



ТАМБОВСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Г.Р. ДЕРЖАВИНА

ISSN 1810-0198

# ВЕСТНИК ТАМБОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

2019, ТОМ 24, № 126

TAMBOV UNIVERSITY REPORTS  
SERIES: NATURAL AND TECHNICAL SCIENCES





# ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический  
журнал

Серия:  
естественные и технические науки

**Том 24, № 126, 2019**

Издается с 14 июня 1996 года  
Выходит 4 раза в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам (распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

## СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	139
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>С.Е. Жуковский, Ч.Т. Нзюк</i>	Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения 141
<i>Н.Г. Журбенко, А.Ф. Измаилов, Е.И. Усков</i>	Гибридная глобализация сходимости метода последовательного квадратичного программирования, стабилизированного вдоль подпространства 150
<i>В.А. Корабельников</i>	Процедурная интерпретация алгоритмов символьного интегрирования в системе MathPartner 166
<i>В.Ф. Молчанов, Е.С. Юрьева</i>	Целочисленные треугольники, уравнение Пелля и многочлены Чебышева 179
<i>А.Н. Пчелинцев, А.А. Полуновский, И.Ю. Юханова</i>	Метод гармонического баланса для отыскания приближенных периодических решений системы Лоренца 187
<i>О.А. Старикова</i>	Перечисление проективно конгруэнтных симметричных матриц 204
<i>В.И. Фомин</i>	Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов 211
<i>А. Хеллаф, С. Бенараб, Х. Геббай, В. Мерчела</i>	Класс сильно устойчивой аппроксимации неограниченных операторов 218
ИНФОРМАЦИЯ	235

---

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

---

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

---

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: [vestnik1@tsu.tmb.ru](mailto:vestnik1@tsu.tmb.ru); [ilina@tsutmb.ru](mailto:ilina@tsutmb.ru)

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-70572 от 03 августа 2017 г.

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

---

Редакторы: Т.А. Сустина, М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: В.В. Ключихин, С.Ю. Можаров

Технический секретарь М.В. Борзова

---

*Для цитирования:*

Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. – Тамбов, 2019. – Т. 24, № 126. – 100 с. – ISSN 1810-0198. – DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126

Подписано в печать 31.05.2019. Дата выхода в свет 03.07.2019

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 12,5. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 19190. Цена свободная

---

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: [izdat\\_tsu09@mail.ru](mailto:izdat_tsu09@mail.ru)

---

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2019

© Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки», 2019

При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

# Tambov University REPORTS

Scientific-Theoretical  
Journal

Series:  
Natural and Technical Sciences

**Volume 24, no. 126, 2019**

Published since June 14, 1996  
Issued 4 times a year

Journal of Derzhavin Tambov State University

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

---

## CONTENTS

### SCIENTIFIC ARTICLES

<i>S.E. Zhukovskiy, T.T. Ngok</i>	Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value	141
<i>N.G. Zhurbenko, A.F. Izmailov, E.I. Uskov</i>	Hybrid globalization of convergence of subspace-stabilized sequential quadratic programming method	150
<i>V.A. Korabelnikov</i>	Procedural interpretation of symbolic integration algorithms in MathPartner system	166
<i>V.F. Molchanov, E.S. Yuryeva</i>	Integer triangles, Pell's equation and Chebyshev polynomials	179
<i>A.N. Pchelintsev, A.A. Polunovskiy, I.Yu. Yukhanova</i>	The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system	187
<i>O.A. Starikova</i>	Projective congruent symmetric matrices enumeration	204
<i>V.I. Fomin</i>	About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators	211
<i>A. Khellaf, S. Benarab, H. Guebbai, W. Merchela</i>	A class of strongly stable approximation for unbounded operators	218

INFORMATION		235
-------------	--	-----

---

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
“Derzhavin Tambov State University”  
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

---

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

---

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. G.I. Malaschonok (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasyukov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, French Republic), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portuguese Republic), Prof., Dr. A.V. Ponossov (Ås, Kingdom of Norway), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

---

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: [vestnik1@tsu.tmb.ru](mailto:vestnik1@tsu.tmb.ru); [ilina@tsutmb.ru](mailto:ilina@tsutmb.ru)

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИ no. ФC77-70572 of August 3, 2017

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

---

Editors: T.A. Sustina, M.I. Filatova

English texts editors: V.V. Klochikhin, S.Y. Mozharov

Technical editor M.V. Borzova

*For citation:*

Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2019. – Vol. 24, no. 126. – 100 p. – ISSN 1810-0198. – DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126

Podpisano v pechat' 31.05.2019. Data vykhoda v svet 03.07.2019

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.

Pech. list 12,5. Usl. pech. list 11,6. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 19190. Tsena svobodnaya

---

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,  
FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy”  
of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: [izdat\\_tsu09@mail.ru](mailto:izdat_tsu09@mail.ru)

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2019

© The journal “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”, 2019

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications

© Жуковский С.Е., Нгок Ч.Т., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149

УДК 517

## Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения

Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ<sup>1,2</sup>,  
Чан Тхи НГОК<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»  
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6

<sup>2</sup> ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук  
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3365-2174>, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

## Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value

Sergey E. ZHUKOVSKIY<sup>1,2</sup>, Tran T. NGOK<sup>1</sup>

<sup>1</sup> RUDN University

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

<sup>2</sup> V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3365-2174>, e-mail: ngoc2tt@gmail.com

**Аннотация.** Классические теоремы об обратной функции гарантируют существование обратной функции в окрестности значения заданной точки, если в этой точке выполняется условие регулярности, т. е. первая производная в ней невырождена. Более общим условием существования неявной функции является условие 2-регулярности. Оно выполняется, например, для многих квадратичных отображений в нуле. Известно, что при естественных предположениях гладкости из 2-регулярности отображения в точке по некоторому направлению вытекает существование непрерывной обратной функции. В этой работе показано, что в известных утверждениях о существовании обратной функции при выполнении условия 2-регулярности предположения гладкости можно ослабить. При этом обратная функция может не быть непрерывной.

**Ключевые слова:** обратная функция; 2-регулярность

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00080\_a). Результаты §3 получены первым автором при поддержке гранта РНФ (проект № 17-11-01168).

**Для цитирования:** Жуковский С.Е., Нгок Ч.Т. Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 141–149. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149.

**Abstract.** The classical inverse function theorems guarantee the existence of an inverse function in a neighborhood of the value of a given point if the regularity condition is satisfied at this point, that is, the first derivative at a given point is nondegenerate. A more general condition for the existence of an implicit function is the 2-regularity condition. It holds, for example, for many quadratic mappings at zero. It is known that under natural smoothness assumptions, the existence of a continuous inverse function follows from a 2-regularity of a map at a point in a certain direction. In this paper, it is shown that, in the known statements guaranteeing the existence of an inverse function when the 2-regularity condition is satisfied, we can weaken the smoothness assumptions. However, the inverse function may not be continuous.

**Keywords:** inverse function; 2-regularity

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00080\_a). The results of Section 3 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01168).

**For citation:** Zhukovskiy S.E., Ngok T.T. Sushchestvovanie obratnoj funkicii v okrestnosti neregulyarnogo znacheniya [Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 141–149. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-141-149. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## 1. Введение и постановка задачи

Пусть задано отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $y_0 := f(x_0)$ . Рассмотрим уравнение

$$f(x) = y, \quad (1)$$

в котором  $x \in \mathbb{R}^n$  — неизвестная, а  $y \in \mathbb{R}^k$  — параметр. Нас будут интересовать условия существования решения  $x(y)$  уравнения (1), определенного при каждом  $y$  из некоторой окрестности точки  $y_0$ . Классическими утверждениями, гарантирующими существование искомого решения  $x(y)$  уравнения (1), являются теоремы об обратной функции. Напомним некоторые известные формулировки этих теорем.

Начнем с используемых обозначений и определений. Всюду далее норму в  $\mathbb{R}^n$  и в  $\mathbb{R}^k$  будем обозначать через  $|\cdot|$ ; через  $O_{\mathbb{R}^k}(v, r)$  будем обозначать открытый шар в  $\mathbb{R}^k$  с центром в точке  $v \in \mathbb{R}^k$  радиуса  $r > 0$ , т. е.

$$O_{\mathbb{R}^k}(v, r) = \{y \in \mathbb{R}^k : |y - v| \leq r\}, \quad v \in \mathbb{R}^k, \quad r > 0.$$

Для произвольного линейного оператора  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  обозначим через  $\ker A$  его ядро, а через  $\operatorname{im} A$  — его образ.

Отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  называется строго дифференцируемым в точке  $x_0$ , если существует линейный оператор  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  такой, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |f(x_1) - f(x_2) - A(x_1 - x_2)| \leq \varepsilon |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in O_{\mathbb{R}^n}(x_0, \delta).$$

Очевидно, что если  $f$  строго дифференцируемо в  $x_0$ , то оно дифференцируемо в этой точке и  $f'(x_0) = A$ .

**Теорема 1.** Пусть отображение  $f$  строго дифференцируемо в точке  $x_0$ . Если выполняется условие регулярности

$$\text{im} f'(x_0) = \mathbb{R}^k, \quad (2)$$

то существуют числа  $r > 0$ ,  $c > 0$  и непрерывное отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что

- (i)  $f(g(y)) = y \quad \forall y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r)$ ;
- (ii)  $g(x_0) = y_0$ ;
- (iii)  $|g(y) - x_0| \leq c|y - y_0| \quad \forall y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r)$ .

Эта теорема об обратной функции является следствием теоремы о неявной функции из [1]. Отметим, что в утверждениях, аналогичных теореме 1, как правило, вместо предположения строгой дифференцируемости в нуле используется более сильное предположение непрерывной дифференцируемости в окрестности нуля (см., например, [2, теорема 1A.1] и [3, теорема 2.13]), которое дополнительно гарантирует гладкость отображения  $g$ .

Предположения гладкости отображения  $f$  в теореме 1 можно ослабить следующим образом.

**Теорема 2.** Пусть отображение  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$  и непрерывно в некоторой её окрестности. Если выполняется условие регулярности (2), то существуют числа  $r > 0$ ,  $c > 0$  и отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что выполняются соотношения (i) – (iii).

Этот результат был получен в [4, Theorem E]. Аналогичный результат, гарантирующий существование неявной функции, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, был получен в [5, приложение II]. Теорема 2 гарантирует существование обратной функции  $g$  при ослабленных предположениях гладкости отображения  $f$ , но не гарантирует ее непрерывности. В [5, приложение II] приведен пример отображения  $f$ , для которого выполняются предположения теоремы 2 и не существует непрерывного отображения  $g$ , удовлетворяющего (i) – (iii).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании и непрерывности обратной функции в случае, когда условие регулярности (2) может нарушаться.

Предположим, что отображение  $f$  дважды дифференцируемо в точке  $x_0$ . Пусть существует вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  такой, что

$$h \in \ker f'(x_0), \quad f''(x_0)[h, h] \in \text{im} f'(x_0).$$

Отображение  $f$  называется 2-регулярным в нуле по направлению  $h$ , если

$$\text{im} f'(x_0) + f''(x_0)[h, \ker f'(x_0)] = \mathbb{R}^k. \quad (3)$$

Отметим, что если для отображения  $f$  выполняется условие регулярности (2), то  $f$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  по направлению  $h = 0$ . В то же время, существуют отображения, являющиеся 2-регулярными по некоторым направлениям и не удовлетворяющие условию регулярности (2). Соответствующий элементарный пример дает отображение  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ . Оно является 2-регулярным по направлению  $h = (1, 1)$  в нуле и не удовлетворяет условию регулярности (2), поскольку  $\text{im} f'(0) = \{0\}$ .

**Теорема 3.** Пусть отображение  $f$  дважды непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и отображение  $f''(\cdot)$  липшицево в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Пусть  $P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проектор на подпространство, дополняющее  $\text{im} f'(x_0)$  до  $\mathbb{R}^k$ .

Если отображение  $f$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  по некоторому направлению  $h \in \mathbb{R}^n$ , то существуют числа  $r > 0$ ,  $c > 0$  и непрерывное отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что выполняются соотношения (i), (ii) и

$$(iv) \quad |g(y) - x_0| \leq c(|y - y_0| + \sqrt{|P(y - y_0)|}) \quad \forall y \in O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r).$$

Вопрос о существовании обратной функции к отображениям, 2-регулярным по некоторым направлениям, впервые изучался в работе [6]. В ней была получена теорема о существовании обратной функции для отображений банаховых пространств. При этом [6, теорема 1] не содержит утверждения о непрерывности обратной функции. Приведенная здесь теорема 3, гарантирующая непрерывность обратной функции, является следствием из [7, теорема 4]. Подробный обзор результатов о существовании обратных и неявных функций в случае, когда нарушаются классические предположения регулярности, приведен в [8].

В связи с теоремами 1 и 2 возникает следующий естественный вопрос. Как ослабить предположения гладкости в теореме 3 так, чтобы утверждение о существовании и свойствах обратного отображения  $g$  осталось верным за исключением, быть может, утверждения о непрерывности отображения  $g$ ? Ответ на этот вопрос дает утверждение, приведенное в следующем параграфе.

## 2. Основной результат

Пусть задано отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

**Теорема 4.** Пусть отображение  $f$  дважды дифференцируемо в точке  $x_0$  и непрерывно в некоторой её окрестности. Пусть  $P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проектор на подпространство, дополняющее  $\text{im} f'(x_0)$  до  $\mathbb{R}^k$ .

Если отображение  $f$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  по некоторому направлению  $h \in \mathbb{R}^n$ , то существуют числа  $r > 0$ ,  $c > 0$  и отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что выполняются соотношения (i), (ii) и (iv).

Доказательству теоремы предположим следующее вспомогательное утверждение. Пусть заданы линейный оператор  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  и симметричное билинейное отображение  $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Рассмотрим уравнение

$$Ax + Q[x, x] = y \quad (4)$$

с неизвестным  $x$  и параметром  $y$ . Непосредственно из [7, теорема 4] вытекает следующее утверждение о разрешимости уравнения (4).

Пусть  $P : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  — проектор на подпространство, дополняющее  $\text{im}A$  до  $\mathbb{R}^k$ .

**Лемма 1.** *Если существует вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  такой, что*

$$Ah = 0, \quad Q[h, h] \in \text{im}A, \quad \text{im}A + Q[h, \ker A] = \mathbb{R}^k,$$

то существуют числа  $d > 0$ ,  $c > 0$  и непрерывное отображение  $p : O_{\mathbb{R}^k}(0, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что

$$Ap(y) + Q[p(y), p(y)] = y, \quad |p(y)| \leq c(|y| + \sqrt{|Py|}) \quad \forall y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, d). \quad (5)$$

**Доказательство** теоремы 4. Не ограничивая общности будем предполагать, что  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ .

Положим

$$A := f'(0), \quad Q := f''(0)/2, \quad \omega(x) = f(x) - Ax - Q[x, x] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку отображение  $f$  дважды дифференцируемо в нуле и непрерывно в окрестности нуля, то существует  $\delta > 0$  такое, что отображение  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  непрерывно на  $O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$  и

$$\frac{\omega(x)}{|x|^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (6)$$

Поскольку отображение  $f$  является 2-регулярным в нуле по направлению  $h$ , то для операторов  $A$  и  $Q$  выполнены предположения леммы 1. Следовательно, существуют числа  $d > 0$ ,  $c > 0$  и непрерывное отображение  $p : O_{\mathbb{R}^k}(0, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что выполняются соотношения (5). В силу (6) существует  $\hat{\varepsilon} > 0$  такое, что

$$\forall \varepsilon \in (0, \hat{\varepsilon}) \quad c|\omega(x)| + c\sqrt{|P\omega(x)|} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon). \quad (7)$$

Возьмем произвольное  $r > 0$  такое, что

$$2r + \sqrt{\|P\|}r < d, \quad 2c(r + \sqrt{\|P\|}r) < \min\{\delta, \hat{\varepsilon}\}.$$

Возьмем произвольный  $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ . Положим

$$\varepsilon(y) := 2c(|y| + \sqrt{|Py|}).$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$x = p(y - \omega(x)) \quad (8)$$

с неизвестным  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ . Покажем, что к этому уравнению применима теорема Брауэра о неподвижной точке.

Сначала покажем, что при любом  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  точка  $y - \omega(x)$  лежит в области определения  $O_{\mathbb{R}^k}(0, d)$  отображения  $p$ . Действительно, при любом  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  имеем

$$|y - \omega(x)| \leq |y| + |\omega(x)| \leq r + \frac{c|\omega(x)| + c\sqrt{|P\omega(x)|}}{c} \leq r + \frac{\varepsilon(y)}{2c} \leq 2r + \sqrt{\|P\|}r < d.$$

Здесь первое неравенство следует из неравенства треугольника для  $|\cdot|$ , второе неравенство — из включения  $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$  и неравенства  $\sqrt{|P\omega(x)|} \geq 0$ , третье — из (7) и неравенства  $\varepsilon(y) < \hat{\varepsilon}$ , четвертое — из определения числа  $\varepsilon(y)$  и неравенства  $|y| < r$ , а пятое — из определения числа  $r$ .

Покажем теперь, что отображение  $x \mapsto p(y - \omega(x))$ ,  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ , непрерывно. В силу непрерывности отображения  $p$  на  $O_{\mathbb{R}^k}(0, d)$  и отображения  $\omega$  на  $O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$  достаточно показать, что  $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y)) \subset O_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$ . Действительно, для любого  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  имеем

$$|x| \leq \varepsilon(y) \leq 2c(|y| + \sqrt{|Py|}) < 2c(r + \sqrt{\|P\|}r) < \delta.$$

Здесь второе неравенство следует из определения числа  $\varepsilon(y)$ , третье — из неравенства  $|y| < r$ , а четвертое — из определения числа  $r$ .

Далее покажем, что  $p(y - \omega(x)) \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  для любого  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ . Действительно, для любого  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  имеем

$$\begin{aligned} |p(y - \omega(x))| &\leq c|y - \omega(x)| + c\sqrt{|P(y - \omega(x))|} \leq \\ &\leq c|y| + c\sqrt{|Py|} + c|\omega(x)| + c\sqrt{\|P\||\omega(x)|} \leq c|y| + c\sqrt{|Py|} + \frac{\varepsilon(y)}{2} = \varepsilon(y). \end{aligned}$$

Здесь первое неравенство следует из (5), второе — из неравенства треугольника, третье — из (7) и неравенства  $\varepsilon(y) < \hat{\varepsilon}$ , а равенства — из определения числа  $\varepsilon(y)$ .

Итак, доказано, что отображение  $x \mapsto p(y - \omega(x))$ ,  $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ , определено корректно, является непрерывным и принимает значения в  $B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$ . Следовательно, по теореме Брауэра о неподвижной точке существует решение  $g(y) \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \varepsilon(y))$  уравнения (8), т. е.

$$g(y) = p(y - \omega(g(y))).$$

Покажем, что построенное отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  является искомым. Для каждого  $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$  имеем

$$\begin{aligned}
& f(g(y)) = Ag(y) + Q[g(y), g(y)] + \omega(g(y)) = \\
& = Ap(y - \omega(g(y))) + Q[p(y - \omega(g(y))), p(y - \omega(g(y)))] + \omega(g(y)) = y - \omega(g(y)) + \omega(g(y)) = y.
\end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из определения отображений  $A, Q$  и  $\omega$ , второе из равенства  $g(y) = p(y - \omega(g(y)))$ , а третье — из тождества в (5). Кроме того,

$$|g(y)| \leq \varepsilon(y) \leq 2c(|y| + \sqrt{|Py|}).$$

□

### 3. Обсуждение основного результата

Прокомментируем теорему 4 и связанные с ней понятия.

**З а м е ч а н и е 1.** Если отображение  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  по направлению  $h$ , то  $h = 0$ , и, значит, выполняется условие регулярности (2). Действительно, если  $h \neq 0$ , то

$$\dim(\operatorname{im} f'(x_0)) + \dim(f''(x_0)[h, \ker f'(x_0)]) = k = n$$

в силу (3), но  $\dim(\operatorname{im} f'(x_0) \cap f''(x_0)[h, \ker f'(x_0)]) \geq 1$ , что приводит к противоречию. Значит,  $h = 0$ . Поэтому из (3) вытекает (2).

При  $k < n$  для отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  может существовать точка  $x_0$  такая, что  $\operatorname{im} f'(x_0) \neq \mathbb{R}^k$ , и существует направление  $h$ , по которому  $f$  является 2-регулярным в точке  $x_0$ . Соответствующий пример дает квадратичная форма  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1 x_2$ , являющаяся 2-регулярным в нуле отображением по направлению  $h = (1, 0, \dots, 0)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Лемма 1 гарантирует, что линейно-квадратичное отображение  $x \mapsto Ax + Q[x, x]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , имеет обратную функцию  $p(\cdot)$ , определенную в некоторой окрестности нуля в  $\mathbb{R}^k$ . Таким образом, теорема 4 гарантирует, что если линейно-квадратичное отображение 2-регулярно в нуле по некоторому направлению  $h$ , то свойство существования обратной функции устойчиво при любом непрерывном возмущении  $\omega$ , удовлетворяющем условию (6).

**З а м е ч а н и е 3.** Если для отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  выполнены предположения теоремы 2 и  $f$  является дважды дифференцируемым в точке  $x_0$ , то для  $f$  выполнены предположения теоремы 4. В частности,  $f$  является 2-регулярным в точке  $x_0$  по направлению  $h = 0$ . При этом оценка (iv) совпадает с оценкой (iii), поскольку из предположения (2) следует, что  $P = 0$ .

В заключение приведем одно следствие теоремы 4. Пусть  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  — билинейное симметричное отображение. Получим условия, при которых из разрешимости уравнения

$$Q[x, x] = y$$

при любом  $y \in \mathbb{R}^k$  следует разрешимость возмущенного уравнения

$$Q[x, x] + \omega(x) = y \quad (9)$$

для любого непрерывного возмущения  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , удовлетворяющего условию (6), для любого  $y$  из некоторой окрестности нуля, зависящей от  $\omega$ .

**Следствие 1.** *Если существует вектор  $h \in \mathbb{R}^n$  такой, что*

$$Q[h, h] = 0, \quad Q[h, \mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^k,$$

*то для любого непрерывного отображения  $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , удовлетворяющего соотношению (6), существует  $r > 0$  такое, что уравнение (9) имеет решение при любом  $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ .*

**Доказательство.** Положим  $f(x) := Q[x, x] + \omega(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Очевидно, что для отображения  $f$  выполнены предположения теоремы 4. Следовательно, существуют числа  $r > 0$ ,  $c > 0$  и непрерывное отображение  $g : O_{\mathbb{R}^k}(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  такие, что выполняются соотношения (i), (ii) и (iv) с  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ . Значит, уравнение (9) разрешимо при любом  $y \in O_{\mathbb{R}^k}(0, r)$ .  $\square$

### Список литературы

- [1] В. М. Тихомиров, “Теорема Люстерника о касательном пространстве и некоторые ее модификации”, *Оптимальное управление: Математические вопросы управления производством*, **7** (1977), 22–30.
- [2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer, New York, 2009.
- [3] М. Спивак, *Математический анализ на многообразиях*, Мир, М., 1968.
- [4] Н. Halkin, “Implicit functions and optimization problems without continuous differentiability of the data”, *SIAM J. Control*, **12:2** (1974), 229–236.
- [5] А. В. Арутюнов, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения*, Факториал Пресс, М., 2006.
- [6] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, “Теорема об обратной функции и условия экстремума для аномальных задач с незамкнутым образом”, *Матем. сб.*, **196:9** (2005), 3–22.
- [7] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46:2** (2006), 205–215.
- [8] А. В. Арутюнов, “Гладкие аномальные задачи теории экстремума и анализа”, *УМН*, **67:3(405)** (2012), 3–62.

### References

- [1] V. M. Tikhomirov, “Lyusternik’s Theorem on tangent space and its modifications”, *Optimal Control: Mathematical Issues of Production Control, MSU Publ., Moscow*, **7** (1977), 22–30 (In Russian).
- [2] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer, New York, 2009.

- [3] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, New York, 1965.
- [4] H. Halkin, “Implicit functions and optimization problems without continuous differentiability of the data”, *SIAM J. Control*, **12**:2 (1974), 229–236.
- [5] A. V. Arutyunov, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Pontryagin’s Maximum Principle. Proof and Applications*, Factorial Press, Moscow, 2006. (In Russian).
- [6] E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, “Inverse function theorem and conditions of extremum for abnormal problems with non-closed range”, *Sbornik: Mathematics*, **196**:9 (2005), 1251–1269.
- [7] A. V. Arutyunov, “Implicit function theorem without a priori assumptions about normality”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.
- [8] A. V. Arutyunov, “Smooth abnormal problems in extremum theory and analysis”, *Russian Mathematical Surveys*, **67**:3 (2012), 403–457.

**Жуковский Сергей Евгеньевич**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник центра нелинейного анализа и оптимизации. Российский университет дружбы народов, г. Москва, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

**Нгок Чан Тхи**, студент, факультет физико-математических и естественных наук. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: ngoc2tt@gmail.com

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3365-2174>

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Жуковский Сергей Евгеньевич

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.

Поступила после рецензирования 15.04.2019 г.

Принята к публикации 20.05.2019 г.

**Sergey E. Zhukovskiy**, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher at the Center for Nonlinear Analysis and Optimization. RUDN University, Moscow, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

**Tran T. Ngok**, Student, Faculty of Physics, Mathematics and Natural Science. RUDN University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: ngoc2tt@gmail.com

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3365-2174>

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Sergey E. Zhukovskiy

E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 20 February 2019

Reviewed 15 April 2019

Accepted for press 20 May 2019

© Журбенко Н.Г., Измаилов А.Ф., Усков Е.И., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-150-165

УДК 519

## **Гибридная глобализация сходимости метода последовательного квадратичного программирования, стабилизированного вдоль подпространства**

**Николай Георгиевич ЖУРБЕНКО<sup>1</sup>, Алексей Ферилович ИЗМАЙЛОВ<sup>2</sup>,  
Евгений Иванович УСКОВ<sup>3</sup>**

<sup>1)</sup> Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины  
03187, Украина, г. Киев, проспект Академика Глушкова, 40

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5123-8607>, e-mail: zhurnick@gmail.com

<sup>2)</sup> ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»  
119992, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, факультет ВМК

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>, e-mail: izmaf@ccas.ru

<sup>3)</sup> ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»  
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>, e-mail: euskov@cs.msu.ru

## **Hybrid globalization of convergence of subspace-stabilized sequential quadratic programming method**

**Nikolay G. ZHURBENKO<sup>1</sup>, Alexey F. IZMAILOV<sup>2</sup>, Evgeniy I. USKOV<sup>3</sup>**

<sup>1)</sup> V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine  
40 Akademika Glushkova Ave., Kiev 03187, Ukraine

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5123-8607>, e-mail: zhurnick@gmail.com

<sup>2)</sup> Lomonosov Moscow State University

VMK Faculty, Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>, e-mail: izmaf@ccas.ru

<sup>3)</sup> Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>, e-mail: euskov@cs.msu.ru

**Аннотация.** Локальная сверхлинейная сходимость стабилизированного метода последовательного квадратичного программирования устанавливается при очень слабых предположениях, не включающих в себя никакие условия регулярности ограничений. Однако, все попытки глобализации сходимости этого метода неминуемо сталкиваются с принципиальными трудностями, связанными с поведением этого метода при относительной удаленности текущей итерации от решений. А именно, стабилизированный

метод последовательного квадратичного программирования имеет тенденцию генерировать длинные последовательности коротких шагов перед тем, как проявляется его сверхлинейная сходимость. В связи с этим был предложен метод последовательного квадратичного программирования, стабилизированный вдоль подпространства, обладающий лучшим «полулокальным» поведением, а значит, лучше приспособленный для разработки на его основе практических алгоритмов. В данной работе предлагаются два способа гибридной глобализации сходимости этого метода: алгоритм с возвратами и алгоритм с рекордами. Приводятся теоретические результаты о глобальной сходимости и скорости сходимости данных алгоритмов, а также результаты сравнительного численного тестирования.

**Ключевые слова:** последовательное квадратичное программирование; вырожденные решения; не критический множитель Лагранжа; двойственная стабилизация; глобализация сходимости

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00125\_а и № 19-51-12003 ННИО\_а) и фонда Volkswagen (грант 90306).

Авторы выражают признательность Дарию Панкову за помощь в проведении численного тестирования.

**Для цитирования:** Журбенко Н.Г., Измаилов А.Ф., Усков Е.И. Гибридная глобализация сходимости метода последовательного квадратичного программирования, стабилизированного вдоль подпространства // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 150–165. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-150-165.

**Abstract.** Local superlinear convergence of the stabilized sequential quadratic programming method is established under very weak assumptions not involving any constraint qualification conditions. However, all attempts to globalize convergence of this method inevitably face principal difficulties related to the behavior of this method when the iterates are still relatively far from solutions. Specifically, the stabilized sequential quadratic programming method has a tendency to generate long sequences of short steps before its superlinear convergence shows up. To that end, the so-called subspace-stabilized sequential quadratic programming method has been proposed, demonstrating better “semi-local” behavior, and hence, more suitable for development of practical algorithms on its basis. In this work we propose two techniques for hybrid globalization of convergence of this method: algorithm with backups, and algorithm with records. We provide theoretical results on convergence and rate of convergence of these algorithms, as well as some results of their numerical testing.

**Keywords:** sequential quadratic programming; degenerate solutions; noncritical Lagrange multiplier; dual stabilization; globalization of convergence

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 17-01-00125\_а and 19-51-12003 ННИО\_а) and by the Volkswagen Foundation (grant 90306).

The authors are grateful to Dariy Pankov for assistance in conducting numerical testing.

**For citation:** Zhurbenko N.G., Izmailov A.F., Uskov E.I. Gibridnaya globalizatsiya skhodimosti metoda posledovatel'nogo kvadrachnogo programmirovaniya, stabilizirovannogo vdol' podprostranstva [Hybrid globalization of convergence of subspace-stabilized sequential quadratic programming method]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 150–165. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-150-165. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Рассматривается задача оптимизации с ограничениями-равенствами

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad (1)$$

где целевая функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и отображение  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  по крайней мере дважды дифференцируемы.

Стационарные точки данной задачи и соответствующие им множители Лагранжа задаются системой оптимальности Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0, \quad (2)$$

где  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle,$$

есть функция Лагранжа задачи (1). А именно, обозначим через  $\mathcal{M}(\bar{x})$  множество множителей Лагранжа, отвечающих допустимой точке  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  задачи (1), то есть множество таких  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ , для которых пара  $(\bar{x}, \lambda)$  удовлетворяет системе (2). Тогда говорят, что  $\bar{x}$  является стационарной точкой данной задачи, если  $\mathcal{M}(\bar{x}) \neq \emptyset$ .

Как хорошо известно, стационарность является необходимым условием локальной оптимальности точки  $\bar{x}$  в задаче (1) при выполнении условия регулярности ограничений

$$\text{rank } h'(\bar{x}) = l, \quad (3)$$

которое к тому же является необходимым и достаточным условием единственности множителя Лагранжа, отвечающего стационарной точке  $\bar{x}$ .

В терминологии [1, разд. 1.3.3], множитель Лагранжа  $\bar{\lambda} \in \mathcal{M}(\bar{x})$  называется критическим, если существует такой вектор  $\xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}$ , что

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi \in \text{im}(h'(x))^T,$$

и некритическим иначе. Будем говорить, что в стационарной точке  $\bar{x}$  задачи (1) для отвечающего ей множителя Лагранжа  $\bar{\lambda} \in \mathcal{M}(\bar{x})$  выполнено достаточное условие второго порядка оптимальности, если

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}.$$

При выполнении этого условия множитель  $\bar{\lambda}$  всегда является некритическим.

Как показано в [1, предложение 1.43], некритичность  $\bar{\lambda} \in \mathcal{M}(\bar{x})$  равносильна следующему свойству: существует константа  $L > 0$  такая, что для всех  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ , достаточно близких к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , выполняется неравенство

$$\|x - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda, \mathcal{M}(\bar{x})) \leq L\|\Phi(x, \lambda)\|, \quad (4)$$

где  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ ,

$$\Phi(x, \lambda) = \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda), h(x) \right), \quad (5)$$

есть оператор системы Лагранжа (2).

Одним из наиболее эффективных методов общего назначения для задач условной оптимизации является метод последовательного квадратичного программирования (SQP, от «sequential quadratic programming») [1, разд. 4.2], [2, разд. 4.4], который для задачи (1) есть ни что иное, как метод Ньютона для системы уравнений Лагранжа (2). Локальная сверхлинейная сходимость метода SQP к решению  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  этой системы устанавливается при выполнении условия регулярности ограничений (3) и не критичности множителя  $\bar{\lambda}$ . О различных способах глобализации сходимости метода SQP см. [1, разд. 6.2], [2, разд. 5.4], а также разд. 1 ниже.

Стабилизированный метод последовательного квадратичного программирования (sSQP, от «stabilized SQP») был предложен в [3] для задачи оптимизации с ограничениями-неравенствами как средство восстановления сверхлинейной скорости сходимости метода SQP, которая обычно теряется при нарушении условий регулярности ограничений. Впоследствии метод был распространен и на задачи, в которых присутствуют и ограничения-равенства. В частности, в [4] (см. также разд. 2 ниже) для задачи (1) было показано, что при выполнении одного лишь условия не критичности  $\bar{\lambda}$  метод sSQP локально сверхлинейно сходится к  $(\bar{x}, \lambda^*)$  с некоторым  $\lambda^* \in \mathcal{M}(\bar{x})$ , близким к  $\bar{\lambda}$ .

В работах [5]–[12] предпринимались различные попытки глобализации сходимости метода sSQP. В частности, в [5] были предложены два алгоритма гибридной глобализации данного метода, где в качестве алгоритма внешней фазы использовался глобализованный посредством одномерного поиска метод SQP. Однако, все эти попытки сталкиваются с принципиальными трудностями, связанными с поведением метода sSQP при относительной удаленности текущей итерации от решений. А именно, метод имеет тенденцию генерировать длинные последовательности коротких шагов перед тем, как проявляется его сверхлинейная сходимость. Подчеркнем, что это дефект самого метода sSQP, и он неминуемо будет проявляться при любых способах глобализации его сходимости. На сегодняшний день однозначно успешные способы такой глобализации авторам неизвестны.

В связи со сказанным в [13] было сделано предположение, что в модификации нуждаются не способы глобализации сходимости, а сам метод sSQP. Там же был разработан метод последовательного квадратичного программирования, стабилизированный вдоль подпространства (s-sSQP, от «subspace-stabilized SQP»), обладающий лучшим «полулокальным» поведением, а значит, лучше приспособленный для глобализации. Основные ингредиенты этой конструкции обсуждаются ниже в разд. 2, а в разд. 3 предлагаются два способа такой глобализации: алгоритм с возвратами и алгоритм с рекордами, а также соответствующие теоретические результаты о глобальнойходимости и скорости сходимости данных алгоритмов. Наконец, разд. 4 содержит некоторые результаты численного тестирования.

## 1. Глобализованный метод последовательного квадратичного программирования

Метод SQP состоит в следующем. Для текущего прямо-двойственного приближения  $(x^k, \lambda^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  вычисляется направление  $(\xi^k, \eta^k)$  как решение системы линейных уравнений

$$H_k \xi + (h'(x^k))^T \eta = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k), \quad h'(x^k) \xi = -h(x^k), \quad (6)$$

с базовым выбором

$$H_k = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k). \quad (7)$$

Следующее приближение определяется как  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$ .

В разд. 3 в качестве метода внешней фазы для гибридного алгоритма будет использоваться следующий вариант метода SQP, глобализованный одномерным поиском для негладкой точной штрафной функции  $\varphi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_c(x) = f(x) + c \|F(x)\|_1, \quad (8)$$

при соответствующем выборе значений параметра штрафа  $c > 0$ ; см. [1, разд. 6.2.1], [2, разд. 5.4.1]. Приводимый алгоритм снабжен так называемыми поправками второго порядка, позволяющими подавлять известный эффект Маратоса, замедляющий сходимость [1, разд. 6.2.2], [2, разд. 5.4.2].

**А л г о р и т м** 1. Выбираем параметры  $\bar{c} > 0$ ,  $\varepsilon, \theta \in (0, 1)$ . Выбираем начальное приближение  $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  и полагаем  $k = 0$ .

1. Выбираем симметричную матрицу  $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и вычисляем  $(\xi^k, \eta^k)$  как решение системы (6). Полагаем  $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \eta^k$ .
2. Если  $\xi^k = 0$ , стоп.
3. Выбираем

$$c_k \geq \|\lambda^{k+1}\|_\infty + \bar{c},$$

и вычисляем

$$\Delta_k = \langle f'(x^k), \xi^k \rangle - c_k \|F(x^k)\|_1.$$

4. Если выполняется неравенство

$$\varphi_{c_k}(x^k + \xi^k) \leq \varphi_{c_k}(x^k) + \varepsilon \Delta_k,$$

где функция  $\varphi_{c_k}$  вводится согласно (8), то полагаем  $x^{k+1} = x^k + \xi^k$ , и переходим к п. 7.

5. Вычисляем  $\hat{\xi}^k$  как решение задачи оптимизации

$$\|\xi\| \rightarrow \min, \quad h(x_k + \xi_k) + h'(x^k) \xi = 0.$$

6. Полагаем  $\alpha = 1$ . Если выполняется неравенство

$$\varphi_{c_k}(x^k + \alpha\xi^k + \alpha^2\widehat{\xi}^k) \leq \varphi_{c_k}(x^k) + \varepsilon\alpha\Delta_k, \quad (9)$$

то полагаем  $\alpha_k = \alpha$ . В противном случае заменяем  $\alpha$  на  $\theta\alpha$  и проверяем (9), до тех пор, пока оно не будет выполнено. Полагаем  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k\xi^k + \alpha_k^2\widehat{\xi}^k$ .

7. Увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к п. 1.

Анализ свойств глобальной сходимости и скорости сходимости данного алгоритма приводится в [1, разд. 6.2], [2, разд. 5.4].

## 2. Стабилизированные методы последовательного квадратичного программирования

Метод sSQP получается заменой итерационной системы (6) на следующую:

$$H_k\xi + (h'(x^k))^T\eta = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k), \quad h'(x^k)\xi - \sigma(x^k, \lambda^k)\eta = -h(x^k), \quad (10)$$

с  $H_k$  выбираемым согласно (7), и с функцией  $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$ , задающей параметр стабилизации и традиционно определяемой как невязка системы Лагранжа (2):

$$\sigma(x, \lambda) = \|\Phi(x, \lambda)\|,$$

где  $\Phi$  введено в (5).

Нарушение условия регулярности ограничений в точке  $\bar{x}$  означает, что

$$(\text{im } h'(\bar{x}))^\perp = \ker(h'(\bar{x}))^T$$

является нетривиальным линейным подпространством в  $\mathbb{R}^l$ , которое в дальнейшем будем называть подпространством вырожденности. Когда подпространство вырожденности совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^l$ , т. е. когда  $h'(\bar{x}) = 0$ , метод sSQP и его упоминавшиеся выше глобализации обычно вполне успешны. Однако, при неполном вырождении, т. е. в тех случаях, когда подпространство вырожденности является нетривиальным, но *собственным* подпространством в  $\mathbb{R}^l$ , данный метод имеет тенденцию генерировать длинные последовательности коротких шагов. Такое поведение наблюдалось уже в некоторых примерах в [14]. Необходимость подавления этого эффекта является мотивировкой введения в [13] следующего класса методов.

Пусть задано отображение  $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^{l \times l}$  и функция  $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ . Предполагается, что линейный оператор  $P(x, \lambda)$  аппроксимирует проектор на подпространство вырожденности при  $(x, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\lambda})$ . Итерационная система метода s-sSQP имеет вид

$$H_k\xi + (h'(x^k))^T\eta = -\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k), \quad h'(x^k)\xi - \sigma(x^k, \lambda^k)P(x^k, \lambda^k)\eta = -h(x^k), \quad (11)$$

т. е. отличается от итерационной системы (10) метода sSQP только присутствием линейного оператора  $P(x^k, \lambda^k)$  во втором уравнении, а также, возможно, другим выбором функции  $\sigma$ .

В [13] были введены две группы методов s-sSQP. Методы s-sSQP с исчезающей стабилизацией характеризуются следующими требованиями на  $P$  и  $\sigma$ :

- отображение  $P$  непрерывно в точке  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , и  $(\text{im } h'(\bar{x}))^\perp$  является инвариантным подпространством  $P(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , т. е.

$$P(\bar{x}, \bar{\lambda})\eta = \eta \quad \forall \eta \in (\text{im } h'(\bar{x}))^\perp;$$

- функция  $\sigma$  непрерывна в каждой точке множества  $\{\bar{x}\} \times \mathcal{M}(\bar{x})$  из некоторой окрестности  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ,  $\sigma(\bar{x}, \lambda) = 0$  для всех  $\lambda \in \mathcal{M}(\bar{x})$  достаточно близких к  $\bar{\lambda}$ ,  $\sigma(x, \lambda) \neq 0$  для всех  $(x, \lambda) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l) \setminus (\{\bar{x}\} \times \mathcal{M}(\bar{x}))$  из некоторой окрестности  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , и

$$\|x - \bar{x}\| = O(|\sigma(x, \lambda)|)$$

при  $(x, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\lambda})$ .

Заметим, что эти предположения позволяют взять, например,  $P(\cdot) \equiv I$ , тем самым покрывая метод sSQP. О других способах выбора  $P$  см. ниже. Кроме того, если  $\bar{\lambda}$  — некритический множитель Лагранжа, то, согласно эквивалентности этого условия оценке (4), всем требованиям удовлетворяет выбор

$$\sigma(x, \lambda) = \|\Phi(x, \lambda)\|^\beta$$

с любым фиксированным показателем  $\beta \in (0, 1]$ , где  $\Phi$  введен в (5).

Методы s-sSQP с неисчезающей стабилизацией предполагают следующие требования на  $P$  и  $\sigma$ :

- отображение  $P$  непрерывно в каждой точке множества  $\{\bar{x}\} \times \mathcal{M}(\bar{x})$  из некоторой окрестности  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ,  $\text{im } P(\bar{x}, \lambda) \cap \text{im } h'(\bar{x}) = \{0\}$  для всех  $\lambda \in \mathcal{M}(\bar{x})$  из некоторой окрестности  $\bar{\lambda}$ , и  $\text{ker } P(\bar{x}, \bar{\lambda}) \cap (\text{im } h'(\bar{x}))^\perp = \{0\}$ .
- функция  $\sigma$  непрерывна в точке  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , и  $\sigma(\bar{x}, \bar{\lambda}) \neq 0$ .

Идея методов такого рода восходит к [15].

Как показано в [13], локальные свойства свойства указанных двух вариантов методов s-sSQP аналогичны соответствующим свойствам sSQP: локальная сверхлинейная сходимости гарантирована при одном лишь предположении некритичности множителя Лагранжа  $\bar{\lambda}$ . Там же предложены и практические способы задания подходящего отображения  $P$ , аппроксимирующего проектор на подпространство вырожденности.

### 3. Гибридная глобализация сходимости

В этом разделе будут описаны два способа гибридной глобализации метода s-sSQP: алгоритм с возвратами и алгоритм с рекордами. Общая идея этих техник глобализации изложена в [1, разд. 5.3].

Суть алгоритма с возвратами состоит в следующем. На каждой итерации из текущего приближения  $(x^k, \lambda^k)$  делается шаг метода внутренней фазы (в данном случае s-sSQP), который принимается, если он приводит к линейному убыванию невязки системы Лагранжа, т. е. к ее уменьшению по крайней мере в заданное число раз, определяемое в алгоритме ниже параметром  $q$ . Если на какой-либо из последующих итераций шаг метода внутренней фазы не принимается, то происходит возврат к тому приближению, откуда был сделан первый в данной серии шагов метода внутренней фазы, и из этой точки делается шаг метода внешней фазы (в данном случае глобализованного метода SQP, т. е. алгоритма 1).

**А л г о р и т м 2.** Выбираем параметр  $q \in (0, 1)$ , а также параметры алгоритма 1. Выбираем начальное приближение  $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  и полагаем  $k = 0$ .

1. Полагаем  $\widehat{k} = k$  и  $(\widehat{x}, \widehat{\lambda}) = (x^k, \lambda^k)$ .
2. Определяем  $H_k$  согласно (7). Определяем  $P(x^k, \lambda^k)$  и  $\sigma(x^k, \lambda^k)$  согласно выбранному варианту метода s-sSQP. Вычисляем  $(\xi^k, \eta^k)$  как решение системы (11). Если решение найти не удастся, то переходим к п. 4. В противном случае полагаем  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$ .

3. Если

$$\|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\| \leq q \|\Phi(x^k, \lambda^k)\|, \quad (12)$$

то увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к п. 2. (Шаг метода внутренней фазы.)

4. Если  $k > \widehat{k}$ , полагаем  $k = \widehat{k}$  и  $(x^k, \lambda^k) = (\widehat{x}, \widehat{\lambda})$ . Вычисляем  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  с помощью итерации алгоритма 1, увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода внешней фазы.)

Что касается свойств глобальной сходимости приведенного алгоритма, то возможны только два сценария: либо все итерации, начиная с некоторой, являются шагами метода внутренней фазы, либо все итерации являются шагами метода внешней фазы. В последнем случае алгоритм 2 наследует свойства глобальной сходимости алгоритма 1. В первом же случае из условия (12) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f$  и отображение  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}^n$ . Пусть последовательность  $\{(x^k, \lambda^k)\}$  сгенерирована алгоритмом 2, и пусть все члены этой последовательности, начиная с некоторого, получены шагами метода внутренней фазы.

Тогда

$$\Phi(x^k, \lambda^k) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , и, в частности, если  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  является предельной точкой последовательности  $\{(x^k, \lambda^k)\}$ , то  $\bar{x}$  — стационарная точка задачи (1), а  $\bar{\lambda}$  — отвечающий ей множитель Лагранжа.

Скорость сходимости алгоритма 2 характеризуется следующим утверждением.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  и отображение  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности стационарной точки  $\bar{x}$  задачи (1), и пусть  $\bar{\lambda}$  — отвечающий  $\bar{x}$  не критический множитель Лагранжа. Пусть точка  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  является предельной точкой последовательности  $\{(x^k, \lambda^k)\}$ , сгенерированной алгоритмом 2.

Тогда вся последовательность  $\{(x^k, \lambda^k)\}$  сходится к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , и скорость сходимости сверхлинейная.

**Доказательство.** Рассмотрим точку  $(x^k, \lambda^k)$ , достаточно близкую к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ . Пусть точка  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  получена шагом метода внутренней фазы.

Используя локальную липшицевость  $\Phi$  в сделанных предположениях гладкости, а также (4) и [13, теоремы 1 и 2], получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) &= O(\|x^{k+1} - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda^{k+1}, \mathcal{M}(\bar{x}))) = \\ &= o(\|x^k - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda^k, \mathcal{M}(\bar{x}))) = o(\|\Phi(x^k, \lambda^k)\|) \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Из полученной оценки вытекает выполнение (12) для любого фиксированного  $q \in (0, 1)$  при достаточной близости  $(x^k, \lambda^k)$  к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ . Но тогда точка  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  принимается алгоритмом 2. Отсюда легко следует, что все точки последовательности  $\{(x^k, \lambda^k)\}$  сгенерированы шагами метода внутренней фазы, а значит, алгоритм наследует сверхлинейную сходимость метода s-sSQP, установленную в [13, теоремы 1 и 2].  $\square$

Альтернативная стратегия гибридной глобализации, называемая алгоритмом с рекордами, состоит в следующем. Вместо того, чтобы сравнивать невязку системы Лагранжа в пробной точке с невязкой, полученной на предыдущей итерации, можно сравнивать ее с наименьшим достигнутым значением невязки по всем предыдущим итерациям (т. е. с рекордом), и принимать шаг метода внутренней фазы только в том случае, если наблюдается линейное убывание рекорда.

**А л г о р и т м 3.** Выбираем параметр  $q \in (0, 1)$ , а также параметры алгоритма 1. Выбираем начальное приближение  $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$  и полагаем  $k = 0$ . Полагаем  $R = \|\Phi(x^0, \lambda^0)\|$ .

1. Определяем  $H_k$  согласно (7). Определяем  $P(x^k, \lambda^k)$  и  $\sigma(x^k, \lambda^k)$  согласно выбранному варианту метода s-sSQP. Вычисляем  $(\xi^k, \eta^k)$  как решение системы (11). Если решение найти не удастся, то переходим к п. 3. В противном случае полагаем  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$ .

2. Если

$$\|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\| \leq qR, \quad (13)$$

то полагаем  $R = \|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\|$ , увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода внутренней фазы.)

3. Вычисляем  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$  с помощью итерации алгоритма 1. Если

$$\|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\| < R, \quad (14)$$

полагаем  $R = \|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\|$ . Увеличиваем  $k$  на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода внешней фазы.)

Как и в случае алгоритма с возвратами, здесь возможны лишь два (правда, несколько иные) сценария: либо все итерации алгоритма 3, начиная с некоторой, являются шагами метода внешней фазы, либо бесконечное число итераций являются итерациями метода внутренней фазы. В первом случае свойства глобальной сходимости алгоритма 3 будут теми же, что и у метода внешней фазы. Во втором случае из условия (13) легко выводится следующий результат.

**Теорема 3.** Пусть функция  $f$  и отображение  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы на  $\mathbb{R}^n$ . Пусть последовательность  $\{(x^k, \lambda^k)\}$  сгенерирована алгоритмом 3, и пусть члены  $(x^{k_j}, \lambda^{k_j})$  этой последовательности получены шагами метода внутренней фазы для бесконечного числа номеров  $j$ .

Тогда

$$\Phi(x^{k_j}, \lambda^{k_j}) \rightarrow 0$$

при  $j \rightarrow \infty$ , и, в частности, если  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$  является предельной точкой последовательности  $\{(x^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$ , то  $\bar{x}$  — стационарная точка задачи (1), а  $\bar{\lambda}$  — отвечающий ей множитель Лагранжа.

Наконец, сверхлинейная скорость сходимости алгоритма 3 устанавливается в следующей теореме.

**Теорема 4.** Пусть функция  $f$  и отображение  $h$  дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности стационарной точки  $\bar{x}$  задачи (1), и пусть  $\bar{\lambda}$  — отвечающий  $\bar{x}$  не критический множитель Лагранжа. Пусть последовательность  $\{(x^k, \lambda^k)\}$ , сгенерированная алгоритмом 3, сходится к точке  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ .

Тогда скорость сходимости сверхлинейная.

**Доказательство.** Если значение рекорда  $R$  меняется бесконечное число раз, то можно рассмотреть точку  $(x^k, \lambda^k)$ , сколь угодно близкую к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ , и такую, что  $R = \|\Phi(x^k, \lambda^k)\|$ . Тогда аналогично доказательству теоремы 2 получаем, что точка  $(x^{k+1}, \lambda^{k+1})$ , полученная шагом метода внутренней фазы, принимается алгоритмом 3, на последующих итерациях алгоритм работает идентично методу s-sSQP, и сверхлинейная скорость сходимости следует из [13, теоремы 1 и 2].

Остается рассмотреть случай, когда рекордное значение  $R > 0$  остается неизменным начиная с некоторой итерации. Это означает, что, начиная с этой итерации, шаги внутренней фазы не принимаются алгоритмом 3. При этом последовательность  $\{\Phi(x^k, \lambda^k)\}$  сходится к 0 (т. к.  $\{(x^k, \lambda^k)\}$  сходится к  $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ ), и поэтому (14) будет выполняться для достаточно большого  $k$ . Но тогда на соответствующей итерации рекордное значение  $R$  должно измениться, что дает противоречие. Значит, данный случай не может иметь места.  $\square$

#### 4. Численные примеры

Численные эксперименты были проведены в среде Python 2.7. При реализации рассматриваемых алгоритмов использовалось расширение NumPy языка Python для поддержки многомерных матриц, а также функций для операций с этими матрицами. Приводимые графические изображения были получены с помощью библиотеки Matplotlib.

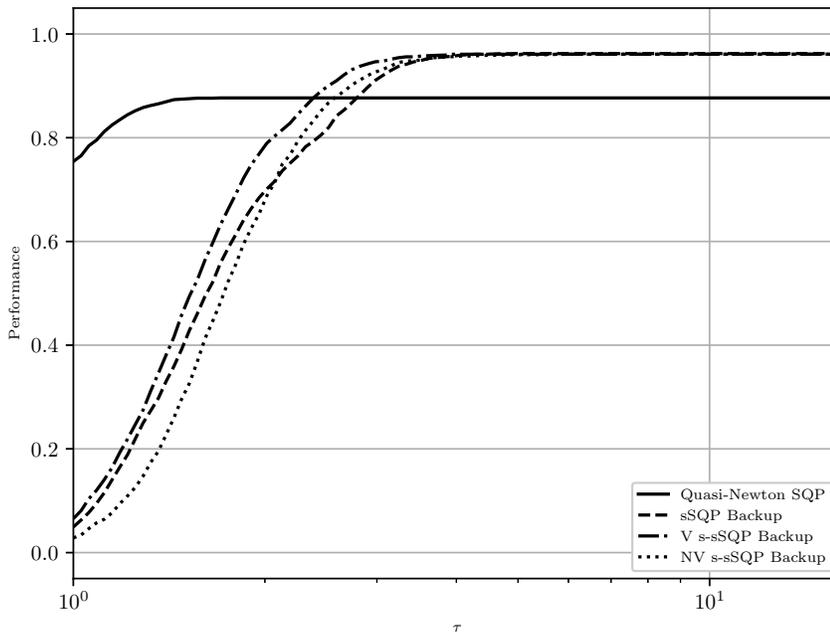


Рис. 1: Результаты для методов с возвратами.

Ниже используются следующие обозначения для тестируемых алгоритмов:

- Quasi-Newton SQP — алгоритм 1 с выбором матрицы  $H_k$  по правилу Бройдена–Флетчера–Голдфарба–Шанно с модификацией Пауэлла (см. [16, с. 536, 537]);
- sSQP Backup — алгоритм 1 из [5], т. е. алгоритм 2, в котором в качестве метода внутренней фазы вместо s-sSQP используется sSQP;
- sSQP Record — алгоритм 2 из [5], т. е. алгоритм 3, в котором в качестве метода внутренней фазы вместо s-sSQP используется sSQP;

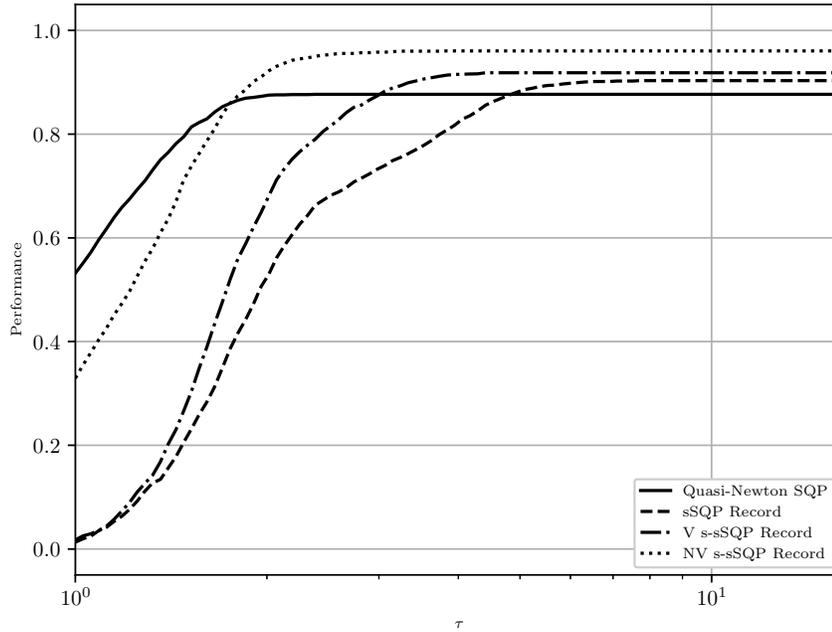


Рис. 2: Результаты для методов с рекордами.

- V s-sSQP Backup — алгоритм 2, использующий вариант метода s-sSQP с исчезающей стабилизацией;
- V s-sSQP Record — алгоритм 3, использующий вариант метода s-sSQP с исчезающей стабилизацией;
- NV s-sSQP Backup — алгоритм 2, использующий вариант метода s-sSQP с неисчезающей стабилизацией;
- MV s-sSQP Record — алгоритм 3, использующий вариант метода s-sSQP с неисчезающей стабилизацией.

Алгоритмы тестировались со следующими значениями параметров:  $q = 0.9$ ,  $\bar{c} = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\theta = 0.5$ . Запуск считался успешным, если условие остановки

$$\|\Phi(x^k, \lambda^k)\| < 10^{-8}$$

выполнялось на некоторой из первых 500 итераций. В противном случае, а также когда на некоторой итерации не удавалось решить подзадачу метода внешней фазы, запуск прекращался и считался неудачным.

Тестирование проводилось на случайно сгенерированных задачах, для чего использовался генератор, описанный в [17], с параметром диапазона данных равным 1. А именно, для каждой рассматриваемой тройки  $(n, l, r)$  натуральных чисел генерировалось по 100 линейно-квадратичных задач вида (1), имеющих 0 своей стационарной точкой с

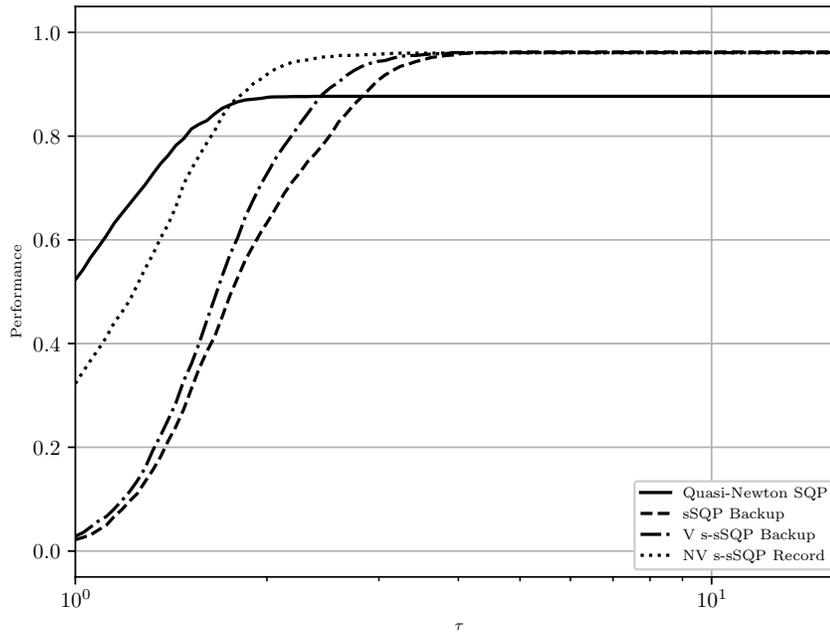


Рис. 3: Итоговые результаты.

известным отвечающим ей множителем Лагранжа  $\bar{\lambda}$ , и таких, что ранг матрицы Якоби ограничений в этой точке равен  $r$ . Ниже приводятся результаты, полученные с использованием всех троек  $(n, l, r)$ , в которых  $0 < r < l < n \leq 5$  (случай полного вырождения  $r = 0$  не использовался, так как для этого случая характерно очень специальное поведение метода sSQP), а также троек вида  $(n, n - 1, n - 2)$  и  $(n, \lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor - 1)$ , для всех  $n \in \{10, 15, 20, 25, 35\}$ . Для каждой сгенерированной задачи выполнялось 10 запусков из случайных начальных точек в кубической окрестности  $(0, \bar{\lambda})$ , размер которой был равен 100.

Результаты представлены на рис. 1–3 в форме так называемых «performance profiles» [18]. Для каждого из алгоритмов значение функции, график которой изображен на рисунке, в точке  $\tau \in [1, \infty)$  есть доля задач в наборе, на которых результат данного алгоритма был не более чем в  $\tau$  раз хуже наилучшего результата для данной задачи среди всех сравниваемых алгоритмов. При этом считается, что результат неудачного запуска в бесконечное число раз хуже любого другого результата. В частности, значение этой функции при  $\tau = 1$  соответствует доле запусков, на которых результат данного алгоритма был наилучшим. Значение функции при больших  $\tau$  характеризует робастность алгоритма, т. е. долю его успешных запусков. Под «результатом» в данном случае понимается количество итераций, причем для алгоритмов с возвратами в это количество включаются отброшенные шаги sSQP и s-sSQP.

На рис. 1 и 2 представлены результаты тестирования алгоритмов с возвратами и с рекордами, соответственно. В первом случае результаты различаются мало: все алгоритмы показывают одинаковую робастность, более высокую, чем у Quasi-Newton SQP,

и мало различаются по эффективности, существенно уступая Quasi-Newton SQP по этому показателю. Тем не менее, в качестве «победителей» были отобраны алгоритмы V s-sSQP Backup и sSQP Backup. Во втором же случае очевидным победителем является NV s-sSQP Record. Эта картина подтверждается и сравнительным тестированием отобранных алгоритмов, результаты которого приведены на рис. 3: NV s-sSQP Record демонстрирует ту же робастность, что и V s-sSQP Backup и sSQP Backup, и при этом существенно превосходит их по эффективности, хотя и несколько уступает по этому показателю Quasi-Newton SQP.

Таким образом, замена метода sSQP на s-sSQP на внутренней фазе гибридных алгоритмов повышает их эффективность и сохраняет робастность, более высокую, чем для метода SQP без стабилизаций. Вместе с тем, достичь эффективности последнего метода со стабилизацией по-прежнему не удается, а значит, эта проблема требует дальнейшего внимания.

### Список литературы

- [1] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Cham: Springer, 2014.
- [2] А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов, *Численные методы оптимизации*, 2-е изд., перераб. и доп., Физматлит, М., 2008.
- [3] S. J. Wright, “Superlinear convergence of a stabilized SQP method to a degenerate solution”, *Comput. Optim. Appl.*, **11** (1998), 253–275.
- [4] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Stabilized SQP revisited”, *Math. Program.*, **133** (2012), 93–120.
- [5] А. Ф. Измаилов, А. М. Крылова, Е. И. Усков, “Гибридная глобализация стабилизированного метода последовательного квадратичного программирования”, *Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа*, ВЦ РАН, М., 2011, 47–66.
- [6] P. E. Gill, D. P. Robinson, “A primal-dual augmented Lagrangian”, *Comput. Optim. Appl.*, **51** (2012), 1–25.
- [7] P. E. Gill, D. P. Robinson, “A globally convergent stabilized SQP method”, *SIAM J. Optim. Appl.*, **23** (2013), 1983–2010.
- [8] D. Fernandez, E. A. Pilotta, G. A. Torres, “An inexact restoration strategy for the globalization of the sSQP method”, *Comput. Optim. Appl.*, **54** (2013), 595–617.
- [9] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Combining stabilized SQP with the augmented Lagrangian algorithm”, *Comput. Optim. Appl.*, **62** (2015), 33–73.
- [10] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Globalizing stabilized sequential quadratic programming method by smooth primal-dual exact penalty function”, *J. Optim. Theory. Appl.*, **69** (2016), 148–178.
- [11] P. E. Gill, V. Kungurtsev, D. P. Robinson, “A stabilized SQP method: global convergence”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **37** (2017), 407–443.
- [12] P. E. Gill, V. Kungurtsev, D. P. Robinson, “A stabilized SQP method: superlinear convergence”, *Math. Program.*, **163** (2017), 369–410.
- [13] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, “Subspace-stabilized sequential quadratic programming”, *Comput. Optim. Appl.*, **67** (2017), 129–154.

- [14] E. M. E. Mostafa, L. N. Vicente, S. J. Wright, “Numerical behavior of a stabilized SQP method for degenerate NLP problems”, *Global Optimization and Constraint Satisfaction*, Lecture Notes in Computer Science 2861., Springer, Berlin, 2003, 123–141.
- [15] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Newton-type methods for optimization problems without constraint qualifications”, *SIAM J. Optim.*, **15** (2004), 210–228.
- [16] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Second ed., Springer, New York, 2006.
- [17] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “On attraction of Newton-type iterates to multipliers violating second-order sufficiency conditions”, *Math. Program.*, **117** (2009), 271–304.
- [18] E. D. Dolan, J. J. More, “Benchmarking optimization software with performance profiles”, *Math. Program.*, **91** (2002), 201–213.

### References

- [1] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Cham: Springer, 2014.
- [2] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Numerical Methods of Optimization*, Second ed., Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russian).
- [3] S. J. Wright, “Superlinear convergence of a stabilized SQP method to a degenerate solution”, *Comput. Optim. Appl.*, **11** (1998), 253–275.
- [4] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Stabilized SQP revisited”, *Math. Program.*, **133** (2012), 93–120.
- [5] A. F. Izmailov, A. M. Krylova, E. I. Uskov, “Hybrid globalization of stabilized sequential quadratic programming method”, *Theoretical and applied problems of nonlinear analysis*, Computing Center RAS, Moscow, 2011, 47–66 (In Russian).
- [6] P. E. Gill, D. P. Robinson, “A primal-dual augmented Lagrangian”, *Comput. Optim. Appl.*, **51** (2012), 1–25.
- [7] P. E. Gill, D. P. Robinson, “A globally convergent stabilized SQP method”, *SIAM J. Optim. Appl.*, **23** (2013), 1983–2010.
- [8] D. Fernandez, E. A. Pilotta, G. A. Torres, “An inexact restoration strategy for the globalization of the sSQP method”, *Comput. Optim. Appl.*, **54** (2013), 595–617.
- [9] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Combining stabilized SQP with the augmented Lagrangian algorithm”, *Comput. Optim. Appl.*, **62** (2015), 33–73.
- [10] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Globalizing stabilized sequential quadratic programming method by smooth primal-dual exact penalty function”, *J. Optim. Theory. Appl.*, **69** (2016), 148–178.
- [11] P. E. Gill, V. Kungurtsev, D. P. Robinson, “A stabilized SQP method: global convergence”, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **37** (2017), 407–443.
- [12] P. E. Gill, V. Kungurtsev, D. P. Robinson, “A stabilized SQP method: superlinear convergence”, *Math. Program.*, **163** (2017), 369–410.
- [13] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, “Subspace-stabilized sequential quadratic programming”, *Comput. Optim. Appl.*, **67** (2017), 129–154.
- [14] E. M. E. Mostafa, L. N. Vicente, S. J. Wright, “Numerical behavior of a stabilized SQP method for degenerate NLP problems”, *Global Optimization and Constraint Satisfaction*, Lecture Notes in Computer Science 2861., Springer, Berlin, 2003, 123–141.
- [15] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Newton-type methods for optimization problems without constraint qualifications”, *SIAM J. Optim.*, **15** (2004), 210–228.

- [16] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, Second ed., Springer, New York, 2006.
- [17] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “On attraction of Newton-type iterates to multipliers violating second-order sufficiency conditions”, *Math. Program.*, **117** (2009), 271–304.
- [18] E. D. Dolan, J. J. More, “Benchmarking optimization software with performance profiles”, *Math. Program.*, **91** (2002), 201–213.

### Информация об авторах

**Журбенко Николай Георгиевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины, г. Киев, Украина. E-mail: zhurbnick@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5123-8607>

**Измаилов Алексей Феридович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@ccas.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

**Усков Евгений Иванович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: akurennoy@cs.msu.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Измаилов Алексей Феридович  
E-mail: izmaf@ccas.ru

Поступила в редакцию 26.01.2019 г.  
Поступила после рецензирования 18.03.2019 г.  
Принята к публикации 20.05.2019 г.

### Information about the authors

**Nikolay G. Zhurbenko**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine. E-mail: zhurbnick@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5123-8607>

**Alexey F. Izmailov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Operations Research Department. Lomonosov Moscow State University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: izmaf@ccas.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

**Evgeniy I. Uskov**, Candidate of Physics and Mathematics, Researcher. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: akurennoy@cs.msu.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Alexey F. Izmailov  
E-mail: izmaf@ccas.ru

Received 26 January 2019  
Reviewed 18 March 2019  
Accepted for press 20 May 2019

© Корабельников В.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-166-178

УДК 517.312, 004.421.6

## Процедурная интерпретация алгоритмов символического интегрирования в системе MathPartner

Вячеслав Алексеевич КОРАБЕЛЬНИКОВ

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>, e-mail: korabelnikov.va@gmail.com

## Procedural interpretation of symbolic integration algorithms in MathPartner system

Vyacheslav A. KORABELNIKOV

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>, e-mail: korabelnikov.va@gmail.com

**Аннотация.** Работа посвящена разработке библиотеки процедур для системы компьютерной алгебры MathPartner. Разрабатывается программная реализация алгоритмов символического интегрирования. Решение задачи символического интегрирования разбивается на три этапа. На первом этапе подынтегральное выражение приводится к виду, необходимому для применения алгоритма Рунге. Приведено описание соответствующих процедур, которые сводят подынтегральную функцию к выражению, содержащему конечный набор арифметических операций и композиций логарифмических функций и экспонент, а также формируют набор регулярных мономов. На втором этапе осуществляется интегрирование дробной части подынтегрального выражения. Дано описание процедур, позволяющих привести дробную часть к виду, необходимому для применения алгоритма интегрирования. На третьем этапе проводится интегрирование полиномиальной части подынтегрального выражения. Получены процедуры, позволяющие в зависимости от вида подынтегрального выражения применить соответствующие алгоритмы интегрирования. В приложении приводится описание команд языка пользователя системы MathPartner, которые предназначены для вычисления интегралов в символическом виде.

**Ключевые слова:** система компьютерной алгебры; система MathPartner; символическое интегрирование

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-07-00420).

Автор благодарит профессора Г. И. Малашонка за постановку задачи и многочисленные обсуждения, а также выражает признательность участникам семинара по компьютерной алгебре ТГУ за критику.

**Для цитирования:** *Корабельников В.А.* Процедурная интерпретация алгоритмов символического интегрирования в системе MathPartner // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 166–178. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-166-178.

**Abstract.** The work is devoted to the development of a procedure library for the computer algebra system MathPartner. A software implementation of symbolic integration algorithms is being developed. The solution of the problem of symbolic integration is divided into three stages. At the first stage, the integrand is reduced to the form necessary for applying the Rish algorithm. A description is given of the corresponding procedures that reduce the integrand to an expression containing a finite set of arithmetic operations and compositions of logarithmic functions and exponentials, and also make a set of regular monomials. At the second stage, the integration of the fractional part of the integrand is performed. A description is given of the procedures that reduce the fractional part to the form required for the application of the integration algorithm. At the third stage, the polynomial part of the integrand is integrated. Procedures are obtained that allow, depending on the type of the integrand, to apply the appropriate integration algorithms. The appendix contains a description of the user's language commands of the MathPartner system, which are designed to calculate integrals in symbolic form.

**Keywords:** computer algebra system; MathPartner computer algebra system; symbolic integration

**Acknowledgements:** The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-07-00420).

The author thanks Professor G.I. Malashonok for posing the problem and numerous discussions, and also expresses gratitude to the participants of the TSU Computer Algebra Workshop for criticism.

**For citation:** Korabelnikov V.A. Protsedurnaya interpretatsiya algoritmov simvol'nogo integrirvaniya v sisteme MathPartner [Procedural interpretation of symbolic integration algorithms in MathPartner system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 166–178. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-166-178. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Система компьютерной алгебры — это программный комплекс, предназначенный для выполнения символьных и численных вычислений. Одной из современных систем компьютерной алгебры является MathPartner. В отличие от большинства известных систем, MathPartner представляет из себя web-сервис, который свободно доступен в Интернете. Язык этой системы, называемый Mathpar, является по сути некоторым диалектом языка LaTeX. MathPartner позволяет сохранять и текст задания, и промежуточные вычисления, и результат вычислений. Пользователь имеет возможность сохранять исходный текст, текст в формате LaTeX и в виде изображения (pdf, jpg) [1].

Система MathPartner содержит большую библиотеку процедур для символьно-численных вычислений. Одним из пакетов этой библиотеки является пакет процедур для символьного интегрирования. Алгоритмы, лежащие в основе этой библиотеки процедур,

описаны в [2]. В этой статье приведены теоретические основы алгоритмов символьного интегрирования, реализованные в системе MathPartner. В рамках этих алгоритмов строится набор регулярных мономов и подынтегральное выражение представляется в виде суммы правильной дроби и полинома. Показан на алгоритмическом уровне процесс интегрирования полинома и правильной дроби. Рассматривается структура пакета процедур для символьного интегрирования и даются характеристики основным процедурам. Приводится общая блок-схема всего алгоритма символьного интегрирования.

### 1. Формирование набора регулярных мономов

В данной статье используются обозначения, принятые в [3, с. 213–229].

**Процедура `integrate`.** В системе MathPartner для интегрирования функций разработана процедура `integrate`. На входе процедура получает подынтегральную функцию. Процедура `integrate` вызывает процедуру `toComplex`, которая подготавливает подынтегральное выражение к процессу интегрирования. Полученное выражение передается процедуре `mainProcOfInteg`, которая вычисляет первообразную функции, выраженную в виде комбинации логарифмов и экспонент. После получения первообразной процедура `integrate` производит ее упрощение. Комбинации логарифмов и экспонент заменяются на тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические, обратные гиперболические функции. Логарифмы от произведений заменяются на соответствующие суммы логарифмов. Появившиеся числовые слагаемые удаляются из первообразной. Полученная функция выдается пользователю в качестве ответа.

Для применения алгоритма Рунге подынтегральная функция должна быть выражена через комбинацию натуральных логарифмов и экспонент [4, с. 225]. Для преобразования подынтегральной функции процедура `integrate` вызывает процедуру `toComplex`.

**Процедура `toComplex`.** Реализованная в пакете обработки функций системы MathPartner, процедура `toComplex` предназначена для проведения замены тригонометрических, обратных тригонометрических, гиперболических, обратных гиперболических функций на соответствующие комбинации логарифмов и экспонент, и использует следующие известные формулы:

$$\sin(x) = (\exp(ix) - \exp(-ix))/2i, \quad \cos(x) = (\exp(ix) + \exp(-ix))/2,$$

$$\operatorname{arctg}(x) = i/2(\ln(1 - ix) - \ln(1 + ix)), \quad \operatorname{arcctg}(x) = i/2(\ln((x - i)/x) - \ln((x + i)/x)),$$

$$\operatorname{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x))/2, \quad \operatorname{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x))/2,$$

$$\operatorname{arctgh}(x) = 1/2\ln((1 + x)/(1 - x)), \quad \operatorname{arcctgh}(x) = 1/2\ln((x + 1)/(x - 1)).$$

**Процедура `mainProcOfInteg`.** На входе получает функцию, преобразованную процедурой `toComplex`. Возвращает первообразную от входного выражения.

Процедура `mainProcOfInteg` вызывает процедуру `convertLOGandPOWtoLNandEXP`, которая предназначена для замены показательных функций на соответствующие комбинации логарифмов и экспонент:  $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln(f(x)))$ . Эта процедура также

приводит логарифмы и показательные функции к основанию  $e$ :  $a^x = \exp(a \ln(x))$ ,  $\log_a(x) = \ln(x) / \ln(a)$ .

Процедура `mainProcOfInteg` вызывает процедуру `makeListOfLNandEXP`, которая составляет список логарифмов и экспонент, содержащихся в подынтегральном выражении. Список составляется таким образом, что чем глубже вложены в аргументах логарифм или экспонента, тем ближе к началу списка они находятся. Например, для подынтегрального выражения  $\exp(x^2 \ln(x^3 + x \ln(x) + \exp(x^2)))$  список будет иметь вид:

$$[\ln(x), \exp(x^2), \ln(x^3 + x \ln(x) + \exp(x^2)), \exp(x^2 \ln(x^3 + x \ln(x) + \exp(x^2)))].$$

Процедура `mainProcOfInteg` вызывает процедуру `makeRegularMonomialsSequence`, которая преобразует список логарифмов и экспонент в набор регулярных мономов. Происходит построение наименьшего поля, которому принадлежит подынтегральное выражение. Исходным является поле  $C(x)$  рациональных функций над полем комплексных чисел (см. [4, с. 2254]). Это поле последовательно расширяется добавлением в него логарифмов и экспонент из списка.

Подынтегральная функция представляется в виде рациональной функции от последнего регулярного монома из набора. Если выражение представляет собой неправильную дробь, то выделяется целая часть, и дробь приводится в правильный вид. Процедура `mainProcOfInteg` вызывает процедуру `polPartInteg` для интегрирования полиномиальной части подынтегрального выражения и процедуру `fracPartInteg` для интегрирования дробной части подынтегрального выражения. Собирает полученные результаты и возвращает в процедуру `integrate`.

**Процедура `makeRegularMonomialsSequence`.** Действия процедуры `makeRegularMonomialsSequence` основаны на следующем алгоритме. Просматриваются все логарифмы в списке. Если аргумент логарифма представляет собой дробь  $\xi = p/q$ , то в подынтегральном выражении  $\ln(\xi)$  заменяется на  $\ln(p) - \ln(q)$ .  $\ln(\xi)$  меняется в списке на  $\ln(p)$ .  $\ln(q)$  вставляется в список после  $\ln(p)$ .

Просматриваются последовательно все элементы списка логарифмов и экспонент начиная с первого элемента. Начальный элемент списка является регулярным мономом, т. е. расширяет поле  $C(x)$ . Этот элемент остается в списке. Далее для определения регулярных мономов используется следующий алгоритм.

1. Пусть рассматриваемым элементом списка является логарифм. Тогда происходит проверка, выражается ли рассматриваемый элемент списка через предыдущие. Пусть  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$  — уже добавленные в  $C(x)$  регулярные мономы,  $\ln(f_k)$  — рассматриваемый элемент списка,  $E$  — множество индексов  $i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , таких что  $\theta_i$  — экспонента,  $L$  — множество индексов  $j$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , таких что  $\theta_j$  — логарифм. Согласно структурной теореме [3, с. 225], если рассматриваемый логарифм принадлежит уже сформированному полю, то его аргумент должен выражаться в виде произведения

$$f_k = c \prod_{i \in E} \theta_i^{n_i} \times \prod_{j \in L} f_j^{m_j} ,$$

где  $n_i, m_j \in \mathbb{Q}$ ,  $f_j$  — аргумент  $\theta_j$ ,  $c \in C$ . Поэтому производится поочередное деление аргумента рассматриваемого логарифма на предыдущие элементы списка. Если элементом списка является экспонента, то производится деление на саму экспоненту. Если элементом списка является логарифм, то производится деление на аргумент этого логарифма. Если деление проходит без остатка, то рассматриваемый элемент списка удаляется. Если деление происходит с остатком, то как в подынтегральном выражении, так и в последующих элементах списка производится замена рассматриваемого логарифма на сумму логарифма от остатка и элемента деления. Производится замена рассматриваемого элемента списка на логарифм, аргументом которого является остаток от деления.

2. Пусть рассматриваемым элементом списка является экспонента. Тогда происходит проверка, выражается ли рассматриваемый элемент списка через предыдущие. Пусть  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k-1}$  — уже добавленные в  $C(x)$  регулярные мономы,  $\exp(f_k)$  — рассматриваемый элемент списка,  $E$  — множество индексов  $i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , таких что  $\theta_i$  — экспонента,  $L$  — множество индексов  $j$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , таких что  $\theta_j$  — логарифм. Согласно структурной теореме [3, с. 225], если рассматриваемая экспонента принадлежит уже сформированному полю, то ее аргумент должен выражаться в виде линейной комбинации

$$f_k = c + \sum_{i \in E} n_i f_i + \sum_{j \in L} m_j \theta_j ,$$

где  $n_i, m_j \in \mathbb{Q}$ ,  $f_i$  — аргумент  $\theta_i$ ,  $c \in C$ . Составляется система линейных уравнений. Если она имеет решение, то рассматриваемый элемент удаляется из списка. Это решение позволяет выразить рассматриваемый элемент списка через предыдущие. В подынтегральном выражении и в последующих элементах списка меняется рассматриваемый элемент на его выражение через предыдущие элементы списка. Если система не имеет решения, то рассматриваемый элемент оставляется в списке без изменений.

Таким образом, список логарифмов и экспонент преобразуется в набор регулярных мономов. Процедура `makeRegularMonomialsSequence` передает полученный набор регулярных мономов в процедуру `mainProcOfInteg`.

## 2. Интегрирование дробной части

**Процедура `fracPartInteg`.** Для подготовки дроби к интегрированию процедура `fracPartInteg` производит вызов процедур `FactorPol_SquareFree` и `partialFraction`.

Процедура `FactorPol_SquareFree`, реализованная в пакете полиномиальных вычислений системы `MathPartner`, производит разложение знаменателя на свободные от квадратов множители.

Процедура `partialFraction` производит разложение дроби на сумму простейших дробей с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Процедура `fracPartInteg` производит интегрирование отдельно каждого слагаемого из суммы. Согласно принципу Лиувилля (см. [4, с. 226]) и леммам о разложении (см. [4, с. 227, 232]), интеграл от каждого слагаемого выражается в виде суммы

дробной функции и логарифмов с постоянными коэффициентами.

Если показатель степени, в которую возведен знаменатель рассматриваемого слагаемого, больше единицы, то процедура `fracPartInteg` вызывает процедуры `Hermite` и `LogarithmicPart`. Процедура `Hermite` разделяет интеграл на сумму рациональной и логарифмической части и вычисляет рациональную часть интеграла. Процедура `LogarithmicPart` вычисляет логарифмическую часть интеграла.

Если показатель степени, в которую возведен знаменатель рассматриваемого слагаемого, равен единице, то полином, стоящий в знаменателе, свободен от квадратов, и рациональная часть интеграла равна нулю. Процедура `LogarithmicPart` вычисляет логарифмическую часть интеграла.

**Процедура `partialFraction`.** Действия процедуры `partialFraction` основываются на следующих рассуждениях (см. [5, с. 38]). Пусть  $p/q$  — полученная дробная часть,  $q = \prod q_i^i$ , где  $q_i$  — свободный от квадратов полином. Тогда

$$p/q = p_{1,1}/q_1 + p_{2,1}/q_2 + p_{2,2}/q_2^2 + \dots + p_{k,1}/q_k + p_{k,2}/q_k^2 + \dots + p_{k,k}/q_k^k,$$

где  $p_{i,j} = A_{i,j}$  при  $q_i = x - a$ ,  $p_{i,j} = A_{i,j}x + B_{i,j}$  при  $q_i = x^2 + ax + b$ , где  $A_{i,j}, B_{i,j}$  — числа, полученные с помощью метода неопределенных коэффициентов.

**Процедура `Hermite`.** Действия процедуры `Hermite` основаны на алгоритме Эрмита (подробнее см. [4, с. 220, 230, 235]).

$$\int \frac{p_{i,j}}{q_i^j} = -\frac{p_{i,j}b}{(j-1)q_i^{j-1}} + \int \frac{(j-1)p_{i,j}a + (p_{i,j}b)'}{(j-1)q_i^{j-1}},$$

где  $q_i a + q_i' b = 1$  и  $j > 1$ . В результате применения этой формулы степень  $j$ , в которую возведен знаменатель, уменьшилась. Таким образом, эта формула повторно применяется пока  $j \neq 1$ .

**Процедура `LogarithmicPart`.** Действия процедуры `LogarithmicPart` основаны на следующем алгоритме (см. [4, с. 222]):

1. Интегрируемая дробь обозначается  $u/v$ .
2. Если числитель и производная знаменателя являются числами, то формируется ответ:  $u \ln(v)$ . Ответ передается в процедуру `fracPartInteg`.
3. Если  $u/v$  — дробь, числитель и знаменатель которой являются полиномами от  $x$ , то вычисляется результат  $Res = resultant_x(u - yv', v)$  — полином новой переменной  $y$ .

Если  $u/v$  — дробь, числитель и знаменатель которой являются полиномами от  $\ln(\xi)$ , то вычисляется результат  $Res = resultant_{\ln(\xi)}(u - yv', v)$  — полином новой переменной  $y$ .

Если  $u/v$  — дробь, числитель и знаменатель которой являются полиномами от  $\exp(\xi)$ , то вычисляется результат  $Res = resultant_{\exp(\xi)}(u - y(v' - \deg(v)v\xi'), v)$  — полином новой переменной  $y$ .

4. Процедура `solvePolynomEq`, реализованная в пакете полиномиальных вычислений системы `MathPartner`, используется для нахождения всех корней результата  $Res$  в поле комплексных чисел. Просматриваются все найденные корни. Упрощается очередной

корень. Если корень содержит переменную интегрирования, то интеграл от исходной функции не выражается в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде.

5. Определяется  $V(y) = \text{НОД}(u - yv', v)$ , если  $u/v$  — дробь, числитель и знаменатель которой являются полиномами от  $x$  или от  $\ln(\xi)$ ;  $V(y) = \text{НОД}(u - y(v' - \deg(v)v\xi'), v)$ , если  $u/v$  — дробь, числитель и знаменатель которой являются полиномами от  $\exp(\xi)$ . Корень результата подставляется в  $V(y)$ . Полученное выражение упрощается. Первообразная от дроби  $p/q$  выражается в виде формулы:  $c \ln(V(c))$ , где  $c$  — рассматриваемый корень результата. Полученный логарифм прибавляется к общему ответу.

### 3. Интегрирование полиномиальной части

**Процедура polPartInteg.** Интегрирование полиномиальной части выполняет процедура polPartInteg. Возможны три случая:

1. Если полиномиальная часть — полином от  $x$ , то вызывается процедура integPol. Ее действия основаны на формуле  $\int \sum a_i x^i dx = \sum a_i x^{i+1}/(i+1)$ .

2. Если полиномиальная часть — полином от  $\ln(\xi)$ , то вызывается процедура integPolLn.

3. Если полиномиальная часть — полином от  $\exp(\xi)$ , то вызывается процедура integPolExp.

**Процедура integPolLn.** Действия процедуры integPolLn основываются на следующих рассуждениях. Пусть  $P$  — полиномиальная часть подынтегрального выражения. Согласно принципу Лиувилля (см. [4, с. 226]) и лемме о разложении (см. [4, с. 227]),  $\int P = v_0 + \sum_{i=0}^d c_i \log(v_i)$ , где  $c_i \in \mathbb{C}$ ,  $v_0, v_1, \dots, v_d$  — функции составленные из логарифмов и экспонент, содержащихся в выражении  $P$ , и функция  $v_0$  является полиномом от  $\ln(\xi)$ . Обозначим  $v_0 = \sum_{j=0}^{m+1} t_j \ln(\xi)^j$ ,  $P = \sum_{i=0}^m p_i \ln(\xi)^i$ , где  $t_i, p_i, \xi$  — функции, составленные из логарифмов и экспонент, содержащихся в выражении  $P$ . Подставляя в это уравнение выражение для  $P$  и  $v_0$ , получим выражение

$$\sum_{i=0}^m p_i \ln(\xi)^i = \sum_{i=0}^{m+1} t'_i \ln(\xi)^i + \sum_{i=0}^m (i+1)t_{i+1} \ln(\xi)^i \frac{\xi'}{\xi} + \sum_{i=1}^d c_i \frac{v'_i}{v_i}.$$

Для нахождения неизвестных  $t_i, i = m+1, \dots, 0$  приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $\ln(\xi)$  и получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 0 &= t'_{m+1} \\ p_m &= t'_m + (m+1)t_{m+1} \frac{\xi'}{\xi} \\ p_{m-1} &= t'_{m-1} + m t_m \frac{\xi'}{\xi} \\ \dots & \\ p_1 &= t'_1 + 2t_2 \frac{\xi'}{\xi} \\ p_0 &= t'_0 + t_1 \frac{\xi'}{\xi} + \sum_{i=1}^d c_i \frac{v'_i}{v_i}. \end{cases} \quad (1)$$

В процедуре `integPolLn` выполняются следующие действия. Создается список  $B$  длиной  $m + 2$ , в который записываются решения уравнений системы (1). Решением первого уравнения является константа, которую невозможно определить рассматривая только первое уравнение. Эта константа определяется при решении второго уравнения. Поэтому изначально в элемент списка  $B[m + 2]$  записывается значение 0. Дальнейшие действия повторяются для каждого уравнения системы (1). При помощи процедуры `mainProcOfInteg` вычисляются  $A1 = \int p_m$ ,  $A2 = \int ((m + 2)B[m + 2]/\ln(\xi)')$ . Если процедура `mainProcOfInteg` не вернула значение  $A1$  или  $A2$ , то и интеграл от подынтегральной функции не выражается в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде. Если процедура `mainProcOfInteg` вернула значения  $A1$  и  $A2$ , то в элемент списка  $B[m + 1]$  записывается значение разности  $A1 - A2$ . Если в выражении элемента списка  $B[m + 1]$  есть функция  $\ln(\xi)$ , то выделяется выражение  $h$ , на которое умножен  $\ln(\xi)$ . Если  $h$  содержит переменную интегрирования, то интеграл от подынтегральной функции не выражается в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде. Если  $h$  не содержит переменную интегрирования, происходит сложение  $-h/(m + 2)$  и выражения элемента списка  $B[m + 2]$ . Результат записывается в  $B[m + 2]$  вместо старого значения. Происходит вычитание  $h \cdot \ln(\xi)$  из выражения элемента списка  $B[m + 1]$ , и результат записывается в элемент списка  $B[m + 1]$  вместо старого значения. Таким образом, найдено решение очередного уравнения.

Собирается ответ:  $\sum_{i=0}^{m+2} B[i] \cdot \ln(\xi)^i$ .

**Процедура `integPolExp`.** Действия процедуры `integPolExp` основываются на следующих рассуждениях. Пусть  $P$  — полиномиальная часть подынтегрального выражения. Согласно принципу Лиувилля (см. [4, с. 226]) и лемме о разложении (см. [4, с. 227]),  $\int P = v_0 + \sum_{j=1}^d c_j \log(v_j)$ , где  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $v_0, v_1, \dots, v_d$  — функции, составленные из логарифмов и экспонент, содержащихся в выражении  $P$ , и функция  $v_0$  является полиномом от  $\exp(\xi)$ . Обозначим  $v_0 = \sum_{i=-k}^m t_i \exp(\xi)^i$ ,  $P = \sum_{i=-k}^m p_i \exp(\xi)^i$ , где  $t_i, p_i, \xi$  — функции, составленные из логарифмов и экспонент, содержащихся в выражении  $P$ . Подставляя в это уравнение выражение для  $P$  и  $v_0$ , получим выражение

$$\sum_{i=-k}^l p_i \exp(\xi)^i = \sum_{i=-k}^l t'_i \exp(\xi)^i + \sum_{i=-k}^l it_i \exp(\xi)^i u' + \sum_{j=1}^d c_j \frac{v'_j}{v_j}.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(\xi)$  и получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} p_i = t'_i + it_i \xi', i \neq 0 \\ p_0 = t'_0 + \sum_{j=1}^d c_j \frac{v'_j}{v_j}. \end{cases} \quad (2)$$

В процедуре `integPolExp` выполняются следующие действия. Создается список  $B$  длиной  $m + k + 1$ , в который будут записываться решения системы дифференциальных

уравнений (2). В  $B[i], i \neq 0$ , записываются значения  $t_i$ . Рассматривается уравнение  $p_i = t'_i + i \cdot \xi' \cdot t_i, i \neq 0$ . Вызывается процедура `notDenom`, которая преобразует полученное уравнение к полиномиальному виду. Вызывается процедура `solveRischDiffEq`, которая решает дифференциальное уравнение и записывает решение в  $B[i]$ .

Для  $i = 0$  вычисляется  $\int p_0$  при помощи процедуры `mainProcOfInteg`, и результат записывается в  $B[0]$ .

Собирается ответ:  $\sum_{i=-k}^m B[i] \exp(\xi)^i$ .

**Процедура `notDenom`.** Действия процедуры `notDenom` основываются на следующих рассуждениях (см. [6]). Рассматривается дифференциальное уравнение  $p_i = t'_i + i \cdot \xi' \cdot t_i$ .

Пусть  $p_i$  — полином. Тогда  $t_i$  — тоже полином. Если  $\xi'$  — полином, то уравнение остается без изменений, а если  $\xi' = v/w$ , то чтобы «избавиться от знаменателей», уравнение домножается на  $w$ .

Пусть  $p_i = r/g$ . Тогда  $t_i$  имеет вид  $t_i = a/b$ . Если  $\xi'$  — полином, то получается уравнение

$$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{i\xi'a}{b}.$$

Следовательно,  $b = \sqrt{g}$ ,  $r = a'b - ab' + iu'ab = ba' + (-b' + iu'b)a$ .

Если  $\xi' = v/w$ , то из соотношения

$$\frac{r}{g} = \frac{a'b - ab'}{b^2} + \frac{i v a}{b w}$$

получается:  $b = \sqrt{g/w}$ ,  $r = a'bw - ab'w + i v a b = bwa' + (i v b - b'w)a$ .

Получено уравнение вида:

$$P = c_1 a' + c_2 a,$$

где  $P, c_1, c_2, a$  — полиномы.

**Процедура `solveRischDiffEq`.** Действия процедуры `solveRischDiffEq` основаны на следующем алгоритме (см. [6]). Рассматривается дифференциальное уравнение относительно  $a$ :  $P = c_1 a' + c_2 a$ , где  $P, c_1, c_2$  — полиномы либо от  $x$ , либо от  $\ln(\psi)$ , либо от  $\exp(\psi)$ . Возможны следующие три случая:

1. Если  $P, c_1, c_2$  — полиномы от  $x$ , то неизвестная  $a$  — полином от  $x$ . Степень полинома  $a$  обозначается через  $n$ . Вычисляется  $n = \deg(P) - \max\{\deg(c_1 - 1), \deg(c_2)\}$ . Если  $n < 0$ , то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде. Если  $n = 0$ , то  $a = P/c_2$ . Если  $n > 0$ , то приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , составляется и решается система линейных уравнений. Решения уравнений являются коэффициентами неизвестного полинома. Если система линейных уравнений не имеет решения, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде.

2. Если  $P, c_1, c_2$  — полиномы от  $\ln(\psi)$ , то неизвестная  $a$  — полином от  $\ln(\psi)$ . Степень полинома  $a$  обозначается через  $n$ . Вычисляется  $n = \deg(P) - \max\{\deg(c_1), \deg(c_2)\}$ . Если  $n < 0$ , то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде. Если  $n \geq 0$ , то уравнение принимает вид:

$$P = c_1 \left( \sum_{i=0}^n a'_i \ln(\psi)^i + \sum_{i=1}^n i a_i \frac{\psi'}{\psi} \ln(\psi)^{i-1} \right) + c_2 \sum_{i=0}^h a_i \ln(\psi)^i.$$

Приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $\ln(\psi)$ , и получается система дифференциальных уравнений. Пусть  $a = \sum_{i=0}^n \alpha_i \ln(\psi)^i$ ,  $c_1 = \sum_{i=0}^m \beta_i \ln(\psi)^i$ ,  $c_2 = \sum_{i=0}^s \gamma_i \ln(\psi)^i$ ,  $P = \sum_{i=0}^t p_i \ln(\psi)^i$ . Возможны следующие случаи:

2.1. Степени полиномов  $c_1$  и  $c_2$  равны. Получается система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} p_t &= \beta_m \alpha'_n + \gamma_m \alpha_n \\ p_{t-1} &= \beta_m \alpha'_{n-1} + \beta_{m-1} \alpha'_n + n \beta_m \alpha_n \frac{\psi'}{\psi} + \gamma_m \alpha_{n-1} + \gamma_{m-1} \alpha_n \\ &\dots \end{cases}$$

Для решения каждого уравнения вызывается процедура `solveRischDiffEq`. Если очередное уравнение не имеет решения, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде.

2.2. Степень полинома  $c_1$  больше степени полинома  $c_2$ . Получается система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} p_t &= \beta_m \alpha'_n \\ p_{t-1} &= \beta_m \alpha'_{n-1} + \beta_{m-1} \alpha'_n + n \beta_m \alpha_n \frac{\psi'}{\psi} \\ &\dots \\ p_{t-r} &= \beta_m \alpha'_{n-r} + \dots + \beta_{m-r} \alpha'_n + n \beta_m \alpha_{n-r+1} \frac{\psi'}{\psi} + \dots + \gamma_s \alpha_n \\ &\dots \end{cases}$$

Для решения каждого уравнения вызывается процедура `mainProcOfInteg`. Если решение очередного уравнения не выражается в элементарном виде, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде.

2.3. Степень полинома  $c_1$  меньше степени полинома  $c_2$ . Получается система уравнений вида:

$$\begin{cases} p_t &= \gamma_s \alpha_n \\ p_{t-1} &= \gamma_s \alpha_{n-1} + \gamma_{s-1} \alpha_n \\ &\dots \\ p_{t-r} &= \beta_m \alpha'_n + \gamma_s \alpha_{n-r} + \dots + \gamma_{s-r} \alpha_n \\ &\dots \end{cases}$$

Для решения каждого уравнения выражается  $\alpha_i$ .

3. Если  $P, c_1, c_2$  — полиномы от  $\exp(\psi)$ , то неизвестная  $a$  — полином от  $\exp(\psi)$ . Наибольшая степень полинома  $a$  обозначается через  $n_2$ . Наименьшая отрицательная степень полинома  $a$  обозначается через  $n_1$ . Пусть степени  $P$  меняются от  $-t_1$  до  $t_2$ , степени  $c_1$  меняются от  $-m_1$  до  $m_2$ , степени  $c_2$  меняются от  $-s_1$  до  $s_2$ . Тогда  $n_2 = t_2 - \max\{m_2, s_2\}$ ,  $n_1 = t_1 - \max\{m_1, s_1\}$ . Уравнение принимает вид:

$$P = c_1 \sum_{i=-n_1}^{n_2} (\alpha'_i + i\alpha_i u') \exp(\psi)^i + c_2 \sum_{i=-n_1}^{n_2} \alpha_i \exp(\psi)^i.$$

Приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях  $\exp(\psi)$ , и получается система дифференциальных уравнений. Пусть  $a = \sum_{i=-n_1}^{n_2} \alpha_i \exp(\psi)^i$ ,  $c_1 = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \beta_i \exp(\psi)^i$ ,  $c_2 = \sum_{i=-s_1}^{s_2} \gamma_i \exp(\psi)^i$ ,  $P = \sum_{i=-t_1}^{t_2} p_i \exp(\psi)^i$ . Возможны следующие случаи:

3.1. Наибольшая степень полинома  $c_1$  больше либо равна наибольшей степени полинома  $c_2$ . Получается система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} p_{t_2} = \beta_{m_2}(\alpha'_{n_2} + n_2\alpha_{n_2}\psi') \\ \dots \\ p_{t_2-r} = \beta_{m_2-r}(\alpha'_{n_2} + n_2\alpha_{n_2}\psi') + \dots + \beta_{m_2}(\alpha'_{n_2-r} + (n_2-r)\alpha_{n_2-r}\psi') + \gamma_{s_2}\alpha_{n_2} \\ \dots \end{cases}$$

Для решения каждого уравнения вызывается процедура `solveRischDiffEq`. Если очередное уравнение не имеет решения, то исходное подынтегральное выражение не интегрируется в элементарном виде. Вычисление интеграла останавливается, и пользователь информируется о том, что функция не интегрируема в элементарном виде.

3.2. Наибольшая степень полинома  $c_1$  меньше наибольшей степени полинома  $c_2$ . Получается система уравнений вида:

$$\begin{cases} p_{t_2} = \gamma_{s_2}\alpha_{n_2} \\ \dots \\ p_{t_2-r} = \beta_{m_2}(\alpha'_{n_2} + n_2\alpha_{n_2}\psi') + \gamma_{s_2-r}\alpha_{n_s} + \dots + \gamma_{s_2}\alpha_{n_2-r} \\ \dots \end{cases}$$

Для решения каждого уравнения выражается  $\alpha_i$ .

#### 4. Заключение

Приведенная реализация алгоритмов символьного интегрирования не является полной. Необходимо провести в дальнейшем доработку некоторых процедур. В процедуре `makeRegularMonomialsSequence` требуется реализовать поддержку дробных степеней при определении трансцендентности логарифма (см. [3, с. 225]). В текущей версии алгоритма допускаются только целые степени.

Для устранения случаев, когда рассматриваемый элемент из списка регулярных мономов неоднозначно выражается через предыдущие, необходимо список перестроить.

Для этого надо разработать алгоритм такого перестроения списка логарифмов и экспонент (см. [3, с. 235]). Для каждого нового варианта списка надо организовать повторный запуск процедуры `makeRegularMonomialsSequence`. В текущей версии алгоритма такие случаи считаются неинтегрируемыми.

В процедуре `solveRischDiffEq` надо усовершенствовать алгоритм оценки степени полинома (см. [3, с. 240]).

В процедурах `partialFraction` и `notDenom` реализованы неполные и упрощенные алгоритмы, поэтому необходимо произвести в процедуре `partialFraction` замену алгоритма разбиения правильной дроби в сумму простых дробей алгоритмом для общего случая (см. [4, с. 273]), а в процедуре `notDenom` произвести замену алгоритма избавления от знаменателей алгоритмом для общего случая (см. [3, с. 237]).

### Приложение. Как вычислять интегралы с помощью web-сервиса MathPartner

Чтобы найти первообразную, нужно выполнить следующие шаги:

1. Зайти на web-сайт MathPartner <http://mathpar.cloud.unihub.ru/>
2. Нажать на кнопку «Тетрадь».
3. В появившемся поле ввода текста выбрать числовое поле и название переменной с помощью оператора: `SPACE=Q[x]`.
4. После задания кольца нужно ввести оператор интегрирования `\int()`, в аргументе которого указать интегрируемую функцию. Затем нужно указать переменную интегрирования. Например, `\int( \sin(x) ) dx`.
5. Нажать кнопку «выполнить».

Например, чтобы найти первообразную от функции  $\sin(x)$ , нужно ввести следующий текст:

```
SPACE=Q[x];
\int( \sin(x) ) dx;
```

При нажатии на кнопку «выполнить» получим следующий ответ:  $(-1) \cos(x)$ .

В случае, если первообразная от функции не выражается в элементарном виде, то программа выдает первоначально заданный текст команды интегрирования. Например:

```
SPACE=Q[x];
\int( \exp(x^2) ) dx;
```

При нажатии на кнопку «выполнить» получим следующий ответ:  $\int(\exp(x^2))dx$ .

## Список литературы

- [1] Г. И. Малашенок, *Руководство по языку "Mathpar"*, Издательство Тамбовского университета, Тамбов, 2013.
- [2] В. А. Коробельников, “Алгоритмы символьного интегрирования в системе MathPartner”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:125 (2019), 75–89 DOI: [10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89).
- [3] Е. В. Панкратьев, *Элементы компьютерной алгебры*, МГУ, М., 2007.
- [4] Дж. Дэвенпорт, И. Сирэ, Э. Турнье, *Компьютерная алгебра. Системы и алгоритмы алгебраических вычислений*, МГУ, М., 1991.
- [5] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001.
- [6] С. М. Тарарова, “К проблеме построения алгоритма символьного интегрирования”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **17**:2 (2012), 607-617.

## References

- [1] G. I. Malaschonok, *Language guide "Mathpar"*, Publishing House of Tambov University, Tambov, 2013 (In Russian).
- [2] V. A. Korabelnikov, “Symbolic integration algorithms in CAS MathPartner”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:125 (2019), 75–89 DOI: [10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2019-24-125-75-89) (In Russian).
- [3] E. V. Pankrat'yev, *Elements of computer algebra*, MSU, Moscow, 2007 (In Russian).
- [4] J. Davenport, Y. Siret, E. Tournier, *Computer algebra. Systems and algorithms of algebraic computation*, Mir, Moscow, 1991 (In Russian).
- [5] G. M. Fichtenholz, *Differential and Integral Calculus*. V. 2, PHYSMATLIT, Moscow, 2001 (In Russian).
- [6] S. M. Tararova, “To the problem of constructing an algorithm for symbolic integration”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **17**:2 (2012), 607-617 (In Russian).

## Информация об авторе

**Коробельников Вячеслав Алексеевич**, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: korabelnikov.va@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>

Поступила в редакцию 20.02.2019 г.  
 Поступила после рецензирования 19.04.2019 г.  
 Принята к публикации 20.05.2019 г.

## Information about the author

**Vyacheslav A. Korabelnikov**, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: korabelnikov.va@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3920-8373>

Received 20 February 2019  
 Reviewed 19 April 2019  
 Accepted for press 20 May 2019

© В. Ф. Молчанов, Е. С. Юрьева, 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186

УДК 511.5

## Целочисленные треугольники, уравнение Пелля и многочлены Чебышева

Владимир Федорович МОЛЧАНОВ, Елена Сергеевна ЮРЬЕВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2949>, e-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4015-9863>, e-mail: lena\_yuryeva21@mail.ru

## Integer triangles, Pell's equation and Chebyshev polynomials

Vladimir F. MOLCHANOV, Elena S. YURYEVA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2949>, e-mail: v.molchanov@bk.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4015-9863>, e-mail: lena\_yuryeva21@mail.ru

**Аннотация.** В настоящей работе мы рассматриваем некоторые виды целочисленных треугольников: «почти равносторонние», прямоугольные «почти равнобедренные», прямоугольные «с углом почти в 30 градусов». Их описание сводится к уравнению Пелля. Изложение теории уравнения Пелля основывается на «итерационной матрице». Ее степени выражаются через многочлены Чебышева.

**Ключевые слова:** целочисленные треугольники; формула Герона; уравнение Пелля; многочлены Чебышева

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке программы Министерства образования и науки РФ (госзадание № 3.8515.2017/8.9).

**Для цитирования:** Молчанов В.Ф., Юрьева Е.С. Целочисленные треугольники, уравнение Пелля и многочлены Чебышева // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 179–186. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186.

**Abstract.** In this paper we consider some types of integer triangles: “almost equilateral”, rectangular “almost isosceles”, rectangular “whose angle is almost 30°”. The description is reduced to Pell's equation. We state the theory of Pell's equation on the basis of an “iterated matrix”. Powers of this matrix are expressed in terms of Chebyshev polynomials.

**Keywords:** integer triangles; Heron's formula; Pell's equation; Chebyshev polynomials

**Acknowledgements:** The work is supported by the program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/8.9).

**For citation:** Molchanov V.F., Yuryeva E.S. Tselochislennye treugol'niki, uravnenie Pellya i mnogochleny Chebysheva [Integer triangles, Pell's equation and Chebyshev polynomials]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 179–186. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-179-186. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## 1. Уравнение Пелля

Уравнением Пелля называется диофантово уравнение

$$x^2 - Dy^2 = L, \quad (1.1)$$

где  $D$  — целое положительное число, причем  $\sqrt{D}$  — иррациональное, а число  $L$  — целое. По поводу этих уравнений см. [1], [5], в [5] рассматривается только  $L = 1$ . Мы будем иметь дело с  $L = \pm 1$ . Это уравнение надо решить в целых числах. Больше мы не будем повторять, что решения — целые. Достаточно искать решения среди *неотрицательных* чисел. Обозначим через  $S$  множество всех решений уравнения (1.1) — векторов  $z = (x, y)$  таких, что  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

Рассмотрим линейные преобразования с матрицей  $A$ :

$$\begin{cases} u = \alpha x + \beta y \\ v = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

переводящие  $S$  в  $S$ .

**Теорема 1.1.** *Матрица линейного преобразования (1.2), переводящего  $S$  в  $S$ , есть  $\pm A$ , где*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

здесь  $\alpha, \gamma$  — целые числа  $> 0$ ,  $\alpha^2 - D\gamma^2 = 1$ , так что  $\det A = 1$ .

**Доказательство.** Напишем (1.1) для  $u, v$ , подставим (1.2) и коэффициенты при  $x^2, y^2, xy$  приравняем 1,  $-D$ , 0, соответственно, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - D\gamma^2 &= 1 \\ \beta^2 - D\delta^2 &= -D \\ \alpha\beta - D\gamma\delta &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем  $\alpha^2 = \delta^2$ ,  $\beta^2 = D^2\gamma^2$ . Возьмем  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$ , тогда этим уравнениям удовлетворяют 4 матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & D\gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -D\gamma \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha & -D\gamma \\ -\gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Обозначим здесь первую матрицу через  $A$ , тогда эти 4 матрицы таковы:

$$A, CA, AC, -A, \text{ где } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Применим эти матрицы к векторам из  $S$ . Первая сохраняет  $S$ , остальные три выводят из  $S$ , в самом деле, вторая и третья меняют знак второй координаты, четвертая меняет знак обеих координат.  $\square$

Обозначим через  $M$  матрицу  $A$  с наименьшим  $\alpha > 0$ :

$$M = \begin{pmatrix} p & Dq \\ q & p \end{pmatrix}, \quad p^2 - Dq^2 = 1.$$

Всякая матрица  $A$  из теоремы 1.1 есть степень матрицы  $M$ :

$$A = M^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Совокупность всех матриц  $A$ , их обратных и единичной матрицы образует бесконечную циклическую группу с образующим  $M$ . Обозначим

$$M^n = \begin{pmatrix} p_n & Dq_n \\ q_n & p_n \end{pmatrix}, \quad p_n^2 - Dq_n^2 = 1.$$

Пусть  $z_1 = (x_1, y_1)$  — наименьшее положительное решение уравнения (1.1). Тогда всякое решение получается из  $z_1$  с помощью матрицы  $M$ :

$$z_n = (x_n, y_n) = M^{n-1} z_1,$$

или

$$x_{n+1} = p_n x_1 + D q_n y_1, \quad y_{n+1} = q_n x_1 + p_n y_1.$$

Характеристический многочлен матрицы  $M$  есть многочлен  $\lambda^2 - 2p\lambda + 1$ , поэтому  $M^2 - 2pM + E = 0$  и потому

$$M^{n+2} - 2p M^{n+1} + M^n = 0. \tag{1.3}$$

Точно такое же рекуррентное соотношение справедливо для величин, линейно связанных с  $M^n$ , а именно, матричных элементов  $p_n$ ,  $q_n$ , собственных чисел  $\lambda_1^n$ ,  $\lambda_2^n$ , для решений  $z_n = (x_n, y_n)$  уравнения (1.1), в частности, для последовательностей  $x_n$  и  $y_n$  в отдельности:

$$x_{n+2} - 2p x_{n+1} + x_n = 0, \quad y_{n+2} - 2p y_{n+1} + y_n = 0.$$

Здесь  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  — собственные числа матрицы  $M$ :

$$\lambda_1 = p + \sqrt{p^2 - 1} = p + q\sqrt{D}, \quad \lambda_2 = p - \sqrt{p^2 - 1} = p - q\sqrt{D}.$$

Приведем матрицу  $M$  к диагональному виду:

$$M = B^{-1}TB, \quad \text{где } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве  $B$  можно взять

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{D} & 1 \\ -1 & \sqrt{D} \end{pmatrix}.$$

Тогда  $M^n = B^{-1}T^nB$  и потому

$$z_n = B^{-1}T^{n-1}B z_1.$$

Следовательно,  $x_n$  и  $y_n$  являются линейными комбинациями степеней собственных чисел:

$$x_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n, \quad y_n = D_1 \lambda_1^n + D_2 \lambda_2^n,$$

коэффициенты  $C_j$  и  $D_j$  можно найти с помощью начальных условий, см. [3], [4]. Больше того, используя матрицу  $B$ , мы можем написать явные выражения:

$$x_n = \frac{1}{2} \left\{ (x_1 + y_1 \sqrt{D}) \lambda_1^{n-1} + (x_1 - y_1 \sqrt{D}) \lambda_2^{n-1} \right\} \quad (1.4)$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ (x_1 + y_1 \sqrt{D}) \lambda_1^{n-1} - (x_1 - y_1 \sqrt{D}) \lambda_2^{n-1} \right\}. \quad (1.5)$$

Если  $L = 1$ , то  $(x_1, y_1) = (p, q)$ , так что последние формулы упрощаются:

$$x_n = \frac{1}{2} \left\{ \lambda_1^n + \lambda_2^n \right\}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}} \left\{ \lambda_1^n - \lambda_2^n \right\}$$

Отметим связь матриц  $M^n$  с многочленами Чебышева. Напомним (см., например, [2]), что многочлены Чебышева  $T_k(x)$  и  $U_k(x)$  степени  $k$  первого и второго рода определяются формулами

$$T_k(x) = \cos k\alpha, \quad U_k(x) = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin \alpha},$$

где  $x = \cos \alpha$ . Они удовлетворяют конечно-разностному уравнению

$$T_{k+2}(x) - 2xT_{k+1}(x) + T_k(x) = 0, \quad (1.6)$$

и точно такое же имеет место для  $U_k(x)$ . Вот несколько первых многочленов:

$$\begin{array}{ll} T_0(x) = 1 & U_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x & U_1(x) = 2x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 & U_2(x) = 4x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x & U_3(x) = 8x^3 - 4x \end{array}$$

**Теорема 1.2.** Матрицы  $M^n$  выражаются через многочлены Чебышева:

$$M^n = \begin{pmatrix} T_n(p) & qDU_{n-1}(p) \\ qU_{n-1}(p) & T_n(p) \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

В самом деле, обе части равенства (1.7) удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному уравнению, см. (1.3) и (1.6) с  $x = p$ , и совпадают при  $n = 1, 2$ .

## 2. Целочисленные треугольники

Треугольник называется *целочисленным*, или *героновым*, если его стороны  $a, b, c$  и площадь  $S$  выражаются целыми числами. Мы рассмотрим три вида таких треугольников.

**(А).** Целочисленный треугольник назовем «почти равносторонним», если его стороны — три последовательных числа:  $b - 1, b, b + 1$ . Найдём все такие треугольники.

По формуле Герона имеем

$$S^2 = \frac{3}{16} b^2 (b^2 - 4).$$

Следовательно,  $b$  делится на 2, пусть  $b = 2x$ , тогда  $S^2 = 3x^2(x^2 - 1)$ . Здесь  $x^2 - 1$  должно делиться на 3, а частное должно быть полным квадратом:  $x^2 - 1 = 3y^2$ . Таким образом,  $S = 3xy$  и

$$x^2 - 3y^2 = 1. \quad (2.1)$$

Получили уравнение Пелля, изученное в § 1. Здесь  $D = 3, L = 1$ , наименьшее положительное решение есть  $z_1 = (2, 1)$ , матрица  $M$  есть

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

с собственными числами  $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$ , так что

$$x_n = \frac{1}{2} (\lambda_1^n + \lambda_2^n), \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n),$$

рекуррентное соотношение для  $x_n$  таково:

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0, \quad (2.2)$$

и такое же для  $y_n$ . Соберём числовые результаты в таблицу

Таблица А

$n$	$x$	$y$	$b-1$	$b$	$b+1$	$S$
0	1	0	1	2	3	0
1	2	1	3	4	5	6
2	7	4	13	14	15	84
3	26	15	51	52	53	1170
4	97	56	193	194	195	16296
5	362	209	723	724	725	226974
...	...	...	...	...	...	...

(В). Целочисленный прямоугольный треугольник назовем «почти равнобедренным», если длины его катетов отличаются на единицу. Пусть гипотенуза равна  $c$ , катеты равны  $b$ ,  $b+1$ , тогда — по теореме Пифагора имеем:  $c^2 = b^2 + (b+1)^2$ , или  $2b^2 + 2b + 1 = c^2$ . Умножим на 2 и выделим полный квадрат:

$$(2b+1)^2 + 1 = 2c^2.$$

Обозначим  $2b+1 = x$ ,  $c = y$ . Тогда получим уравнение Пелля

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

с  $D = 2$ ,  $L = -1$ . Здесь наименьшее положительное решение есть  $z_1 = (1, 1)$ , матрица  $M$  есть

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

с собственными числами  $\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ . Рекуррентное соотношение для  $x_n$  таково:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0,$$

и такое же для  $y_n$ . Формулы (1.4) и (1.5) сейчас можно написать проще: заметим, что  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  являются квадратами чисел  $\mu_1 = \sqrt{2} + 1$  и  $\mu_2 = \sqrt{2} - 1$ , соответственно, входящих в коэффициенты в (1.4) и (1.5), поэтому

$$x_n = \frac{1}{2} \{ \mu_1^{2n-1} - \mu_2^{2n-1} \}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \mu_1^{2n-1} + \mu_2^{2n-1} \}.$$



### Список литературы

- [1] И. В. Арнольд, *Теория чисел*, Учпедгиз, М., 1939.
- [2] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены*, Наука, М., 1966.
- [3] Н. Я. Виленкин, *Комбинаторика*, Наука, М., 1969.
- [4] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Гостехиздат, М.–Л., 1952.
- [5] А. Ю. Эвнин, “Уравнения Пелля”, *Математика в высшем образовании*, **7** (2013), 89–94.

### References

- [1] I. V. Arnold, *Number Theory*, Uchpedgiz, Moscow, 1939 (In Russian).
- [2] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions (Bateman Manuscript Project)*. V. 2, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] N. Ya. Vilenkin, *Combinatorial Analysis*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russian).
- [4] A. O. Gelfond, *Calculus of Finite Differences*, Gostekhizdat, Moscow, St. Petersburg, 1952 (In Russian).
- [5] A. Yu. Evnin, “Pell’s equations”, *Mathematics in Higher Education*, **7** (2013), 89–94 (In Russian).

### Информация об авторах

**Молчанов Владимир Федорович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v.molchanov@bk.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4065-2949>

**Юрьева Елена Сергеевна**, магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация. E-mail: lena\_yuryeva21@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4015-9863>

Конфликт интересов отсутствует.

#### Для контактов:

Молчанов Владимир Федорович  
 E-mail: v.molchanov@bk.ru

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.  
 Поступила после рецензирования 18.03.2019 г.  
 Принята к публикации 20.05.2019 г.

### Information about the authors

**Vladimir F. Molchanov**, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: v.molchanov@bk.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4065-2949>

**Elena S. Yuryeva**, Master’s Degree Student in «Mathematics» Programme. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: lena\_yuryeva21@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-4015-9863>

There is no conflict of interests.

#### Corresponding author:

Vladimir F. Molchanov  
 E-mail: v.molchanov@bk.ru

Received 30 January 2019  
 Reviewed 18 March 2019  
 Accepted for press 20 May 2019

© Пчелинцев А.Н., Полуновский А.А., Юханова И.Ю., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-187-203

УДК 519.622.2

## Метод гармонического баланса для отыскания приближённых периодических решений системы Лоренца

Александр Николаевич ПЧЕЛИНЦЕВ<sup>1</sup>,

Андрей Андреевич ПОЛУНОВСКИЙ<sup>2</sup>, Ирина Юрьевна ЮХАНОВА<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4136-1227>, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8339-0459>, e-mail: irina\_yu\_10@mail.ru

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)»

105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6557-3649>, e-mail: apap2009@yandex.ru

## The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system

Alexander N. PCHELINTSEV<sup>1</sup>,

Andrey A. POLUNOVSKIY<sup>2</sup>, Irina Yu. YUKHANOVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4136-1227>, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8339-0459>, e-mail: irina\_yu\_10@mail.ru

<sup>2</sup> Bauman Moscow State Technical University

5 Baumanskaya 2-ya, Moscow 105005, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6557-3649>, e-mail: apap2009@yandex.ru

**Аннотация.** Рассматривается метод гармонического баланса для нахождения приближённых периодических решений динамической системы Лоренца. При разработке программного обеспечения, реализующего описываемый метод, был выбран математический пакет Maxima. Показаны недостатки символьных вычислений для получения системы нелинейных алгебраических уравнений относительно циклической частоты, постоянных членов и амплитуд гармоник, составляющих искомое решение. Для ускорения расчётов впервые эта система была получена в общем виде. Приведены результаты вычислительного эксперимента – коэффициенты тригонометрических полиномов, приближающих найденное периодическое решение, начальное условие и период цикла. Полученные результаты были проверены с помощью описанного ранее в работах авторов высокоточного метода интегрирования, основанного на аппроксимации степенными рядами.

**Ключевые слова:** система Лоренца; аттрактор; метод гармонического баланса; ряды Фурье

**Для цитирования:** Пчелинцев А.Н., Полуновский А.А., Юханова И.Ю. Метод гармонического баланса для отыскания приближённых периодических решений системы Лоренца // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 187–203. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-187-203.

**Abstract.** We consider the harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system. When developing software that implements the described method, the math package Maxima was chosen. The drawbacks of symbolic calculations for obtaining a system of nonlinear algebraic equations with respect to the cyclic frequency, free terms and amplitudes of the harmonics, that make up the desired solution, are shown. To speed up the calculations, this system was obtained in a general form for the first time. The results of the computational experiment are given: the coefficients of trigonometric polynomials approximating the found periodic solution, the initial condition, and the cycle period. The results obtained were verified using a high-precision method of numerical integration based on the power series method and described earlier in the articles of the authors.

**Keywords:** Lorenz system; attractor; harmonic balance method; Fourier series

**For citation:** Pchelintsev A.N., Polunovskiy A.A., Yukhanova I.Yu. Metod garmonicheskogo balansa dlya otskaniya priblizhonnykh periodicheskikh resheniy sistemy Lorentsa [The harmonic balance method for finding approximate periodic solutions of the Lorenz system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 187–203. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-187-203. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений, введённую Э. Лоренцом в работе [1],

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \end{cases} \quad (0.1)$$

где  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  (эти значения параметров системы (0.1) теперь называют классическими, а саму систему — системой Лоренца).

В статье [1] для системы Лоренца с классическими параметрами доказано следующее утверждение: существует такое  $C > 0$ , что для любого решения

$$X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$$

начиная с некоторого момента времени становится справедливым неравенство  $|X(t)| \leq C$ , и дивергенция векторного поля скоростей системы (0.1) отрицательна всюду в  $\mathbb{R}^3$ . Тогда [1] существует предельное множество — аттрактор Лоренца, — к которому притягиваются все траектории динамической системы при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, аттрактор определяет поведение решений динамической системы на больших отрезках времени.

У. Такер в работе [2] доказал гиперболичность аттрактора в системе (0.1), т. е. аттрактор состоит из траекторий, всюду плотных на нём (континуум седловых циклов), вдоль которых близкие траектории экспоненциально разбегаются; это и создает их хаотическое поведение. Тогда (как отмечает Д.В. Аносов в послесловии к книге [3, с. 285]) *в аттракторе системы (0.1) может существовать бесконечное число асимптотически устойчивых периодических траекторий*, но их область притяжения может быть достаточно малой (трудно улавливаемой в численном эксперименте).

Как известно (см., например, [4, 5]), символическую динамику используют для отслеживания циклов в системе Лоренца. Разбивают область в фазовом пространстве, содержащую аттрактор, на конечное число подобластей. Обозначая каждый элемент разбиения буквой, траектории на аттракторе, проходящие через соответствующие области, кодируются последовательностями таких символов. Если в последовательности имеется регулярность — повторяемость групп символов, — то соответствующая траектория считается циклом. Однако возвращаемость траектории в некоторую окрестность своей части не говорит о её замкнутости. Критику результатов подобных вычислительных экспериментов можно найти, например, в [6].

В 2004 г. Д. Вишванат опубликовал работу [7], в которой привел начальные условия и периоды для трёх циклов в аттракторе Лоренца с достаточно большой точностью. Алгоритм вычислений основан на методе Линдштедта–Пуанкаре (ЛП), на который (в отличие от методов численного интегрирования) не влияет устойчивость цикла, к которому строятся приближения. Полученные в [7] вычислительные данные можно проверить, решая задачу Коши высокоточными численными методами (см, например, [9]).

Анализ работ [7, 8] Д. Вишваната показал, что автор приводит общее описание алгоритма без ссылок на программную реализацию (в MATLAB, как указано в его статьях). При этом не ясно, как для ЛП-метода символично решается получаемая неоднородная линейная система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (например, для уравнения Ван дер Поля это сделать можно без особых проблем). Таким образом, актуальной задачей остаётся разработка алгоритма поиска циклов системы (0.1), детальное описание его реализации, получение начальных значений и периода цикла с заданной точностью.

Целью данной работы является отыскание приближённых периодических решений в системе Лоренца на основе метода гармонического баланса, являющегося более простым в реализации, чем ЛП-метод, используемый в [7, 8]. При этом будет получена в общем виде система нелинейных алгебраических уравнений относительно циклической частоты, постоянных членов и амплитуд гармоник, составляющих искомое решение.

## 1. Метод гармонического баланса

Попытки построить приближённые периодические решения системы (0.1) предпринимались и до Д. Вишваната (см., например, [10]) методом гармонического баланса, но с малой точностью представления вещественных чисел, при этом в статье [10] не указаны начальные условия и периоды найденных циклов (приведены только рисунки с цикла-

ми). Сейчас этот метод активно развивается в работах А. Луо [11–13] для отыскания периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Будем использовать метод гармонического баланса для получения приближений к периодическим решениям системы (0.1). Для этого сделаем аппроксимацию фазовых координат на периоде  $T$  тригонометрическими полиномами в общем виде с неизвестной циклической частотой  $\omega$  (поскольку мы не знаем значение  $T$ ; в общем случае оно может быть иррациональным числом):

$$\begin{aligned}x_1(t) &\approx \tilde{x}_1(t) = x_{1,0} + \sum_{i=1}^h (c_{1,i} \cos(i\omega t) + s_{1,i} \sin(i\omega t)), \\x_2(t) &\approx \tilde{x}_2(t) = x_{2,0} + \sum_{i=1}^h (c_{2,i} \cos(i\omega t) + s_{2,i} \sin(i\omega t)), \\x_3(t) &\approx \tilde{x}_3(t) = x_{3,0} + \sum_{i=1}^h (c_{3,i} \cos(i\omega t) + s_{3,i} \sin(i\omega t)),\end{aligned}$$

где  $h$  — заданное количество гармоник. Если  $i > h$ , то мы полагаем

$$c_{1,i} = s_{1,i} = c_{2,i} = s_{2,i} = c_{3,i} = s_{3,i} = 0. \quad (1.2)$$

В силу правой части системы (0.1) составим невязки

$$\begin{aligned}\delta_1(t) &= \tilde{x}'_1(t) - \sigma[\tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)], \\ \delta_2(t) &= \tilde{x}'_2(t) - [r\tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_1(t)\tilde{x}_3(t)], \\ \delta_3(t) &= \tilde{x}'_3(t) - [\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t) - b\tilde{x}_3(t)],\end{aligned}$$

где штрихом переобозначена производная функции по времени. Если производить вычисления в аналитическом виде, то для каждой невязки нужно следующее:

1. Продифференцировать по времени соответствующий тригонометрический полином.
2. Где имеются произведения фазовых координат, перемножить соответствующие тригонометрические полиномы, преобразовав при этом произведения тригонометрических функций в суммы.
3. Привести подобные слагаемые для каждой функции  $\cos()$  и  $\sin()$  с соответствующим аргументом.
4. В силу равенств (1.2), отсечь от полученной невязки гармоники более высокого порядка.
5. Приравнять полученную невязку к нулю, т. е. коэффициенты при её гармониках.

Если собрать в единое целое найденные алгебраические уравнения для каждой невязки, то получим пока ещё незамкнутую систему нелинейных уравнений относительно неизвестных амплитуд  $c_{1,i}$ ,  $s_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$ ,  $s_{2,i}$ ,  $c_{3,i}$  и  $s_{3,i}$  ( $i = \overline{1, h}$ ), постоянных

членов  $x_{1,0}$ ,  $x_{2,0}$  и  $x_{3,0}$  и циклической частоты  $\omega$ . Количество неизвестных в системе равно  $3(1 + 2h) + 1 = 6h + 4$ , а уравнений — на единицу меньше.

Дополнительное уравнение можно получить исходя из следующих соображений. Известно (см. [5, 7]), что искомые циклы пересекают плоскость, проходящую через положения равновесия системы (0.1)

$$O_1 \left( -\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right), O_2 \left( \sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) \quad (1.3)$$

и параллельную плоскости  $x_1 O x_2$  (сечение Пуанкаре). Таким образом, третья координата в начальном условии для искомых циклов равна величине  $r-1$ , откуда  $\tilde{x}_3(0) = r-1$ . Тогда дополнительное уравнение системы имеет вид:

$$x_{3,0} + \sum_{i=1}^h c_{3,i} - 27 = 0.$$

Других дополнительных сведений о периодических решениях системы Лоренца авторы не встречали. Заметим, что для трёх циклов, найденных Д. Вишванатом, в начальном условии для третьей координаты было взято число 27.

Далее приведем пример системы уравнений при  $h = 2$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega s_{1,1} - 10c_{2,1} + 10c_{1,1} = 0, \\ -10s_{2,1} + 10s_{1,1} - c_{1,1}\omega = 0, \\ 2\omega s_{1,2} - 10c_{2,2} + 10c_{1,2} = 0, \\ -10s_{2,2} + 10s_{1,2} - 2c_{1,2}\omega = 0, \\ 10x_{1,0} - 10x_{2,0} = 0, \\ c_{1,1}x_{3,0} + c_{3,1}x_{1,0} + \frac{s_{1,1}s_{3,2}}{2} + \frac{s_{1,2}s_{3,1}}{2} + \omega s_{2,1} + \frac{c_{1,1}c_{3,2}}{2} + \frac{c_{1,2}c_{3,1}}{2} + c_{2,1} - 28c_{1,1} = 0, \\ s_{1,1}x_{3,0} + s_{3,1}x_{1,0} + \frac{c_{1,1}s_{3,2}}{2} - \frac{c_{1,2}s_{3,1}}{2} + s_{2,1} + \frac{c_{3,1}s_{1,2}}{2} - \frac{c_{3,2}s_{1,1}}{2} - 28s_{1,1} - c_{2,1}\omega = 0, \\ c_{1,2}x_{3,0} + c_{3,2}x_{1,0} - \frac{s_{1,1}s_{3,1}}{2} + 2\omega s_{2,2} + \frac{c_{1,1}c_{3,1}}{2} + c_{2,2} - 28c_{1,2} = 0, \\ s_{1,2}x_{3,0} + s_{3,2}x_{1,0} + \frac{c_{1,1}s_{3,1}}{2} + s_{2,2} - 28s_{1,2} + \frac{c_{3,1}s_{1,1}}{2} - 2c_{2,2}\omega = 0, \\ x_{1,0}x_{3,0} + x_{2,0} - 28x_{1,0} + \frac{s_{1,2}s_{3,2}}{2} + \frac{s_{1,1}s_{3,1}}{2} + \frac{c_{1,2}c_{3,2}}{2} + \frac{c_{1,1}c_{3,1}}{2} = 0, \\ -c_{1,1}x_{2,0} - c_{2,1}x_{1,0} + \omega s_{3,1} - \frac{s_{1,1}s_{2,2}}{2} - \frac{s_{1,2}s_{2,1}}{2} + \frac{8c_{3,1}}{3} - \frac{c_{1,1}c_{2,2}}{2} - \frac{c_{1,2}c_{2,1}}{2} = 0, \\ -s_{1,1}x_{2,0} - s_{2,1}x_{1,0} + \frac{8s_{3,1}}{3} - \frac{c_{1,1}s_{2,2}}{2} + \frac{c_{1,2}s_{2,1}}{2} - \frac{c_{2,1}s_{1,2}}{2} + \frac{c_{2,2}s_{1,1}}{2} - c_{3,1}\omega = 0, \\ -c_{1,2}x_{2,0} - c_{2,2}x_{1,0} + 2\omega s_{3,2} + \frac{s_{1,1}s_{2,1}}{2} + \frac{8c_{3,2}}{3} - \frac{c_{1,1}c_{2,1}}{2} = 0, \\ -s_{1,2}x_{2,0} - s_{2,2}x_{1,0} + \frac{8s_{3,2}}{3} - \frac{c_{1,1}s_{2,1}}{2} - \frac{c_{2,1}s_{1,1}}{2} - 2c_{3,2}\omega = 0, \\ \frac{8x_{3,0}}{3} - x_{1,0}x_{2,0} - \frac{s_{1,2}s_{2,2}}{2} - \frac{s_{1,1}s_{2,1}}{2} - \frac{c_{1,2}c_{2,2}}{2} - \frac{c_{1,1}c_{2,1}}{2} = 0, \\ x_{3,0} + c_{3,1} + c_{3,2} - 27 = 0. \end{array} \right.$$

Отметим, что для любого  $h$  подобная система имеет решения

$$x_{1,0} = x_{2,0} = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad x_{3,0} = r-1, \quad c_{k,i} = 0, \quad s_{k,i} = 0, \\ \omega - \text{любое число, } k = \overline{1,3}, \quad i = \overline{1,h},$$

соответствующие указанным положениям равновесия (1.3).

Таким образом, полученная нелинейная система алгебраических уравнений имеет неединственное решение. Для отыскания её приближённых решений будем использовать численный метод Ньютона, сходимость которого к нужному решению (т. е. отличному от положения равновесия) зависит от выбора начального приближения.

## 2. Символьные вычисления для получения системы алгебраических уравнений

Итак, для получения приближения к периодическому решению мы должны получить нелинейную систему относительно неизвестных коэффициентов разложения и частоты. Как показано в п. 1, даже для двух гармоник система имеет громоздкий вид. Поэтому рассмотрим алгоритм проведения символьных вычислений для её получения.

При разработке программного обеспечения был выбран математический пакет Maxima. Программа получения амплитуд и постоянных членов невязок при  $h = 2$  представлена далее.

```
/* [wxMaxima batch file version 1] [ DO NOT EDIT BY HAND! ]*/
/* [wxMaxima: input start ] */
display2d:false$
x1:x10+c1c1*cos(1*omega*t)+s1c1*sin(1*omega*t)+
c1c2*cos(2*omega*t)+s1c2*sin(2*omega*t)$
x2:x20+c2c1*cos(1*omega*t)+s2c1*sin(1*omega*t)+
c2c2*cos(2*omega*t)+s2c2*sin(2*omega*t)$
x3:x30+c3c1*cos(1*omega*t)+s3c1*sin(1*omega*t)+
c3c2*cos(2*omega*t)+s3c2*sin(2*omega*t)$
assume(omega > 0)$
delta1:trigreduce(diff(x1,t)-(10*(x2-x1)),t)$
delta2:trigreduce(diff(x2,t)-(28*x1-x2-x1*x3),t)$
delta3:trigreduce(diff(x3,t)-(x1*x2-8/3*x3),t)$
expand(diff(delta1,cos(1*omega*t)));
expand(diff(delta1,sin(1*omega*t)));
expand(diff(delta1,cos(2*omega*t)));
expand(diff(delta1,sin(2*omega*t)));
expand(integrate(delta1,t,0,2*%pi/omega)*omega/(2*%pi));
expand(diff(delta2,cos(1*omega*t)));
expand(diff(delta2,sin(1*omega*t)));
expand(diff(delta2,cos(2*omega*t)));
```

```

expand(diff(delta2,sin(2*omega*t)));
expand(integrate(delta2,t,0,2*pi/omega)*omega/(2*pi));
expand(diff(delta3,cos(1*omega*t)));
expand(diff(delta3,sin(1*omega*t)));
expand(diff(delta3,cos(2*omega*t)));
expand(diff(delta3,sin(2*omega*t)));
expand(integrate(delta3,t,0,2*pi/omega)*omega/(2*pi));
/* [wxMaxima: input end ] */

```

Выражение `display2d:false$` выключает многострочное рисование дробей, степеней и т. п. Знак `$` позволяет вычислить результат выражения, но не выводить на экран (вместо `;`). Функция `trigreduce(выражение, t)` свёртывает все произведения тригонометрических функций относительно переменной  $t$  в комбинации сумм. Дифференцирование невязок по гармоническим функциям необходимо для получения соответствующих амплитуд. Функция `expand(выражение)` раскрывает скобки (выполняет умножение, возведение в степень, приводит подобные слагаемые).

Для нахождения постоянных членов невязок применяется интегрирование на периоде, т. е. постоянный член  $k$ -ой невязки равен

$$\frac{\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \delta_k(t) dt}{2\pi}.$$

Чтобы при символьном интегрировании пакет не задавал вопрос о знаке частоты, дается команда `assume(omega > 0)$`.

Файл с командами пакета формируется аналогично для любого количества  $h$  гармоник. После выполнения данной программы пакет выведет в консоли символьные выражения для левой части системы алгебраических уравнений, которая будет решаться в нём же методом Ньютона.

Заметим, что самая затратная по времени операция здесь — символьное интегрирование. Например, для 120 гармоник время формирования системы — более 2-х суток. Здесь можно распараллелить вычислительный процесс на три компьютера, но это значительного эффекта не даст. Поэтому систему алгебраических уравнений нужно формировать сразу. Далее получим общий вид этой системы.

Отметим, что при решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона матрица Якоби для левой части системы не обращается — в пакете Maxima используется LU-разложение для решения системы линейных уравнений на каждой итерации метода.

### 3. Общий вид системы алгебраических уравнений

Поскольку правая часть системы (0.1) содержит нелинейности в виде произведений фазовых координат, получим соотношения, выражающие коэффициенты тригонометрических полиномов, получаемых при умножении приближений  $\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_3(t)$  и  $\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t)$ .

Рассмотрим две функции  $f(t)$  и  $F(t)$ , представимые рядами Фурье

$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t)),$$

$$F(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)).$$

Пусть

$$f(t)F(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i \cos(i\omega t) + \beta_i \sin(i\omega t)).$$

Следуя книге [14, с. 123–125], имеем следующие соотношения:

$$\alpha_0 = a_0 A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m A_m + b_m B_m),$$

$$\alpha_i = a_0 A_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m (A_{m+i} + A_{m-i}) + b_m (B_{m+i} + B_{m-i})), \quad (3.4)$$

$$\beta_i = a_0 B_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m (B_{m+i} - B_{m-i}) - b_m (A_{m+i} - A_{m-i})). \quad (3.5)$$

Будем предполагать, что при  $i > h$

$$a_i = b_i = A_i = B_i = 0.$$

Поскольку для нашей задачи мы ищем приближение до  $h$ -ой гармоники включительно, занулим все амплитуды в произведении при  $i > h$ , т. е.

$$\alpha_i = \beta_i = 0.$$

Таким образом, мы перейдем от произведения рядов к произведению тригонометрических полиномов.

Также в соотношениях (3.4) и (3.5) мы будем предполагать [14, с. 124], что

$$A_{m-i} = A_{i-m}, \quad B_{m-i} = -B_{i-m}, \quad B_0 = 0.$$

Тогда получим:

$$\alpha_0 = a_0 A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^h (a_m A_m + b_m B_m),$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= a_0 A_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{m+i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m A_{m-i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m B_{m+i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m B_{m-i} = \\
 &= a_0 A_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} a_m A_{m+i} + \frac{1}{2} a_i A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} a_m A_{i-m} + \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h a_m A_{m-i} + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^h b_m B_{m+i} + \frac{1}{2} b_i B_0 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} b_m B_{i-m} + \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h b_m B_{m-i} = \\
 &= a_0 A_i + a_i A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (a_m A_{m+i} + b_m B_{m+i}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (a_m A_{i-m} - b_m B_{i-m}) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (a_m A_{m-i} + b_m B_{m-i}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_i &= a_0 B_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m B_{m+i} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_m B_{m-i} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m A_{m+i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m A_{m-i} = \\
 &= a_0 B_i + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} a_m B_{m+i} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} a_m B_{i-m} - \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h a_m B_{m-i} - \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} b_m A_{m+i} + b_i A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} b_m A_{i-m} + \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h b_m A_{m-i} = \\
 &= a_0 B_i + b_i A_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (a_m B_{m+i} - b_m A_{m+i}) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (a_m B_{i-m} + b_m A_{i-m}) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (-a_m B_{m-i} + b_m A_{m-i}).
 \end{aligned}$$

Применяя полученные формулы для вычисления произведений тригонометрических полиномов к невязкам, мы можем записать уравнения для  $i$ -ых гармоник ( $i = \overline{1, h}$  — номер гармоники,  $k = \overline{1, 3}$  — номер невязки):

$k = 1$ :

$$\begin{aligned}
 i\omega s_{1,i} - 10c_{2,i} + 10c_{1,i} &= 0, \\
 -i\omega c_{1,i} - 10s_{2,i} + 10s_{1,i} &= 0,
 \end{aligned}$$

уравнение, соответствующее постоянному члену для первой невязки, —

$$x_{1,0} - x_{2,0} = 0,$$

$k = 2$ :

$$\begin{aligned}
& i\omega s_{2,i} - 28c_{1,i} + c_{2,i} + x_{1,0}c_{3,i} + c_{1,i}x_{3,0} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (c_{1,m}c_{3,m+i} + s_{1,m}s_{3,m+i}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (c_{1,m}c_{3,i-m} - s_{1,m}s_{3,i-m}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (c_{1,m}c_{3,m-i} + s_{1,m}s_{3,m-i}) = 0, \\
& -i\omega c_{2,i} - 28s_{1,i} + s_{2,i} + x_{1,0}s_{3,i} + s_{1,i}x_{3,0} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (c_{1,m}s_{3,m+i} - s_{1,m}c_{3,m+i}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (c_{1,m}s_{3,i-m} + s_{1,m}c_{3,i-m}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (-c_{1,m}s_{3,m-i} + s_{1,m}c_{3,m-i}) = 0,
\end{aligned}$$

уравнение, соответствующее постоянному члену для второй невязки, —

$$-28x_{1,0} + x_{2,0} + x_{1,0}x_{3,0} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^h (c_{1,m}c_{3,m} + s_{1,m}s_{3,m}) = 0,$$

$k = 3$ :

$$\begin{aligned}
& i\omega s_{3,i} - x_{1,0}c_{2,i} - c_{1,i}x_{2,0} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (c_{1,m}c_{2,m+i} + s_{1,m}s_{2,m+i}) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (c_{1,m}c_{2,i-m} - s_{1,m}s_{2,i-m}) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (c_{1,m}c_{2,m-i} + s_{1,m}s_{2,m-i}) + \frac{8}{3}c_{3,i} = 0, \\
& -i\omega c_{3,i} - x_{1,0}s_{2,i} - s_{1,i}x_{2,0} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{h-i} (c_{1,m}s_{2,m+i} - s_{1,m}c_{2,m+i}) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{i-1} (c_{1,m}s_{2,i-m} + s_{1,m}c_{2,i-m}) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{m=i+1}^h (-c_{1,m}s_{2,m-i} + s_{1,m}c_{2,m-i}) + \frac{8}{3}s_{3,i} = 0,
\end{aligned}$$

уравнение, соответствующее постоянному члену для третьей невязки, —

$$-x_{1,0}x_{2,0} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^h (c_{1,m}c_{2,m} + s_{1,m}s_{2,m}) + \frac{8}{3}x_{3,0} = 0,$$

дополнительное уравнение системы —

$$x_{3,0} + \sum_{i=1}^h c_{3,i} - 27 = 0.$$

#### 4. Результаты вычислительного эксперимента

В результате многочисленных вычислительных экспериментов было подобрано начальное приближение для циклической частоты, постоянных членов и амплитуд при  $h = h_1 = 5$ :

$$\begin{aligned} \omega = 4, \quad x_{1,0} = x_{2,0} = x_{3,0} = 0, \quad c_{1,i} = -1, \quad i = \overline{1,5}, \\ s_{1,j} = 0, \quad j = 1, 3, 4, 5, \quad s_{1,2} = 1. \end{aligned}$$

Данный результат замечателен тем, что метод Ньютона сходится к решению, отличному от положений равновесия. Поэтому для улучшения точности приближенного периодического решения мы рассматриваем систему алгебраических уравнений для значения  $h$ , равного некоторому  $h_2 > h_1$ . Полученное численное решение системы при  $h = h_1$  берётся как начальное приближение для амплитуд с индексами  $i \leq h_1$  у системы с  $h = h_2$ , а значения начального приближения для амплитуд с индексами  $i > h_1$  полагаются равными нулю.

В таблицах 1–3 приведён результат решения системы при  $h = 35$ , точность метода Ньютона –  $10^{-8}$ . Значение периода получается равным  $T = 1.558652210$ , начальное условие для полученного приближённого периодического решения –

$$\tilde{x}_1(0) = -2.147367631, \quad \tilde{x}_2(0) = 2.078048211, \quad \tilde{x}_3(0) = 27. \quad (4.6)$$

Начальные значения (4.6) были проверены на периоде в компьютерной программе, реализующей численное интегрирование системы (0.1) модифицированным методом степенных рядов [9] с точностью оценки общего члена ряда  $10^{-25}$ , 100 бит под мантисой вещественного числа и машинным эpsilon  $1.57772 \cdot 10^{-30}$ . При таких параметрах метода приближённые значения фазовых координат, полученные с помощью численного интегрирования, были также проверены тем же численным методом, но в обратном времени. Значения в обратном времени совпадают с (4.6) до 9-го знака включительно после точки. Результирующие же значения  $x_1(T)$ ,  $x_2(T)$  и  $x_3(T)$  совпадают с (4.6) до 8-го знака включительно.

Таблица 1

Амплитуды гармоник для  $\tilde{x}_1(t)$ ,  $x_{1,0} = 0$ 

$i$	$c_{1,i}$	$s_{1,i}$
1	-5.780478259196228	8.56017654325353
2	0	0
3	3.160762628380509	2.239212141102876
4	0	0
5	0.6958870387616096	-0.7979388979225431
6	0	0
7	-0.1891992374027477	-0.1864921358925765
8	0	0
9	-0.04770429623010056	0.04554044367245914
10	0	0
11	0.01112322884679491	0.01209138588669679
12	0	0
13	0.003061207095371694	-0.002735092350544739
14	0	0
15	$-6.744578887916229 \cdot 10^{-4}$	$-7.748319471034087 \cdot 10^{-4}$
16	0	0
17	$-1.960718247379475 \cdot 10^{-4}$	$1.665584161919807 \cdot 10^{-4}$
18	0	0
19	$4.116738805347028 \cdot 10^{-5}$	$4.960493476144467 \cdot 10^{-5}$
20	0	0
21	$1.254757391175977 \cdot 10^{-5}$	$-1.018054283421179 \cdot 10^{-5}$
22	0	0
23	$-2.518375902000733 \cdot 10^{-6}$	$-3.173486439630506 \cdot 10^{-6}$
24	0	0
25	$-8.025338211960923 \cdot 10^{-7}$	$6.230623750431923 \cdot 10^{-7}$
26	0	0
27	$1.541534734542893 \cdot 10^{-7}$	$2.0292802821633 \cdot 10^{-7}$
28	0	0
29	$5.130649139299358 \cdot 10^{-8}$	$-3.813725452268523 \cdot 10^{-8}$
30	0	0
31	$-9.43393531993558 \cdot 10^{-9}$	$-1.297038481588497 \cdot 10^{-8}$
32	0	0
33	$-3.278552746800046 \cdot 10^{-9}$	$2.333260259021725 \cdot 10^{-9}$
34	0	0
35	$5.76957885768651 \cdot 10^{-10}$	$8.28626640138045 \cdot 10^{-10}$

Таблица 2

Амплитуды гармоник для  $\tilde{x}_2(t)$ ,  $x_{2,0} = 0$ 

$i$	$c_{2,i}$	$s_{2,i}$
1	-2.32972926505593	10.89038310357172
2	0	0
3	5.86875317198698	-1.5832552129833
4	0	0
5	-0.9124249133801483	-2.200556873678218
6	0	0
7	-0.7154457265566421	0.3473932955614448
8	0	0
9	0.1175186702136983	0.2186139734768588
10	0	0
11	0.06473984670858603	-0.03723215039412078
12	0	0
13	-0.01127208646321726	-0.01877739524860192
14	0	0
15	-0.005359671824365359	0.003303445299126894
16	0	0
17	$9.453499475830811 \cdot 10^{-4}$	$0.001510235036151227$
18	0	0
19	$4.211022386354685 \cdot 10^{-4}$	$-2.657049331814368 \cdot 10^{-4}$
20	0	0
21	$-7.363528144366622 \cdot 10^{-5}$	$-1.164013765469982 \cdot 10^{-4}$
22	0	0
23	$-3.19419300699788 \cdot 10^{-5}$	$2.017609175377016 \cdot 10^{-5}$
24	0	0
25	$5.47663534401654 \cdot 10^{-6}$	$8.710929378319451 \cdot 10^{-6}$
26	0	0
27	$2.362852034076972 \cdot 10^{-6}$	$-1.474901091428546 \cdot 10^{-6}$
28	0	0
29	$-3.94532524722541 \cdot 10^{-7}$	$-6.379296603810031 \cdot 10^{-7}$
30	0	0
31	$-1.715198229248314 \cdot 10^{-7}$	$1.049218598356554 \cdot 10^{-7}$
32	0	0
33	$2.776045093375681 \cdot 10^{-8}$	$4.59473450493284 \cdot 10^{-8}$
34	0	0
35	$1.22681173575872 \cdot 10^{-8}$	$-7.31171826830086 \cdot 10^{-9}$

Таблица 3

Амплитуды гармоник для  $\tilde{x}_3(t)$ ,  $x_{3,0} = 23.04210397942006$ 

$i$	$c_{3,i}$	$s_{3,i}$
1	0	0
2	7.568410271550653	-9.50386584559212
3	0	0
4	-3.555327211552558	-1.844710563805469
5	0	0
6	-0.4741220131932616	1.279043179069961
7	0	0
8	0.4227292179138024	0.1274574086305204
9	0	0
10	0.03498415351761577	-0.1315337800809524
11	0	0
12	-0.03934013541135439	-0.009645786231708874
13	0	0
14	-0.002660052258813564	0.01145537653603837
15	0	0
16	0.003271688724557337	$7.33752523103949 \cdot 10^{-4}$
17	0	0
18	$2.024982256871223 \cdot 10^{-4}$	$-9.206266886554897 \cdot 10^{-4}$
19	0	0
20	$-2.560063570343799 \cdot 10^{-4}$	$-5.58964460662525 \cdot 10^{-5}$
21	0	0
22	$-1.542436654918173 \cdot 10^{-5}$	$7.050327849098175 \cdot 10^{-5}$
23	0	0
24	$1.926014222030195 \cdot 10^{-5}$	$4.25261452471065 \cdot 10^{-6}$
25	0	0
26	$1.170939944189529 \cdot 10^{-6}$	$-5.225643926851625 \cdot 10^{-6}$
27	0	0
28	$-1.409525591131397 \cdot 10^{-6}$	$-3.21879984959824 \cdot 10^{-7}$
29	0	0
30	$-8.83134288999026 \cdot 10^{-8}$	$3.782652721710986 \cdot 10^{-7}$
31	0	0
32	$1.010610960272394 \cdot 10^{-7}$	$2.418021923473667 \cdot 10^{-8}$
33	0	0
34	$6.606163280924149 \cdot 10^{-9}$	$-2.689431432873997 \cdot 10^{-8}$
35	0	0

Цикл, соответствующий (4.6), показан на рис. 1. Отметим, что найденный цикл совпадает с первым циклом Вишваната в [7], все знаки после точки для величины  $T$  также совпадают с данными из работы [7].

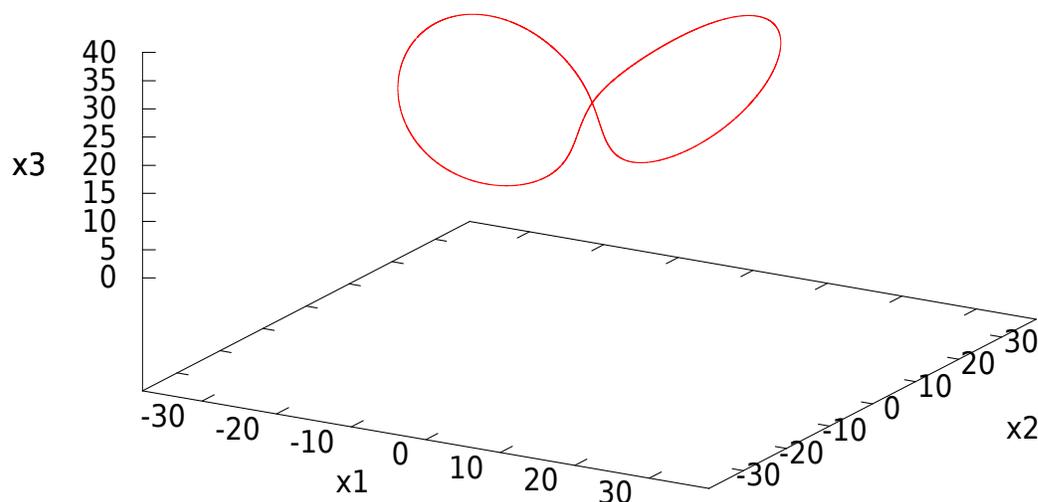


Рис. 1. Цикл, полученный методом гармонического баланса

### Список литературы

- [1] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [2] W. Tucker, “A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem”, *Foundations of Computational Mathematics*, **2**:1 (2002), 53–117.
- [3] Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, М., 1986.
- [4] М. И. Рабинович, “Стохастические автоколебания и турбулентность”, *Успехи физических наук*, **125** (1978), 123–168.
- [5] Z. Galias, W. Tucker, “Validated study of the existence of short cycles for chaotic systems using symbolic dynamics and interval tools”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**:2 (2011), 551–563.
- [6] R. Lozi, “Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems?”, *Topology and Dynamics of Chaos. In Celebration of Robert Gilmore’s 70th Birthday. – World Scientific Series in Nonlinear Science Series A*, **84** (2013), 63–98.
- [7] D. Viswanath, “The fractal property of the Lorenz attractor”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **190**:1–2 (2004), 115–128.
- [8] D. Viswanath, “The Lindstedt–Poincaré technique as an algorithm for computing periodic orbits”, *SIAM Review*, **43**:3 (2001), 478–495.

- [9] А. Н. Пчелинцев, “Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **17**:2 (2014), 191–201.
- [10] K. Neymeyr, F. Seelig, “Determination of unstable limit cycles in chaotic systems by method of unrestricted harmonic balance”, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **46**:6 (1991), 499–502.
- [11] A. C. J. Luo, J. Huang, “Approximate solutions of periodic motions in nonlinear systems via a generalized harmonic balance”, *Journal of Vibration and Control*, **18**:11 (2011), 1661–1674.
- [12] A. C. J. Luo, *Toward Analytical Chaos in Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, Chichester, 2014.
- [13] A. C. J. Luo, S. Guo, “Analytical solutions of period-1 to period-2 motions in a periodically diffused brusselator”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **13**:9 (2018), 090912.
- [14] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1962.

### References

- [1] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
- [2] W. Tucker, “A rigorous ODE solver and Smale’s 14th problem”, *Foundations of Computational Mathematics*, **2**:1 (2002), 53–117.
- [3] J. Palis, Jr. W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] M. I. Rabinovich, “Stochastic self-oscillations and turbulence”, *Soviet Physics Uspekhi*, **21**:5 (1978), 443–469.
- [5] Z. Galias, W. Tucker, “Validated study of the existence of short cycles for chaotic systems using symbolic dynamics and interval tools”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**:2 (2011), 551–563.
- [6] R. Lozi, “Can we trust in numerical computations of chaotic solutions of dynamical systems?”, *Topology and Dynamics of Chaos. In Celebration of Robert Gilmore’s 70th Birthday. – World Scientific Series in Nonlinear Science Series A*, **84** (2013), 63–98.
- [7] D. Viswanath, “The fractal property of the Lorenz attractor”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **190**:1–2 (2004), 115–128.
- [8] D. Viswanath, “The Lindstedt–Poincaré technique as an algorithm for computing periodic orbits”, *SIAM Review*, **43**:3 (2001), 478–495.
- [9] A. N. Pchelintsev, “Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system”, *Numerical Analysis and Applications*, **7**:2 (2014), 159–167.
- [10] K. Neymeyr, F. Seelig, “Determination of unstable limit cycles in chaotic systems by method of unrestricted harmonic balance”, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **46**:6 (1991), 499–502.
- [11] A. C. J. Luo, J. Huang, “Approximate solutions of periodic motions in nonlinear systems via a generalized harmonic balance”, *Journal of Vibration and Control*, **18**:11 (2011), 1661–1674.
- [12] A. C. J. Luo, *Toward Analytical Chaos in Nonlinear Systems*, John Wiley & Sons, Chichester, 2014.
- [13] A. C. J. Luo, S. Guo, “Analytical solutions of period-1 to period-2 motions in a periodically diffused brusselator”, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **13**:9 (2018), 090912.
- [14] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Dover Publications, New York, 1962.

**Информация об авторах**

**Пчелинцев Александр Николаевич**, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика». Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4136-1227>

**Полуновский Андрей Андреевич**, студент. Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apap2009@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6557-3649>

**Юханова Ирина Юрьевна**, магистр. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: irina\_yu\_10@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8339-0459>

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Пчелинцев Александр Николаевич  
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.01.2019 г.  
Поступила после рецензирования 19.03.2019 г.  
Принята к публикации 20.05.2019 г.

**Information about the authors**

**Alexander N. Pchelintsev**, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Higher Mathematics Department. Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-4136-1227>

**Andrey A. Polunovskiy**, Student. Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation. E-mail: apap2009@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-6557-3649>

**Irina Yu. Yukhanova**, Master. Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: irina\_yu\_10@mail.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8339-0459>

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Alexander N. Pchelintsev  
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Received 21 January 2019  
Reviewed 19 March 2019  
Accepted for press 20 May 2019

© Старикова О.А., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210

УДК 512.7

## Перечисление проективно конгруэнтных симметричных матриц

Ольга Александровна СТАРИКОВА

ФГБОУ ВО «Северо-Восточный государственный университет»

685000, Российская Федерация, г. Магадан, ул. Портовая, 13

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0507-5493>, e-mail: [star-olga@yandex.ru](mailto:star-olga@yandex.ru)

## Projective congruent symmetric matrices enumeration

Olga A. STARIKOVA

North-Eastern State University

13 Portovaja St., Magadan 685000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0507-5493>, e-mail: [star-olga@yandex.ru](mailto:star-olga@yandex.ru)

**Аннотация.** Исследуются проективные пространства над локальным кольцом  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$ . Квадратичные формы и соответствующие им симметричные матрицы  $A$  и  $B$  проективно конгруэнтны, если существуют  $k \in R^*$  и  $U \in GL(n, R)$  такие, что  $kA = UBU^T$ . В случае  $k = 1$  квадратичные формы (соответственно, симметричные матрицы) называем конгруэнтными. Решение задачи перечисления конгруэнтных и проективно конгруэнтных классов квадратичных форм основано на выявлении (единственного) нормального вида соответствующих им симметричных матриц и тесно связана с теорией схем квадратичных форм. Над локальным кольцом  $R$ , удовлетворяющим условиям  $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$  и  $D(1, 1) = D(1, p) = \{1, p\}$ ,  $D(1, -1) = D(1, -p) = \{1, -1, p, -p\}$ , выявлен (единственный) нормальный вид конгруэнтных симметричных матриц. Для случая, когда максимальный идеал является нильпотентным, найдено число классов конгруэнтных и проективно конгруэнтных симметричных матриц.

**Ключевые слова:** проективное пространство; локальное кольцо; проективная конгруэнтность; проективная эквивалентность

**Для цитирования:** Старикова О.А. Перечисление проективно конгруэнтных симметричных матриц // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 204–210. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210.

**Abstract.** Projective spaces over local ring  $R = 2R$  with principal maximal ideal  $J$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$  have been investigated. Quadratic forms and corresponding symmetric matrices  $A$  and  $B$  are projectively congruent if  $kA = UBU^T$  for a matrix  $U \in GL(n, R)$  and for some  $k \in R^*$ . In the case of  $k = 1$  quadratic forms (corresponding symmetric matrices) are called congruent. The problem of enumerating congruent and projective congruent quadratic forms is based on the identification of the (unique) normal form of the corresponding symmetric matrices and is related to the theory of quadratic form schemes. Over the local ring  $R$  on conditions  $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$  and  $D(1, 1) = D(1, p) = \{1, p\}$ ,

$D(1, -1) = D(1, -p) = \{1, -1, p, -p\}$  (unique) normal form of congruent symmetric matrices over ring  $R$  is detected. Quantities of congruent and projective congruent symmetric matrix classes is found when maximal ideal is nilpotent.

**Keywords:** projective spaces; local rings; projective congruence; projective equivalence

**For citation:** Starikova O.A. Perechislenie proektivno kongruentnyh simmetrichnyh matric [Projective congruent symmetric matrices enumeration]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 204–210. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-204-210. (In Russian, Abstr. in Engl.)

### Введение

Выявление (единственного) нормального вида конгруэнтных симметричных матриц существенно зависит от схемы квадратичных форм основного кольца. Над локальным кольцом  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$  и схемой квадратичных форм порядка 2 нормальный вид относительно конгруэнтности квадратичных форм (соответственно, симметричных матриц) выявлен в [1], там же найдено число классов проективно конгруэнтных квадратичных форм при условии нильпотентности максимального идеала (см. также [2]), число классов проективно эквивалентных квадратик найдено в [3].

Для локального кольца  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$  и схемой квадратичных форм порядка 4, изоморфной  $L_{1,1} \times L_{1,0}$  или  $L_{1,0} \times L_{1,0}$ , нормальный вид, а также, при условии нильпотентности  $J$ , число классов проективно конгруэнтных и проективно эквивалентных квадратик выявлено в [3].

В настоящей работе решается задача перечисления классов конгруэнтных и проективно конгруэнтных симметричных матриц над локальным кольцом  $R = 2R$  с условием  $|R^* : R^{*2}| = 4$  и схемой квадратичных форм, изоморфной  $L_1 \times L_{1,1}$ .

### 1. Основные понятия

Пусть  $R = 2R$  — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей,  $R^*$  — мультипликативная группа кольца,  $R^{*2}$  — подгруппа квадратов. Проективное пространство  $RP_{n-1}$  над  $R$  определено в [2].

Квадратичные формы и соответствующие им симметричные матрицы  $A$  и  $B$  называем проективно конгруэнтными, если существуют  $k \in R^*$  и  $U \in GL(n, R)$  такие, что  $kA = UBU^T$ . В случае  $k = 1$  квадратичные формы (соответственно, симметричные матрицы) называем конгруэнтными. Квадрикой проективного пространства  $RP_{n-1}$  называем проективное многообразие его точек  $R^*v$ , определенное уравнением  $vAv^T = 0$  с ненулевой симметричной  $(n \times n)$ -матрицей  $A$  над  $R$ . Квадрики, переводимые друг в друга проективностью, называются проективно эквивалентными [3].

Решение задачи перечисления конгруэнтных и проективно конгруэнтных классов квадратичных форм основано на выявлении (единственного) нормального вида соответствующих им симметричных матриц и связано с теорией схем квадратичных форм.

Для  $a = rR^{*2}$  и  $b = sR^{*2}$  положим  $D(a, b) = \{tR^{*2} | t \in (rR^{*2} + sR^{*2}) \cap R^*\}$ . Группа  $G = R^*/R^{*2}$  вместе с отображением  $a \mapsto D(1, a)$  и элементом  $-1$  называют схемой квадратичных форм  $R$ . При условии  $|R^* : R^{*2}| = 2$  существует три схемы квадратичных форм, обозначаемые  $L_1$ ,  $L_{1,1}$  и  $L_{1,0}$ . Для схем квадратичных форм определены операции группового произведения и группового расширения [4]. Схемы квадратичных форм порядка 4 могут быть представлены как групповые произведения  $L_1 \times L_{1,1}$ ,  $L_{1,1} \times L_{1,0}$ ,  $L_{1,0} \times L_{1,0}$  и как групповые расширения  $L_1[t]$ ,  $L_{1,1}[t]$ ,  $L_{1,0}[t]$ .

## 2. Основные результаты

Пусть  $R = 2R$  — локальное кольцо с главным максимальным идеалом  $J = \langle \varepsilon \rangle$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$ ,  $|R^* : R^{*2}| = 4$ . Пусть  $R^*/R^{*2} = \{1, -1, p, -p\}$  и  $D(1, 1) = D(1, p) = \{1, p\}$ ,  $D(1, -1) = D(1, -p) = \{1, -1, p, -p\}$ . Тогда схема квадратичных форм локального кольца  $R$  изоморфна  $L_1 \times L_{1,1}$ .

**Теорема 2.1.** *Всякая ненулевая симметричная матрица над локальным кольцом  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J = \langle \varepsilon \rangle$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$ ,  $|R^* : R^{*2}| = 4$ , схема квадратичных форм которого изоморфна  $L_1 \times L_{1,1}$ , конгруэнтна в точности одной матрице вида  $\text{diag}(A_1 \varepsilon^{i_1}, \dots, A_q \varepsilon^{i_q}, 0)$ ,  $0 \leq i_1 < \dots < i_q$ ,  $\varepsilon^{i_q} \neq 0$ , где для  $j = 1, \dots, q$  имеем  $A_j = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, \beta)$ , причем для любой матрицы  $A_j$  выполняется условие: либо  $\beta \in \{1, p\}$  и  $n_{-1} = 0$ , либо  $\beta \in \{-1, -p\}$ .*

**Доказательство.** В случае, когда  $R = 2R$  есть локальное кольцо с главным максимальным идеалом  $J = \langle \varepsilon \rangle$ ,  $1 + J \subseteq R^{*2}$ , всякая ненулевая симметричная матрица над  $R$  конгруэнтна диагональной матрице

$$\text{diag}(k_1 \varepsilon^{t_1}, \dots, k_r \varepsilon^{t_r}, 0, \dots, 0)$$

с однозначно определенными показателями  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_r$ ,  $\varepsilon^{t_r} \neq 0$  и  $k_i \in R^*/R^{*2}$  [1].

Таким образом, всякая невырожденная симметричная  $(n \times n)$ -матрица конгруэнтна по

модулю  $J$  матрице вида  $\text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, \underbrace{p, \dots, p}_{n_p}, \underbrace{-p, \dots, -p}_{n_{-p}} \right)$ ,  $n_1 + n_{-1} + n_p + n_{-p} = n$ . Покажем, что эта матрица конгруэнтна матрице вида

$$A = \text{diag} \left( \underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, \beta \right), \quad (2.1)$$

для которой либо  $\beta \in \{1, p\}$  и  $n_{-1} = 0$ , либо  $\beta \in \{-1, -p\}$ .

Согласно [1] матрицы  $\text{diag}(a, ab)$  и  $\text{diag}(ka, kab)$  конгруэнтны тогда и только тогда, когда  $k \in D(1, b)$ . Из условия  $D(1, 1) = \{1, p\}$ , полагая  $k = p$ ,  $a = \pm 1$ ,  $b = 1$ , получаем конгруэнтность матриц  $\text{diag}(1, 1)$  и  $\text{diag}(p, p)$ , а также матриц  $\text{diag}(-1, -1)$

и  $\text{diag}(-p, -p)$ . При  $k = p$ ,  $a = 1$ ,  $b = -1$  из условия  $D(1, -1) = \{1, -1, p, -p\}$  получаем конгруэнтность  $\text{diag}(1, -p)$  и  $\text{diag}(-1, p)$ .

Используя конгруэнтности  $\text{diag}(1, 1)$  и  $\text{diag}(p, p)$ ,  $\text{diag}(-1, -1)$  и  $\text{diag}(-p, -p)$ ,  $\text{diag}(1, -p)$  и  $\text{diag}(-1, p)$  получаем матрицу, на главной диагонали которой не более одного элемента, принадлежащего множеству  $\{p, -p\}$ . В случае, если получена матрица вида  $\text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, p\right)$  и  $n_{-1} > 0$ , конгруэнтность  $\text{diag}(-1, p)$  и  $\text{diag}(1, -p)$  завершает приведение матрицы к виду (2.1).

Покажем попарную не конгруэнтность  $(n \times n)$ -матриц вида (2.1). При  $n = 1$  утверждение очевидно. В случае  $n = 2$  получаем шесть матриц, три из которых  $\text{diag}(1, 1)$ ,  $\text{diag}(1, -1)$  и  $\text{diag}(-1, -1)$  имеют определитель  $\pm 1$ , и три  $\text{diag}(1, p)$ ,  $\text{diag}(1, -p)$  и  $\text{diag}(-1, -p)$  имеют определитель  $\pm p$ . Матрицы  $\text{diag}(1, 1)$ ,  $\text{diag}(1, -1)$  и  $\text{diag}(-1, -1)$  попарно не конгруэнтны в силу условия  $D(1, 1) = \{1, p\}$ , попарная не конгруэнтность матриц  $\text{diag}(1, p)$ ,  $\text{diag}(1, -p)$  и  $\text{diag}(-1, -p)$  вытекает из условия  $D(1, p) = \{1, p\}$ .

Предположим, что для всех  $n < r$  любые две различные  $(n \times n)$ -матрицы вида (2.1) не конгруэнтны. Рассмотрим матрицы ранга  $r$ . Заметим, что определители конгруэнтных матриц совпадают по модулю  $R^{*2}$ . Поэтому матрица вида (2.1) с элементом  $\beta \in \{1, -1\}$  не конгруэнтна матрице при условии  $\beta \in \{p, -p\}$ . Пусть  $A_1 = \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1^1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}^1}\right)$ ,  $A_2 = \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1^2}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}^2}\right)$  и  $n_1^1 \neq n_1^2$ . Докажем, что  $A_1$  и  $A_2$  не конгруэнтны. Обозначим  $n_1 = \min\{n_1^1; n_1^2\}$ ,  $n_{-1} = \min\{n_{-1}^1; n_{-1}^2\}$ .

Если  $n_1 + n_{-1} > 0$ , то для матрицы  $A = \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}\right)$  получаем  $A_i = A \oplus D_i$ ,  $i = 1, 2$ , причем  $D_i = \text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1^i - n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}^i - n_{-1}}\right)$ , ранг  $D_i$  меньше  $r$  и  $D_1 \neq D_2$ . Из конгруэнтности матриц  $A_1$  и  $A_2$  вытекает конгруэнтность матриц  $D_1$  и  $D_2$ , что противоречит нашему предположению. Если  $n_1 + n_{-1} = 0$ , то получаем матрицы  $E$  и  $-E$ , не конгруэнтность которых следует из условия  $D(1, 1) = \{1, p\}$ .

Аналогично, для матриц с определителем  $\pm p$  достаточно показать не конгруэнтность матриц  $\text{diag}(1, \dots, 1, p)$  и  $\text{diag}(-1, \dots, -1, -p)$ . Предположение конгруэнтности этих матриц противоречит условию  $D(1, 1) = D(1, p) = \{1, p\}$ .  $\square$

Пусть  $\Omega_q(m)$  — совокупность упорядоченных наборов  $(m_1, \dots, m_q)$  целых чисел  $m_j > 0$  с суммой  $m_1 + \dots + m_q = m$ .

**Теорема 2.2.** Число  $K$  классов конгруэнтных ненулевых симметричных  $(n \times n)$ -матриц над локальным кольцом  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J = \langle \varepsilon \rangle$  степени нильпотентности  $s$ , схема квадратичных форм которого изоморфна  $L_1 \times L_{1,1}$ ,

$$\text{равно } \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \sum_{(m_1, \dots, m_q) \in \Omega_q(m)} \prod_{j=1}^q 2(m_j + 1).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Их условия нильпотентности максимального идеала  $J$  получаем  $1 + J \subseteq R^{*2}$ . Рассмотрим матрицу вида  $\text{diag}(A_1 \varepsilon^{i_1}, \dots, A_q \varepsilon^{i_q}, O)$ ,  $0 \leq i_1 < \dots < i_q$ ,  $\varepsilon^{i_q} \neq 0$ , где  $A_j = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, \beta)$  для  $j = 1, \dots, q$ , причем для лю-

бой матрицы  $A_j$  выполняется условие: либо  $\beta \in \{1, p\}$  и  $n_{-1} = 0$ , либо  $\beta \in \{-1, -p\}$ . Обозначим число ненулевых элементов главной диагонали матрицы  $A$  через  $m$ , ранги невырожденных матриц  $A_1, \dots, A_q$  обозначим  $m_1, \dots, m_q$  соответственно. Получаем  $m_1 + \dots + m_q = m$  и  $m_j > 0$  для всех  $j = 1, \dots, q$ . Пусть  $k(m_j)$  — число попарно не конгруэнтных матриц ранга  $m_j$  вида (2.1). Тогда число  $K$  классов ненулевых симметрич-

ных  $(n \times n)$ -матриц над кольцом  $R$  равно  $\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \sum_{(m_1, \dots, m_q) \in \Omega_q(m)} \prod_{j=1}^q k(m_j)$ .

Осталось показать, что  $k(m_j) = 2(m_j + 1)$ . В случае  $n_{-1} = 0$  получаем две матрицы  $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_j})$  и  $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{m_j}, p)$ . Если  $\beta = -1$ , то получаем  $m_j$  попарно не конгруэнтных матриц вида  $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}})$ , где  $(n_1, n_{-1})$  принимают значения из

множества  $\{(m_j - 1; 1), (m_j - 2; 2), \dots, (0; m_j)\}$ . Аналогично, при  $\beta = -p$  получаем  $m_j$  попарно не конгруэнтных матриц вида  $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, -p)$ , где  $(n_1, n_{-1}) \in \{(m_j - 1; 0), (m_j - 2; 1), \dots, (0; m_j - 1)\}$ . Резюмируя, получаем  $k(m_j) = 2 + 2m_j$ .  $\square$

Пусть

$$K_1 = \sum_{q=1}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{[n/2]}{q}, \quad \tilde{K}_2 = \sum_{m=1}^{[n/2]} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \sum_{(m_1, \dots, m_q) \in \Omega_q(m)} \prod_{j=1}^q 2(2m_j + 1)$$

и  $K$  — число конгруэнтных классов, найденное в теореме 2.2.

**Теорема 2.3.** Число  $N$  классов проективно конгруэнтных ненулевых симметричных  $(n \times n)$ -матриц над локальным кольцом  $R = 2R$  с главным максимальным идеалом  $J = \langle \varepsilon \rangle$  степени нильпотентности  $s$ , схема квадратичных форм которого изоморфна  $L_1 \times L_{1,1}$ , равно  $\frac{1}{4} (K + K_1 + 2\tilde{K}_2)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим классы конгруэнтных симметричных матриц с точностью до проективной конгруэнтности. Заметим, что матрица

$$\text{diag}(A_1 \varepsilon^{i_1}, \dots, A_q \varepsilon^{i_q}, O), \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_q, \quad \varepsilon^{i_q} \neq 0,$$

где  $A_j = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n_1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n_{-1}}, \beta)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , причем для любой матрицы  $A_j$  либо  $\beta \in \{1, p\}$  и  $n_{-1} = 0$ , либо  $\beta \in \{-1, -p\}$ , конгруэнтна матрице  $kA$  ( $k \in R^*$ ) тогда и только тогда, когда для всех  $j = 1, \dots, q$  конгруэнтны  $A_j$  и  $kA_j$ .

Необходимым и достаточным условием конгруэнтности матриц  $A_j$  и  $pA_j$  является четность ранга  $r(A_j)$ . Матрица  $A_j$  конгруэнтна матрице  $-A_j$  тогда и только тогда, когда  $\beta \in \{-1, -p\}$  и  $2n_1 = r(A_j)$ . Заметим, что при выполнении этих условий матрица  $A_j$  конгруэнтна также матрицам  $pA_j$  и  $-pA_j$ .

Класс конгруэнтных матриц с представителем  $diag(A_1\varepsilon^{i_1}, \dots, A_q\varepsilon^{i_q}, O)$  является также классом проективно конгруэнтных матриц, только если для всех  $j = 1, \dots, q$  клетки  $A_j$  удовлетворяют условиям  $\beta \in \{-1, -p\}$  и  $2n_1 = r(A_j)$ . Каждый такой класс характеризуется кортежем показателей  $(i_1, \dots, i_q)$ , набором четных значений  $r(A_j)$  и для каждого  $j$  одним из двух возможных значений  $\beta$ . Следовательно, число  $K_1$  классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности для всех множителей из  $R^*/R^{*2}$ , равно  $K_1 = \sum_{q=1}^s 2^q \binom{s}{q} \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{q}$ .

В случае, когда все клетки  $A_j$  матрицы  $A$  соответственно конгруэнтны  $pA_j$ , но не конгруэнтны  $-A_j$  и  $-pA_j$ , класс проективно конгруэнтных матриц с представителем  $A$  представляет собой два класса конгруэнтных симметричных матриц. Обозначим число таких конгруэнтных классов  $K_2$ . Найдем вначале число  $\tilde{K}_2$  классов конгруэнтных матриц с представителем  $diag(A_1\varepsilon^{i_1}, \dots, A_q\varepsilon^{i_q}, O)$ , все клетки  $A_j$  которого имеют четные ранги. Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 2.2, получаем  $\tilde{K}_2 = \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \sum_{(m_1, \dots, m_q) \in \Omega_q(m)} \prod_{j=1}^q 2(2m_j + 1)$ . Откуда искомое число классов  $K_2 = \tilde{K}_2 - K_1$ .

Пусть  $N$  — число всех классов проективно конгруэнтных матриц,  $K_4$  — число конгруэнтных классов с матрицей  $A$ , не конгруэнтной ни одной из матриц  $-A$ ,  $pA$  и  $-pA$ . Тогда  $N = K_1 + K_2 + K_4$ , причем  $K_1 + 2K_2 + 4K_4 = K$ . Получаем

$$N = \frac{1}{4}(4K_1 + 4K_2 + 4K_4) = \frac{1}{4}(K + 3K_1 + 2K_2) = \frac{1}{4}(K + K_1 + 2\tilde{K}_2).$$

□

### Список литературы

- [1] В. М. Левчук, О. А. Старикова, “Квадратичные формы проективных пространств над кольцами”, *Матем. сборник*, **6** (2006), 97–110.
- [2] О. А. Старикова, А. В. Свистунова, “Перечисление квадратик проективных пространств над локальными кольцами”, *Изв. вузов. Матем.*, **12** (2011), 59–63.
- [3] О. А. Старикова, “Классы проективно эквивалентных квадратик над локальными кольцами”, *Дискрет. матем.*, **25:2** (2013), 91–103.
- [4] M. Marshall, “The elementary type conjecture in quadratic form theory”, *Contemp. Math.*, **344** (2004), 275–293.

### References

- [1] V. M. Levchuk, O. A. Starikova, “Quadratic forms of projective spaces over rings”, *Sb. Math.*, **197**:6 (2006), 887–899.
- [2] O. A. Starikova, A. V. Svistunova, “Enumeration of quadrics of projective spaces over local rings”, *Russ. Math.*, **55**:12 (2011), 48–51.
- [3] O. A. Starikova, “Classes of projectively equivalent quadrics over local rings”, *Discrete Math. Appl.*, **23**:3-4 (2013), 385–398.
- [4] M. Marshall, “The elementary type conjecture in quadratic form theory”, *Contemp. Math.*, **344** (2004), 275–293 (In Russian).

### Информация об авторе

**Старикова Ольга Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Северо-Восточный государственный университет, г. Магадан, Российская Федерация. E-mail: star-olga@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0507-5493>

Поступила в редакцию 26.02.2019 г.

Поступила после рецензирования 25.04.2019 г.

Принята к публикации 20.05.2019 г.

### Information about the author

**Olga A. Starikova**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department. North-Eastern State University, Magadan, the Russian Federation. E-mail: star-olga@yandex.ru  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0507-5493>

Received 26 February 2019

Reviewed 25 April 2019

Accepted for press 20 May 2019

© Фомин В.И., 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217

УДК 517.937

## Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»  
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>, e-mail: [vasiliyfomin@bk.ru](mailto:vasiliyfomin@bk.ru)

## About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators

Vasiliy I. FOMIN

Tambov State Technical University  
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>, e-mail: [vasiliyfomin@bk.ru](mailto:vasiliyfomin@bk.ru)

**Аннотация.** В банаховом пространстве изучается линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ)  $n$ -го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами. Нахождение общего решения ЛНДУ сводится к построению общего решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ). Характеристическое операторное уравнение для ЛОДУ рассматривается в банаховой алгебре комплексных операторов. В общем случае, когда среди корней характеристического операторного уравнения имеются как действительные, так и комплексные операторные корни, указывается  $n$ -параметрическое семейство решений ЛОДУ. При построении этого семейства используются операторные функции  $e^{At}$ ,  $\sin Bt$ ,  $\cos Bt$  действительного аргумента  $t \in [0, \infty)$ . Выясняются условия, при которых данное семейство решений является общим решением ЛОДУ. В случае, когда характеристическое операторное уравнение имеет простые действительные операторные корни и простые чисто мнимые операторные корни, указан конкретный вид таких условий. В частности, эти корни должны коммутировать с операторными коэффициентами ЛОДУ. Кроме того, они должны коммутировать между собой. При доказательстве соответствующего утверждения применяется операторно-векторное правило Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве

**Ключевые слова:** комплексный оператор; действительный оператор; чисто мнимый оператор; характеристический операторный полином; семейство решений; задача Коши; операторный определитель

**Для цитирования:** Фомин В.И. Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 211–217. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217.

**Abstract.** A linear inhomogeneous differential equation (LIDE) of the  $n$ th order with constant bounded operator coefficients is studied in Banach space. Finding a general solution of LIDE is reduced to the construction of a general solution to the corresponding linear homogeneous differential equation (LHDE). Characteristic operator equation for LHDE is considered in the Banach algebra of complex operators. In the general case, when both real and complex operator roots are among the roots of the characteristic operator equation, the  $n$ -parametric family of solutions to LHDE is indicated. Operator functions  $e^{At}$ ,  $\sin Bt$ ,  $\cos Bt$  of real argument  $t \in [0, \infty)$  are used when building this family. The conditions under which this family of solutions form a general solution to LHDE are clarified. In the case when the characteristic operator equation has simple real operator roots and simple pure imaginary operator roots, a specific form of such conditions is indicated. In particular, these roots must commute with LHDE operator coefficients. In addition, they must commute with each other. In proving the corresponding assertion, the Cramer operator-vector rule for solving systems of linear vector equations in a Banach space is applied

**Keywords:** complex operator; real operator; pure imaginary operator; characteristic operator polynomial; family of solutions; Cauchy problem; operator determinant

**For citation:** Fomin V.I. Ob obshchem reshenii linejnogo odnorodnogo differencial'nogo uravneniya v banahovom prostranstve v sluchae kompleksnyh harakteristicheskikh operatorov [About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 211–217. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-211-217. (In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

В банаховом пространстве  $E$  рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + H_1 y^{(n-1)} + \dots + H_{n-1} y' + H_n y = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (0.1)$$

где  $H_i \in L(E)$ ,  $i = \overline{1; n}$ ;  $L(E)$  — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из  $E$  в  $E$ ;  $f(t) \in C([0, \infty); E)$ ;  $C([0, \infty)E)$  — нормированное пространство непрерывных функций, действующих из  $[0, \infty)$  в  $E$ . Известно [1], что общее решение уравнения (0.1) имеет вид  $y = y_{0,0} + y_*$ , где  $y_{0,0}$  — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y^{(n)} + H_1 y^{(n-1)} + \dots + H_{n-1} y' + H_n y = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (0.2)$$

$y_*$  — частное решение неоднородного уравнения (0.1). Задача о нахождении частного решения  $y_*$  решена: в случае, когда правая часть  $f(t)$  уравнения (0.1) имеет общий вид,  $y_*$  найдено методом вариации произвольных постоянных в работе [1]; в случае,

когда  $f(t)$  имеет специальный вид,  $y_*$  получено методом неопределённых коэффициентов в работе [2]. Структура общего решения уравнения (0.2) определяется видом его характеристических операторов, т. е. корней характеристического операторного уравнения

$$P(Z) = O, \tag{0.3}$$

где  $P(Z) = Z^n + H_1 Z^{n-1} + \dots + H_{n-1} Z + H_n$  — характеристический операторный полином уравнения (0.2). Уравнение (0.3) рассматривается в банаховой алгебре комплексных операторов [3]

$$C_{L(E)} = [L(E)]^2 = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\},$$

которую удобно представить в виде

$$C_{L(E)} = \{Z = A + IB | A, B \in L(E)\},$$

где  $I = (O, I)$  — мнимая операторная единица. В случае  $B = O$  операторы вида  $Z = A$  называются действительными. В случае  $A = O, B \neq O$  операторы вида  $Z = IB$  называются чисто мнимыми. Общее решение  $y_{0,0}$  уравнения (0.2) найдено в работе [1] в случае, когда полином  $P(Z)$  имеет  $n$  различных действительных корней  $Z_1 = \Lambda_1, \dots, Z_n = \Lambda_n$ ; в работе [4] в случае, когда  $P(Z)$  имеет  $p$  действительных корней  $Z_1 = \Lambda_1, \dots, Z_p = \Lambda_p$  с кратностями соответственно  $r_1, \dots, r_p$  ( $r_1 + \dots + r_p = n$ ). В настоящей работе изучается структура общего решения уравнения (0.2) в случае, когда среди корней характеристического операторного полинома  $P(Z)$  имеются комплексные корни с мнимой частью, отличной от нуля.

### 1. Основные понятия

Пусть характеристический операторный полином  $P(Z)$  уравнения (0.2) имеет  $p$  действительных операторных корней  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$  с кратностями соответственно  $r_1, \dots, r_p$  и  $q$  пар комплексно сопряжённых операторных корней  $Z_1 = A_1 + IB_1, \bar{Z}_1 = A_1 - IB_1, \dots, Z_q = A_q + IB_q, \bar{Z}_q = A_q - IB_q$  с кратностями соответственно  $s_1, \dots, s_q$ , причём  $r_1 + \dots + r_p + 2(s_1 + \dots + s_q) = n$ .

Известно [5], что в этом случае при выполнении условия

$$H_k \Lambda_i = \Lambda_i H_k, \quad H_k Z_j = Z_j H_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q, \tag{1.1}$$

уравнение (0.2) имеет  $n$ -параметрическое семейство решений

$$y = \sum_{i=1}^p e^{\Lambda_i t} \sum_{k=1}^{r_i} t^{k-1} w_{ik} + \sum_{j=1}^q e^{A_j t} \cos B_j t \sum_{m=1}^{s_j} t^{m-1} x_{jm} + \sum_{j=1}^q e^{A_j t} \sin B_j t \sum_{m=1}^{s_j} t^{m-1} z_{jm}, \tag{1.2}$$

где  $w_{ik}, x_{jm}, z_{jm}$  ( $1 \leq i \leq p, 1 \leq k \leq r_i, 1 \leq j \leq q, 1 \leq m \leq s_j$ ) — произвольные элементы из  $E$  (свободные параметры).

Семейство решений (1.2) уравнения (0.2) будет общим решением этого уравнения, если при любом фиксированном наборе начальных значений  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  решение задачи Коши для уравнения (0.2) с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.3)$$

принадлежит семейству (1.2).

## 2. Основные результаты

Выяснение условий, при которых формула (1.2) задаёт  $y_{0,0}$ , в общем случае затруднительно из-за громоздких выражений для  $y^{(m)}$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ). Ограничимся рассмотрением следующего простейшего случая.

Пусть характеристический операторный полином  $P(Z)$  уравнения (0.2) имеет  $p$  простых действительных корней  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$  и  $q$  пар простых чисто мнимых сопряжённых корней  $Z_1 = iB_1, \bar{Z}_1 = -iB_1, \dots, Z_q = iB_q, \bar{Z}_q = -iB_q$ , при этом  $p + 2q = n$ . Пусть выполняется условие (1.1), т. е.

$$H_k \Lambda_i = \Lambda_i H_k, \quad H_k B_j = B_j H_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (2.1)$$

Тогда, согласно формуле (1.2), уравнение (0.2) имеет  $n$ -параметрическое семейство решений

$$y = \sum_{i=1}^p e^{\Lambda_i t} w_i + \sum_{j=1}^q (\cos B_j t) x_j + \sum_{j=1}^q (\sin B_j t) z_j, \quad (2.2)$$

где  $w_i, x_j, z_j$  ( $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$ ) — произвольные элементы из  $E$  (свободные параметры).

Выясним, при каких условиях решение задачи Коши (0.2), (1.3) при любом фиксированном наборе начальных значений  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  принадлежит семейству решений (2.2). Для любого  $m \in N$

$$y^{(m)} = \sum_{i=1}^p (e^{\Lambda_i t} w_i)^{(m)} + \sum_{j=1}^q [(\cos B_j t) x_j]^{(m)} + \sum_{j=1}^q [(\sin B_j t) z_j]^{(m)}. \quad (2.3)$$

При  $A, B \in L(E)$  для операторных функций

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}; \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}; \quad \sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1} t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (2.4)$$

справедливы формулы

$$(e^{At})' = Ae^{At}, \quad (\cos Bt)' = -B \sin Bt, \quad (\sin Bt)' = B \cos Bt. \quad (2.5)$$

В силу равенств (2.5)

$$(e^{At})^{(m)} = A^m e^{At}; \quad (2.6)$$



Пусть выполняются следующие условия

$$\Lambda_i \Lambda_s = \Lambda_s \Lambda_i, \quad 1 \leq i, s \leq p; \quad (2.14)$$

$$B_j B_k = B_k B_j, \quad 1 \leq j, k \leq q, \quad (2.15)$$

$$\Lambda_i B_j = B_j \Lambda_i, \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq q. \quad (2.16)$$

Тогда операторные коэффициенты системы уравнений (2.12) коммутируют между собой. Следовательно, можно рассмотреть операторный определитель системы (2.12), определяемый по известной формуле из [1]: для  $A_{i,j} \in L(E)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , удовлетворяющих условию  $A_{ij} A_{km} = A_{km} A_{ij}$ ,  $\forall 1 \leq i, j, k, m \leq n$ ,

$$\Delta = \det(A_{ij})_{i,j=1}^n = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in P_n} (-1)^{\varphi(j_1, j_2, \dots, j_n)} A_{1j_1} A_{2j_2}, \dots, A_{nj_n}; \quad (2.17)$$

где  $P_n$  — множество перестановок индексов  $1, 2, \dots, n$ ,  $\varphi(j_1, j_2, \dots, j_n)$  — число инверсий в перестановке  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ . Пусть операторный определитель  $\Delta$  системы уравнений (2.12) имеет ограниченный обратный:

$$\exists \Delta^{-1} \in L(E). \quad (2.18)$$

Тогда система (2.12) имеет единственное решение, которое находится по операторно-векторному правилу Крамера решения систем линейных векторных уравнений в банаховом пространстве [1]. Таким образом, решение задачи Коши (0.2), (1.3) задаётся формулой (2.2) при значениях параметров, равных компонентам решения системы уравнений (2.12). Итак, доказано следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть характеристический полином  $P(Z)$  уравнения (0.2) имеет  $p$  простых действительных корней  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$  и  $q$  пар простых чисто мнимых сопряжённых корней  $Z_1 = iB_1, \bar{Z}_1 = -iB_1, \dots, Z_q = iB_q, \bar{Z}_q = -iB_q$ , при этом  $p + 2q = n$ . Тогда при выполнении условий (2.1), (2.14)–(2.18) общее решение уравнения (0.2) в случае нечётности  $n$  задаётся формулой (2.2).

Результаты данной работы анонсированы в [6].

### Список литературы

- [1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660.
- [2] В. И. Фомин, “О линейном дифференциальном уравнении  $n$ -го порядка в банаховом пространстве со специальной правой частью”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:10 (2009), 1518–1520.
- [3] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: [10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823).

- [4] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713.
- [5] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка в банаховом пространстве”, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, **6**:42 (2018), 382–384.
- [6] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Современные методы теории функций и смежные проблемы*, Воронежская зимняя математическая школа (Воронеж, 28 января – 2 февраля 2019), Материалы Международной конференции, Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2019, 271–273.

### References

- [1] V. I. Fomin, “On the general solution of a linear  $n$  th-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.
- [2] V. I. Fomin, “On the  $n$  th-order linear differential equation in a Banach space with special right part”, *Differential Equations*, **45**:10 (2009), 1554–1556.
- [3] V. I. Fomin, “About a complex operator Banach algebra”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: [10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823](https://doi.org/10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823) (In Russian).
- [4] V. I. Fomin, “On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an  $n$  th-order linear homogeneous differential equation in a Banach space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.
- [5] V. I. Fomin, “About a solutions family of a linear homogeneous differential equation of the  $n$ -th order in a Banach space”, *Actual Areas of Research of the 21th Century: Theory and Practice*, **6**:42 (2018), 382–384 (In Russian).
- [6] V. I. Fomin, “About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Modern Methods of the Theory of Functions and Related Problems*, Voronezh Winter Mathematical School (Voronezh, January 28 – February 2, 2019), Materials of the International Conference, VSU Publishing House, Voronezh, 2019, 271–273 (In Russian).

### Информация об авторе

**Фомин Василий Ильич**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: [vasiliyfomin@bk.ru](mailto:vasiliyfomin@bk.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Поступила в редакцию 25.02.2019 г.  
 Поступила после рецензирования 22.04.2019 г.  
 Принята к публикации 20.05.2019 г.

### Information about the author

**Vasiliy I. Fomin**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Technical Mechanics and Machine Part Department. Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: [vasiliyfomin@bk.ru](mailto:vasiliyfomin@bk.ru)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Received 25 February 2019  
 Reviewed 22 April 2019  
 Accepted for press 20 May 2019

© A. Khellaf, S. Benarab, H. Guebbai, W. Merchela, 2019

DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-218-234

УДК 517.984

## A class of strongly stable approximation for unbounded operators

Ammar KHELLAF<sup>1</sup>, Sarra BENARAB<sup>2</sup>, Hamza GUEBBAI<sup>1</sup>, Wassim MERCHELA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>) Université 8 Mai 1945

B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5282-7593>,

e-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>,

e-mail: guebaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

<sup>2</sup>) Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8849-8848>, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>, e-mail: merchela.wassim@gmail.com

## Класс сильно устойчивой аппроксимации неограниченных операторов

Аммар ХЕЛЛАФ<sup>1</sup>, Сарра БЕНАРАБ<sup>2</sup>, Хамза ГЕББАЙ<sup>1</sup>, Вассим МЕРЧЕЛА<sup>2</sup>

<sup>1</sup>) Университет 8 Мая 1945

24000, Алжир, г. Гельма, п.я. 401

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5282-7593>,

e-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>,

e-mail: guebaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

<sup>2</sup>) ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8849-8848>, e-mail: benarab.sarraa@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>, e-mail: merchela.wassim@gmail.com.

**Abstract.** We derive new sufficient conditions to solve the spectral pollution problem by using the generalized spectrum method. This problem arises in the spectral approximation when the approximate matrix may possess eigenvalues which are unrelated to any spectral properties of the original unbounded operator. We develop the theoretical background of the generalized spectrum method as well as illustrate its effectiveness with the spectral pollution. As a numerical application, we will treat the Schrödinger's operator where the discretization process based upon the Kantorovich's projection.

**Keywords:** eigenvalue approximation; spectral pollution; generalized spectrum approximation, Schrödinger operator

**For citation:** Khellaf A., Benarab S., Guebbai H., Merchela W. A class of strongly stable approximation for unbounded operators // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2019, vol. 24, no. 126, pp. 218–234. DOI: 10.20310/1810-0198-2019-24-126-218-234.

**Аннотация.** С использованием метода обобщенного спектра получены новые достаточные условия решения проблемы спектрального загрязнения. Эта проблема, возникающая в спектральном приближении, вызвана тем, что приближенная матрица может иметь собственные значения, которые не связаны с какими-либо спектральными свойствами исходного неограниченного оператора. Мы разрабатываем теоретические основы метода обобщенного спектра, а также иллюстрируем его эффективность при наличии спектрального загрязнения. В качестве численного приложения рассматривается оператор Шрёдингера, а процесс дискретизации этого оператора основывается на проекции Канторовича.

**Ключевые слова:** приближение собственных значений; спектральное загрязнение; аппроксимация обобщенного спектра; оператор Шрёдингера

**Для цитирования:** Хеллаф А., Бенараб С., Геббай Х., Мерчела В. Класс сильно устойчивой аппроксимации неограниченных операторов // *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*. Тамбов, 2019. Т. 24. № 126. С. 218–234. DOI 10.20310/1810-0198-2019-24-126-218-234. (In Engl., Abstr. in Russian)

## 1. Introduction

Let  $(H, D(H))$  be a self-adjoint unbounded operator on a Hilbert space  $\mathcal{H}$ . With the purpose of finding the spectrum set  $sp(H)$  of the operator  $H$  by using numerical approach, the conventional methods used are the projection methods (see e.g. [1] and [2]). Precisely, let  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be a sequence of orthogonal projections  $P_k : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_k$ , where the closed set  $\mathcal{L}_k$  is a subspace of  $D(H)$ . In the theory of spectral approximation, we seek whether or not  $\lim_{k \rightarrow \infty} sp(P_k H P_k) = sp(H)$ . Generally, the result is negative, where for  $k$  large enough, the set  $sp(H_k)$  may contain points that do not belong to the set  $sp(H)$ .

The weakness of projection method is well known in numerical analysis as the spectral pollution problem, this is an important problem in several areas in the field of applied mathematics (see e.g. [3], [4] and [5]).

In this paper, we use an alternative method, the *generalized spectral method*, which has been introduced in [6]. This new method is based on the concept of the *generalized spectrum* (see [7] and [8]).

Let  $T$  and  $S$  be two bounded linear operators defined on a Banach space  $\mathcal{X}$ , we define the *generalized resolvent*,

$$re(T, S) = \{z \in \mathbb{C} : (T - zS) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \text{ is bijective} \}.$$

The complementary set of the *generalized resolvent* set is the *generalized spectrum*, denoted  $sp(T, S)$ . We say that  $\lambda$  is a *generalized eigenvalue* of the couple  $(T, S)$  if there exists  $u \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  such that

$$Tu = \lambda Su.$$

The subspace  $\text{Ker}(T - \lambda S)$  is called the *generalized spectral subspace* corresponding to  $\lambda$ .

The space of all bounded linear operator defined on the Banach space  $\mathcal{X}$  is denoted by  $BL(\mathcal{X})$ . We consider now an unbounded operator  $(A, D(A))$  defined on  $\mathcal{X}$ , we recall that the resolvent set of  $A$  is given by

$$re(A) = \{z \in \mathbb{C} : (A - zI) : D(A) \rightarrow \mathcal{X}, \text{ is bejective and } (A - zI)^{-1} \in BL(\mathcal{X})\},$$

and the spectrum set of  $A$  is  $sp(A) = \mathbb{C} \setminus re(A)$ .

In this work, under the assumption  $re(A) \neq \emptyset$ , we prove that each spectral problem associated to  $A$  has an equivalent *generalized spectral problem* which means that there exist two bounded operators  $T$  and  $S$  defined on  $\mathcal{X}$ , satisfying  $sp(T, S) = sp(A)$ . Furthermore, if  $\lambda$  is an eigenvalue of  $A$ , then  $\lambda$  is a *generalized eigenvalue* of the couple  $(T, S)$  and

$$\text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(T - \lambda S). \quad (1.1)$$

Through the numerical approximation of the bounded operators  $T$  and  $S$  by sequences of bounded operators  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  defined on  $\mathcal{X}$ , where they converge in an appropriate sense to  $T$  and  $S$ , we prove that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} sp(T_k, S_k) = sp(T, S).$$

The limit here is understood as a combination of the following Property U and Property L, where they are naturally extended from the classical case with  $S = I$  (see [9]).

*Property U:* if  $\lambda_k \in sp(T_k, S_k)$  and  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , then  $\lambda \in sp(T, S)$ .

*Property L:* if  $\lambda \in sp(T, S)$ , then there exists  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  such that  $\lambda_k \in sp(T_k, S_k)$  and  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ .

We organize this paper as follows: throughout section 2, we construct the theoretical foundations of the generalized spectral method. This theory is a generalization of the classical case when  $S = I$  (see [9]). In section 3, we prove that the Property U and Property L hold under appropriate convergence of  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  to  $T$  and  $S$  respectively. Finally, a numerical application is given for the case of Schrödinger's operator, where our numerical results show the coherence and the effectiveness of the generalized spectrum method (see [11]).

## 2. Generalized spectrum

Let  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  be a Banach space. The space  $BL(\mathcal{X})$  is the set of all bounded linear operators on  $\mathcal{X}$  equipped with the subordinated operator norm,

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathcal{X}, \|x\| = 1\}, \quad A \in BL(\mathcal{X}).$$

Let  $T$  and  $S$  be two operators in  $BL(\mathcal{X})$ , for  $z \in re(T, S)$ , we set

$$R(z, T, S) = (T - zS)^{-1}$$

as the generalized resolvent operator. Let  $\lambda \in sp(T, S)$  be a generalized eigenvalue, we say that  $\lambda$  has a finite algebraic multiplicity if

$$\dim \text{Ker}(T - \lambda S) < \infty.$$

We remark that, if the operator  $S$  is invertible, then

$$sp(T, S) = sp(S^{-1}T),$$

but if  $S^{-1}$  does not exist, the generalized spectrum set can be a bounded set, or the whole  $\mathbb{C}$ , or an empty set.

The next three results are a generalization of a classical case when  $S = I$ . The proofs are provided in [6].

**Theorem 2.1.** *Let  $\lambda \in re(T, S)$  and  $\mu \in \mathbb{C}$ , where  $|\lambda - \mu| < \|R(\lambda, T, S)S\|^{-1}$ . Then  $\mu \in re(T, S)$ .*

**Corollary 2.1.** *The set  $sp(T, S)$  is closed in  $\mathbb{C}$ .*

**Theorem 2.2.** *The function  $R(\cdot, T, S) : re(T, S) \rightarrow BL(\mathcal{X})$  is analytic, and its derivative is given by  $R(\cdot, T, S)SR(\cdot, T, S)$ .*

We consider now an unbounded operator  $A$  with domain  $D(A) \subset \mathcal{X}$ . The following theorem shows that every unbounded operator allows a pair of two bounded operators in  $BL(\mathcal{X})$  which expresses it in the terms of the generalized spectrum.

**Theorem 2.3.** *If  $re(A) \neq \emptyset$ , then there exist  $T, S \in BL(\mathcal{X})$  such that*

$$sp(A) = sp(T, S).$$

*In particular,  $\lambda$  is an eigenvalue for  $A$  if and only if  $\lambda$  is a generalized eigenvalue for the couple  $(T, S)$ . In addition, the equality (1.1) is satisfied.*

**P r o o f.** Let  $\alpha \in re(A)$ . We define  $S, T : \mathcal{X} \rightarrow D(A)$  as follows:

$$S = (A - \alpha I)^{-1}, T = A(A - \alpha I)^{-1}.$$

It is clear that  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ . To show that  $sp(A) = sp(T, S)$ , we prove that  $re(A) = re(T, S)$ . Let  $\lambda \in re(A)$ , i. e. there exists operator  $(A - \lambda I)^{-1} \in BL(\mathcal{X})$ . Then

$$(A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1} = I + (\alpha - \lambda)(A - \alpha I)^{-1} \in BL(\mathcal{X}).$$

So as

$$[(A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}]^{-1} = (A - \alpha I)(A - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \alpha)(A - \lambda I)^{-1} \in BL(\mathcal{X}),$$

we get

$$A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1} \in BL(\mathcal{X}) \Rightarrow (T - \lambda S)^{-1} \in BL(\mathcal{X}).$$

Thus, it is proved that  $\lambda \in re(T, S)$ .

Inversely, let  $\lambda \in re(T, S)$ . To show that  $(A - \lambda I)^{-1} \in BL(\mathcal{X})$ , we prove that  $(A - \lambda I)$  is bijective. Firstly, check the injectivity. Let  $u \in D(A)$ , using the fact that  $A$  commutes with  $(A - \alpha I)^{-1}$  we have

$$(A - \alpha I)^{-1}Au = A(A - \alpha I)^{-1}u = u + \alpha(A - \alpha I)^{-1}u. \quad (2.2)$$

Taking into consideration the equality (2.2), we find

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)u = 0 &\Rightarrow (A - \alpha I)^{-1}(A - \lambda I)u = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}u = 0 \\ &\Rightarrow [A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1}]u = 0 \Rightarrow (T - \lambda S)u = 0 \Rightarrow u = 0. \end{aligned}$$

Secondly, prove the surjectivity. For all  $y \in \mathcal{X}$  we show that  $(A - \lambda I)x = y$  has a solution  $x \in D(A)$ . Put  $x = (A - \alpha I)^{-1}(T - \lambda S)^{-1}y$ ; it is clear that  $x \in D(A)$  (the fact that  $(A - \alpha I)^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow D(A)$ ), moreover we have

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)(A - \alpha I)^{-1}(T - \lambda S)^{-1}y &= [A(A - \alpha I)^{-1} - \lambda(A - \alpha I)^{-1}](T - \lambda S)^{-1}y \\ &= (T - \lambda S)(T - \lambda S)^{-1}y = y. \end{aligned}$$

Furthermore, we can see, upon the choice of the vector  $x$ , that

$$\|x\| \leq \|(A - \alpha I)^{-1}\| \|(T - \lambda S)^{-1}\| \|y\|,$$

so

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \|(A - \alpha I)^{-1}\| \|(T - \lambda S)^{-1}\|,$$

which implies that  $(A - \lambda I)^{-1} \in BL(\mathcal{X})$  and therefore  $\lambda \in re(A)$ .

Now, we show that the equality (1.1) holds. Let  $\lambda$  be a generalized eigenvalue of the couple  $(T, S)$ , then there exists  $u \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  such that  $Tu = \lambda Su$ , thus

$$\begin{aligned} Tu = \lambda Su &\Rightarrow A(A - \alpha I)^{-1}u = \lambda(A - \alpha I)^{-1}u \\ &\Rightarrow u = (\lambda - \alpha)(A - \alpha I)^{-1}u \Rightarrow u \in D(A). \end{aligned}$$

By applying  $(A - \alpha I)$  on  $Tu = \lambda Su$ , we find that  $Au = \lambda u$ . Inversely, let  $\lambda$  be an eigenvalue of  $A$ , then  $Au = \lambda u$ . So, by applying  $(A - \alpha I)^{-1}$  on  $Au = \lambda u$  and using the fact that  $(A - \alpha I)^{-1}Au = A(A - \alpha I)^{-1}u$  for all  $u \in D(A)$ , we find that  $Tu - \lambda Su = 0$ .  $\square$

We note that the choice of the couple  $(T, S)$  as a function of the resolvent operator of  $A$  is not unique (see the numerical application below).

The next results represent the theoretical background of the generalized spectrum approach.

**Theorem 2.4.** *Let  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , and let  $\lambda$  be a generalized eigenvalue with finite algebraic multiplicity, isolated in  $sp(T, S)$ . We denote by  $\Gamma$  the Cauchy contour separating  $\lambda$  from  $sp(T, S)$ . Then the operator*

$$P = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (T - zS)^{-1} S dz \tag{2.3}$$

defines a projection from  $\mathcal{X}$  to  $\mathcal{X}$ , and we have

$$P\mathcal{X} = Ker(T - \lambda S). \tag{2.4}$$

*P r o o f.* To show that the operator  $P$  given by (2.3) is a projection from  $\mathcal{X}$  to  $\mathcal{X}$ , see the book [8, p. 50]. Now to prove the equality (2.4), firstly we fix  $\alpha \in re(T, S)$ , where for any Cauchy contour  $\Gamma$  associated with  $\lambda$  we assume that  $\alpha \notin \Gamma$ . For  $\mu \in \Gamma$ , we have

$$\mu S - T = (\alpha S - T)[(\alpha - \mu)^{-1}I - (\alpha S - T)^{-1}S](\alpha - \mu)$$

which gives

$$(\mu S - T)^{-1} = [(\alpha - \mu)^{-1}I - (\alpha S - T)^{-1}S]^{-1}(\alpha - \mu)^{-1}(\alpha S - T)^{-1}.$$

Thus, we can see that  $(\alpha - \lambda)^{-1}$  is an eigenvalue of the operator  $(\alpha S - T)^{-1}S$ . Indeed

$$\begin{aligned} u \in Ker(T - \lambda S) &\Rightarrow (T - \lambda S)u = 0 \Rightarrow (\alpha S - T)^{-1}(\alpha S - T + T - \lambda S)u = u \\ &\Rightarrow (\alpha S - T)^{-1}Su = (\alpha - \lambda)^{-1}u \Rightarrow u \in Ker((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I). \end{aligned}$$

We reverse the last process and get

$$Ker(T - \lambda S) = Ker((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I).$$

Now, under the choice of  $\alpha$ , we can see that for all Cauchy contour  $\Gamma$ ,  $\eta(\Gamma)$  is also a Cauchy contour of the eigenvalue  $(\alpha - \lambda)^{-1}$  where  $\eta(\mu) = (\alpha - \mu)^{-1}$ .

We put  $B = (\alpha S - T)^{-1}S$  and  $z = (\alpha - \mu)^{-1}$  for any  $\mu \in \Gamma$ . Following this notation we have

$$(\mu S - T)^{-1}S = z[-I + z(zI - B)^{-1}].$$

Thus, integrating over the  $\Gamma$ , we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\mu S - T)^{-1} S d\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} z[-I + z(zI - B)^{-1}] \frac{dz}{z^2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} [-z^{-1}I + (zI - B)^{-1}] dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} \frac{1}{z} dz I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta(\Gamma)} (zI - B)^{-1} dz = -P_{\{(\alpha - \lambda)^{-1}\}}, \end{aligned}$$

where  $P_{\{(\alpha-\lambda)^{-1}\}}$  is the spectral projection associated with the operator  $(\alpha S - T)^{-1}S$  around  $(\alpha - \lambda)^{-1}$ . Hence, according to the spectral decomposition theory,

$$P\mathcal{X} = P_{\{(\alpha-\lambda)^{-1}\}}\mathcal{X} = \text{Ker}((\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}I) = \text{Ker}(T - \lambda S).$$

□

Now, we show some results obtained in the qualitative aspect for the generalized spectrum theory.

We denote by  $B(0, k) \subset \mathbb{C}$  the ball with center 0 and radius  $k > 0$ .

**Theorem 2.5.** *Let  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , then there exists  $k > 0$  such that  $sp(T, S) \subset B(0, k)$  if and only if  $0 \notin sp(S)$ .*

*P r o o f.* We assume that  $sp(T, S) \subset B(0, k)$ , then for  $\alpha \in re(T, S)$ , we get

$$\lambda S - T = (\alpha S - T)[(\alpha S - T)^{-1}S - (\alpha - \lambda)^{-1}](\lambda - \alpha). \quad (2.5)$$

As  $\alpha \in re(T, S)$ , we have that

$$\lambda \in sp(T, S) \iff (\alpha - \lambda)^{-1} \in sp((\alpha S - T)^{-1}S).$$

So, the inclusion  $sp(T, S) \subset B(0, k)$  implies the relation  $0 \notin sp((\alpha S - T)^{-1}S)$ ; otherwise,  $0 \in sp((\alpha S - T)^{-1}S)$  implies  $\infty \in sp(T, S)$ . Thus  $0 \notin sp((\alpha S - T)^{-1}S)$  gives  $0 \notin sp(S)$ . □

We denote by  $sp_p(T, S)$  the set of all generalized eigenvalues. It is clear that when  $\mathcal{X}$  is a finite-dimensional space, the generalized spectrum consists only of the generalized eigenvalues, except  $\{\infty\}$ .

**Theorem 2.6.** *Let  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , if  $S$  is compact, then*

$$sp(T, S) = sp_p(T, S) \cup \{\infty\}.$$

*P r o o f.* We use the expression (2.5). Since the operator  $(\alpha S - T)^{-1}S$  is compact,  $sp(T, S)$  is a set of isolated points. Let  $\lambda \in sp(T, S)$ , then there is  $\gamma \in sp((\alpha S - T)^{-1}S)$ , where  $\gamma = (\alpha - \lambda)^{-1}$ . Hence there exists  $u \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$  such that

$$\begin{aligned} (\alpha S - T)^{-1}Su = \beta u &\Rightarrow (\alpha S - T)^{-1}(\alpha S - \lambda S)u = u \\ &\Rightarrow u + (\alpha S - T)^{-1}(T - \lambda S)u = u \Rightarrow Tu = \lambda Su. \end{aligned}$$

□

### 3. Generalized spectrum approximation

Let  $T, S \in BL(\mathcal{X})$ , where  $re(T, S) \neq \emptyset$ , and let  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  and  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  be two sequences in  $BL(\mathcal{X})$ . We will use the following conditions:

(H1)  $S$  is a compact operator in  $BL(\mathcal{X})$ ,

(H2)  $\|(T_k - T)x\| \rightarrow 0, \|(S_k - S)x\| \rightarrow 0$  for all  $x \in \mathcal{X}$ ,

(H3)  $\|(T_k - T)T\| \rightarrow 0$ ,

(H4)  $\|(S_k - S)T\| \rightarrow 0$ .

In the sequel, we write  $\cdot \xrightarrow{p} \cdot$  to express the pointwise convergence, while the norm convergence is denoted by  $\cdot \xrightarrow{n} \cdot$ .

**Proposition 3.1.** (see [6]) *Let  $T, \tilde{T}, S, \tilde{S} \in BL(\mathcal{X})$ . For all  $z \in re(T, S)$ , if  $\|R(z, T, S) [(T - \tilde{T}) - z(S - \tilde{S})]\| < 1$ , then  $z \in re(\tilde{T}, \tilde{S})$ , and the next inequality is satisfied*

$$\|R(z, \tilde{T}, \tilde{S})\| \leq \frac{\|R(z, T, S)\|}{1 - \|R(z, T, S) [(T - \tilde{T}) + z(S - \tilde{S})]\|}.$$

**Remark 3.1.** According to our assumptions in (H1) – (H4) we can easily conclude that

$$[(T_k - T) - \lambda(S_k - S)](T - zS) \xrightarrow{n} 0,$$

for all  $z \in re(T, S)$ .

**Proposition 3.2.** *Let  $A, B$  and  $C$  be three bounded operators such that  $0 \notin sp(B)$  and  $AB \xrightarrow{n} C$ , then  $B^{-1}A \xrightarrow{n} B^{-1}CB^{-1}$ .*

**Proof.** We note that  $\|B^{-1}A - B^{-1}CB^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \|AB - C\| \|B^{-1}\|$ . □

**Theorem 3.7. Property U.** *For  $k \in \mathbb{N}$ , under (H1) – (H4), if  $\lambda_k \in sp(T_k, S_k)$  and  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , then  $\lambda \in sp(T, S)$ .*

**Proof.** We assume that  $\lambda \in re(T, S)$ . Since the set  $re(T, S)$  is open in  $\mathbb{C}$ , as stated in Corollary 2.1, there exists  $r > 0$  such that

$$E := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| < r\} \subset re(T, S).$$

On the other side, for all  $z \in E$  and for all  $k \in \mathbb{N}$ , we find that

$$T_k - zS_k = (T - zS) [I + R(z, T, S) [(T - T_k) - z(S - S_k)]] .$$

Using Remark 3.1 and Proposition 3.2 with

$$A = [(T - T_k) - \lambda(S - S_k)], \quad B = (T - \lambda S),$$

so, there exists  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that

$$\|R(z, T, S) [(T - T_k) - \lambda(S - S_k)]\| \leq \frac{1}{2},$$

for all  $k \geq k_0$ . Then, by Proposition 3.1, we find  $z \in \text{re}(T_k, S_k)$  such that

$$\|R(z, T_k, S_k)\| \leq 2\|R(z, T, S)\|, \quad \forall k \geq k_0,$$

but  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ , thus there exists  $k_1 \in \mathbb{N}$  such that  $\lambda_k \in E \subset \text{re}(T_k, S_k)$  for  $k \geq k_1$ , which form a contradiction.  $\square$

In numerical test, we calculate the quantity

$$\sup \{ \text{dist}(\mu, \text{sp}(T, S)) : \mu \in \text{sp}(T_k, S_k) \},$$

its convergence to 0 implies the Property U. We mention that

$$\text{dist}(\mu, \text{sp}(T, S)) = \inf_{y \in \text{sp}(T, S)} |\mu - y|.$$

**Lemma 3.1.** (see [10]) Let  $P_1$  and  $P_2$  be two projections on  $\mathcal{X}$  such that

$$\|(P_1 - P_2)P_1\| < 1,$$

then  $\dim P_1\mathcal{X} \leq \dim P_2\mathcal{X}$ .

**Lemma 3.2.** Let  $z \in \text{re}(T, S)$ , under (H1) – (H4) there exists a positive integer  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that for  $k \geq k_0$ ,  $z \in \text{re}(T_k, S_k)$  and

$$R(z, T_k, S_k) \xrightarrow{n} R(z, T, S).$$

**P r o o f.** Let  $z \in \text{re}(T, S)$ , we have

$$T_k - zS_k = (T - zS) [I + R(z, T, S)[(T - T_k) - z(S - S_k)]],$$

for all  $k \in \mathbb{N}$ . As stated above in the demonstration of Theorem 3.7, we find  $z \in \text{re}(T_k, S_k)$  for all  $k \geq k_0$ , and  $R(z, T_k, S_k)$  is uniformly bounded for all  $k \in \mathbb{N}$ .

On the other side, for  $z \in \text{re}(T, S) \cap \text{re}(T_k, S_k)$ ,

$$R(z, T_k, S_k) - R(z, T, S) = R(z, T, S) [(T - T_k) - z(S - S_k)] R(z, T_k, S_k).$$

Since  $R(z, T, S) [(T - T_k) - z(S - S_k)] \xrightarrow{n} 0$  (according Remark 3.1 and to Proposition 3.2) and  $R(z, T_k, S_k)$  is uniformly bounded for all  $k \in \mathbb{N}$ , we have that

$$R(z, T, S) [(T - T_k) - z(S - S_k)] (T_k - zS_k)^{-1} \xrightarrow{n} 0.$$

$\square$

**Theorem 3.8.** *Let  $\lambda$  be a generalized eigenvalue of finite type, isolated in  $sp(T, S)$ . We denote by  $\Gamma$  the Cauchy contour separating  $\lambda$  from  $sp(T, S)$ . Under (H1) – (H4), there exists  $k_0 \in \mathbb{N}$  such that for each  $k \geq k_0$ , we have*

$$\dim P\mathcal{X} = \dim P_k\mathcal{X},$$

where

$$P = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} R(z, T, S)S \, dz, \quad P_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z, T_k, S_k)^{-1}S_k \, dz.$$

**P r o o f.** For  $z \in \Gamma$  and  $k \geq k_0$ , we see that

$$\begin{aligned} R(z, T_k, S_k)S_k - R(z, T, S)S &= [R(z, T_k, S_k) - R(z, T, S)]S \\ &\quad - [R(z, T_k, S_k) - R(z, T, S)](S - S_k) - R(z, T, S)(S - S_k). \end{aligned}$$

From (H1) – (H4) we easily find that  $(S - S_k)(T - zS) \xrightarrow{n} 0$ , thus according to Proposition 3.2 we have  $R(z, T, S)(S - S_k) \xrightarrow{n} 0$ . Now by using Lemma 3.2, we have

$$R(z, T_k, S_k)S_k - R(z, T, S)S \xrightarrow{n} 0.$$

Finally, we apply Lemma 3.1 and find that  $\dim P\mathcal{X} = \dim P_k\mathcal{X}$  for  $k \geq k_0$ . □

**Theorem 3.9. Property L.** *Let  $\lambda$  be a generalized eigenvalue of finite type, isolated in  $sp(T, S)$ . Under (H1) – (H4) there exists a sequence  $\lambda_k \in sp(T_k, S_k)$  such that  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ .*

**P r o o f.** Let  $\Gamma$  be the Cauchy contour separating  $\lambda$  from  $sp(T, S)$ . We set

$$\lambda_k \in \text{int}(\Gamma) \cap sp(T_k, S_k).$$

Since  $re(T, S) \ni z \mapsto R(z, T, S)S$  and  $re(T_k, S_k) \ni z \mapsto R(z, T_k, S_k)S_k$  are analytic functions, and  $P_k \xrightarrow{n} P$ , we find

$$(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} = \emptyset \iff \text{int}(\Gamma) \cap sp(T, S) = \emptyset.$$

We fix  $\epsilon > 0$  such that the sequence  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  belongs to  $B$ , where

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda| \leq \epsilon\}.$$

On the other hand, it is enough to show that every convergent subsequence of  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converges to  $\lambda$  itself. Indeed, let a subsequence  $(\lambda_{k'})_{k' \in \mathbb{N}}$  converge to  $\tilde{\lambda}$  where  $\tilde{\lambda} \neq \lambda$ . By Property U proved in Theorem 3.7, we see that  $\tilde{\lambda} \in sp(T, S)$ , but  $\tilde{\lambda} \in B$  and  $sp(T, S) \cap B = \{\lambda\}$ , hence  $\lambda = \tilde{\lambda}$ , thus  $\lambda_k \rightarrow \lambda$ . □

The last theorem shows that for every generalized eigenvalue  $\lambda$  of finite type isolated in  $sp(T, S)$ , there exists a sequence  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converging to  $\lambda$  such that  $\lambda_k \in sp(T_k, S_k)$ . The next result shows that the generalized eigenvectors associated to  $\lambda_k$  converge to the generalized eigenvector associated with  $\lambda$ .

We define the notion of gap between two closed subspaces  $Z$  and  $Y$  of  $\mathcal{X}$  as

$$\text{gap}(Z, Y) = \max \{ \gamma(Z, Y), \gamma(Y, Z) \},$$

where

$$\gamma(Z, Y) = \sup \{ \text{dist}(z, Y) : z \in Z, \|z\| = 1 \}.$$

**Theorem 3.10.** *Let  $M = P\mathcal{X}$  and  $M_k = P_k\mathcal{X}$  for  $k \in \mathbb{N}$ . Then  $\text{gap}(M, M_k) \rightarrow 0$ .*

*P r o o f.* Let  $u \in M = P\mathcal{X}$  such that  $\|u\| = 1$ . For  $k \in \mathbb{N}$  large enough we have

$$\text{dist}(u, M_k) \leq \|u - P_k u\| = \|Pu - P_k u\| \leq \|P - P_k\|.$$

Let  $u \in M_k = P_k\mathcal{X}$  such that  $\|u\| = 1$ . For  $k \in \mathbb{N}$  large enough

$$\text{dist}(u, M) \leq \|u - Pu\| = \|P_k u - Pu\| \leq \|P - P_k\|,$$

which implies  $\text{gap}(M, M_k) \leq \|P_k - P\|$ . □

#### 4. Numerical application

As an example for which the numerical results are available by other approaches, we consider the following problem from [11]; it is also studied in [13].

We consider the unbounded operator  $A$  defined on  $L^2(0, +\infty)$  by the differential equation

$$Au := -u'' + x^2u, \quad x \in [0, +\infty), \quad u(0) = 0.$$

This is the harmonic oscillator problem with domain

$$D(A) = H^2(0, +\infty) \cap \left\{ u \in L^2(0, \infty) : \int_0^\infty x^2 |u|^2 dx < \infty \right\}.$$

First, according to the theory of pseudo spectrum for self-adjoint operators (see [6], [11] and [14]) we can find

$$sp(A) = \bigcup_{a>0} sp(A_a), \tag{4.6}$$

where  $A_a$  is the Schrödinger operator which has the same formula as  $A$  in  $L^2(0, a)$ , but with the Dirichlet condition at the point  $a$ . The domain of  $A_a$  is given by

$$D(A_a) = H^2(0, a) \cap H_0^1(0, a).$$

Let  $a > 0$ , we denote by  $L_a$  the Laplacien operator defined on  $L^2(0, a)$  by

$$L_a u = -u'', \quad D(L) = H^2(0, a) \cap H_0^1(0, a).$$

**Proposition 4.3.** (see [12])  $L_a$  is invertible and its inverse is the bounded operator  $S_a$  defined by

$$S_a u(x) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x, y) u(y) dy, \quad u \in L^2(0, a),$$

where

$$G_{\{0,a\}}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(a-y)}{a} & 0 \leq x \leq y \leq a, \\ \frac{y(a-x)}{a} & 0 \leq y \leq x \leq a. \end{cases}$$

Let  $T_a$  be a bounded operator defined on  $L^2(0, a)$  to itself by

$$T_a u(x) = u(x) + \int_0^a G_{\{0,a\}}(x, y) y^2 u(y) dy.$$

**Theorem 4.11.**  $sp(A) = \bigcup_{a>0} sp(T_a, S_a)$ .

**Proof.** According to (4.6), we need only to show that  $sp(A_a) = sp(T_a, S_a)$  for all  $a > 0$ .

Let  $\lambda$  be an eigenvalue of  $A_a$  with the eigenvector  $u \in D(A_a) \setminus \{0\}$ . By applying  $S_a$  to  $A_a u = \lambda u$ , we get  $T_a u = \lambda S_a u$ , which implies that  $\lambda$  is a generalized eigenvalue of the couple  $(T_a, S_a)$  with the eigenvector  $u \in L^2(0, a) \setminus \{0\}$ .

Inversely, let  $\lambda$  be a generalized eigenvalue of the couple  $(T_a, S_a)$  with the eigenvector  $u \in L^2(0, a) \setminus \{0\}$ , i. e.  $T_a u = \lambda S_a u$ , so

$$u = \lambda S_a u - S_a(v u) \Rightarrow u = S_a(\lambda u - v u),$$

where  $v(x) = x^2$ . Since  $\lambda u + v u \in L^2(0, a)$ , we have  $u \in D(L_a) = D(A_a)$ , then

$$u + S_a(v u) = \lambda S_a u \Rightarrow L_a u + v u = \lambda u.$$

□

Now, for  $a > 0$  we use Kantorovich's projection method to approach the operators  $T_a$  and  $S_a$ . We define a subdivision of  $[0, a]$  for  $n \geq 2$  by

$$h_n = \frac{a}{n-1}, \quad x_i = (i-1)h_n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Let  $T_{a,n}$  and  $S_{a,n}$  be the approximation operators of  $T_a$  and  $S_a$  by means of Kantorovich's projection methods (see [9]), given for all  $x \in [0, a]$  by

$$\begin{aligned} T_{a,n} u_n(x) &\approx u_n(x) + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y) y^2 u_n(y) dy \right) e_i(x), \\ S_{a,n} u_n(x) &\approx \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y) u_n(y) dy \right) e_i(x), \end{aligned}$$

where, for  $2 \leq i \leq n - 1$ ,

$$e_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x - x_i|}{h_n}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$e_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_n}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$e_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By applying Kantorovich's projection method [9] to the equation  $T_a u = \lambda S_a u$ , we get the approximate equation

$$\begin{aligned} u_n(x) + \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y) y^2 u_n(y) dy \right) e_i(x) \\ = \lambda_n \sum_{i=1}^n \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y) u_n(y) dy \right) e_i(x), \quad x \in [0, a]. \end{aligned}$$

Denote by  $\beta_1$  and  $\beta_2$  the two vectors

$$\beta_1(i) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, y) y^2 u_n(y) dy, \quad \beta_2(i) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, y) u_n(y) dy, \quad 1 \leq i \leq n,$$

then we can rewrite the previous approximate equation as

$$u_n(x) + \sum_{i=1}^n \beta_1(i) e_i(x) = \lambda_n \sum_{i=1}^n \beta_2(i) e_i(x). \quad (4.7)$$

Multiplying first equation (4.7) by  $G_{\{0,a\}}(x_j, x) x^2$  for  $1 \leq j \leq n$  and integrating over  $[0, a]$ , we obtain

$$\begin{aligned} \lambda_n \sum_{i=1}^n \beta_2(i) \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) x^2 e_i(x) dx \right) &= \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) x^2 u_n(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \beta_1(i) \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) x^2 e_i(x) dx \right). \end{aligned}$$

The latter equation is equivalent to the matrix equation

$$\beta_1 + A\beta_1 = \lambda_n A\beta_2, \quad (4.8)$$

where  $A$  is a matrix defined by

$$A(i, j) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) x^2 e_i(x) dx, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

In the same way, multiplying equation (4.7) by  $G_{\{0,a\}}(x_j, x)$  for  $1 \leq j \leq n$  and integrating over  $[0, a]$ , we also obtain

$$\begin{aligned} \lambda_n \sum_{i=1}^n \beta_2(i) \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) e_i(x) dx \right) &= \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) u_n(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \beta_1(i) \left( \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) e_i(x) dx \right), \end{aligned}$$

the latter equation is equivalent to the matrix equation

$$\beta_2 + B\beta_1 = \lambda_n B\beta_2, \tag{4.9}$$

where  $B$  is a matrix defined by

$$B(i, j) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, x) e_i(x) dx, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

So, by using this process, we have transformed the equation (4.7) into the system of two matrix equations (4.8) and (4.9), namely

$$\begin{cases} \beta_1 + A\beta_1 = \lambda_n A\beta_2, \\ \beta_2 + B\beta_1 = \lambda_n B\beta_2. \end{cases}$$

We also can write this system as

$$\begin{cases} (I_{n \times n} + A)\beta_1 + O_{n \times n}\beta_2 = \lambda_n O_{n \times n}\beta_1 + \lambda_n A\beta_2, \\ B\beta_1 + \beta_2 = \lambda_n O_{n \times n}\beta_1 + \lambda_n B\beta_2, \end{cases}$$

where  $I_{n \times n}$  is the identity matrix with dimension  $n \times n$  and  $O_{n \times n}$  is the null matrix with dimension  $n \times n$ . This leads to the matrix generalized eigenvalue problem

$$\begin{bmatrix} A + I_{n \times n} & O_{n \times n} \\ B & I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \lambda_n \begin{bmatrix} O_{n \times n} & A \\ O_{n \times n} & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Finally, we use the command "eig" in Matlab to calculate the generalized eigenvalue of

$$\left( \begin{bmatrix} A + I_{n \times n} & O_{n \times n} \\ B & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O_{n \times n} & A \\ O_{n \times n} & B \end{bmatrix} \right).$$

We mention that Kantorovich's projection method gives the norm convergence (see [9]) which satisfies our assumption in (H1) – (H4).

We fix  $n = 200$  to approach the eigenvalues in our example.

The following table 1 shows that the Kantorovich's method converges perfectly compared with the exact eigenvalue.

Table 1: The numerical results for  $a=5$ 

Exact eigenvalue	Kantorovich's method
3	3.0001972
7	7.0009887
11	11.0026039
15	15.0103317
19	19.0806050

## 5. Conclusion

Our study shows the efficiency of the generalized spectrum method, theoretically and numerically. This technique appears to be a computationally attractive tool for resolving the spectral pollution. We resolved this spectral pollution by treating the analytical question: to find the bounded operators  $T$  and  $S$  representing the spectrum properties of an unbounded operator  $A$  in the theory of generalized spectrum.

## References

- [1] M. Levitin, E. Shargorodsky, "Spectral pollution and second-order relative spectra for self-adjoint operators", *IMA J. Numer. Anal.*, **24**:3 (2004), 393–416.
- [2] E. B. Davies, "Spectral enclosures and complex resonances for general self-adjoint operators", *LMSJ. Comput. Math.*, **1** (1998), 42–74.
- [3] E. B. Davies, M. Plum, *Spectral Pollution*, 2002, arXiv: [math/0302145v1](https://arxiv.org/abs/math/0302145v1).
- [4] S. Bögli, "Convergence of sequences of linear operators and their spectra", *Integral Equations Operator Theory*, **88** (2017), 559–599.
- [5] J. Hinchcliffe, M. Strauss, S. E. Zhukovskiy, "Spectral enclosure and superconvergence for eigenvalues in gaps", *Integral Equations Operator Theory*, **84**:1 (2016), 1–32.
- [6] H. Guebbai, "Generalized spectrum approximation and numerical computation of eigenvalues for Schrödinger's operators", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **34** (2013), 45–60.
- [7] A. J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM, California, 2005.
- [8] I. Gohberg, I. S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. V. I*, Springer Basel AG, 1990.
- [9] M. Ahues, A. Largillier, B. V. Limaye, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2001.
- [10] M. T. Nair, "On strongly stable approximation", *J. Austral. Math. Soc.*, **52**:2 (1992), 251–260.
- [11] A. Khellaf, H. Guebbai, S. Lemita, M. Z. Aissaoui, "Eigenvalues computation by the generalized spectrum method of Schrödinger's operator", *Computational and Applied Mathematics*, **37**:5 (2018), 5965–5980.
- [12] G. F. Roach, *Green's Functions*, Cambridge University Press, New York, 1982.
- [13] A. Aslanyan, E. B. Davies, "Spectral instability for some Schrödinger operators", *E. Numer. Math.*, **85**:4 (2000), 525–552.
- [14] H. Guebbai, A. Largillier, "Spectra and pseudospectra of convection-diffusion operator", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **33**:3 (2012), 274–283.

## Список литературы

- [1] M. Levitin, E. Shargorodsky, “Spectral pollution and second-order relative spectra for self-adjoint operators”, *IMA J. Numer. Anal.*, **24**:3 (2004), 393–416.
- [2] E. B. Davies, “Spectral enclosures and complex resonances for general self-adjoint operators”, *LMSJ. Comput. Math.*, **1** (1998), 42–74.
- [3] E. B. Davies, M. Plum, *Spectral Pollution*, 2002, arXiv: [math/0302145v1](https://arxiv.org/abs/math/0302145v1).
- [4] S. Bögli, “Convergence of sequences of linear operators and their spectra”, *Integral Equations Operator Theory*, **88** (2017), 559–599.
- [5] J. Hinchcliffe, M. Strauss, S. E. Zhukovskiy, “Spectral enclosure and superconvergence for eigenvalues in gaps”, *Integral Equations Operator Theory*, **84**:1 (2016), 1–32.
- [6] H. Guebbai, “Generalized spectrum approximation and numerical computation of eigenvalues for Schrödinger’s operators”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **34** (2013), 45–60.
- [7] A. J. Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM, California, 2005.
- [8] I. Gohberg, I. S. Goldberg, M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. V. I*, Springer Basel AG, 1990.
- [9] M. Ahues, A. Largillier, B. V. Limaye, *Spectral Computations for Bounded Operators*, Chapman and Hall/CRC, New York., 2001.
- [10] M. T. Nair, “On strongly stable approximation”, *J. Austral. Math. Soc.*, **52**:2 (1992), 251–260.
- [11] A. Khellaf, H. Guebbai, S. Lemita, M. Z. Aissaoui, “Eigenvalues computation by the generalized spectrum method of Schrödinger’s operator”, *Computational and Applied Mathematics*, **37**:5 (2018), 5965–5980.
- [12] G. F. Roach, *Green’s Functions*, Cambridge University Press, New York., 1982.
- [13] A. Aslanyan, E. B. Davies, “Spectral instability for some Schrödinger operators”, *E. Numer. Math.*, **85**:4 (2000), 525–552.
- [14] H. Guebbai, A. Largillier, “Spectra and pseudospectra of convection-diffusion operator”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **33**:3 (2012), 274–283.

## Information about the authors

**Ammar Khellaf**, Post-Graduate Student, Mathematics Department. University 8 Mai 1945, Guelma, Algeria. E-mail: [amarlasix@gmail.com](mailto:amarlasix@gmail.com); [khellaf.ammar@univ-guelma.dz](mailto:khellaf.ammar@univ-guelma.dz)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5282-7593>

**Sarra Benarab**, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: [benarab.sarra@gmail.com](mailto:benarab.sarra@gmail.com)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8849-8848>

**Hamza Guebbai**, Associate Professor of the Mathematics Department. University 8 Mai 1945, Guelma, Algeria. E-mail: [guebbaihamza@yahoo.fr](mailto:guebbaihamza@yahoo.fr); [guebbai.hamza@univ-guelma.dz](mailto:guebbai.hamza@univ-guelma.dz)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

## Информация об авторах

**Хеллаф Аммар**, аспирант, кафедра математики. Университет 8 Мая 1945, г. Гельма, Алжир. E-mail: [amarlasix@gmail.com](mailto:amarlasix@gmail.com); [khellaf.ammar@univ-guelma.dz](mailto:khellaf.ammar@univ-guelma.dz)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5282-7593>

**Бенараб Сарра**, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: [benarab.sarra@gmail.com](mailto:benarab.sarra@gmail.com)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-8849-8848>

**Геббай Хамза**, доцент кафедры математики. Университет 8 Мая 1945, г. Гельма, Алжир. E-mail: [guebbaihamza@yahoo.fr](mailto:guebbaihamza@yahoo.fr); [guebbai.hamza@univ-guelma.dz](mailto:guebbai.hamza@univ-guelma.dz)  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

**Wassim Merchela**, Post-Graduate Student,  
Functional Analysis Department. Derzhavin Tam-  
bov State University, Tambov, the Russian Feder-  
ation. E-mail: merchela.wassim@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

There is no conflict of interests.

**Corresponding author:**

Wassim Merchela  
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Received 15 February 2019

Reviewed 08 April 2019

Accepted for press 20 May 2019

**Мерчела Вассим**, аспирант, кафедра  
функционального анализа. Тамбовский госу-  
дарственный университет им. Г.Р. Державина,  
г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail:  
merchela.wassim@gmail.com  
**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

Конфликт интересов отсутствует.

**Для контактов:**

Мерчела Вассим  
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Поступила в редакцию 15.02.2019 г.

Поступила после рецензирования 08.04.2019 г.

Принята к публикации 20.05.2019 г.

Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки» (Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences) является научно-теоретическим журналом, в котором публикуются оригинальные научные статьи по математике и ее приложениям, содержащие новые математические результаты, и обзорные научные статьи, освещающие современное состояние актуальных проблем математики. Основными задачами журнала являются: оперативная публикация новых математических результатов, имеющих теоретическое и прикладное значение; информирование о направлениях исследований в различных разделах математики, о современных математических проблемах; содействие развитию приложений математических методов и результатов.

В журнале также публикуются материалы математических конференций, рецензии, персоналии и информационные материалы о событиях математической жизни университета.

Индексируется Ulrich's Periodicals Directory, Zentralblatt MATH, РИНЦ, ВИНТИ, SciLit.

### Порядок направления статей

1. Рукопись посылается электронной почтой в редакционную коллегия Жуковскому Евгению Семеновичу [zukovskys@mail.ru](mailto:zukovskys@mail.ru) или на адрес редакции [vestnik1@tsu.tmb.ru](mailto:vestnik1@tsu.tmb.ru); [ilina@tsutmb.ru](mailto:ilina@tsutmb.ru)

2. Поступившая в редакцию рукопись фиксируется датой поступления, о чем редакция информирует автора по электронной почте.

3. Если формальные требования «Правил для авторов» не выполнены, то статья к публикации не принимается «по формальным признакам» и об этом сообщается автору. Редакция оставляет за собой право отклонения статей в случае неспособности или нежелания автора учесть пожелания редакции.

### Правила оформления рукописей

1. Редакция принимает рукописи на русском языке. По решению редколлегии возможна публикация статьи на английском языке. Статья должна быть тщательно выверена. Страницы рукописи, а также таблицы, рисунки и подписи к рисункам следует пронумеровать.

2. Рекомендуемый объем краткого сообщения составляет 3–5, статьи – 6–15, обзорной статьи – 16–40 журнальных страниц.

3. Отдельным файлом прилагаются сведения обо всех авторах статьи (фамилия, имя и отчество полностью) с указанием его (их) ученого звания, ученой степени, должности, места работы (полное название организаций, к которым приписан автор, а не аббревиатура, почтовый адрес организации с указанием города, страны, адрес электронной почты каждого автора, ORCID), для аспирантов и докторантов – наименование специальности, почтового адреса (с индексом для доставки номеров журналов согласно подписке). Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией, его e-mail, номер контактного телефона. По электронному адресу авторам высылается pdf-файл опубликованной статьи бесплатно.

Необходимо также ознакомиться с Авторским договором (публичной офертой), подписать и прислать в редакцию Согласие (см. на сайте журнала).

### Структура статьи

1. Рукопись должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе TEX с использованием шаблона статьи (см. шаблон для статей, для кратких сообщений на русском языке; шаблон для статей, для кратких сообщений на английском языке на сайте журнала <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>).

2. Текст статьи начинается с индекса УДК (слева), затем следуют **Название** статьи, **инициалы** полностью и **фамилии авторов**, строкой ниже – **полное название организации с ее юридическим адресом** на русском языке (данные об аффилировании авторов).

**ORCID, E-mail** каждого автора.

Ниже приводится **аннотация** (150–200 слов) и **ключевые слова** (до 15 слов). Использование формул в аннотации нежелательно. Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи.

Далее сведения о финансовой поддержке работы (**благодарности** и ссылки на номера грантов.)

3. Файл рукописи, написанной на русском языке, должен содержать также перевод на английский язык **Названия** статьи, **инициалов и фамилий авторов**, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, благодарности, информации об авторах и списка литературы.

Рукопись, подготовленная на английском языке, должна заканчиваться переводом на русский язык названия статьи, инициалов и фамилий авторов, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, благодарности, информации об авторах и списка литературы.

4. Во **введении** нужно отразить актуальность исследования, дать ссылки на соответствующую литературу.

**Постановка задачи:** формулировка целей и методов исследования рассматриваемой темы.

**Результаты:** изложение основного материала исследования с обоснованием полученных научных результатов.

**Выводы:** научная новизна, теоретическое или практическое значение исследования, а также перспективы дальнейших научных разработок в данном направлении.

5. **Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте статьи. Библиографические ссылки в статьях нумеруются в порядке их расположения в тексте в квадратных скобках [1, с. 25] или [3–10], в обзорных работах – в алфавитном порядке. Стиль оформления литературы пакета [amsbib.sty](http://amsbib.sty)

### Политика свободного доступа

1. Журнал сразу предоставляет открытый доступ к своему контенту, исходя из следующего принципа: свободный открытый доступ к результатам исследований способствует увеличению глобального обмена знаниями.

2. Все публикации журнала в электронном виде распространяются бесплатно и без ограничений.

3. Весь контент журнала распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY). Журнал предоставляет право читать, сохранять, копировать, распространять, распечатывать, искать и делать ссылки на полные тексты материалов с обязательным указанием их автора(ов) и названия

«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

4. Автор имеет право архивировать (выгрузить) размещенный на сайте журнала вариант статьи (PDF-файл) и загружать его на любые репозитории открытого доступа.

5. По решению редакционной коллегии и издателя весь контент журнала, принятый к публикации и/или опубликованный до 1 января 2017 г., также распространяется по лицензии CC BY 4.0.

#### **Авторские права и политика архивирования**

1. Весь контент журнала распространяется по лицензии CC BY 4.0. Согласно CC BY 4.0 авторы сохраняют права на свои статьи, но при этом разрешают всем беспрепятственно скачивать, повторно использовать, перепечатывать, изменять, распространять и/или копировать их при условии упоминания их авторства. На все вышеперечисленное разрешения от авторов или издателя не требуется.

2. Авторы сохраняют право заключать отдельные контрактные договоренности, касающиеся неэксклюзивного распространения версии работы в опубликованном здесь виде (например, размещение ее в институтском хранилище, публикацию в книге, перевод на другой язык), со ссылкой на ее оригинальную публикацию в этом журнале.

3. Согласно классификации SHERPA/RoMEO журнал относится к так называемым «зеленым» журналам. Авторам разрешено архивировать препринты и постпринты своих работ. Авторы имеют право размещать свою работу в сети Интернет (например, в институтском хранилище или на персональном сайте) до и во время процесса рассмотрения ее в редакционной коллегии журнала.

4. Публикация статьи будет означать назначение Copyright © ее автору (авторам), однако они не могут претендовать на выплату гонорара. Авторы передают Издательству журнала – ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г.Р. Державина», авторские права на использование передаваемых материалов в составе журнала следующими способами: обнародование, воспроизведение, распространение, доведение произведения до всеобщего сведения путем размещения в сети Интернет, публичный показ, а также перевод на иностранные языки.

#### **Стоимость публикации**

1. Журнал следует политике Open Access Journals, доступ к опубликованным в журнале статьям – свободный для всех (без необходимости регистрации).

2. Журнал издается на средства издателя.

3. Все публикации в журнале бесплатны.

4. Журнал является подписным периодическим научным изданием ТГУ им. Г.Р. Державина.

5. Гонорар за публикуемые в журнале статьи авторам не выплачивается.

6. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

7. Редакция не взимает плату с авторов за подготовку, размещение и печать материалов. Редакция не вступает с авторами в переписку по методике написания и оформления научных статей и не занимается доводкой статей до необходимого научно-методического уровня. Журнал не предоставляет платных услуг.

#### **Политика раскрытия и конфликты интересов**

1. Неопубликованные данные, полученные из представленных к рассмотрению рукописей, не могут

быть использованы в личных исследованиях без письменного согласия автора. Информация или идеи, полученные в ходе рецензирования и связанные с возможными преимуществами, должны сохраняться конфиденциальными и не использоваться с целью получения личной выгоды.

2. Все авторы обязаны раскрыть финансовые или другие конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе.

3. Рецензенты не должны участвовать в рассмотрении рукописей в случае наличия конфликтов интересов вследствие конкурентных, совместных и других взаимодействий и отношений с любым из авторов, организациями, связанными с представленной работой.

#### **Положение о конфиденциальности**

1. Информация об авторах, включая их имена, аффилиацию, контактные сведения, сведения об учебной степени, ученом звании, о занимаемой должности, ссылки на авторские профили, размещается в статье в разделе «Сведения об авторе» на русском и английском языках.

2. Паспортные данные и место жительства авторов, предоставленные в редакционную коллегию журнала, используются исключительно для заключения авторских договоров, оформления подписки, пересылки корреспонденции и не передаются третьим лицам.

3. Имена рецензентов не сообщаются авторам и третьим лицам.

#### **Положения о плагиате, дублировании и избыточности публикации**

1. Каждая статья проверяется на наличие неправомерных заимствований из других работ (плагиат), дублирование и избыточность публикации (включая перевод публикации с других языков). Для выявления плагиата редакционная коллегия использует Антиплагиат.

2. Статья, содержащая неправомерные заимствования из других работ (плагиат), содержащая признаки дублирования и избыточности (в том числе признаки автоплагиата), является неприемлемой и отклоняется без рецензирования.

3. Авторам разрешается подавать в журнал статьи, опубликованные на серверах препринтов, кроме опубликованных ранее в других изданиях. Такая статья не считается дублированной и избыточной.

4. Если статья опубликована, но позднее было обнаружено, что она содержит неправомерные заимствования из других работ (плагиат) или является дублированной, то редактор обращается к блок-схемам Комитета по издательской этике (COPE) для удаления такой статьи.

5. Доля повторно использованного текста в представляемой в журнал работе не должна превышать 15 % от общего объема статьи. Повторное использование текста допустимо лишь для включения необходимых определений, формулировки основных принципов и т.п., чтобы читатель мог ознакомиться со статьей без привлечения дополнительных источников. В этом случае повторное использование текста не считается автоплагиатом.

6. Если авторы считают необходимым ознакомить читателя с материалами, близкими к тематике статьи или оставшимися за рамками статьи, то они могут приводить достаточно полный список литературы, в которой интересующийся читатель может найти эти материалы.



