрирования", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17:2** (2012), 607-617.

References

- [1] J. Davenport, Y. Siret, E. Tournier, *Computer Algebra. Systems and Algorithms of Algebraic Computation*, Mir, Moscow, 1991 (In Russian).
- [2] M. Bronstein, *Symbolic Integration Tutorial*, ISSAC'98 and Differential Algebra Workshop (Rostock, August 1998; Rutgers, November 2000).
- [3] R. Risch, "The problem of integration in finite terms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, 167–189.
- [4] B. Terelius, *Symbolic Integration*, Master of science thesis, Stockholm, 2009.
- [5] D. A. Pavlov, "Symbolic integration", *Computer Tools in Education*, 2010, №2, 38–43 (In Russian).
- [6] G. I. Malaschonok, *Language Guide "Mathpar"*, Publishing House of Tambov University, Tambov, 2013 (In Russian).
- [7] E. V. Pankrat'yev, *Elements of Computer Algebra*, MSU, Moscow, 2007 (In Russian).
- [8] S. M. Tararova, "To the problem of constructing an algorithm for symbolic integration", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17:2** (2012), 607-617 (In Russian).

Информация об авторе

Корабельников Вячеслав Алексеевич, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: korabelnikov.va@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>

Поступила в редакцию 23.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.

Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the author

Vyacheslav A. Korabelnikov, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation. E-mail: korabelnikov.va@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>

Received 23 January 2019

Reviewed 27 February 2019

Accepted for press 28 March 2019

© Логачева Л.Ф., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98

УДК 517.555

О дифференциально-операторных уравнениях в частных производных в локально выпуклых пространствах

Людмила Федоровна ЛОГАЧЕВА

ФГБОУ ВО «Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева»

302026, Российская Федерация, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5337-6453>, e-mail: milalog29@mail.ru

On differential-operator partial differential equations in locally convex spaces

Lyudmila F. LOGACHEVA

Orel State University named after I.S. Turgenev

95 Komsomolskaya St., Orel 302026, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5337-6453>, e-mail: milalog29@mail.ru

Аннотация. Рассматривается дифференциально-операторное уравнение первого порядка в частных производных относительно векторнозначной аналитической вектор-функции двух переменных со значениями в локально-выпуклом пространстве. Актуальность исследования обуславливается сложностью, а порой и невозможностью перенесения существующих методов исследования дифференциально-операторных уравнений в частных производных с нормированных пространств на локально выпуклые пространства. В работе сформулирована и доказана теорема о существовании и единственности решения дифференциально-операторного уравнения первого порядка в частных производных. В этом утверждении существенно используются предложенные и исследованные В.П. Громовым понятия порядка и типа оператора. На основе полученных результатов получены решения двух конкретных дифференциально-операторных уравнений.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство; порядок; тип; линейный оператор; метод; дифференциально-операторное уравнение в частных производных

Для цитирования: Логачева Л. Ф. О дифференциально-операторных уравнениях в частных производных в локально выпуклых пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 90–98. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98

Abstract. We consider the differential operator equation of the first order in partial derivatives with respect to vectorvalued analytical vector function of two variables with values in the locally convex space. The relevance of the study is due to the complexity, and sometimes the impossibility of transferring existing methods for the study of differential-operator partial differential equations from normalized spaces to locally convex spaces. The theorem on the existence and uniqueness of the solution of the first-order differential operator equation in partial derivatives is formulated and proved. This statement essentially uses the concepts of order and type of operator proposed and studied by V. P. Gromov. On the basis of the obtained results we get solutions of two specific operator-differential equations.

Keywords: locally convex space; order; type; linear operator; method; partial differential-operator equation in partial derivatives

For citation: Logacheva L. F. O differentsial'no-operatornykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh v lokal'no vypuklykh prostranstvakh [On differential-operator partial differential equations in locally convex spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 90–98. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-90-98 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория дифференциально-операторных уравнений в ненормированных, в частности, в локально выпуклых пространствах является значительно менее развитой, чем в банаховых. Отчасти тому причина — отсутствие в таких пространствах стандартных (как, например, в теории полугрупп) приёмов исследования уравнений или их систем достаточно сложной структуры. Объясняется это проблематичностью, а порой и невыполнимостью непосредственного перенесения уже существующих методов с нормированных пространств на ненормированные. Известные сейчас результаты в ненормированных пространствах относятся, преимущественно, к уравнениям первого порядка в классе вектор-функций действительного аргумента (см. работы В.М. Миллионщикова [1], [2], К. Иосиды [3], А.Н. Годунова [4], Я.В. Радыно [5], [6], С.Г. Лобанова [7], С.А. Шкарина [8]). В комплексном же случае такие задачи стали рассматриваться лишь в последние 20 лет в работах В.П. Громова [9]–[12], С.Н. Мишина [13], [14], В.П. Громова, С.Н. Мишина, С.В. Панюшкина [15]. Ими разработаны методы исследования задачи Коши в локально выпуклых пространствах над полем комплексных чисел для одного дифференциально-операторного уравнения, опирающиеся на понятия порядка и типа линейного оператора, а также порядка и типа фиксированного вектора относительно линейного оператора. При этом пространство подбирается (с большой свободой выбора) в соответствии с изучаемой задачей.

Ранее теория порядка и типа оператора была положена в основу решения ряда задач современного функционального анализа. К их числу, в частности, относятся: задача о представлении функций комплексных переменных рядами по собственным функциям линейного оператора [16]; задача о разложении векторов локально выпуклого пространства в обобщённый ряд Тейлора [17]; задача о полноте систем значений голоморфных вектор-функций [16], [18], [19]; изучение характеристик роста целых векторнозначных

функций [20], [9]; исследование подпространств локально выпуклого пространства, инвариантных относительно оператора конечных порядка и типа [21]; исследование решений операторных уравнений [9], [15] и др. Начала этой теории были заложены В.П. Громовым в работе [16] и получили дальнейшее обобщение в работах С.Н. Мишина [22]–[24]. Основные результаты, относящиеся к общей теории порядка и типа оператора, приведены в монографии [15].

Методы исследования дифференциально-операторных уравнений в частных производных в локально выпуклых пространствах разработаны не были, что и обуславливает актуальность настоящей работы.

1. Теорема существования решения

Пусть H — полное локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого задаётся системой полунорм $\{||\cdot||_p\}$ (банахово пространство не исключается) и пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий в H . Обозначим $D_\infty(A) = \bigcap_{k \geq 0} D(A^k)$, где $D(A^k)$ — область определения оператора A^k , $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$. Всюду в дальнейшем предполагается, что множество $D_\infty(A)$ не пусто.

Рассмотрим уравнение

$$A \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \quad (1.1)$$

где $u(t; \xi)$ — (векторнозначная) функция со значениями в H двух комплексных переменных t и ξ , аналитическая по совокупности переменных.

Ставится задача: описать условия существования и единственности и найти решение $u(t; \xi)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее следующему начальному условию:

$$u(t; \xi)|_{\xi=0} = g(t), \quad (1.2)$$

где $g(t)$ — векторнозначная аналитическая функция комплексного переменного t , и частные производные вектор-функции $u(t; \xi)$ понимаются в сильном смысле, т. е. по топологии пространства H . При этом значения производных всех порядков функции $g(t)$ принадлежат множеству $D_\infty(A)$.

Пусть оператор A имеет порядок β и тип α . Эти характеристики были введены в 1986 году В.П. Громовым [16], [17] для оператора, действующего в отделимом локально выпуклом пространстве.

Пусть A^n — последовательность степеней оператора A , $A^n : H \rightarrow H$.

Из непрерывности оператора A^n в локально выпуклом пространстве вытекает его ограниченность:

$$\forall n \forall p \exists C_p(n) \exists q(p, n) : \|A^n(x)\|_p \leq C_p \|x\|_q \quad \forall x \in H.$$

Скажем, что последовательность $\{A^n\}$ имеет порядок, если найдётся последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такая, что будет справедливо неравенство

$$\forall p \exists C_p \exists q(p) : \|c_n A^n(x)\|_p \leq C_p \|x\|_q \quad \forall x \in H \quad \forall n,$$

т. е., семейство операторов $\{c_n A^n\}$ будет равностепенно непрерывным (см. [25]). Среди последовательностей операторов, имеющих порядок, уделим внимание тем, для которых можно взять $c_n = n^{an}$, $a \in \mathbb{R}$ (они встречаются в приложениях наиболее часто).

Пусть

$$\theta(p, q, n) = \sup_{\|x\|_q \neq 0} \left\{ \frac{\|A^n(x)\|_p}{\|x\|_q} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$$

(случай $\theta(p, q, n) = +\infty$ не исключается). Положим по определению

$$\beta_{p,q}(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \theta(p, q, n)}{n \ln n}.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Число $\beta_p(A) = \inf_{q \in Q} \beta_{p,q}(A)$, $p \in P$ называется p -порядком последовательности операторов A^n , а число $\beta(A) = \sup_{p \in P} \{\beta_p(A)\}$ — её порядком.

Если последовательность операторов A^n имеет p -порядок $\beta_p(A) \neq \pm\infty$, то для неё вводится более тонкая характеристика. Положим

$$\alpha_{p,q}(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-\beta_p(A)} \sqrt[n]{\theta(p, q, n)}.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Число $\alpha_p(A) = \inf_{q \in Q} \alpha_{p,q}(A)$, $p \in P$ называется p -типом последовательности операторов A^n при p -порядке $\beta_p(A)$, а число

$$\alpha(A) = \begin{cases} \sup_{p \in P} \{\alpha_p(A)\}, & \exists p \beta_p(A) = \beta(A), \\ 0, & \forall p \beta_p(A) < \beta(A) \end{cases}$$

— её типом при порядке $\beta(A)$.

Отметим, что p -порядок последовательности A может быть любым, а p -тип — только неотрицательным.

Теорема 1.1. При $\beta \leq 0$ для любой целой функции $g(t)$ задача (1.1) и (1.2) имеет единственное решение. Оно является аналитической вектор-функцией $u(t; \xi)$ со значениями в H и представляется в виде абсолютно сходящегося ряда:

$$u(t; \xi) = g(t - A\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n. \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $g(t)$ целая, то для любого $t \in \mathbb{C}$

$$\frac{\|g^{(n)}(t)\|_p}{n!} < C \cdot \delta^n, \quad \forall \delta > 0.$$

Применяя неравенство (1.8) из монографии [15]: $\|A^n(x)\|_p < C_p(\alpha + \varepsilon)^n n^{\beta n} \|x\|_q$, где $x \in H$, $C_p > 0$, $\varepsilon > 0$, p и q — индексы полунорм, оценим общий член ряда по произвольной полунорме p .

$$\left\| \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n \right\|_p \leq \frac{(\alpha + \varepsilon)^n \cdot n^{\beta n} \cdot \|g^{(n)}(t)\|_p \cdot |\xi|^n}{n!} < (\alpha + \varepsilon)^n \cdot n^{\beta n} \cdot C \cdot \delta^n \cdot |\xi|^n.$$

При $\beta \leq 0$ ряд абсолютно сходится для любого t и представляет собой целую функцию переменных t и ξ .

Подставляя в (1.3) $\xi = 0$ видим, что условие (1.2) выполняется.

Проверим, что функция $u(t; \xi)$ является решением уравнения (1.1).

$$A \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}(g^{(n+1)}(t))}{n!} \xi^n,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{(n-1)!} \xi^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}(g^{(k+1)}(t))}{k!} \xi^k.$$

Таким образом, функция $u(t; \xi)$ является целой функцией двух комплексных переменных t и ξ и представляет собой решение уравнения (1.1) при условии (1.2).

Докажем, что решение (1.3) задачи (1.1), (1.2) единственно. Действительно, предположим, что существуют два различных решения задачи (1.1), (1.2): $u_1(t; \xi)$ и $u_2(t; \xi)$. Рассмотрим разность $\delta(t; \xi) = u_1(t; \xi) - u_2(t; \xi)$. Подставляя $\delta(t; \xi)$ в задачу (1.1), (1.2), получаем, что $\delta(t; \xi)$ удовлетворяет уравнению (1.1), причём $\delta(t; \xi)|_{\xi=0} = 0$. Докажем, что $\delta(t; \xi) \equiv 0$. Так как $\delta(t; \xi)$ — целая функция переменных t и ξ , то она разлагается в двойной ряд Тейлора:

$$\delta(t; \xi) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{i,j} t^i \xi^j; \quad c_{i,j} \in H.$$

Подставив это разложение в уравнение (1.1) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях, получаем:

$$(j+1)c_{i,j+1} = (i+1)Ac_{i+1,j}.$$

Из этого равенства, а также из того факта, что $c_{i,0} = 0$ (в силу $\delta(t; \xi)|_{\xi=0} = 0$) вытекает, что $c_{i,j} = 0$ для любых i и j . Значит, $\delta(t; \xi) \equiv 0$. Следовательно, решение задачи (1.1), (1.2) единственно.

2. Приложения к конкретным уравнениям

Пример 2.1. Пусть $H = H(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|F\|_p = \max_{|z| \leq p} |F(z)|, \quad p = 1, 2, \dots, \quad F(z) \in H(\mathbb{C}),$$

и пусть $A(F) = \int_0^z F(t) dt$. Известно (см. [15]), что $\beta(A) = -1$. Найдём решение уравнения (1.1) при условии (1.2), где $g(t) = \sin tz$.

Согласно теореме (1.1), решение представляется в виде:

$$u(t; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}(\sin tz)}{(2n)!} \xi^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n+1}(\cos tz)}{(2n+1)!} \xi^{2n+1} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} \int_0^z (z-y)^{2n-1} \sin ty \, dy \cdot \xi^{2n} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} \cdot \frac{1}{(2n)!} \int_0^z (z-y)^{2n} \cos ty \, dy \cdot \xi^{2n+1} = \\
&= \int_0^z \sin ty \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z-y)^{2n-1} \cdot \xi^{2n}}{(2n)!(2n-1)!} \right) dy + \int_0^z \cos ty \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (z-y)^{2n}}{(2n-1)!(2n)!} \xi^{2n+1} \right) dy = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^z \sin ty \left(\xi (J'_0 2i\xi(z-y)) - J'_0 (-2i\xi(z-y)) \right) dy + \\
&+ \frac{\xi^2}{2} \int_0^z \cos ty \cdot (z-y) \cdot (J'_0 (2i\xi(z-y)) - J'_0 (-2i\xi(z-y))) dy,
\end{aligned}$$

где J'_0 — производная функции Бесселя.

Пример 2.2. Пусть s — пространство всех числовых последовательностей $x = (x_1; x_2; \dots)$ с топологией покоординатной сходимости, задаваемой мультинормой $\|x\|_p = \max_{k \leq p} |x_k|$. И пусть $A : S \rightarrow S$ — оператор сдвига вправо: $A(x_1; x_2; \dots) = (0; x_1; x_2; \dots)$. Известно (см. [15]), что $\beta(A) = -\infty$. Найдём решение уравнения (1.1) при условии (1.2), где $g(t) = (e^{at}; e^{at}; e^{at}; \dots)$, $a \in \mathbb{C}$.

Согласно теореме (1.1), решение представляется в виде:

$$\begin{aligned}
u(t; \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(g^{(n)}(t))}{n!} \xi^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ раз}}, a^n \cdot e^{at}, \dots) \xi^n = \\
&= \left(e^{at}, e^{at}(1 + a\xi), e^{at} \left(1 + a\xi + \frac{a^2 \xi^2}{2} \right), \dots, e^{at} \left(\sum_{i=0}^n \frac{a^i \xi^i}{i!} \right), \dots \right).
\end{aligned}$$

Отметим, что полученная векторнозначная функция $u(t; \xi)$ со значениями в s является целой по совокупности переменных t и ξ .

Список литературы

- [1] В. М. Миллионщиков, “К теории дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ в локально выпуклых пространствах”, *Докл. АН СССР*, **131**:3 (1960), 510–513.
- [2] В. М. Миллионщиков, “К теории дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Математический сборник*, **57(99)**:4 (1962), 385–406.
- [3] К. Yosida, “Time dependent evolution equations in locally convex space”, *Math. Ann.*, **162**:1 (1965), 83–86.

- [4] А. Н. Годунов, “О линейных дифференциальных уравнениях в локально выпуклых пространствах”, *Вестник МГУ*, 1974, № 5, 31–39.
- [5] Я. В. Радыно, “Линейные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах. II. Свойства решений”, *Дифференциальные уравнения*, **13**:9 (1977), 1615–1624.
- [6] Я. В. Радыно, *Линейные уравнения и борнология*, Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, Минск, 1982.
- [7] С. Г. Лобанов, “О разрешимости линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Вестник МГУ*, 1980, № 2, 3–7.
- [8] С. А. Шкарин, “Несколько результатов о разрешимости обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Математический сборник*, **181**:9 (1990), 1183–1195.
- [9] В. П. Громов, “Операторный метод решения линейных уравнений”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 4–36.
- [10] В. П. Громов, “Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Докл. АН РФ*, **394**:3 (2004), 305–307.
- [11] В. П. Громов, “Операторный метод решения задачи Коши дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2006, 4–18.
- [12] В. П. Громов, “Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначных функций”, *Математические заметки*, **82**:2 (2007), 190–200.
- [13] С. Н. Мишин, “Дифференциально-операторные уравнения в локально выпуклых пространствах”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2006, 46–61.
- [14] С. Н. Мишин, “Дифференциально-операторные уравнения вида $(P - A)^\nu u(t) = f(t)$ ”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2010, 55–66.
- [15] В. П. Громов, С. Н. Мишин, С. В. Панюшкин, *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения*, Монография, ОГУ, Орел, 2009, 430 с.
- [16] В. П. Громов, “Порядок и тип линейного оператора и разложение в ряд по собственным функциям”, *Докл. АН СССР*, **228**:1 (1986), 27–31.
- [17] В. П. Громов, “Аналоги разложения Тейлора”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **5**:3 (1999), 801–808.
- [18] В. П. Громов, “О полноте значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 1999, 24–37.
- [19] О. Д. Соломатин, “О полноте систем обобщенных экспонент в пространстве Фреше”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 37–46.
- [20] В. П. Громов, “Целые векторнозначные функции со значением в локально выпуклом пространстве и их применение”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2003, 4–24.
- [21] О. Д. Соломатин, “К вопросу об инвариантных подпространствах локально-выпуклых пространств”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **3**:3 (1997), 937–946.
- [22] С. Н. Мишин, “О порядке и типе оператора”, *Докл. АН РФ*, **381**:3 (2001), 309–312.
- [23] С. Н. Мишин, *Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Орел, 2002, 116 с.
- [24] С. Н. Мишин, “Порядок и тип оператора и последовательности операторов, действующих в локально выпуклых пространствах”, *Ученые записки (Лаборатория теории функций и функционального анализа)*, Изд-во ОГУ, Орел, 2002, 47–99.

- [25] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.

References

- [1] V. M. Millionshchikov, "A contribution to the theory of differential equations $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ in locally convex spaces", *Doklady Mathematics*, **131**:3 (1960), 510–513 (In Russian).
- [2] V. M. Millionshchikov, "On the theory of differential equations in locally convex spaces", *Mat. Sb. (N.S.)*, **57(99)**:4 (1962), 385–406 (In Russian).
- [3] K. Yosida, "Time dependent evolution equations in locally convex space", *Math. Ann.*, **162**:1 (1965), 83–86.
- [4] A. N. Godunov, "On linear differential equations in locally convex spaces", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1974, № 5, 31–39 (In Russian).
- [5] Ya. V. Radyno, "Linear differential equations in locally convex spaces. II. Properties of the solutions", *Differ. Equ.*, **13**:9 (1977), 1615–1624 (In Russian).
- [6] Ya. V. Radyno, *Linear Equations and Bornology*, Publishing house of the Belarusian State University named after V.I. Lenin, Minsk, 1982 (In Russian).
- [7] S. G. Lobanov, "On the solvability of linear ordinary differential equations in locally convex spaces", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1980, № 2, 3–7 (In Russian).
- [8] S. A. Shkarin, "Some results on solvability of ordinary linear differential equations in locally convex spaces", *Math. USSR-Sb.*, **71**:1 (1992), 29–40.
- [9] V. P. Gromov, "Operator method for solving linear equations", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 4–36 (In Russian).
- [10] V. P. Gromov, "Analytic solutions of differential-operator equations in locally convex spaces", *Doklady Mathematics*, **394**:3 (2004), 305–307 (In Russian).
- [11] V. P. Gromov, "The Operator Method for Solving the Cauchy Problem of Differential Operator Equations with Variable Coefficients", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2006, 4–18 (In Russian).
- [12] V. P. Gromov, "The Cauchy problem for convolution equations in spaces of analytic vector-valued functions", *Math. Notes*, **82**:2 (2007), 165–173.
- [13] S. N. Mishin, "Differential-operator equations in locally convex spaces", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2006, 46–61 (In Russian).
- [14] S. N. Mishin, "Differential-operator equations of the form $(P - A)^\nu u(t) = f(t)$ ", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2010, 55–66 (In Russian).
- [15] V. P. Gromov, S. N. Mishin, S. V. Panyushkin, *Operators of Finite Order and Differential-Operator Equations*, Monograph, OSU, Orel, 2009 (In Russian).
- [16] V. P. Gromov, "The order and type of a linear operator and the expansion in a series of eigenfunctions", *Doklady Mathematics*, **228**:1 (1986), 27–31 (In Russian).
- [17] V. P. Gromov, "Analogues of Taylor series", *J. Math. Sci.*, **5**:3 (1999), 801–808 (In Russian).
- [18] V. P. Gromov, "On the completeness of the values of a holomorphic vector-function in the Frechet space", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 1999, 24–37 (In Russian).
- [19] O. D. Solomatin, "On the completeness of systems of generalized exponentials in a Frechet space", *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 37–46 (In Russian).

- [20] V. P. Gromov, “Entire vector-valued functions with value in locally convex space and their application”, *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2003, 4–24 (In Russian).
- [21] O. D. Solomatin, “On the question of invariant subspaces of locally convex spaces”, *J. Math. Sci.*, **3**:3 (1997), 937–946 (In Russian).
- [22] S. N. Mishin, “On the order and type of the operator”, *Doklady Mathematics*, **381**:3 (2001), 309–312 (In Russian).
- [23] S. N. Mishin, *Operators of Finite Order in Locally Convex Spaces and Their Application*, Diss. . . . cand. phys.-mat. sciences, Orel, 2002 (In Russian).
- [24] S. N. Mishin, “The order and type of the operator and the sequence of operators acting in locally convex spaces”, *Scientific Notes (Laboratory of the Theory of Functions and Functional Analysis)*, OSU Publ., Orel, 2002, 47–99 (In Russian).
- [25] M. Reid, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. V. 1: Functional analysis*, World, Moscow, 1977 (In Russian).

Информация об авторе

Логачева Людмила Федоровна, аспирант, кафедра математики и прикладных информационных технологий им. Н.А. Ильиной. Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, г. Орел, Российская Федерация. E-mail: milalog29@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5337-6453>

Поступила в редакцию 17.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.

Принята к публикации 28.03.2019 г.

Information about the author

Lyudmila F. Logacheva, Post-Graduate Student, Mathematics and Applied Information Technologies Department named after N.A. Ilyina. Orel State University named after I.S. Turgenev, Orel, the Russian Federation. E-mail: milalog29@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5337-6453>

Received 17 January 2019

Reviewed 27 February 2019

Accepted for press 28 March 2019

© Николаев А.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111

УДК 517.957.6

Убывание решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза при больших временах

Артем Александрович НИКОЛАЕВ

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М. Маклая, 6

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4561-8990>, e-mail: nicepeopleproject@gmail.com

Decay of the solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation at large times

Artyom A. NIKOLAYEV

RUDN University

6 Mikhlukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4561-8990>, e-mail: nicepeopleproject@gmail.com

Аннотация. В данной работе доказано существование слабых решений для нелинейного обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза и найдены условия, при которых слабые решения убывают к нулю при больших временах.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза; начально-краевая задача; слабое решение; убывание

Для цитирования: Николаев А. А. Убывание решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 99–111. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111

Abstract. In this paper the existence of weak solutions of the nonlinear generalized KdV equation is shown and conditions for which weak solutions decay to zero at large times are obtained.

Keywords: Korteweg–de Vries equation; initial-boundary problem; weak solution; decay

For citation: Nikolayev A. A. Ubyvanie resheniy obobshchennogo uravneniya Kortevega–de Friza pri bol'shih vremenakh [Decay of the solutions of the generalized Korteweg–de Vries equation at large times]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 99–111. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-99-111 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Рассмотрим в $Q_T = (0, T) \times (0, L)$, $0 < T \leq +\infty$, $0 < L < +\infty$, начально-краевую задачу

$$u_t + au_x + u_{xxx} + g(u)u_x = 0, \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \forall x \in (0, L), \quad (2)$$

$$u(t, 0) = u(t, L) = u_x(t, L) = 0, \forall t \in (0, T), \quad (3)$$

где $a \in \mathbb{R}$, функция $g \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$|g'(u)| \leq C(|u| + 1), \forall u. \quad (4)$$

Класс таких уравнений включает в себя уравнение Кортевега–де Фриза $g(u) = u$ и модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза $g(u) = \pm u^2$, которые описывают распространение одномерных нелинейных волн в средах с дисперсией и без диссипации.

Аналогичные вопросы были ранее рассмотрены в статьях [1]–[4]. В статье [1] рассматривается задача для уравнения

$$u_t + u_x + u_{xxx} + g(u)u_x + b(x)u = 0, 0 \leq x \leq L \quad (5)$$

с начально-краевыми условиями (2), (3). Предполагается, что функция b неотрицательная и лежит в пространстве $L_2(0, L)$. Функция g такая, что $g(0) = 0$ и удовлетворяет следующему условию роста

$$|g^{(j)}(u)| \leq C(1 + |u|^{p-j}), \forall u \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

для $j = 0, 1$, если $1 \leq p < 2$ и для $j = 0, 1, 2$, если $p \geq 2$. В случае, когда $u_0 \in L_2(0, L)$, было показано, что для любого $p \in [1, 2)$ и $T > 0$ задача (5), (2), (3) имеет единственное решение в пространстве $C([0, T]; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L))$. Также было показано, что в случае, когда $u_0 \in L_2(0, L)$, $p \in [2, 4)$, для любого $T > 0$ задача (5), (2), (3) имеет решение в пространстве $C_w([0, T]; L_2(0, L)) \cap L_2([0, T]; H^1(0, L))$. В случае, если дополнительно известно, что носитель функции b содержит открытое непустое подмножество $(0, L)$, то при $p \in [1, 4)$ для таких решений найдутся число $\nu > 0$, зависящее только от L , и неубывающая непрерывная функция $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что для всех $t > 0$ выполняется неравенство

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(0, L)} \leq \beta(\|u_0\|_{L_2(0, L)})e^{-\nu t}.$$

Ранее в статье [2] для задачи (5), (2), (3) были получены аналогичные результаты в том случае, когда (6) справедливо при $p = 1$ и выполнены более сильные условия на b , чем в статье [1].

В статье [3] было показано, что в случае $g(u) = u^4$ (т. е., когда условие (6) выполняется при $p = 4$), $b \in L_\infty(0, L)$, и $u_0 \in L_2(0, L)$ имеет достаточно малую норму, задача (5), (2), (3) имеет решение в пространстве $C([0, T]; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H_0^1(0, L))$ при любом $T > 0$. В том случае, когда $\|u_0\|_{L_2(0, L)} < R$ для некоторого малого $R > 0$, существуют положительные константы $C = C(R, T)$ и $\mu = \mu(R)$ такие, что неравенство

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2(0, L)} \leq C\|u_0\|_{L_2(0, L)}^2 e^{-\mu t}$$

выполняется для всех $t > 0$.

В статье [4] рассматривались вопросы о существовании, единственности решений и их убывании при больших временах для начально-краевой задачи на Q_T в случае более общих уравнений. В частности, из результатов [4] следует, что начально-краевая задача с условиями (2), (3) для уравнения

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t, x),$$

имеет решение в пространстве $C([0, T]; L_2(0, 1)) \cap L_2(0, T; H^1(0, 1))$ для любого $T > 0$, если $u_0 \in L_2(0, 1)$ и $f \in L_1(0, T; L_2(0, 1))$. В предположении, что $f \equiv 0$ и начальное значение u_0 мало в норме $L_2(0, L)$, была получена оценка

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2(0,1)}^2 \leq 2e^{-kt} \|u_0\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (7)$$

где k некоторая постоянная определенная в статье.

В статье [5] был рассмотрен вопрос о том, является ли условие малости начальных данных для уравнения Кортевега–де Фриза и модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с начально-краевыми условиями (2), (3) необходимым для убывания решений к нулю при больших временах. Для ответа на этот вопрос в статье были найдены условия, при которых данные задачи имеют стационарные решения $u = u(x)$.

В данной статье мы покажем, что если $u_0 \in L_2(0, L)$, то задача (1)–(3) имеет решение в пространстве $C([0, T]; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L))$ для любого $T > 0$, т. е. в том случае, когда $p = 2$, $j = 0, 1$ в (6) и $b(x) \equiv 0$ в (5). В случае, когда начальные данные достаточно малы, будет определен интервал значений α , при которых решение убывает к нулю при больших временах и выполнена оценка, аналогичная (7).

Пусть $T > 0$. Определим пространство

$$X_0(Q_T) = C([0, T]; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L)).$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$. Под обобщенным решением задачи (1)–(3) для некоторого $T > 0$ мы будем понимать функцию $u \in X_0(Q_T)$ для которой при любой функции $\phi \in L_2(0, T; H^3(0, L))$ такой, что $\phi_t \in L_2(Q_T)$, $\phi|_{t=T} = \phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} = \phi_x|_{x=0} = 0$, выполняется равенство

$$\int_0^T \int_0^L (u\phi_t + au\phi_x + u\phi_{xxx} - g(u)u_x\phi) dx dt + \int_0^L u_0(x)\phi(0, x) dx = 0. \quad (8)$$

Сформулируем основные результаты статьи.

Теорема 1. Если $u_0 \in L_2(0, L)$, то для любого $T > 0$ существует обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1)–(3).

З а м е ч а н и е 1. Единственность решения следует из [6, Theorem 6.4], где она установлена в более широком пространстве $L_\infty(0, T; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L))$.

Теорема 2. Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$, $T > 0$,

$$CL^2 < 12,$$

где постоянная C из условия (4). Пусть для некоторого $A \in \left(\frac{CL^2}{4}, 3\right)$ выполняются неравенства

$$\|u_0\|_{L_2(0,L)} \leq \left(\frac{8A}{CL} - 2L\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$a < \frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)}. \quad (10)$$

Тогда единственное решение $u \in X_0(Q_T)$ задачи (1)–(3) при всех $t \in [0, T]$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t, \cdot)\|_{L_2(0,L)}^2 \leq (1+L)e^{\left(-\frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)} + a'\right)t} \|u_0\|_{L_2(0,L)}^2, \quad (11)$$

где

$$a' = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ \frac{a}{1+L}, & a < 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 мы проведем поэтапно, сначала рассмотрим начально-краевую задачу для регуляризованного уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} + g_h(u)u_x = 0, \quad (12)$$

сохранив начально-краевые условия (2), (3), где

$$g'_h(u) = g'(u)\eta(2 - h|u|) + \frac{2}{h}\eta(h|u| - 1), \quad g_h(0) = g(0), \quad (13)$$

а $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ — «срезающая» функция такая, что $\eta(t) = 0$ при всех $t \leq 0$, $\eta'(t) > 0$, $\eta(t) + \eta(1-t) = 1$ при всех $t \in (0, 1)$, и $\eta(t) = 1$ при всех $t \geq 1$. Заметим, что $g_h(u)$ сходится поточечно к $g(u)$ при $h \rightarrow 0$.

В ходе дальнейших рассуждений мы будем часто использовать оценки для функций $g_h(u)$ и $g'_h(u)$:

$$|g'_h(u)| \leq C(h), \quad |g_h(u)| \leq C(h)(|u| + 1), \quad \forall u, \quad (14)$$

и их равномерные по h аналоги

$$|g'_h(u)| \leq C(|u| + 1), \quad |g_h(u)| \leq C(u^2 + 1), \quad \forall u. \quad (15)$$

Данные оценки нетрудно получить из условий (4) и (13).

Теперь покажем, что задача для уравнения (12) с начально-краевыми условиями (2), (3) разрешима локально по времени. В [4, Lemma 4.3] было показано, что у линейной начально-краевой задачи на Q_T для уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} = f(t, x), \quad (16)$$

с условиями (2), (3) существует обобщенное решение $u(t, x)$ из пространства $X_0(Q_T)$ в том случае, когда $u_0 \in L_2(0, L)$, $f \in L_1(0, T; L_2(0, L))$. В этом случае при любом $t_0 \in (0, T]$ справедлива оценка

$$\|u\|_{X_0(Q_{t_0})} \leq C(T, L)(\|u_0\|_{L_2(0, L)} + \|f\|_{L_1(0, T; L_2(0, L))}). \quad (17)$$

Обобщенное решение задачи (16), (2), (3) понимается в смысле, аналогичном определению 1. Сформулируем другие условия существования обобщенного решения задачи.

Утверждение 1. Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$, тогда существует $t^* > 0$ такое, что задача для уравнения (12) с начальными-краевыми условиями (2), (3) имеет обобщенное решение.

Доказательство. Пусть $t_0 > 0$, зададим на множестве $X_0(Q_{t_0})$ отображение Λ следующим образом: $u = \Lambda v \in X_0(Q_{t_0})$ является решением на Q_{t_0} начально-краевой задачи для уравнения

$$u_t + au_x + u_{xxx} = -g_h(v)v_x \quad (18)$$

с условиями (2), (3). Покажем, что правая часть (18) лежит в пространстве $L_1(0, t_0; L_2(0, L))$. Воспользуемся оценкой (14) и интерполяционным неравенством для функций $u \in H_0^1(0, L)$, $\sup_{x \in (0, L)} u^2(x) \leq 2 \left(\int_0^L u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L u_x^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} \|g_h(v)v_x\|_{L_1(0, t_0; L_2(0, L))} &\leq C(h) \int_0^{t_0} \left(\int_0^L (v^2 + 1)v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq C(h) \left(\int_0^{t_0} \sup_{x \in (0, L)} |v| \left(\int_0^L v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt + t_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_0} \int_0^L v_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C(h) \left(\left(\int_0^{t_0} \sup_{x \in (0, L)} v^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_0} \int_0^L v_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + t_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_0} \int_0^L v_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C(h) \|v_x\|_{L_2(Q_{t_0})} \left(\left(\int_0^{t_0} \left(\int_0^L v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{1}{2}} + t_0^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C(h) \|v\|_{X_0(Q_{t_0})} \left(\left(\sup_{t \in (0, t_0)} \|v(t, \cdot)\|_{L_2(0, L)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{t_0} \left(\int_0^L v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \right)^{\frac{1}{2}} + t_0^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C(h) t_0^{\frac{1}{4}} \|v\|_{X_0(Q_{t_0})} (\|v\|_{X_0(Q_{t_0})} + t_0^{\frac{1}{4}}). \quad (19) \end{aligned}$$

Из предыдущего неравенства следует, что условия [4, Lemma 4.3] выполнены. Получаем, что для любого v существует решение $u \in X_0(Q_{t_0})$ задачи (18), (2), (3), а значит,

отображение Λ существует. Воспользуемся оценкой (17), получим

$$\begin{aligned} \|\Lambda v\|_{X_0(Q_{t_0})} &\leq c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,L)} + \|g_h(v)v_x\|_{L_1(0,t_0;L_2(0,L))}) \leq \\ &\leq c(T)(\|u_0\|_{L_2(0,L)} + C(h)t_0^{\frac{1}{4}}\|v\|_{X_0(Q_{t_0})}(\|v\|_{X_0(Q_{t_0})} + t_0^{\frac{1}{4}})). \end{aligned}$$

Выберем $R = \max\{2c(T)\|u_0\|_{L_2(0,L)}, 2c(T)\}$,

$$t_1 = -\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{R^2}{4} + \frac{1}{2C(h)}}.$$

Тогда если $t_2 \leq t_1$, $\|v\|_{X_0(Q_{t_2})} \leq R$, то

$$\|\Lambda v\|_{X_0(Q_{t_2})} \leq R,$$

т. е. отображение $\Lambda : v \rightarrow u$ переводит шар радиуса R с центром в нуле в пространстве $X_0(Q_{t_2})$ в себя. Теперь возьмем две функции $v, \tilde{v} \in X_0(Q_{t_2})$, которые лежат в шаре радиуса R с центром в нуле, тогда $\omega = \Lambda v - \Lambda \tilde{v}$ является решением задачи для уравнения

$$\omega_t + a\omega_x + \omega_{xxx} = -g_h(v)v_x + g_h(\tilde{v})\tilde{v}_x \quad (20)$$

с нулевыми начальными условиями. По аналогии, с оценкой (19) получим оценку правой части (20) в пространстве $L_1(0, t_2; L_2(0, L))$

$$\begin{aligned} \|g_h(\tilde{v})\tilde{v}_x - g_h(v)v_x\|_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} &= \|(g_h(\tilde{v}) - g_h(v))v_x + g_h(v)(\tilde{v}_x - v_x)\|_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} \leq \\ &\leq C\|\tilde{v} - v\|_{L_1(0,t_2;L_2(0,L))} \leq C \int_0^{t_2} \int_0^L (\tilde{v} - v)^2 \tilde{v}_x^2 + (v^2 + 1)((\tilde{v} - v)_x)^2 dx dt \leq \\ &\leq C\|\tilde{v} - v\|_{X_0(Q_{t_2})} t_2^{\frac{1}{4}} (\|\tilde{v}\|_{X_0(Q_{t_2})} + \|v\|_{X_0(Q_{t_2})} + t_2^{\frac{1}{4}}), \end{aligned}$$

а затем применим (17), получим

$$\|\Lambda v - \Lambda \tilde{v}\|_{X_0(Q_{t_2})} \leq C(T, h, \|v\|_{X_0(Q_{t_2})}, \|\tilde{v}\|_{X_0(Q_{t_2})}) t_2^{\frac{1}{4}} \|\tilde{v} - v\|_{X_0(Q_{t_2})}.$$

А значит, можем выбрать такое $t^* \leq t_2$, что отображение Λ при $t \in (0, t^*]$ будет сжимающим, следовательно, при таких t отображение будет иметь одну стационарную точку, которая и будет решением уравнения (12). $\square$

Далее продолжим локальное решение задачи (12), (2), (3) на $(0, T)$. Для этого рассмотрим вспомогательное утверждение.

Утверждение 2. Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$, $f \in L_1(0, T; L_2(0, L))$ для некоторого $T > 0$ и $u \in X_0(Q_T)$ является обобщенным решением задачи (16), (2), (3). Тогда существует функция $\mu \in L_2(0, L)$ такая, что $\forall t \in (0, T]$ справедливо равенство

$$\int_0^L u^2(t, x) dx + \int_0^t \mu^2(\tau) d\tau = \int_0^L u_0^2(x) dx + 2 \int_0^t \int_0^L f(\tau, x) u(\tau, x) dx d\tau. \quad (21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Осуществим переход к функциям, обладающими большей гладкостью. Согласно [7], если $u_0 \in D(A)$, где оператор $A = -(a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \lambda E)$, а $D(A) = \{g \in H^3(0, L) : g(0) = g(L) = g'(L) = 0\}$, функция $f \in C^1([0, T]; L_2(0, L))$, то существует единственное решение

$$u \in C([0, T]; H^3(0, L)) \cap C^1([0, T]; L_2(0, L)),$$

задачи (16), (2), (3). Домножим уравнение (16) на $2u$ и проинтегрируем по области Q_t . В результате для любого t из $(0, T]$ получим

$$\int_0^L u^2(t, x) dx + \int_0^t u_x^2|_{x=0} d\tau = \int_0^L u_0^2(x) dx + 2 \int_0^t \int_0^L f(x, \tau) u(x, \tau) dx d\tau. \quad (22)$$

Простыми преобразованиями получим, что

$$\|u\|_{C([0, t]; L_2(0, L))} + \|u_x|_{x=0}\|_{L_2(0, t)} \leq \|f\|_{L_1(0, t; L_2(0, L))} + \|u_0\|_{L_2(0, L)}. \quad (23)$$

Выберем такие последовательности $\{u_{0n}\}$, $u_{0n} \in D(A)$ и $\{f_n\}$, $f_n \in C^1([0, T]; L_2(0, L))$, которые сходятся к u_0 в $L_2(0, L)$ и к f в $L_1(0, T; L_2(0, L))$ соответственно. Тогда u_n — решение задачи (16), (2), (3), для правой части f_n и начальных данных u_{0n} . Очевидно, что $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C([0, T]; L_2(0, L))$ и

$$\|u - u_n\|_{C([0, t]; L_2(0, L))} \rightarrow 0.$$

Это означает, что пределом последовательности $\{u_n\}$ является обобщенное решение u . Из оценки (23), примененной к равенству (22), легко доказать, что последовательность $\{u_{nx}|_{x=0}\}$ фундаментальна и следовательно имеет пределом некоторую функцию $\mu \in L_2(0, L)$. Перейдя к пределу на множестве гладких функций в (22) получим необходимое равенство в общем случае. $\square$

Следствие 1. Пусть для некоторого $T > 0$ функция $u \in X_0(Q_T)$ является решением задачи (12), (2), (3), где $u_0 \in L_2(0, L)$. Тогда выполняется равенство

$$\|u\|_{C([0, T], L_2(0, L))} = \|u_0\|_{L_2(0, L)}. \quad (24)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (19) следует, что $-g_h(u)u_x \in L_1(0, T; L_2(0, L))$. Из равенства

$$\int_0^T \int_0^L -g_h(u)u_x u(t, x) dx dt = - \int_0^T \int_0^L \left(\int_0^u g_h(\theta) \theta d\theta \right)_x dx dt = 0,$$

и (21) следует (24). $\square$

Из следствия 1 получаем утверждение о существовании глобального решения задачи (12), (2), (3).

Утверждение 3. Если $u_0 \in L_2(0, L)$, то задача (12), (2), (3) имеет обобщенное решение в $X_0(Q_T)$ для любого $T > 0$.

Далее мы устремим $h \rightarrow 0$ в (12) и перейдем к первоначальной задаче (1)–(3), для успешной реализации задуманного нам потребуется оценка на производную функции u_h , такая оценка окажется следствием следующего утверждения.

Утверждение 4. Если $u_0 \in L_2(0, L)$, $f \in L_1(0, T; L_2(0, L))$ для некоторого $T > 0$ и $u \in X_0(Q_T)$ является обобщенным решением задачи (16), (2), (3), то для любого $t \in (0, T]$ справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned} \int_0^L (1+x)u^2(t, x)dx + 3 \int_0^t \int_0^L u_x^2(\tau, x)dx d\tau + \int_0^t \mu^2(\tau) d\tau = \int_0^L (1+x)u_0^2(x)dx + \\ + a \int_0^t \int_0^L u^2(\tau, x)dx d\tau + 2 \int_0^t \int_0^L (1+x)f(\tau, x)u(\tau, x)dx d\tau, \quad (25) \end{aligned}$$

где μ из утверждения 21.

Доказательство. Сначала, как при доказательстве утверждения 2, получим равенство (25) в гладком случае после домножения уравнения (16) на $2(1+x)u$ и интегрирования по области Q_t . Простыми преобразованиями получим

$$\|u_x\|_{L_2(Q_t)} \leq C(\|u_0\|_{L_2(0, L)} + \|f\|_{L_1(0, T; L_2(0, L))}) \forall t \in (0, T).$$

На основании данного неравенства и рассуждениями, аналогичными доказательству утверждения 2, совершим предельный переход в (25) в гладком случае и получим (25) в общем случае. $\square$

Следствие 2. Пусть $u_0 \in L_2(0, L)$, тогда для обобщенного решения $u \in X_0(Q_T)$ задачи (12), (2), (3) справедливо неравенство

$$\|u_x\|_{L_2(Q_T)} \leq C(a, L, T, \|u_0\|_{L_2(Q_T)}). \quad (26)$$

Доказательство. Из (19) следует, что $-g_h(u)u_x \in L_1(0, T, L_2(0, L))$. Обозначим $\|u_0\|_{L_2(0, L)} = C_1$. В следующей оценке воспользуемся (24), (25), (15), получим

$$\begin{aligned} 3 \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \leq \int_0^L (1+x)u_0^2 dx + a \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt - 2 \int_0^T \int_0^L (1+x)g(u)uu_x dx dt \leq \\ \leq \int_0^L (1+x)u_0^2 dx + a \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + 2 \int_0^T \int_0^L \left| \int_0^u g(\theta)\theta d\theta \right| dx dt \leq (1+L)C_1^2 + |a|C_1^2T + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \int_0^T \int_0^L (u^4 + u^2) dx dt \leq (1+L)C_1^2 + |a|C_1^2 T + C_2 C_1^2 \left(\int_0^T \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt + T \right) \leq \\
& \leq (1+L)C_1^2 + |a|C_1^2 T + C_2 C_1^2 \left(\frac{C_2 C_1^2}{4} \int_0^T \int_0^L u^2 dx dt + \frac{2}{C_2 C_1^2} \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt + T \right) \leq \\
& \leq (1+L)C_1^2 + |a|C_1^2 T + \frac{C_2^2 C_1^6}{4} T + 2 \int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt + C_2 C_1^2 T,
\end{aligned}$$

тогда справедливо (26). $\square$

Докажем теорему 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения 3 следует, что для любого $h > 0$ существует решение $u_h \in X_0(Q_T)$ задачи (12), (2), (3). Искомое решение задачи (1), (2), (3) будем строить как предел решений. Из (26) следует, равномерная оценка по h

$$\|u_h\|_{L_2(0,T;H^1(0,L))} \leq C,$$

из которой получаем, что равномерно по h выполнено

$$\|u_{hxxx}\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))} \leq C.$$

Пусть $g_h(u_h)u_{hx} = (g_h^*(u_h))_x$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \|g_h(u_h)u_{hx}\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))} \leq \|g_h^*(u_h)\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,L))} \leq \|g_h^*(u_h)\|_{L_2(0,T;L_1(0,L))} \leq \\
& \leq \left(\int_0^T \left(\int_0^L \int_0^L |g_h(\theta)| d\theta dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_0^T \left(\int_0^L |u_h|^3 + |u_h| dx \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C \left(\int_0^T \sup_{x \in (0,L)} u_h^2 \left(\left(\int_0^L u_h^2 dx \right)^2 + L^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq CT^{\frac{1}{2}} (\|u_h\|_{X_0(Q_T)}^2 + L^2) \|u_h\|_{X_0(Q_T)} \leq C.
\end{aligned}$$

Из написанных оценок и равенства (12) следует, что

$$\|u_{ht}\|_{L_2(0,T;H^{-2}(0,L))} \leq C, \quad (27)$$

Из ранее полученных оценок (24), (26), (27) и в силу того, что $L_\infty(0,T;L_2(0,L)) = (L_1(0,T;L_2(0,L)))^*$, получаем, что можем выделить такую подпоследовательность u_{h_n} , что

$$\begin{aligned}
u_{h_n} & \rightarrow u \quad \text{*}-слабо в } L_\infty(0,T;L_2(0,L)), \\
u_{h_n x} & \rightarrow u_x \quad \text{слабо в } L_2(Q_T), \\
u_{h_n} & \rightarrow u \quad \text{сильно в } L_2(Q_T).
\end{aligned}$$

Перейдем к пределу в нелинейном члене интегрального тождества (8) при $h = h_n$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_0^L (g_h^*(u_h) - g^*(u)) \phi_x dx dt \right| &\leq \int_0^T \int_0^L |(g_h^*(u) - g^*(u)) \phi_x| dx dt + \\ &+ \int_0^T \int_0^L |(g_h^*(u_h) - g_h^*(u)) \phi_x| dx dt \quad (28) \end{aligned}$$

Ниже используется то, что ϕ_x лежит в пространстве $C([0, T]; L_2(0, L))$, это следует из того, что $\phi \in L_2(0, T; H^3(0, L))$ и $\phi_t \in L_2(0, T; L_2(0, L))$. Сходимость второго слагаемого в правой части неравенства (28) следует из неравенств

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L |(g_h^*(u_h) - g_h^*(u)) \phi_x| dx dt &\leq C \int_0^T \int_0^L (u_h^2 + u^2 + 1) |u_h - u| |\phi_x| dx dt \leq \\ &\leq C \|u_h - u\|_{L_2(Q_T)} \left(\int_0^T \int_0^L (u_h^2 + u^2 + 1)^2 \phi_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_1 \|u_h - u\|_{L_2(Q_T)} \|\phi_x\|_{C([0, T]; L_2(0, L))} \left(\int_0^T \sup_{x \in (0, L)} u^4 dt + \int_0^T \sup_{x \in (0, L)} u_h^4 dt + \int_0^T dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_2 \|u_h - u\|_{L_2(Q_T)} \|\phi_x\|_{C([0, T]; L_2(0, L))} \left(\int_0^T \int_0^L u^2 dx \int_0^L u_x^2 dx dt + \int_0^T \int_0^L u_h^2 dx \int_0^L u_{hx}^2 dx dt + T \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_2 \|u_h - u\|_{L_2(Q_T)} \|\phi_x\|_{C([0, T]; L_2(0, L))} \left(\|u\|_{C([0, T]; L_2(0, L))}^2 \|u\|_{L_2(0, T; H^1(0, L))}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|u_h\|_{C([0, T]; L_2(0, L))}^2 \|u_h\|_{L_2(0, T; H^1(0, L))}^2 + T \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_2 \|u_h - u\|_{L_2(Q_T)} \|\phi_x\|_{C([0, T]; L_2(0, L))} \left(\|u\|_{X_0(Q_T)}^4 + \|u_h\|_{X_0(Q_T)}^4 + T \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0. \quad (29) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (28) стремится к нулю по теореме Лебега, так как $g_h(\theta) \rightarrow g(\theta)$ поточечно при любом θ ,

$$\int_0^{|u|} |g_h(\theta) - g(\theta)| d\theta \leq C(|u|^3 + |u|),$$

и справедливо неравенство

$$\int_0^T \int_0^L (|u|^3 + |u|) |\phi_x| dx dt \leq C_1 \|\phi_x\|_{C([0, T]; L_2(0, L))} \|u\|_{L_2(Q_T)} \|u\|_{X_0(Q_T)}^2 < +\infty,$$

которое получается, аналогично оценке (29).

Таким образом, получаем, что $u \in L_\infty(0, T; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L))$ и удовлетворяет интегральному тождеству (8). Докажем, что $u \in X_0(Q_T)$. Для этого рассмотрим линейную задачу (16), (2), (3), где $f = -g(u)u_x$. Покажем, что $g(u)u_x \in L_1(0, T; L_2(0, L))$

$$\begin{aligned} \|g(u)u_x\|_{L_1(0,T;L_2(0,L))} &\leq C \int_0^T \left(\int_0^L (u^4 + 1)u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \leq \\ &\leq C \left(\int_0^T \sup_{x \in (0,L)} u^2 \left(\int_0^L u_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt + T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C \left(\int_0^T \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L u_x^2 dx \right) dt + T^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_0^L u_x^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\ &\leq C \left(\|u\|_{L_\infty(0,T;L_2(0,L))} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)} \right) \left(\|u_x\|_{L_2(Q_T)}^2 + T^{\frac{1}{2}} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда из [6, Theorem 6.4] следует, что такая линейная задача будет иметь единственное решение в пространстве $L_\infty(0, T; L_2(0, L)) \cap L_2(0, T; H^1(0, L))$. Из [4, Lemma 4.3] получим, что рассмотренная линейная задача будет иметь решение в $X_0(Q_T)$. $\square$

Докажем теорему 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим решение задачи (1)–(3), которая совпадает с задачей (16), (2), (3), в случае $f = -g(u)u_x$. Тогда можем воспользоваться (25) и получим

$$\begin{aligned} \int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 3 \int_0^t \int_0^L u_x^2(\tau,x)dx d\tau + \int_0^t \mu^2(\tau)d\tau &= \int_0^L (1+x)u_0^2(x)dx + \\ &+ a \int_0^t \int_0^L u^2(\tau,x)dx d\tau - 2 \int_0^t \int_0^L (1+x)g(u)uu_x dx d\tau. \end{aligned}$$

Очевидно, что все члены этого равенства абсолютно непрерывны по t . Из того, что

$$- \int_0^L (1+x)g(u)uu_x dx = \int_0^L \int_0^u g(\theta)\theta d\theta dx$$

получим, что справедлива оценка для п. в. t

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 3 \int_0^L u_x^2 dx &\leq a' \int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 2 \int_0^L \int_0^u g(\theta)\theta d\theta dx \leq \\ &\leq a' \int_0^L (1+x)u^2(t,x)dx + 2C \int_0^L \left(\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right) dx. \quad (30) \end{aligned}$$

Преобразуем (30), воспользовавшись следующим неравенством из [8]:

$$\|u\|_{L_\infty(0,L)} \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \|u_x\|_{L_2(0,L)}.$$

Получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L (1+x) u^2(t, x) dx \right) + \int_0^L \left(3-A+A-\frac{CL^2}{4}-\frac{CL}{8} \|u(t, \cdot)\|_{L_2(0,L)}^2 \right) u_x^2 dx \leq a' \int_0^L (1+x) u^2(t, x) dx.$$

Из условия (9) и соотношения (24) получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L (1+x) u^2(t, x) dx \right) + \int_0^L (3-A) u_x^2 dx \leq a' \int_0^L (1+x) u^2(t, x) dx.$$

Воспользуемся неравенством Стеклова

$$\|u\|_{L_2(0,L)} \leq \frac{L}{\pi} \|u_x\|_{L_2(0,L)},$$

получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^L (1+x) u^2(t, x) dx \right) \leq \left(-\frac{(3-A)\pi^2}{L^2(1+L)} + a' \right) \int_0^L (1+x) u^2 dx.$$

Далее, из условия (10) очевидными рассуждениями получаем (11). $\square$

Список литературы

- [1] L. Rosier, B.-Y. Zhang, “Global stabilization of the generalized Korteweg–de Vries equation posed on a finite domain”, *SIAM J. Control and Optimization*, **45**:3 (2006), 927–956.
- [2] G. Perla Menzala, C. F. Vasconcellos, E. Zuazua, “Stabilization of the Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **60**:1 (2002), 111–129.
- [3] F. Linares, A. F. Pazoto, “On the exponential decay of the critical generalized Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**:5 (2007), 1515–1522.
- [4] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Odd-order quasilinear evolution equations posed on a bounded interval”, *Bol. Soc. Paranaense Mat.*, **28**:1 (2010), 67–77.
- [5] A. V. Faminskii, A. Nikolayev, “On stationary solutions of KdV and mKdV equations”, *Differential and Difference Equations with Applications*, **164** (2016), 63–70.
- [6] A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order”, *Advances in Differential Equations*, **17**:5-6 (2012), 421–470.
- [7] A. Pazy, *Applied Mathematical Sciences*. V. 44, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [8] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai, K. Takemura, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ ”, *Sciential Mathematical Japonica Online*, 2008, 439–451.

References

- [1] L. Rosier, B.-Y. Zhang, “Global stabilization of the generalized Korteweg–de Vries equation posed on a finite domain”, *SIAM J. Control and Optimization*, **45**:3 (2006), 927–956.
- [2] G. Perla Menzala, C. F. Vasconcellos, E. Zuazua, “Stabilization of the Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Quarterly of Applied Mathematics*, **60**:1 (2002), 111–129.
- [3] F. Linares, A. F. Pazoto, “On the exponential decay of the critical generalized Korteweg–de Vries equation with localized damping”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**:5 (2007), 1515–1522.
- [4] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Odd-order quasilinear evolution equations posed on a bounded interval”, *Bol. Soc. Paranaense Mat.*, **28**:1 (2010), 67–77.
- [5] A. V. Faminskii, A. Nikolayev, “On stationary solutions of KdV and mKdV equations”, *Differential and Difference Equations with Applications*, **164** (2016), 63–70.
- [6] A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear evolution equations of an odd order”, *Advances in Differential Equations*, **17**:5-6 (2012), 421–470.
- [7] A. Pazy, *Applied Mathematical Sciences*. V. 44, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [8] Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Watanabe, A. Nagai, K. Takemura, “The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ ”, *Sciential Mathematical Japonica Online*, 2008, 439–451.

Информация об авторе

Николаев Артем Александрович, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: nicepeopleproject@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4561-8990>

Поступила в редакцию 10.01.2019 г.

Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.

Принята к публикации 14.03.2019 г.

Information about the author

Artyom A. Nikolayev, Post-Graduate Student, Nonlinear Analysis and Optimization Department. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: nicepeopleproject@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4561-8990>

Received 10 January 2019

Reviewed 11 February 2019

Accepted for press 14 March 2019

© Обуховский В.В., Гетманова Е.Н., Карпов М.Г., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118

УДК 517.988

О случайных точках равновесия

Валерий Владимирович ОБУХОВСКИЙ, Екатерина Николаевна ГЕТМАНОВА,
Михаил Георгиевич КАРПОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»

392000, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4201-0739>, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3667-7569>, e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

On random equilibrium points

Valeri V. OBUKHOVSKII, Ekaterina N. GETMANOVA, Michael G. KARPOV

Voronezh State Pedagogical University

86 Lenina St., Voronezh 394043, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4201-0739>, e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3667-7569>, e-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>, e-mail: karpovmg57@yandex.ru

Аннотация. В работе доказывается вероятностная версия теоремы о точке равновесия для двух параметризованных многозначных отображений, удовлетворяющих совместным условиям типа Каристи.

Ключевые слова: случайная точка равновесия; случайная неподвижная точка; теорема Каристи; случайное многозначное отображение; измеримое многозначное отображение; каратеодориевское многозначное отображение

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части госзадания (проект № 1.3464.2017/4.6).

Для цитирования: Обуховский В. В., Гетманова Е. Н., Карпов М. Г. О случайных точках равновесия // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 112–118. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118

Abstract. We present a random version of a theorem on equilibrium points for two parametrized multivalued maps satisfying a joint Caristi type condition.

Keywords: random equilibrium point; random fixed point; Caristi's theorem; random multivalued map; measurable multivalued map; Carathéodory multivalued map

Acknowledgements: The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the project part of the state work quota (project no. 1.3464.2017/4.6).

For citation: Obukhovskii V. V., Getmanova E. N., Karpov M. G. O sluchainykh tochkakh ravnovesiya [On Random Equilibrium Points]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 112–118. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-112-118 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теорема Каристи [1] — одно из известных в нелинейном анализе утверждений о неподвижной точке, нашедшее целый ряд обобщений и приложений (см., например, [2]–[5] и др.) В настоящей работе представлена случайная версия теоремы о существовании точек равновесия для двух параметризованных мультиотображений (многозначных отображений), удовлетворяющих совместным условиям типа Каристи.

1. Предварительные сведения.

Некоторые понятия из теории многозначных отображений

Напомним некоторые сведения из многозначного анализа (подробности можно найти, например, в [3], [6]–[7]).

Пусть X и Y — метрические пространства. Символами $C(Y)$ [$K(Y)$] будем обозначать совокупности всех непустых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y . Если Y — нормированное подмножество, символы $Cv(Y)$ [$Kv(Y)$] обозначают совокупности всех непустых выпуклых замкнутых [соответственно, компактных] подмножеств Y .

О п р е д е л е н и е 1. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \rightarrow C(Y)$ называют *полу*непрерывным *сверху* (п.н.св.) [*полу*непрерывным *снизу* (п.н.сн.)], если для каждого открытого [соответственно, замкнутого] множества $V \subset Y$

$$\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$$

открытое [соответственно, замкнутое] подмножество X .

О п р е д е л е н и е 2. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \rightarrow C(Y)$ называется *непрерывным*, если оно полунепрерывно и сверху и снизу.

Пусть (Ω, Σ) измеримое пространство, т. е. Σ является σ -алгеброй подмножеств Ω .

О п р е д е л е н и е 3. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow C(Y)$ называется *измеримым*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) \in \Sigma$ для каждого открытого множества $V \subset Y$.

Всюду в дальнейшем, пусть (Ω, Σ, μ) — локально компактное метрическое пространство с мерой Радона μ и σ -алгеброй Σ μ -измеримых подмножеств.

Пусть X, Y — сепарабельные метрические пространства.

О п р е д е л е н и е 4. Мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ называется *случайным u -мультиотображением* [случайным l -мультиотображением], если:

- (i) $\mathcal{F}$ измеримо относительно минимальной σ -алгебры, порожденной $\Sigma \times B(X)$, где $B(X)$ — совокупность борелевских подмножеств X ;
- (ii) для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow C(Y)$ п.н.св. [соответственно, п.н.сн.]

Если мультиотображение $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow C(Y)$ удовлетворяет условию (i) и условию

(ii)' для любого $\omega \in \Omega$, мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot) : X \rightarrow C(Y)$ непрерывно,

то оно называется *случайным мультиотображением*.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $A \subseteq X$ — замкнутое множество. Измеримое отображение $\xi : \Omega \rightarrow A$ называется *случайной неподвижной точкой мультиотображения* $\mathcal{F} : \Omega \times A \rightarrow C(X)$, если

$$\xi(\omega) \in \mathcal{F}(\omega, \xi(\omega))$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Лемма 1. ([7, Предложение 31.3]). Пусть $\mathcal{F} : \Omega \times A \rightarrow C(X)$ — случайное u -мультиотображение такое, что для каждого $\omega \in \Omega$ множество неподвижных точек

$$\text{Fix}\mathcal{F}(\omega, \cdot) = \{x \in X : x \in \mathcal{F}(\omega, x)\}$$

непусто. Тогда $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

Прежде чем сформулировать следующее утверждение, приведем еще одно определение. Назовем функцию $\psi : \Omega \times X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ *допустимой*, если для любого $\omega \in \Omega$ функция $\psi(\omega, \cdot)$ — собственная, т. е. ее значение конечно, по крайней мере, в одной точке, она ограничена снизу и полунепрерывна снизу.

Следующий результат является прямым следствием многозначной версии теоремы Каристи о неподвижной точке (см. [1], [2], [4]) и Леммы 1.

Теорема 1. Пусть (X, d) — полное сепарабельное метрическое пространство и $\psi : \Omega \times X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ — допустимая функция. Если $\mathcal{F} : \Omega \times X \rightarrow C(X)$ — случайное u -мультиотображение такое, что для любых $\omega \in \Omega$ и $x \in X$ существует $f \in \mathcal{F}(\omega, x)$ такое, что

$$\psi(\omega, f) + d(x, f) \leq \psi(\omega, x),$$

то $\mathcal{F}$ имеет случайную неподвижную точку.

О п р е д е л е н и е 6. Отображение $f : \Omega \times X \rightarrow Y$ называется *каратеодориевским*, если: (i) для каждого $\omega \in \Omega$ отображение $f(\omega, \cdot) : X \rightarrow Y$ непрерывно; (ii) для каждого $x \in X$ отображение $f(\cdot, x) : \Omega \rightarrow Y$ измеримо.

Аналогично, $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ называется каратеодориевским мультиотображением, если: (i) мультиотображение $\mathcal{F}(\omega, \cdot): X \rightarrow K(Y)$ непрерывно для любого $\omega \in \Omega$; (ii) мультиотображение $\mathcal{F}(\cdot, x): \Omega \rightarrow K(Y)$ измеримо для каждого $x \in X$. Отметим следующие свойства каратеодориевских мультиотображений (см. [3, Предложения 7.9 и 7.16]).

Лемма 2. Если $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ каратеодориевское мультиотображение, то

- (i) $\mathcal{F}$ измеримо;
- (ii) если пространство X полно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ такое, что $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и сужение $\mathcal{F}|_{\Omega_\varepsilon \times X}$ непрерывно.

Справедлив следующий параметрический аналог теоремы Майкла о непрерывном сечении (см. [3, Теорема 7.23]).

Лемма 3. Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство; Y — сепарабельное банахово пространство; $\mathcal{F}: \Omega \times X \rightarrow Cv(Y)$ — l -случайное мультиотображение. Тогда $\mathcal{F}$ допускает каратеодориевское сечение, т. е. существует каратеодориевское отображение $f: \Omega \times X \rightarrow Y$ такое, что

$$f(\omega, x) \in \mathcal{F}(\omega, x), \quad \forall (\omega, x) \in \Omega \times X.$$

2. Основной результат

Теорема 2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство; (Y, d) — полное сепарабельное метрическое пространство; $F: \Omega \times X \rightarrow K(Y)$ — каратеодориевское мультиотображение и $G: \Omega \times Y \rightarrow Cv(X)$ — случайное l -мультиотображение. Пусть $\psi: \Omega \times Y \rightarrow (-\infty, +\infty]$ — допустимая функция такая, что для каждой $\omega \in \Omega$ и $x \in X$ найдется $f \in F(\omega, x)$ такое, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего

$$x \in G(\omega, y),$$

выполнено

$$\psi(\omega, y) + d(y, f) \leq \psi(\omega, y).$$

Тогда существуют измеримые отображения $x_\star: \Omega \rightarrow X$ и $y_\star: \Omega \rightarrow Y$ такие, что

$$\begin{cases} x_\star(\omega) \in G(\omega, y_\star(\omega)), \\ y_\star(\omega) \in F(\omega, x_\star(\omega)) \end{cases}$$

для всех $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Согласно Лемме 3, найдется каратеодориевское сечение $g: \Omega \times Y \rightarrow X$ мультиотображения G :

$$g(\omega, y) \in G(\omega, y), \quad \forall (\omega, y) \in \Omega \times Y.$$

Рассмотрим мультиотображение $\tilde{F}: \Omega \times Y \rightarrow K(Y)$, определенное равенством

$$\tilde{F}(\omega, y) = F(\omega, g(\omega, y)).$$

Покажем, что мультиотображение $\tilde{F}$ удовлетворяет условию Теоремы 1. Во-первых, установим, что $\tilde{F}$ является каратеодориевским мультиотображением. В самом деле, непрерывность мультиотображения $\tilde{F}(\omega, \cdot)$ для любого $\omega \in \Omega$ вытекает из свойств непрерывности мультиотображений (см., например, [3], [6], [7]). Далее, применяя Лемму 2 (ii), для данного $\varepsilon > 0$ возьмем замкнутое подмножество $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$ такое, что $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$ и сужения F и g на $\Omega_\varepsilon \times Y$ являются непрерывными. Но тогда $\tilde{F}$ также непрерывно на $\Omega_\varepsilon \times Y$ и, следовательно, $\tilde{F}(\cdot, y)$ непрерывно на Ω_ε для каждого $y \in Y$. Это означает, что мультиотображения $\tilde{F}(\cdot, y)$ удовлетворяют C -свойству Лузина для каждого $y \in Y$ и, следовательно (см. [7, Теорема 19.6]), они измеримы.

Согласно Лемме 2 (i) мультиотображение $\tilde{F}$ измеримо, следовательно, это случайное мультиотображение.

Теперь возьмем произвольные $\omega \in \Omega$ и $y \in Y$. По условию теоремы существует $f \in \tilde{F}(\omega, y) = F(\omega, g(\omega, y))$ такое, что

$$\psi(\omega, f) + d(y, f) \leq \psi(\omega, y).$$

По Теореме 1, мультиотображение $\tilde{F}$ имеет случайную неподвижную точку $y_*: \Omega \rightarrow Y$, т. е.

$$y_*(\omega) \in \tilde{F}(\omega, y_*(\omega)) = F(\omega, g(\omega, y_*(\omega))).$$

Ясно, что отображение $g(\omega, y_*(\omega))$ измеримо и, следовательно, оно может быть взято в качестве искомого отображения $x_*(\omega)$. $\square$

Список литературы

- [1] J. Caristi, "Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.
- [2] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988.
- [3] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis*. V. 1: *Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [4] N. Mizoguchi, W. Takahashi, "Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 177–188.
- [5] A. Petrusel, G. Mot, *Multivalued Analysis and Mathematical Economics*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2004.

- [6] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., ЛИБРОКОМ, М., 2011.
- [7] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, V. 4: *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, 2-nd ed., Springer, Dordrecht, 2006.

References

- [1] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.
- [2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [3] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis*. V. 1: *Theory*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [4] N. Mizoguchi, W. Takahashi, “Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, **141** (1989), 177–188.
- [5] A. Petrusel, G. Mot, *Multivalued Analysis and Mathematical Economics*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2004.
- [6] Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis and V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions*, Librokom, Moscow, 2011 (In Russian).
- [7] L. Górniewicz, *Topological Fixed Point Theory and Its Applications*, V. 4: *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*, Springer, Dordrecht, 2006.

Информация об авторах

Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4201-0739>

Гетманова Екатерина Николаевна, аспирант, кафедра высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3667-7569>

Карпов Михаил Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>

Information about the authors

Valeri V. Obukhovskii, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: valerio-ob2000@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4201-0739>

Ekaterina N. Getmanova, Post-Graduate Student, Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: ekaterina_getmanova@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3667-7569>

Michael G. Karpov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation. E-mail: karpovmg57@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2739-5706>

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:

Обуховский Валерий Владимирович

E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Corresponding author:

Valeri V. Obukhovskii

E-mail: valerio-ob2000@mail.ru

Поступила в редакцию 16.01.2019 г.

Received 16 January 2019

Поступила после рецензирования 27.02.2019 г.

Reviewed 27 February 2019

Принята к публикации 28.03.2019 г.

Accepted for press 28 March 2019

© Шабуров А.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136

УДК 517.977

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных

Александр Александрович ШАБУРОВ

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3174-9092>, e-mail: alexandershaburov@mail.ru

Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints

Alexander A. SHABUROV

Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin

19 Mira St., Ekaterinburg 620002, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3174-9092>, e-mail: alexandershaburov@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, зависящим только от медленных переменных для линейной системы с быстрыми и медленными переменными в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} , B_i , $i, j = 1, 2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. Существует единственный начальный вектор сопряженного состояния l_ε , определяющий вид оптимального управления. Доказано, что в случае конечного числа точек смены вида управления асимптотика вектора l_ε имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление; сингулярно возмущенные задачи; асимптотические разложения; малый параметр

Благодарности: Автор выражает благодарность своему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, профессору Данилину Алексею Руфимовичу за постоянное внимание к работе.

Для цитирования: Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 125. С. 119–136. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136

Abstract. The paper deals with the problem of optimal control with a convex integral quality index depends on slow variables for a linear steady-state control system with a fast and slow variables in the class of piecewise continuous controls with a smooth control constraints

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

where $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} , B_i , $i, j = 1, 2$ — are constant matrices of the corresponding dimension, and $\varphi(\cdot)$ — is the strictly convex and cofinite function that is continuously differentiable in $\mathbb{R}^n$ in the sense of convex analysis. In the general case, Pontryagin's maximum principle is a necessary and sufficient optimum condition for the optimization of a such a problem. The initial vector of the conjugate state l_ε is the unique vector, thus determining the optimal control. It is proven that in the case of a finite number of control switching points, the asymptotics of the vector l_ε has the character of a power series.

Keywords: optimal control; singular perturbation problems; asymptotic expansions; small parameter

Acknowledgements: The author is very grateful to Prof. Alexey R. Danilin for the constant attention to the work.

For citation: Shaburov A. A. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya singulyarno vozmushchennoy zadachi optimal'nogo upravleniya s gladkimi ogranicheniyami na upravlenie i s integral'nym vypuklym kriteriem kachestva, terminal'naya chast' kotorogo zavisit tol'ko ot medlennykh peremennykh [Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index depends on slow variables and smooth control constraints]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki* – *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями в связи с их теоретической значимостью и актуальными приложениями посвящаются многочисленные работы. Обзор результатов исследований задачи оптимального управления для линейной системы с быстрыми и медленными переменными в различной постановке представлен, например, в [1]. Более подробно общие свойства систем с интегральным выпуклым

функционалом качества рассмотрены в [2, Глава 3]. Проблемы, связанные с предельной задачей, для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными рассматривались в [3], [4]. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления исследовалась в статьях [5]–[7]. Отметим, что в статье [6] рассматривался терминальный критерий качества.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотики вектора сопряженного состояния в задаче оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными, с интегральным выпуклым функционалом качества, терминальная часть которого зависит от медленных переменных. Считается, что на управление наложено гладкое геометрическое ограничение в виде шара. Получено полное асимптотическое разложение вектора сопряженной системы, определяющего оптимальное управление. Статья является продолжением работ [8], [9]. Главной отличительной особенностью изучаемой здесь задачи от задач, рассмотренных в статьях [8], [9], является более общий вид управляемой системы.

При написании работы использовались понятия, методы и результаты теории оптимального управления [2], [10], [11], асимптотического анализа [12], линейной алгебры [13], теории сингулярно возмущенных уравнений [14] и выпуклого анализа [15].

1. Постановка задачи

Пусть управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; A_{ij} , B_i , $i, j = 1, 2$ — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ строго выпуклая и кофинитная функция в смысле выпуклого анализа [15, § 13].

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ управляемая система из (1.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u, \\ z_\varepsilon(0) = z^0, \end{cases}$$

где

$$z_\varepsilon(t) := \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в рассматриваемом критерии качества J первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T , а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

О п р е д е л е н и е 1.1. Мы будем говорить, что пара матриц (A, B) вполне управляема, если вполне управляема система $\dot{x} = Ax + Bu$.

У с л о в и е 1.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т. е. $\text{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m$.

У с л о в и е 1.2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.

Таким образом, из условия 1.2 следует невырожденность матрицы A_{22} .

О п р е д е л е н и е 1.2. Вырожденной задачей для задачи (1.1) называется задача

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u, & t \in [0, T], \\ x_0(0) = x^0, & \|u\| \leq 1, \\ J_0(u) := \varphi(x_0(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $A_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2$.

У с л о в и е 1.3. Пары (A_0, B_0) и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

Отметим, что выполнение условий 1.2 и 1.3 влечет выполнение условия 1.1 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ [4, Theorem 1]. Таким образом, условия 1.2 и 1.3 являются достаточными условиями вполне управляемости двух систем: $\dot{x}_0 = A_0 x_0 + B_0 u$ и $\dot{y}_\varepsilon = A_{22} y_\varepsilon + B_2 u$ при всех достаточно малых ε .

Основная задача, которая ставится для (1.1), состоит в нахождении полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления u , оптимального значения функционала качества J_ε и оптимального процесса $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$.

2. Асимптотика матричной экспоненты и основные соотношения

Рассматривая $e^{A_\varepsilon t}$ как фундаментальную матрицу $\mathcal{W}(t, \varepsilon)$ решения системы в задаче (1.1) в случае $u_\varepsilon \equiv 0$ и следуя методу пограничных функций [14], при выполнении условия 1.2 получаем

$$e^{A_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\mathcal{W}_k(t) + \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau) \right), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{W}_k(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \tilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Здесь $\mathcal{W}_k(t)$, $\tilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ — бесконечно дифференцируемые матричнозначные функции, которые могут быть получены из решения системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{W}(t, \varepsilon) = \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{W}(t, \varepsilon), \\ \mathcal{W}(0, \varepsilon) = I, \end{cases} \quad (2.3)$$

где для блоков $\mathcal{W}_{ij}(t, \varepsilon)$ матрицы $\mathcal{W}(t, \varepsilon)$ получаем асимптотические разложения, равномерные на $[0, T]$ при каждом фиксированном $k \geq 0$. Через I обозначаем тождественное отображение в соответствующем пространстве.

Непосредственным вычислением получаем начальные приближения при $k = 0$:

$$\begin{cases} \mathcal{W}_{11,0}(t) = e^{A_0 t}, & \tilde{\mathcal{W}}_{11,0}(\tau) \equiv \mathcal{O}; & \mathcal{W}_{12,0}(t) \equiv \mathcal{O}, & \tilde{\mathcal{W}}_{12,0}(\tau) \equiv \mathcal{O}; \\ \mathcal{W}_{21,0}(t) = -A_{22}^{-1} A_{21} e^{A_0 t}, & \tilde{\mathcal{W}}_{21,0}(\tau) = e^{A_{22} \tau} A_{22}^{-1} A_{21}; & \mathcal{W}_{22,0}(t) \equiv \mathcal{O}, & \tilde{\mathcal{W}}_{22,0}(\tau) = e^{A_{22} \tau}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь и далее, $\mathcal{O}$ — нулевая матрица. При $k \geq 1$ и $j = 1, 2$ с помощью рекуррентных формул

$$\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(\tau) = - \int_{\tau}^{\infty} \left(A_{11} \tilde{\mathcal{W}}_{1j,k-1}(s) + A_{12} \tilde{\mathcal{W}}_{2j,k-1}(s) \right) ds, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{W}_{1j,k}(t) = -e^{A_0 t} \tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(0) + \int_0^t e^{A_0(t-s)} A_{12} A_{22}^{-1} \frac{d}{ds} (\mathcal{W}_{2j,k-1}(s)) ds, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{W}_{2j,k}(t) = -A_{22}^{-1} \left(A_{21} \mathcal{W}_{1j,k}(t) - \frac{d}{dt} (\mathcal{W}_{2j,k-1}(t)) \right), \quad (2.7)$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k}(\tau) = -e^{A_{22} \tau} \mathcal{W}_{2j,k}(0) + \int_0^{\tau} e^{A_{22}(\tau-s)} A_{21} \tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(s) ds \quad (2.8)$$

находятся блоки-функции матриц (2.2). Таким образом, можно найти разложение матричной экспоненты (2.1) через матрицы-функции (2.2), элементы которых вычисляются с помощью начальных приближений (2.4), рекуррентных формул (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) и дополнительных условий на матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$. Используя приведенные выше формулы, выпишем в явном виде матрицы-функции $\mathcal{W}_{12,1}(t)$, $\tilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau)$, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t} A_{12} A_{22}^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22} \tau}.$$

Утверждение 2.1. *Существует $\gamma > 0$ такое, что*

$$\forall k \geq 0 \forall i, j \in \{1, 2\} \exists C_{ij,k} > 0 \forall \tau \geq 0 \quad \|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(\tau)\| \leq C_{ij,k} \cdot e^{-\gamma \tau}. \quad (2.9)$$

Доказательство. Методом математической индукции по $k \geq 0$ покажем, что для некоторого $\gamma_1 > 0$ выполнено соотношение

$$\forall i, j \in \{1, 2\} \exists P_{ij,k}(\tau) \forall \tau \geq 0 \quad \|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(\tau)\| \leq P_{ij,k}(\tau) \cdot e^{-\gamma_1 \tau}, \quad (2.10)$$

где $P_{ij,k}(\tau)$ — некоторые многочлены с неотрицательными коэффициентами. Из (2.10) будет следовать (2.9) с $\gamma = \gamma_1/2$.

Отметим, что при выполнении условия 1.2 существует $K > 0$ такое, что

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|e^{A_{22}\tau}\| \leq Ke^{-\gamma_1\tau},$$

где $\gamma_1 = -\frac{1}{2} \max\{Re(\lambda) : \lambda \text{ — собственное число матрицы } A_{22}\} > 0$ (см. например, [13, п. 8.5]).

База индукции очевидна ввиду явного вида (2.4) функции $\tilde{\mathcal{W}}_{ij,0}(\tau)$. Пусть для k справедливо предложение индукции. Докажем, что оценка (2.10) справедлива и при $k+1$.

Для матрицы $\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}$ в силу (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}(\tau)\| &\leq \int_{\tau}^{\infty} \left(\|A_{11}\| \cdot \|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k}(s)\| + \|A_{12}\| \cdot \|\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k}(s)\| \right) ds \\ &\leq \int_{\tau}^{\infty} \left(\|A_{11}\| \cdot P_{11,k}(s) \cdot e^{-\gamma_1 s} + \|A_{12}\| \cdot P_{21,k}(s) e^{-\gamma_1 s} \right) ds. \end{aligned}$$

Определим $P(s) := \|A_{11}\| \cdot P_{11,k}(s) + \|A_{12}\| \cdot P_{21,k}(s)$ все коэффициенты которого, очевидно, неотрицательны. Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям $\tilde{k}$ раз ($\tilde{k}$ — степень многочлена $P(s)$):

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{1j,k+1}(\tau)\| \leq C_{ij,k} \cdot \left(e^{-\gamma_1 s} P(s) \Big|_{\tau}^{\infty} + \int_{\tau}^{\infty} e^{-\gamma_1 s} P'(s) ds \right) \leq \dots \leq \|\tilde{P}(\tau)\| \cdot e^{-\gamma_1 \tau} \leq e^{-\gamma \tau},$$

получим необходимую оценку.

В силу (2.8)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{W}}_{2j,k+1}(\tau)\| &\leq e^{-\gamma_1 \tau} P_{21,k}(\tau) + \int_0^{\tau} e^{-\gamma_1(\tau-s)} \cdot P_{21,k}(s) e^{-\gamma_1 s} ds \\ &\leq e^{-\gamma \tau} P_{21,k}(\tau) + e^{-\gamma \tau} \cdot \int_0^{\tau} P_{21,k}(s) ds \leq P(\tau) e^{-\gamma \tau}. \end{aligned}$$

□

Отметим, что в силу утверждения 2.1 при всех k, i, j и $t \in [\varepsilon^p, T]$, $p \in (0, 1)$

$$\|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(t/\varepsilon)\| = \mathcal{O}, \quad (2.11)$$

т. е. величина $\|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(t/\varepsilon)\|$ есть асимптотический ноль относительно асимптотической последовательности по степеням ε .

При выполнении условия 1.1, принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности, которое дает единственное решение задачи (1.1) [2, п. 3.5, теорема 14]. Тогда, как доказано в [8, Утверждение 1 и формулы (2.4), (2.5)] оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ в задаче (1.1) имеет вид:

$$u_\varepsilon(T-t) = \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|)}, \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(t) &:= \left[\exp \left(t \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix} \right]_1 \\ &= \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon)B_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь $[\cdot]_1$ обозначает первые n строк соответствующей матрицы. Вектор l_ε есть единственное (с учетом кофинитности функции φ — [15, Теорема 26.6]) решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + \mathcal{W}_{11}(T, \varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T, \varepsilon)y^0 + \int_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)} dt. \quad (2.14)$$

Здесь и далее $C_\varepsilon^*(t)$ — сопряженная матрица к матрице $C_\varepsilon(t)$. То же самое мы будем говорить про другие сопряженные матрицы при наличии над ними соответствующего обозначения.

Поскольку $\|e^{A_\varepsilon^*t}\| \leq K$ при $t \in [0, T]$, то $\|[\mathcal{B}_\varepsilon^*e^{A_\varepsilon^*t}]_1\| = O(\varepsilon^{-1})$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2. Пусть l_ε — вектор, определяющий оптимальное управление, причем $l_{\varepsilon,N}$ определяется как

$$\|l_\varepsilon - l_{\varepsilon,N}\| = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Тогда на отрезке $[0, T]$ выполнено

$$\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,N}\| = O(\varepsilon^N),$$

где u_ε — оптимальное управление, а $u_{\varepsilon,N}$ управление, определяемое по формуле (2.12) вектором $l_{\varepsilon,N}$.

В [8, Теорема 1] показано, что при выполнении условий 1.2 и 1.3:

$$l_\varepsilon \rightarrow l_0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad (2.15)$$

где l_0 — единственное решение уравнения

$$0 = -\nabla\varphi^*(-l) + e^{A_0T}x^0 + \int_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{S(\|C_0^*(t)l\|)} dt, \quad C_0(t) := e^{A_0t}B_0. \quad (2.16)$$

Здесь φ^* — функция, сопряженная к φ в смысле выпуклого анализа (см. [15, § 12]).

В силу (2.11) матриц-функции $\tilde{\mathcal{W}}_{ij}(T/\varepsilon, \varepsilon)$ при всех $i, j = 1, 2$ есть асимптотический ноль.

Отметим, что в силу аналитичности и вполне управляемости, у матрицы-функции $C_\varepsilon(t)$ существует лишь конечное число точек $t_{i,\varepsilon}$ таких, что при малых $\varepsilon > 0$

$$\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| = 2. \quad (2.17)$$

Оптимальное управление в силу (2.12) определяется одной из двух формул

$$\frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{2}, \quad \text{либо} \quad \frac{C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|}. \quad (2.18)$$

При этом интеграл из (2.14) разбивается на интегралы вида

$$\int \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|}dt, \quad \text{либо} \quad \int \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{2}dt$$

по соответствующим отрезкам.

О п р е д е л е н и е 2.1. Точки $t_{i,\varepsilon}$ — решения уравнения (2.17) будем называть точками смены вида оптимального управления.

Таким образом, найдя асимптотику вектора l_ε , можно будет, используя асимптотическое разложение (2.1), найти асимптотику и точек $t_{i,\varepsilon}$, и оптимального управления. Следовательно, необходимо и важно исследовать решения уравнения (2.17).

Для дальнейшего нам потребуются асимптотические разложения $C_\varepsilon(t)$ до порядка $O(\varepsilon^2)$ и $\frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t)$ до порядка $O(\varepsilon)$. В силу (2.3) и (2.13)

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t}B_2 + M(\varepsilon, t, \tau) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

где

$$M(\varepsilon, t, \tau) := \varepsilon \left(\mathcal{W}_{11,1}(t) + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t}A_{22}^{-1}A_{21} \right) B_1 + \varepsilon \left(\mathcal{W}_{12,2}(t) + \tilde{\mathcal{W}}_{12,2}(\tau) \right) B_2, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) &= \frac{d}{dt}C_0(t) + \varepsilon^{-1}A_{12}e^{A_{22}t}B_2 + A_{12}e^{A_{22}t}A_{22}^{-1}A_{21}B_1 \\ &+ \left(A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}t} + A_{12}\tilde{\mathcal{W}}_{22,1}(\tau) \right) B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из формул (2.20), (2.21) следует, что при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial t}C_\varepsilon(t) = \frac{d}{dt}C_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

а при $t \in [0, \sqrt{\varepsilon}]$ переходя от функции $C_\varepsilon(t)$ к функции $\tilde{C}_\varepsilon(\tau) := C_\varepsilon(\varepsilon\tau)$, $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$

$$\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial}{\partial \tau}\tilde{C}_\varepsilon(\tau) = A_{12}e^{A_{22}\tau}B_2 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, можно ожидать, что решения уравнения (2.17) при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ находятся вблизи решений уравнения $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$, т. е. вблизи точек смены вида управления в вырожденной задаче, а при $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — вблизи решений уравнения

$$\|\psi^*(\tau)l_0\| = 2, \quad \text{где} \quad \psi^*(\tau) := B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^*. \quad (2.22)$$

Аналогично [9, Теорема 1] доказывается следующая

Теорема 2.1. Пусть $l_\varepsilon \rightarrow l_0$, $\{t_i\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ — все решения уравнения $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$, а $\{\tau_j\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — все решения уравнения (2.22), и выполнены условия

$$\left. \frac{d}{dt} \|C_0^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_i} = 2 \langle B_0^* e^{A_0^* t_i} l_0, B_0^* A_0^* e^{A_0^* t_i} l_0 \rangle \neq 0, \quad \text{при} \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \|\psi^*(\tau)l_0\|^2 \right|_{\tau=\tau_j} = 2 \langle (B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^* \tau_j} (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^*) l_0, B_2^* e^{A_{22}^* \tau_j} A_{12}^* l_0 \rangle \neq 0, \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, q.$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ и $\{\tau_{j,\varepsilon}\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ точки смены вида оптимального управления в задаче (1.1). Других точек смены вида управления нет, и при всех $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ справедливо

$$t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i, \quad \tau_{j,\varepsilon} \rightarrow \tau_j, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Решения уравнений $\|C_0^*(t)l_0\| = 2$ и (2.22), удовлетворяющие условиям теоремы 2.1, будем называть регулярными.

Наконец, отметим, что при нахождении асимптотических разложений интегралов от функций вида (2.18) по $\varepsilon > 0$ и малым компонентам вектора $(l_\varepsilon - l_0)$ подынтегральные выражения будут раскладываться в слагаемые с разномасштабными коэффициентами $f(t)g(t/\varepsilon)$. При этом такие слагаемые играют роль лишь тогда, когда нижний предел интегрирования имеет порядок $O(\varepsilon)$. Если оба предела имеют порядок $O(\varepsilon)$, то после замены $t = \varepsilon\tau$ получаются интегралы от $f(\varepsilon\tau)g(\tau)$. Но $\varepsilon\tau$ мало, поэтому $f(\varepsilon\tau)$ раскладывается в асимптотический ряд по $(\varepsilon\tau)$ с помощью разложения Тейлора функции f в точке $t = 0$. В оставшемся случае асимптотика соответствующего интеграла находится следующим образом:

Утверждение 2.3. Пусть $f \in C[0, T]$ — бесконечно дифференцируемая в нуле функция, а непрерывная на $[0, +\infty)$ функция $g(\tau)$ удовлетворяет неравенству (2.9). Тогда для любых $\bar{\tau}, \bar{t} \in \mathbb{R}$

$$\int_{\varepsilon\bar{\tau}}^{\bar{t}} f(t)g(t/\varepsilon) dt \stackrel{as}{=} \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f^{(k)}(0) \int_{\bar{\tau}}^{+\infty} \tau^k g(\tau) d\tau, \quad \text{где} \quad f(t) \stackrel{as}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) t^k.$$

Доказательство. Сделав в интеграле замену переменной $\tau := t/\varepsilon$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon\bar{\tau}}^{\bar{t}} f(t)g(t/\varepsilon) dt &= \varepsilon \int_{\bar{\tau}}^{\bar{t}/\varepsilon} f(\varepsilon\tau)g(\tau)d\tau = \varepsilon \int_{\bar{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} f(\varepsilon\tau)g(\tau)d\tau + \mathbb{O} \\ &= \varepsilon \int_{\bar{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} \left(\sum_{k=0}^N f(0)(\varepsilon\tau)^k + O((\varepsilon\tau)^{N+1}) \right) g(\tau)d\tau = \varepsilon \sum_{k=0}^N \varepsilon^k f(0) \int_{\bar{\tau}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} \tau^k g(\tau)d\tau + O(\varepsilon^{(N+1)/2}) \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^N \varepsilon^k f(0) \left(\int_{\bar{\tau}}^{+\infty} \tau^k g(\tau)d\tau + \mathbb{O} \right) + O(\varepsilon^{(N+1)/2}). \end{aligned}$$

□

3. Асимптотическое разложение вектора l_ε

Пусть для вырожденной задачи и начального состояния системы x^0 существует единственный момент времени $t = t_0 \in (0, T)$ такой, что:

$$\begin{aligned} \forall t < t_0 \quad \|C_0^*(t)l_0\| &> 2, \quad \|C_0^*(t_0)l_0\| = 2, \\ \forall t > t_0 \quad \|C_0^*(t)l_0\| &< 2, \quad \left. \frac{d}{dt} \|C_0^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_0} \neq 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Например, если матрица системы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и матрица управления $\mathcal{B}_\varepsilon$ имеют вид

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha I & I \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \alpha < 0,$$

а $\|l_0\| > 2$ и $e^{\alpha T} \cdot \|l_0\| < 2$, то условие (3.1) выполняется, т. к. $\|C_0^*(t)l_0\| = e^{\alpha t} \cdot \|l_0\|$.

Как известно из [9], в этом случае интеграл в (2.16) разбивается на два интеграла

$$\int_0^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{S(\|C_0^*(t)l\|)} dt = \int_0^{t_0} \frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T C_0(t)C_0^*(t)l dt.$$

Отметим, что в силу сходимости (2.15) и асимптотической формулы (2.19) при всех $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ величина $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\|$ близка к $\|C_0^*(t)l_0\|$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Потребуем выполнения условия

$$\forall l_\varepsilon \rightarrow l_0 \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall t \in [0, \sqrt{\varepsilon}] \quad \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2. \quad (3.2)$$

Утверждение 3.1. Если выполнены условия

$$\forall \tau \geq 0 \quad \|\psi^*(\tau)l_0\| \neq 2, \quad (3.3)$$

$$\|\psi^*(0)l_0\| = \|B_1^*l_0\| > 2, \quad (3.4)$$

то выполнено и условие (3.2).

Доказательство данного утверждения почти дословно повторяет доказательство из [9]. $\square$

Таким образом, при выполнении условий (3.1) и (3.2) в силу теоремы 2.1 у исходной задачи (1.1) при малых $\varepsilon > 0$ тоже лишь одна точка смены вида оптимального управления t_ε , т. е.

$$\forall t < t_\varepsilon \quad \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| > 2, \quad \|C_\varepsilon^*(t_\varepsilon)l_\varepsilon\| = 2, \quad \forall t > t_\varepsilon \quad \|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| < 2.$$

При этом $t_\varepsilon \rightarrow t_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Однако, существуют такие матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$, что хотя у вырожденной задачи имеется лишь одна точка смены вида оптимального управления t_0 , у исходной задачи таких точек больше, за счет смены вида оптимального управления в точках отрезка $[0, \sqrt{\varepsilon}]$. Например, рассмотрим матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$ следующего вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -I & I \\ -\varepsilon^{-1}I & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -0.5I \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}.$$

Тогда $C_0(t)l_0 = 0.5e^{-2t}l_0$, $\|\psi^*(\tau)\| = |0.5 - e^{-\tau}| \cdot \|l_0\|$. Поэтому, если $4 < \|l_0\| < 4e^T$, то у исходной задачи в силу теоремы 2.1 будут три точки смены вида оптимального управления, причем две из них лежат на $[0, \sqrt{\varepsilon}]$. Рассмотрим подробнее такой случай.

Условие 3.1. Пусть $t_1 = \varepsilon\tau_1$, $t_2 = \varepsilon\tau_2$, где τ_1, τ_2 — все решения уравнения (2.22), а t_0 единственное решение уравнения $\|C_\varepsilon^*(t)l_0\| = 2$, эти решения регулярны и выполнены условия (3.2), (3.4). Значит, условие (3.3) нарушается.

Таким образом, в рассматриваемом случае в силу теоремы 2.1 имеются ровно три точки смены вида оптимального управления $t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$, $t_{2,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$ и $t_{0,\varepsilon}$, причем $\tau_{1,\varepsilon} \rightarrow \tau_1$, $\tau_{2,\varepsilon} \rightarrow \tau_2$ и $t_{0,\varepsilon} \rightarrow t_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а интеграл $\int_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)} dt$ разбивается в сумму четырех интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)} dt &= \int_0^{t_{1,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|} dt + \frac{1}{2} \int_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{2,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l dt \\ &+ \int_{t_{2,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|} dt + \frac{1}{2} \int_{t_{0,\varepsilon}}^T C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $\Delta l_\varepsilon := l_\varepsilon - l_0$, $\Delta t_\varepsilon := t_{0,\varepsilon} - t_0$, $t_{1,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{1,\varepsilon} := \tau_{1,\varepsilon} - \tau_1$, $t_{2,\varepsilon} := \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}$, $\Delta\tau_{2,\varepsilon} := \tau_{2,\varepsilon} - \tau_2$. Тогда

$$\Delta l_\varepsilon = o(1), \quad \Delta t_\varepsilon = o(1), \quad \Delta\tau_{1,\varepsilon} = o(1), \quad \Delta\tau_{2,\varepsilon} = o(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

и в силу формул (2.14), (2.16) и теоремы 2.1 величины $\Delta l_\varepsilon, \Delta \tau_{1,\varepsilon}, \Delta \tau_{2,\varepsilon}$ и Δt_ε , являются решением следующей системы уравнений, зависящей от параметра $\varepsilon > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2) := -\nabla \varphi^*(-l) + \nabla \varphi^*(-l_0) + \varepsilon \mathcal{W}_{11,1}(T, \varepsilon) x^0 + \varepsilon \mathcal{W}_{12,1}(T, \varepsilon) y^0 \\ \quad + \int_0^{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)} \frac{C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) l}{\|C_\varepsilon^*(t) l\|} dt + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)}^{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)} C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) l dt + \int_{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)}^{t_0 + \Delta t} \frac{C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) l}{\|C_\varepsilon^*(t) l\|} dt \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{t_0 + \Delta t}^T C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t) l dt - \int_0^{t_0} \frac{C_0(t) C_0^*(t) l}{\|C_0^*(t) l\|} dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T C_0(t) C_0^*(t) l dt, \\ 0 = G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) := \|C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1))(l_0 + \Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) := \|C_\varepsilon^*(\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2))(l_0 + \Delta l)\|^2 - 4, \\ 0 = G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) := \|C_\varepsilon^*(t_0 + \Delta t)(l_0 + \Delta l)\|^2 - \|C_0^*(t_0) l_0\|^2. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Отметим, что функции F и G_i (при $i = 1, 2, 3$) непрерывны, а G_i — бесконечно дифференцируемы. Рассмотрим их асимптотические разложения относительно бесконечно малых $\Delta l, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2$ и Δt .

В силу бесконечной дифференцируемости функции φ^* :

$$-\nabla \varphi^*(-l_0 - \Delta l) + \nabla \varphi^*(-l_0) \sim D^2 \varphi^*(-l_0) \Delta l + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi_k(\Delta l), \quad (3.8)$$

где $D^2 \varphi^*(-l_0)$ — дифференциал второго порядка от φ^* в точке $(-l_0)$, а $\Phi_k(\Delta l)$ — однородные степени k известные функции (многочлены от компонент вектора Δl).

Каждый из интегралов в (3.5), зависящий от ε , разобьем на части:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_0^{\varepsilon \tau_1} + \int_{\varepsilon \tau_1}^{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)} := I_{1,1}(\varepsilon, \Delta l) + I_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1), \\ I_2 &:= \int_{\varepsilon(\tau_1 + \Delta \tau_1)}^{\varepsilon \tau_2} + \int_{\varepsilon \tau_2}^{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)} := I_{2,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) + I_{2,2}(\varepsilon, \Delta l) + I_{2,3}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2), \\ I_3 &:= \int_{\varepsilon(\tau_2 + \Delta \tau_2)}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} := I_{3,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) + I_{3,2}(\varepsilon, \Delta l) + I_{3,3}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t), \\ I_4 &:= \int_{t_0 + \Delta t}^T := I_{4,1}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) + I_{4,2}(\varepsilon, \Delta l). \end{aligned}$$

Отметим, что для разложения интегралов $I_{1,2}$, $I_{2,1}$, $I_{2,3}$, $I_{3,1}$, $I_{3,3}$ и $I_{4,1}$ надо (для интегралов $I_{1,2}$, $I_{2,1}$, $I_{2,3}$ и $I_{3,1}$ — после замены переменной $t = \varepsilon \tau$) разложить коэффициенты, зависящие от времени, в ряды Тейлора в окрестности точек τ_1, τ_2 и t_0 , соответственно. При этом, в силу ограниченности подынтегральных выражений $I_1 = O(\varepsilon)$

и $I_2 = O(\varepsilon)$, а в силу утверждения 2.3 в асимптотическом разложении все слагаемые с множителями, зависящими от t/ε , тоже будут иметь порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Наконец, в силу того, что слагаемое первого порядка малости по Δt в $I_{3,3}$ равно

$$\frac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{\|C_0^*(t_0)l_0\|} \Delta t,$$

а в $I_{4,1}$ равно

$$-\frac{C_0(t_0)C_0^*(t_0)l_0}{2} \Delta t,$$

и $\|C_0^*(t_0)l_0\| = 2$, то в разложении суммы $I_{3,3} + I_{4,1}$ слагаемых первого порядка малости по Δt не будет.

Обозначим линейную часть по Δl функции F как $\mathcal{F}(\Delta l)$. В силу (3.8) непосредственным вычислением получаем первое приближение функции $F(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2)$ при стремлении ее аргументов к нулю

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2, \Delta t) &= D^2 \varphi^*(-l_0) \Delta l \\ &+ \int_0^{t_0} C_0(t) \frac{C_0^*(t) \Delta l \|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t) \Delta l, C_0^*(t)l_0 \rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3} dt \\ &+ \int_{t_0}^T \frac{C_0(t)C_0^*(t)\Delta l}{2} dt + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2) =: \\ &\mathcal{F}(\Delta l) + \varepsilon f_1 + F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2), \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathcal{W}_{11,1}(T)x^0 + \mathcal{W}_{12,1}(T)y^0 \\ &+ \int_0^{\tau_1} \frac{(B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2)(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*)l_0}{\|(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*)l_0\|} d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_2}^{\tau_1} (B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2)(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*)l_0 d\tau \\ &+ \int_{\tau_2}^{\infty} \frac{(B_0 + A_{12}A_{22}^{-1}e^{A_{22}\tau}B_2)(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*)l_0}{\|(B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^*A_{12}^*)l_0\|} d\tau, \\ F_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta t, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2 + (\Delta \tau_1)^2 + (\Delta \tau_2)^2\right). \end{aligned}$$

Аналогично для функций G_i получим

$$\begin{aligned}
G_1(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) &= 2\langle \psi^*(\tau_1)l_0, \psi^*(\tau_1)\Delta l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{12}^* \Delta \tau_1 l_0 + \varepsilon B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(0), l_0 \rangle \\
&\quad + 2\langle \psi^*(\tau_1)l_0, \varepsilon B_1^* A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^* \tau_1} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0 \rangle + G_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1), \\
G_2(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) &= 2\langle \psi^*(\tau_2)l_0, \psi^*(\tau_2)\Delta l + B_2^* e^{A_{22}^* \tau_2} A_{12}^* \Delta \tau_2 l_0 + \varepsilon B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(0), l_0 \rangle \\
&\quad + 2\langle \psi^*(\tau_2)l_0, \varepsilon B_1^* A_{21}^* (A_{22}^{-1})^* e^{A_{22}^* \tau_2} (A_{22}^{-1})^* A_{12}^* l_0 \rangle + G_{2,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2), \\
G_3(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) &= 2\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l + \frac{\partial}{\partial t} C_0^*(t_0)l_0 \Delta t \rangle \\
&\quad + 2\langle C_0^*(t_0)l_0, \varepsilon B_1^* \mathcal{W}_{11,1}^*(t_0) + \varepsilon B_2^* \mathcal{W}_{12,2}^*(t_0) \rangle + G_{3,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{1,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_1) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta \tau_1)^2\right), \\
G_{2,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta \tau_2) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta \tau_2)^2\right), \\
G_{3,2}(\varepsilon, \Delta l, \Delta t) &= O\left(\varepsilon^2 + \|\Delta l\|^2 + (\Delta t)^2\right).
\end{aligned}$$

В силу (3.9) и (3.10) система первого приближения для (3.7) распадается на четыре уравнения, используя линейную часть по Δl функций G_i как $\mathcal{G}_i(\Delta l)$ при $i = 1, 2, 3$:

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathcal{F}(\Delta l_1) = -\varepsilon f_1, \\ &\mathcal{G}_1(\Delta l_1, \Delta \tau_{1,1}) := 2\langle \psi^*(\tau_1)l_0, \psi^*(\tau_1)\Delta l_1 \rangle + 2\Delta \tau_{1,1} \langle \psi^*(\tau_1)l_0, B_2^* e^{A_{22}^* \tau_1} A_{12}^* l_0 \rangle = \varepsilon g_{1,1}, \\ &\mathcal{G}_2(\Delta l_1, \Delta \tau_{2,1}) := 2\langle \psi^*(\tau_2)l_0, \psi^*(\tau_2)\Delta l_1 \rangle + 2\Delta \tau_{2,1} \langle \psi^*(\tau_2)l_0, B_2^* e^{A_{22}^* \tau_2} A_{12}^* l_0 \rangle = \varepsilon g_{2,1}, \\ &\mathcal{G}_3(\Delta l_1, \Delta t_1) := 2\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)\Delta l_1 \rangle + 2\Delta t_1 \langle C_0^*(t_0)A_0^* l_0, \frac{\partial}{\partial t} C_0^*(t_0)l_0 \rangle = \varepsilon g_{3,1}, \end{aligned} \right. \tag{3.11}$$

где $g_{i,1}$, $i = 1, 2, 3$ — известные величины (см. (3.10)).

В силу условий на функцию φ линейный оператор $D^2 \varphi^*(-l_0)$ положительный, а в силу неравенства Коши–Буняковского остальные слагаемые в определении линейного оператора $\mathcal{F}$ неотрицательны. Поэтому $\mathcal{F} > 0$ и, тем самым, из первого уравнения в (3.11) однозначно находится $\Delta l_1 = \varepsilon \mathcal{F}^{-1}(-f_1) =: \varepsilon l_1$.

Поскольку в силу (3.1) при $j = 1, 2$: $\langle \psi^*(\tau_j)l_0, B_2^* e^{A_{22}^* \tau_j} A_{12}^* l_0 \rangle \neq 0$, то из второго и третьего уравнений в (3.11) по Δl_1 однозначно находятся $\Delta \tau_{1,1} = \varepsilon \tau_1$, $\Delta \tau_{2,1} = \varepsilon \tau_2$.

Поскольку в силу (3.1) $\langle C_0^*(t_0)l_0, C_0^*(t_0)A_0^* l_0 \rangle \neq 0$, то из четвертого уравнения в (3.11) по Δl_1 однозначно определяется $\Delta t_1 = \varepsilon t_1$.

Далее процесс нахождения следующих членов разложения $\Delta l, \Delta \tau_1, \Delta \tau_2$ и Δt продолжается стандартным образом.

Пусть найдены приближения Δl , $\Delta \tau_1$, $\Delta \tau_2$ и Δt до N -го порядка. Тогда величины

$$\begin{aligned}\Delta l_{N+1} &:= \Delta l_\varepsilon - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k l_k, & \Delta \tau_{1,N+1} &:= \Delta \tau_{1,\varepsilon} - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \tau_{1,k}, \\ \Delta \tau_{2,N+1} &:= \Delta \tau_{2,\varepsilon} - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k \tau_{2,k}, & \Delta t_{N+1} &:= \Delta t_\varepsilon - \sum_{k=1}^N \varepsilon^k t_k,\end{aligned}\tag{3.12}$$

по построению удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \mathcal{F}(\Delta l_{N+1}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon \|r_{N+1}\|) + O(\|r_{N+1}\|^2), \\ \mathcal{G}_1(\Delta l_{N+1}, \Delta \tau_{1,N+1}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon \|r_{N+1}\|) + O(\|r_{N+1}\|^2), \\ \mathcal{G}_2(\Delta l_{N+1}, \Delta \tau_{2,N+1}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon \|r_{N+1}\|) + O(\|r_{N+1}\|^2), \\ \mathcal{G}_3(\Delta l_{N+1}, \Delta t_{N+1}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon \|r_{N+1}\|) + O(\|r_{N+1}\|^2), \end{cases}\tag{3.13}$$

где $r_{N+1}^* := (\Delta l_{N+1}^*, \Delta \tau_{1,N+1}^*, \Delta \tau_{2,N+1}^*, \Delta t_{N+1}^*)$.

В силу непрерывной обратимости оператора $(\mathcal{F}^*, \mathcal{G}_1^*, \mathcal{G}_2^*, \mathcal{G}_3^*)$ из (3.13) получим

$$r_{N+1} = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon \|r_{N+1}\|) + O(\|r_{N+1}\|^2).\tag{3.14}$$

Из соотношений (3.6), (3.12), (3.14) на основании [9, Утверждение 2] следует, что $r_{N+1} = O(\varepsilon^{N+1})$. Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 1.2, 1.3, 3.1 и предположение (3.1). Тогда вектор l_ε и моменты времени $t_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1, 2$ раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} := \varepsilon \tau_{1,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon \tau_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{1,k},$$

$$t_{2,\varepsilon} := \varepsilon \tau_{2,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon \tau_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{2,k}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

При выполнении условия (3.1) возможен случай, когда на $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ для исходной задачи “появляется” одна точка смены вида оптимального управления. Например, если

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} -I & I \\ \mathcal{O} & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix},$$

то $A_0 = -I$, $B_0 = I$, $C_0(t) = e^{-t}$, $\|C_0^*(t)l_0\| = e^{-t}\|l_0\|$, $\psi^*(\tau) \stackrel{(2.22)}{=} (1-e^{-\tau})I$, $\|\psi^*(\tau)l_0\| = \|(1-e^{-\tau})\| \cdot \|l_0\|$ и $\|\psi(0)l_0\| = 0$. Поэтому, если $\|l_0\| > 2$ и $e^T\|l_0\| < 2$, то на отрезке $[0, \sqrt{\varepsilon}]$ существует единственный корень $\tau_1 = \ln \frac{\|l_0\|}{\|l_0\|-2}$ уравнения (2.22).

Рассмотрим подробнее такой случай.

У с л о в и е 3.2. Пусть $t_1 = \varepsilon\tau_1$, где τ_1 — все решения уравнения (2.22), а t_0 — единственное решение уравнения $\|C_\varepsilon^*(t)l_0\| = 2$, эти решения регулярны и выполнены условия (3.2), (3.4). Значит, условие (3.3) нарушается.

Таким образом, в рассматриваемом случае в силу теоремы 2.1 имеются ровно две точки смены вида оптимального управления $t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon}$ и $t_{0,\varepsilon}$, причем $\tau_{1,\varepsilon} \rightarrow \tau_1$ и $t_{0,\varepsilon} \rightarrow t_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а интеграл $\int_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)} dt$ разбивается в сумму трех интегралов

$$\int_0^T \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{S(\|C_\varepsilon^*(t)l\|)} dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_{1,\varepsilon}} C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l dt + \int_{t_{1,\varepsilon}}^{t_{0,\varepsilon}} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l}{\|C_\varepsilon^*(t)l\|} dt + \frac{1}{2} \int_{t_{0,\varepsilon}}^T C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)l dt.$$

В этом случае в аналоге системы (3.7) будет три уравнения, а линейный оператор $\mathcal{F}$ будет строго положительным и иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta l) &= D^2\varphi^*(-l_0)\Delta l + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T C_0(t)C_0^*(t)\Delta l dt + \\ &+ \int_0^{t_0} C_0(t) \frac{C_0^*(t)\Delta l \|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t)\Delta l, C_0^*(t)l_0 \rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3} dt \end{aligned}$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия 1.2, 1.3, 3.2 и предположение (3.1). Тогда вектор l_ε и моменты времени $t_{i,\varepsilon}$, $i = 0, 1$ раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{0,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_k, \quad t_{1,\varepsilon} = \varepsilon\tau_{1,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{1,k},$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В общем случае справедлива итоговая теорема.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия 1.2, 1.3 и условия теоремы 2.1. Тогда вектор l_ε и моменты времени $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\}$, $\{\varepsilon\tau_{1,\varepsilon}, \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}, \dots, \varepsilon\tau_{q,\varepsilon}\}$ раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad \text{при } i = 1, \dots, p,$$

$$\varepsilon\tau_{j,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_j + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{j,k}, \quad \text{при } j = 1, \dots, q, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

Список литературы

- [1] А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев, “Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **20** (1982), 3–77.
- [2] Э. Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, Наука, М., 1972.
- [3] А. Дончев, *Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности*, Мир, М., 1987.
- [4] P. V. Kokotovic, A. H. Haddad, “Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **20**:1 (1975), 111–113.
- [5] А. Р. Данилин, О. О. Коврижных, “О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления”, *Докл. РАН*, **451**:6 (2013), 612–614.
- [6] А. Р. Данилин, Ю. В. Парышева, “Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **13**:2 (2007), 55–65.
- [7] А. И. Калинин, К. В. Семёнов, “Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:3 (2004), 432–443.
- [8] А. А. Шабуров, “Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **23**:2 (2017), 303–310.
- [9] А. А. Шабуров, “Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **24**:2 (2018), 280–289.
- [10] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением. Линейные системы*, Наука, М., 1968.
- [11] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961.
- [12] А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М., 2009, 248 с.
- [13] С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 1997.
- [14] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений*, Наука, М., 1973.
- [15] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

References

- [1] A. B. Vasil’eva, M. G. Dmitriev, “Singular perturbations in optimal control problems”, *J. Soviet Math.*, **34**:3 (1986), 1579–1629.
- [2] E. B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967 (In Russian).
- [3] A. L. Dontchev, *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1987.
- [4] P. V. Kokotovic, A. H. Haddad, “Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models”, *IEEE Trans. Automat. Control*, **20**:1 (1975), 111–113.
- [5] A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh, “Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance”, *Doklady Mathematics*, **88**:1 (2013), 465–467.
- [6] A. R. Danilin, Yu. V. Parysheva, “The asymptotics of the optimal value of the performance functional in a linear optimal control problem in the regular case”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **259**:2 (2007), S83–S94.

- [7] A. I. Kalinin, K. V. Semenov, “The asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with the multidimensional control”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:3 (2004), 407–417.
- [8] A. A. Shaburov, “Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space $\mathbb{R}^n$ with an integral convex performance index”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **23**:2 (2017), 303–310 (In Russian).
- [9] A. A. Shaburov, “Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow variables only”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **24**:2 (2018), 280–289 (In Russian).
- [10] N. N. Krasovskii, *Theory of Motion Control. Linear Systems*, Nauka, Moscow, 1968 (In Russian).
- [11] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience Publishers, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1962.
- [12] A. M. Ilin, A. R. Danilin, *Asymptotic Methods in Analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2009 (In Russian).
- [13] S. K. Godynov, *Modern Aspects of Linear Algebra*, RIMIBE NSU, Novosibirsk, 1998.
- [14] A. B. Vasilieva, V. F. Butuzov, *Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russian).
- [15] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

Информация об авторе

Шабуров Александр Александрович, аспирант, кафедра математического анализа института естественных наук и математики. Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: alexandershaburov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3174-9092>

Information about the author

Alexander A. Shaburov, Post-Graduate Student, Mathematical Analysis Department of the Institute of Natural Sciences and Mathematics. Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Ekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: alexandershaburov@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3174-9092>

Поступила в редакцию 17.01.2019 г.
Поступила после рецензирования 11.02.2019 г.
Принята к публикации 14.03.2019 г.

Received 17 January 2019
Reviewed 11 February 2019
Accepted for press 14 March 2019