Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 30, № 152, 2025

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Белый список», «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: 8(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/; https://journals.rcsi.science/2686-9667

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редактор: М.И. Филатова
Редактор английских текстов: Н.А. Михайлова
Технический редактор: Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь: М.В. Борзова
Администраторы сайта: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. 120 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152

Подписано в печать 28.11.2025. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 15,0. Усл. печ. л. 14,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 25263. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 30, no. 152, 2025

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “White list” and “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:
1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Derzhavin Tambov State University" (ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/;
https://journals.rcsi.science/2686-9667

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editor: M.I. Filatova
English texts editor: N.A. Mikhailova
Technical editor: Y.A. Biryukova
Technical secretary: M.V. Borzova
Web-site administrators: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova

For citation:
Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics, **30**:152 (2025), 120 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152

Signed for printing 28.11.2025. Release date
Format A4 (60×84 1/8). Typeface "Times New Roman". Printed on risograph.
Pr. sheet 15,0. Conv. pr. sheet 14,6. Copies printed 1000. Order no. 25263. Free price

Publisher: FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-309-321

On coincidence points in (q_1, q_2)-quasimetric space

S. BENARAB[1,3], **W. MERCHELA**[1,2,3], **M. E. KHAROUBI**[3], **N. KHIAL**[2]

[1] University Salah Boubnider Constantine 3,
B.P. 72, Ali Mendjeli, El Khroub, Constantine 25016, Algeria
[2] Mustapha Stambouli University – Mascara
B.P. 305, Route de Mamounia, Mascara, 29000, Algeria
[3] Laboratory of Applied Mathematics and Modeling
8 May 1945 University
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Abstract. In this paper, we present a theorem on a coincidence point of mappings which extends the Arutyunov theorem. The original version of the Arutyunov theorem guaranteed the existence of a coincidence point for two mappings acting in metric spaces, one of which is α-covering and the other is β-Lipschitz, where $\alpha > \beta$. This theorem was then extended to mappings acting in (q_1, q_2)-quasimetric spaces. In this paper, the problem of the existence of a coincidence point is solved for mappings acting from a (q_1, q_2)-quasimetric space to a set equipped with a distance satisfying only the identity condition (the distance vanishes if and only if the points coincide). Under conditions similar to those of the Arutyunov theorem, the existence of a coincidence point is proved. In addition, the questions of convergence of sequences of coincidence points of mappings ψ_n, φ_n to the coincidence point ξ of mappings ψ, φ are investigated under the convergences $\psi_n(\xi) \to \psi(\xi)$, $\varphi_n(\xi) \to \varphi(\xi)$.

Keywords: coincidence points, metric space, (q_1, q_2)-quasimetric space, covering mapping, Lipschitz mapping

Mathematics Subject Classification: 54H25, 54E40.

For citation: Benarab S., Merchela W., Kharoubi M.E., Khial N. On coincidence points in (q_1, q_2)-quasimetric space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 309–321. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-309-321

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-309-321
УДК 515.126.4

О точках совпадения в (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве

Сарра БЕНАРАБ[1,3], **Вассим МЕРЧЕЛА**[1,2,3], **М. Е. ХАРУБИ**[3], **Н. ХИЯЛ**[2]

[1] Университет Константины 3 Салах Бубнидер
25016, Алжир, Константина, г. Эль-Хруб, Али Менджели, П.Я. 72
[2] Университет Мустафы Стамбули – Маскара
29000, Алжир, г. Маскара, Рут де Мамуния, П.Я. 305
[3] Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 мая 1945 г.
24000, Алжир, г. Гельма, П.Я. 401

Аннотация. В данной работе мы представляем теорему о точке совпадения отображений, которая обобщает теорему Арутюнова. В первоначальном варианте теоремы Арутюнова гарантируется существование точки совпадения двух отображений, действующих в метрических пространствах, одно из которых является α-накрывающим, а другое — β-липшицевым, причем $\alpha > \beta$. Затем эта теорема была распространена на отображения, действующие в (q_1, q_2)-квазиметрических пространствах. В данной статье задача о существовании точки совпадения решается для отображений, действующих из (q_1, q_2)-квазиметрического пространства в множество, снабженное расстоянием, удовлетворяющим лишь условию тождества (расстояние обращается в ноль тогда и только тогда, когда точки совпадают). При условиях, аналогичных предположениям теоремы Арутюнова, доказано существование точки совпадения. Кроме того, исследованы вопросы сходимости последовательностей точек совпадения отображений ψ_n, φ_n к точке совпадения ξ отображений ψ, φ при сходимости $\psi_n(\xi) \to \psi(\xi)$, $\varphi_n(\xi) \to \varphi(\xi)$.

Ключевые слова: точки совпадения, метрическое пространство, (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство, накрывающее отображение, липшицево отображение

Для цитирования: *Бенараб С., Мерчела В., Харуби М.А., Хиял Н.* О точках совпадения в (q_1, q_2)-квазиметрическом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 309–321. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-309-321

Introduction

The study of coincidence points for mappings defined on metric and generalized metric structures has received increasing attention in recent years. The applications of this theory were in many fields, for example, integral equations [1, 2], differential equations [3, 4], and control problems [3,5,6]. In [7], the coincidence points of two mappings acting from one metric space to another metric space are investigated, then in [8], the coincidence points of two mappings acting from one (q_1, q_2)-quasimetric space to another (q_1, q_2)-quasimetric space are investigated, and in [9], the coincidence points of two mappings acting from a b-metric space to a space equipped with a distance satisfying only the identity condition are investigated. In all these researches, one of the mappings is closed and α-covering and the other is β-Lipschitz. In [10], E. S. Zhukovskiy formulated the notion of a geometric progression within the framework of generalized distance spaces and utilized it to determine sufficient conditions for the existence of coincidence points of mappings. Furthermore, works [11–13] address the problem of Lipschitz perturbations of covering mappings acting from a metric space into a space equipped with a distance that satisfies only the identity axiom.

In our study, we consider two mappings from a (q_1, q_2)-quasimetric space into a space equipped with a distance satisfying only the identity condition. We obtain conditions for the existence of coincidence points and their stability under changes in the mappings under consideration. These results are an extension of [7–9, 14].

1. Main concepts

Now, we introduce definitions of certain generalizations of the concepts of a distance and a metric space, which are required for the purposes of the present study (for more details, see [8–10]).

D e f i n i t i o n 1.1. Let X be a nonempty set. A *metric* on X is any function $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$ that satisfies the following properties:

$$\rho_X(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \quad \forall x, y \in X \quad \text{(Identity relation)}, \tag{1.1}$$

$$\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x), \quad \forall x, y \in X \quad \text{(Symmetry)}, \tag{1.2}$$

$$\rho_X(x, z) \le \rho_X(x, y) + \rho_X(y, z), \quad \forall x, y, z \in X \text{ (Triangle inequality)}. \tag{1.3}$$

The pair (X, ρ_X) is called a *metric space.*

D e f i n i t i o n 1.2. Let X be a nonempty set, $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$ be a function and $s \ge 1$ be a number. If (1.1) and (1.2) hold and the following inequality satisfied:

$$\rho_X(x, z) \le s(\rho_X(x, y) + \rho_X(y, z)) \quad \forall x, y, z \in X, \tag{1.4}$$

then ρ_X is called a b*-metric.* The pair (X, ρ_X) is called a b*-metric space.*

D e f i n i t i o n 1.3. Let X be a nonempty set, $\rho_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$ be a function, $q_1 \ge 1$, and $q_2 \ge 1$ be numbers. If (1.1) holds and the following inequality satisfied:

$$\rho_X(x, z) \le q_1 \rho_X(x, y) + q_2 \rho_X(y, z), \qquad \forall x, y, z \in X, \tag{1.5}$$

then ρ_X is called a (q_1, q_2)*-quasimetric.* The pair (X, ρ_X) is called a (q_1, q_2)*-quasimetric space.* If additionally $q_1 = q_2 = 1$, then ρ_X is called a *quasimetric*, and (X, ρ_X) is a *quasimetric space.*

R e m a r k 1.1. If in Definition 1.3 $q_1 = q_2 = 1$ and (1.2) holds, then ρ_X is a metric, and (X, ρ_X) is a metric space.

In the following definitions, we consider additional notions for a (q_1, q_2)-quasimetric space.

D e f i n i t i o n 1.4. Let (X, ρ_X) be a (q_1, q_2)-quasimetric space and $q_0 \geq 1$. If

$$\rho_X(x, y) \leq q_0 \rho_X(y, x)$$

for all $x, y \in X$, then ρ_X is called a q_0-*symmetric* (q_1, q_2)-*quasimetric*, and the pair (X, ρ_X) is a q_0-*symmetric* (q_1, q_2)-*quasimetric space.* If, in addition, $q_0 = 1$, then (X, ρ_X) is called *a symmetric* (q_1, q_2)-*quasimetric space.*

R e m a r k 1.2. If in Definition 1.4 $q_0 = q_1 = q_2 = 1$, then (X, ρ_X) is an ordinary metric space.

D e f i n i t i o n 1.5. Let (X, ρ_X) be a (q_1, q_2)-quasimetric space. It is called a *weakly symmetric* (q_1, q_2)-*quasimetric space* if for any $\{x_i\} \subset X$, $x \in X$ we have

$$\lim_{i \to \infty} \rho_X(x, x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \to \infty} \rho_X(x_i, x) = 0.$$

D e f i n i t i o n 1.6. A sequence of points $\{x_n\}$ in a (q_1, q_2)-quasimetric space (X, ρ_X) is said to *converge to a point* $x \in X$ if $\rho_X(x, x_n) \to 0$, $n \to \infty$. In this case, x is called a *limit* of this sequence. A sequence $\{x_n\}$ in a (q_1, q_2)-quasimetric space (X, ρ_X) is called a *fundamental sequence* or a *Cauchy sequence* if, for every $\varepsilon > 0$ there is an N such that $\rho_X(x_m, x_n) < \varepsilon$, for all $n > m > N$. A (q_1, q_2)-quasimetric space (X, ρ_X) is said to be *complete* if each of its fundamental sequences has a limit (possibly non-unique).

D e f i n i t i o n 1.7. Let Y be a nonempty set. We define a function $d : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ that satisfies only the identity axiom:

$$d(y_1, y_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_1 = y_2 \quad \forall y_1, y_2 \in Y.$$

In this case, d is called a *distance.* A sequence $\{y_i\}$ in this space is said to *converge to* y if $d(y, y_i) \to 0$.

Here we indicate that the distance d on the set Y satisfies only the first metric condition, while the second (symmetry) and third (triangle inequality) conditions are not necessarily satisfied.

Also note that for a sequence $\{y_i\}$ and an element y in Y, if $d(y, y_i)$ converges to 0, this does not mean that $d(y_i, y)$ also converges to 0, and the limit may not be unique.

From [7], we provide extensions of the definitions of α-covering and β-Lipschitzness for mappings defined from (q_1, q_2)-quasimetric space (X, ρ_X) to a space (Y, d) equipped with a distance satisfying only the identity axiom.

D e f i n i t i o n 1.8. Let $\alpha > 0$. A mapping $\psi : X \to Y$ is called α-*covering* if the following relation is satisfied:

$$\forall x_0 \in X \;\; \forall y \in Y \;\; \exists x \in X \;:\; \psi(x) = y,$$

and

$$\rho_X(x, x_0) \leq \frac{1}{\alpha} d(\psi(x), \psi(x_0)).$$

D e f i n i t i o n 1.9. Let $\beta \geq 0$. A mapping $\varphi : X \to Y$ is called β*-Lipschitz* if the following relation is satisfied:

$$\forall x, x_0 \in X \;\; d(\varphi(x), \varphi(x_0)) \leq \beta \rho_X(x, x_0).$$

For mappings acting from a (q_1, q_2)-quasimetric space X to a space with distance Y, the following standard definitions are used. A mapping $f : X \to Y$ is called *continuous at a point* $x \in X$ if for any sequence $\{x_n\} \subset X$ converging to x (i. e., $\rho_X(x, x_n) \to 0$), we have $f(x_n) \to f(x)$ (i. e., $d(f(x), f(x_n)) \to 0$). A mapping $f : X \to Y$ is called *closed at a point* $x \in X$ if the convergence of a sequence $\{x_n\} \subset X$ to x and the existence of $y \in Y$ such that $f(x_n) \to y$ imply the identity $f(x) = y$. A mapping continuous (closed) at all points is called *continuous* (*closed*). We stress that in contrast to metric spaces, the continuity of a mapping does not imply its closedness (see Example 1.1 from [15]). Also, we note that for the continuity of the mapping f at a point x, the uniqueness of the limit $f(x)$ of the sequence $\{f(x_i)\}$ is not required (see Example 1.1 from [16]).

D e f i n i t i o n 1.10. A point $x \in X$ is called a *coincidence point* of the mappings $\psi : X \to Y$ and $\varphi : X \to Y$ if the following relation is satisfied:

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

The following theorem is the principal theorem of coincidence point in a metric space.

Theorem 1.1 (see [7]). *Let (X, ρ_X) be a complete metric space, (Y, ρ_Y) be a metric space, and the following conditions be satisfied: the mapping $\psi : X \to Y$ is α-covering and closed, the mapping $\varphi : X \to Y$ is β-Lipschitz, with $\alpha > \beta$. Then, for every $x_0 \in X$, there exists a coincidence point ξ of ψ and φ such that*

$$\forall x_0 \in X \quad \exists \xi \in X \, : \, \psi(\xi) = \varphi(\xi),$$

and

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \rho_Y(\varphi(x_0), \psi(x_0)).$$

2. Main results

In this section, consider mappings $\psi, \varphi : X \to Y$, where X is a (q_1, q_2)-quasimetric space such that $q_1 \geq 1$ and $q_2 \geq 1$, and Y is a space equipped with a distance satisfying only the identity axiom.

Let $\alpha > \beta \geq 0$ be given real numbers.

For $\theta \in \mathbb{R}$ and for $n \in \mathbb{N}$, we denote by $S(\theta, n)$ the sum of the first n terms of a geometric sequence $\sum_{i=0}^{n-1} \theta^i$, and thus,

$$S(\theta, n) = \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}.$$

Assume that $S(\theta, 0) = 0$ and $\beta^0 = 1$ when $\beta = 0$. For arbitrary values $q_0, q_1, q_2 \geq 1$, we set

$$m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \, : \, q_2 \beta^j < \alpha^j\}.$$

Note that the existence of m_0 follows from the assumption $\beta < \alpha$.

Under the assumption that $q_0^2\beta < \alpha$, we set

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \,:\, q_1(q_0^2\beta)^j < \alpha^j\}.$$

The following theorem is the main result of this paper. Before stating it, we note that this theorem is practically identical to Theorem 4.5 in [8]. In Theorem 4.5, Y is a $(q_1^{'}, q_2^{'})$-quasimetric space (where $q_1^{'} \geq 1, q_2^{'} \geq 1$), but in the proposed theorem, Y is a space equipped with a distance satisfying only the identity axiom. Moreover, since every (q_1, q_2)-quasimetric space is a b-metric space, the proposed theorem is a general case of the result obtained in [9].

Theorem 2.1. *Let (X, ρ_X) be a complete (q_1, q_2)-quasimetric space and (Y, d) be a distance space. Suppose that the mapping $\psi : X \to Y$ is α-covering and closed, and the mapping $\varphi : X \to Y$ is β-Lipschitz. Fix any point $x_0 \in X$. Then the mappings ψ and φ have a coincidence point ξ for which the following estimate holds:*

$$\varliminf_{\eta\to\xi}\rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{q_1^2\alpha^{m_0-1}S(q_2\beta/\alpha, m_0-1) + q_1(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)). \tag{2.1}$$

If the space (X, ρ_X) is weakly symmetric, then for ξ the following estimate is also verified:

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{q_1^3\alpha^{m_0-1}S(q_2\beta/\alpha, m_0-1) + q_1^2(q_2\beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2\beta^{m_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)). \tag{2.2}$$

If the space (X, ρ_X) is q_0-symmetric and $q_0^2\beta < \alpha$, then for ξ the following estimates are also verified:

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq q_0q_2^2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)), \tag{2.3}$$

$$\varliminf_{\eta\to\xi}\rho_X(\eta, x_0) \leq q_0q_2\frac{q_2\alpha^{n_0-1}S(q_1q_0^2\beta/\alpha, n_0-1) + (q_1q_0^2\beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1(q_0^2\beta)^{n_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)). \tag{2.4}$$

P r o o f. Let x_0 belong to X. If $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$, then the theorem is verified.
Now, if $\psi(x_0) \neq \varphi(x_0)$, we consider the sequence $\{x_i\} \subset X$. Let

$$a = d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

Since ψ is α-covering, then there exists a point $x_1 \in X$ such that:

$$\psi(x_1) = \varphi(x_0), \qquad \rho_X(x_0, x_1) \leq \frac{1}{\alpha}d(\psi(x_0), \varphi(x_0)) = \frac{1}{\alpha}\,a.$$

And as the mapping φ is β-Lipschitz, so

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq \beta\rho_X(x_0, x_1).$$

For the general case $i \in N$, we have:

$$\begin{gathered}\psi(x_i) = \varphi(x_{i-1}),\\ \rho_X(x_{i-1}, x_i) \leq \frac{1}{\alpha}d(\psi(x_{i-1}), \varphi(x_{i-1})) \leq \frac{1}{\alpha}d(\varphi(x_{i-2}), \varphi(x_{i-1})) \leq \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{i-2}, x_{i-1}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Indeed, suppose that the terms of the sequence $x_0,x_1,\dots,x_i$ satisfy the relations (2.5) and are constructed. Then there exists a point $x_{i+1}\in X$ such that:

$$\begin{gathered}\psi(x_{i+1})=\varphi(x_i),\\ \rho_X(x_i,x_{i+1})\le\frac{1}{\alpha}d(\psi(x_i),\varphi(x_i))=\frac{1}{\alpha}d(\varphi(x_{i-1}),\varphi(x_i))\le\frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{i-1},x_i).\end{gathered}\tag{2.6}$$

Thus, the construction of the sequence $\{x_i\}\subset X$ is completed. Using (2.6), we obtain:

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i,x_{i+1})&\le\frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{i-1},x_i)\le\frac{\beta^2}{\alpha^2}\rho_X(x_{i-2},x_{i-1})\le\cdots\\ &\le\frac{\beta^i}{\alpha^i}\rho_X(x_0,x_1)\le\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}d(\psi(x_0),\varphi(x_0))=\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}\,a.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Now we show that the sequence $\{x_i\}$ is fundamental. For all integers $i,j\ge 0$, by using the relations (2.7) and (1.5), we obtain:

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i,x_{i+j})&\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+1})+q_2\rho_X(x_{i+1},x_{i+j})\\ &\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a+q_2\big(q_1\rho_X(x_{i+1},x_{i+2})+q_2\rho_X(x_{i+2},x_{i+j})\big)\\ &\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a+q_2q_1\rho_X(x_{i+1},x_{i+2})+q_2^2\rho_X(x_{i+2},x_{i+j})\\ &\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a+q_2q_1\frac{\beta^{i+1}}{\alpha^{i+2}}a+q_2^2\big(q_1\rho_X(x_{i+2},x_{i+3})+q_2\rho_X(x_{i+3},x_{i+j})\big)\\ &\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a+q_2q_1\frac{\beta^{i+1}}{\alpha^{i+2}}a+q_2^2q_1\rho_X(x_{i+2},x_{i+3})+q_2^3\rho_X(x_{i+3},x_{i+j}),\end{aligned}$$

etc. As the result we get

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i,x_{i+j})&\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a+q_2q_1\frac{\beta^{i+1}}{\alpha^{i+2}}a+q_2^2q_1\frac{\beta^{i+2}}{\alpha^{i+3}}a+\cdots+q_2^{j-2}q_1\frac{\beta^{i+j-2}}{\alpha^{i+j-1}}a+q_2^{j-1}\frac{\beta^{i+j-1}}{\alpha^{i+j}}a\\ &\le q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\left(1+q_2\frac{\beta^1}{\alpha^1}+q_2^2\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\cdots+q_2^{j-2}\frac{\beta^{j-2}}{\alpha^{j-2}}+q_1^{-1}q_2^{j-1}\frac{\beta^{j-1}}{\alpha^{j-1}}\right)\\ &=q_1\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\tilde S(j),\end{aligned}$$

where

$$\tilde S(j)=S(q_2\frac{\beta}{\alpha},j-1)+q_1^{-1}q_2^{j-1}\frac{\beta^{j-1}}{\alpha^{j-1}},\quad j\in N,\quad \tilde S(0)=0.$$

By using the latter, for all non-negative integers i and k, we obtain:

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i,x_{i+k})&\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+m_0})+q_2\rho_X(x_{i+m_0},x_{i+k})\\ &\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+m_0})+q_2\big(q_1\rho_X(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2\rho_X(x_{i+2m_0},x_{i+k})\big)\\ &\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+m_0})+q_2q_1\rho_X(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2^2\rho_X(x_{i+2m_0},x_{i+k})\\ &\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+m_0})+q_2q_1\rho_X(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2^2\big(q_1\rho_X(x_{i+2m_0},x_{i+3m_0})\\ &\qquad+q_2\rho_X(x_{i+3m_0},x_{i+k})\big)\\ &\le q_1\rho_X(x_i,x_{i+m_0})+q_2q_1\rho_X(x_{i+m_0},x_{i+2m_0})+q_2^2q_1\rho_X(x_{i+2m_0},x_{i+3m_0})\\ &\qquad+q_2^3\rho_X(x_{i+3m_0},x_{i+k}).\end{aligned}$$

Continuing similar calculations, we obtain

$$\rho_X(x_i, x_{i+k}) \leq q_1\rho_X(x_i, x_{i+m_0}) + q_2q_1\rho_X(x_{i+m_0}, x_{i+2m_0}) + q_2^2q_1\rho_X(x_{i+2m_0}, x_{i+3m_0}) + \cdots + q_1q_2^{r-1}\rho_X(x_{i+(r-1)m_0}, x_{i+rm_0}) + q_2^r\rho_X(x_{i+rm_0}, x_{i+k}),$$

where $r = [k/m_0]$.

From the obtained inequality, it directly follows that

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i, x_{i+k}) &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\tilde{S}(m_0) + q_1^2q_2a\frac{\beta^{i+m_0}}{\alpha^{i+1+m_0}}\tilde{S}(m_0) + q_1^2q_2^2a\frac{\beta^{i+2m_0}}{\alpha^{i+1+2m_0}}\tilde{S}(m_0) + \cdots \\ &\quad + q_1^2q_2^{r-1}a\frac{\beta^{i+(r-1)m_0}}{\alpha^{i+(r-1)m_0+1}}\tilde{S}(m_0) + q_1q_2^ra\frac{\beta^{i+rm_0}}{\alpha^{i+rm_0+1}}\tilde{S}(k-rm_0) \\ &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\tilde{S}(m_0)\left(1 + q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}} + q_2^2\frac{\beta^{2m_0}}{\alpha^{2m_0}} + \ldots + q_2^{r-1}\frac{\beta^{(r-1)m_0}}{\alpha^{(r-1)m_0}}\right) \\ &\quad + q_1q_2^ra\frac{\beta^{i+rm_0}}{\alpha^{i+rm_0+1}}\tilde{S}(k-rm_0) \\ &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\tilde{S}(m_0)S(q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}, r) + q_1q_2^ra\frac{\beta^{i+rm_0}}{\alpha^{i+rm_0+1}}\tilde{S}(k-rm_0),\end{aligned}$$

where $r = [k/m_0]$.

Therefore, by construction $q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}} < 1$, we have:

$$\begin{aligned}\rho_X(x_i, x_{i+k}) &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\tilde{S}(m_0)S(q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}, r) + q_1q_2^ra\frac{\beta^{i+rm_0}}{\alpha^{i+rm_0+1}}\tilde{S}(k-rm_0) \\ &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\left(\tilde{S}(m_0)S\big(q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}, r\big) + q_1^{-1}q_2^r\frac{\beta^{rm_0}}{\alpha^{rm_0}}\tilde{S}(k-rm_0)\right) \\ &\leq q_1^2\frac{\beta^i}{\alpha^{i+1}}a\left(\frac{\tilde{S}(m_0)}{1 - q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}} + q_1^{-1}\tilde{S}(k-rm_0)\right).\end{aligned} \tag{2.8}$$

But the term $q_1^{-1}\tilde{S}(k-rm_0)$ is uniformly bounded for all k, $r = [k/m_0]$, because $0 \leq k - rm_0 < m_0$.

Thus, the sequence $\{x_i\}$ is fundamental in complete space, so it has a limit ξ satisfying the following relation:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \xi \;\Leftrightarrow\; \lim_{i\to\infty}\rho_X(\xi, x_i) = 0. \tag{2.9}$$

By taking the limit in equality (2.6) and using the continuity of the mapping φ and the closedness of the mapping ψ, we obtain the equality

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi).$$

If the number $k = lm_0$, $l \in \mathbb{N}$, then by construction,

$$\tilde{S}(k - rm_0) = 0.$$

Thus, for any natural number k that is a multiple of m_0, in equation (2.8) with $i = 0$, we have:

$$\rho_X(x_0, x_k) \leq \frac{a}{\alpha}\left(\frac{q_1^2\tilde{S}(m_0)}{1 - q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}}\right). \tag{2.10}$$

From this inequality, using (2.6) and (2.9), we obtain the corresponding estimate (2.1).

Now, suppose that the space (X, ρ_X) is weakly symmetric.

Using (2.6), (2.9), and (2.10), we obtain:

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq q_1\rho_X(x_0, x_k) + q_2\rho_X(x_k, \xi) \leq$$
$$\leq q_1 \frac{a}{\alpha}\left(\frac{q_1^2\tilde{S}(m_0)}{1 - q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}}\right) \leq \frac{1}{\alpha}\frac{q_1^3\tilde{S}(m_0)}{1 - q_2\frac{\beta^{m_0}}{\alpha^{m_0}}} d(\psi(x_0)), \varphi(x_0)).$$

Thus, (2.2) is proven.

Now, we will prove (2.3) and (2.4).

Suppose the space (X, ρ_X) is q_0-symmetric, $q_0^2\frac{\beta}{\alpha} < 1$, and by using (2.7), we have

$$\frac{\rho_X(x_{i+1}, x_i)}{q_0} \leq \rho_X(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_{i-1}, x_i) \leq \frac{\beta}{\alpha}q_0\rho_X(x_i, x_{i-1}).$$

Thus,

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq q_0^2\frac{\beta}{\alpha}\rho_X(x_i, x_{i-1}). \tag{2.11}$$

Let

$$\tilde{a} = \rho_X(x_1, x_0), \quad \tilde{\beta} = q_0^2\frac{\beta}{\alpha}.$$

Then, we have $\tilde{\beta} < 1$. By inequality (2.11), we have:

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \tilde{\beta}\rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \tilde{\beta}^2\rho_X(x_{i-1}, x_{i-2}) \leq \cdots$$
$$\leq \tilde{\beta}^i d_X(x_1, x_0) \leq \tilde{\beta}^i\tilde{a}. \tag{2.12}$$

For all integers $i, j \in \mathbb{N}$, using (2.11), (2.12), we obtain:

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_{i+j}, x_i) &\leq q_1\rho_X(x_{i+j}, x_{i+1}) + q_2\rho_X(x_{i+1}, x_i)\\
&\leq q_1\rho_X(x_{i+j}, x_{i+1}) + q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\\
&\leq q_1\big(q_1\rho_X(x_{i+j}, x_{i+2}) + q_2\rho_X(x_{i+2}, x_{i+1})\big) + q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\\
&\leq q_1^2\rho_X(x_{i+j}, x_{i+2}) + q_1q_2\rho_X(x_{i+2}, x_{i+1}) + q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\\
&\leq q_1^2\big(q_1\rho_X(x_{i+j}, x_{i+3}) + q_2\rho_X(x_{i+3}, x_{i+2})\big) + q_1q_2\tilde{\beta}^{i+1}\tilde{a} + q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\\
&\leq q_1^3\rho_X(x_{i+j}, x_{i+3}) + q_1^2q_2d_X(x_{i+3}, x_{i+2}) + q_1q_2\tilde{\beta}^{i+1}\tilde{a} + q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}.
\end{aligned}$$

Having carried out similar transformations a sufficient number of times, we obtain

$$\rho_X(x_{i+j}, x_i) \leq q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a} + q_1q_2\tilde{\beta}^{i+1}\tilde{a} + q_1^2q_2\tilde{\beta}^{i+2}\tilde{a} + \cdots + q_1^{j-2}q_2\tilde{\beta}^{i+(j-2)}\tilde{a} + q_1^{j-1}\tilde{\beta}^{i+(j-1)}\tilde{a}$$
$$\leq q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}(1 + q_1\tilde{\beta}^1 + q_1^2\tilde{\beta}^2 + \cdots + q_1^{j-2}\tilde{\beta}^{j-2} + q_1^{j-1}\tilde{\beta}^{j-1}q_2^{-1}) = q_2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\hat{S}(j),$$

where

$$\hat{S}(j) = S(q_1\tilde{\beta}, j-1) + q_1^{j-1}\tilde{\beta}^{j-1}q_2^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad \hat{S}(0) = 0.$$

From the latter, for all non-negative integers i and k, we obtain:

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_{i+k}, x_i) &\leq q_1\rho_X(x_{i+k}, x_{i+n_0}) + q_2\rho_X(x_{i+n_0}, x_i) \\
&\leq q_1\big(q_1 d_X(x_{i+k}, x_{i+2n_0}) + q_2\rho_X(x_{i+2n_0}, x_{i+n_0})\big) + q_2\rho_X(x_{i+n_0}, x_i) \\
&\leq q_1^2\rho_X(x_{i+k}, x_{i+2n_0}) + q_1q_2\rho_X(x_{i+2n_0}, x_{i+n_0}) + q_2\rho_X(x_{i+n_0}, x_i) \\
&\leq q_1^2\big(q_1\rho_X(x_{i+k}, x_{i+3n_0}) + q_2\rho_X(x_{i+3n_0}, x_{i+2n_0})\big) + q_1q_2\rho_X(x_{i+2n_0}, x_{i+n_0}) \\
&\qquad\qquad + q_2\rho_X(x_{i+n_0}, x_i) \\
&\leq q_1^3\rho_X(x_{i+k}, x_{i+3n_0}) + q_1^2q_2\rho_X(x_{i+3n_0}, x_{i+2n_0}) + q_1q_2\rho_X(x_{i+2n_0}, x_{i+n_0}) \\
&\qquad\qquad + q_2\rho_X(x_{i+n_0}, x_i).
\end{aligned}$$

We continue similar calculations, and as the result we get

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_{i+k}, x_i) &\leq q_2^2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\hat{S}(n_0) + q_1q_2^2\tilde{\beta}^{i+n_0}\tilde{a}\hat{S}(n_0) + q_1q_2^2\tilde{\beta}^{i+2n_0}\tilde{a}\hat{S}(n_0) + \cdots \\
&\qquad + q_1^{r-1}q_2^2\tilde{\beta}^{i+(r-1)n_0}\tilde{a}\hat{S}(n_0) + q_1^r\rho_X(x_{i+k}, x_{i+rn_0}) \\
&\leq q_2^2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\hat{S}(n_0)\big(1 + q_1\tilde{\beta}^{n_0} + q_1\tilde{\beta}^{2n_0} + \cdots + q_1^{r-1}\tilde{\beta}^{(r-1)n_0}\big) + q_1^r\rho_X(x_{i+k}, x_{i+rn_0}) \\
&\leq q_1^r q_2\tilde{\beta}^{i+rn_0}\tilde{a}\hat{S}(k - rn_0) + q_2^2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\hat{S}(n_0)S(q_1\tilde{\beta}^{n_0}, r),
\end{aligned}$$

where $r = [k/n_0]$.

Thus, considering that by construction

$$q_1\tilde{\beta}^{n_0} < 1,$$

we have:

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_{i+k}, x_i) &\leq q_2^2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\big(q_1^r q_2^{-1}\tilde{\beta}^{rn_0}\hat{S}(k - rn_0) + \hat{S}(n_0)S(q_1\tilde{\beta}^{n_0}, r)\big) \\
&\leq q_2^2\tilde{\beta}^i\tilde{a}\left(q_2^{-1}\hat{S}(k - rn_0) + \frac{\hat{S}(n_0)}{1 - q_1\tilde{\beta}^{n_0}}\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

If $k \in \mathbb{N}$ is a multiple of n_0, then by construction,

$$\hat{S}(k - rn_0) = 0.$$

Thus, for $k \in \mathbb{N}$, a multiple of n_0 from (2.13), for $i = 0$, we have

$$\begin{aligned}
\rho_X(x_k, x_0) &\leq \frac{q_2^2\hat{S}(n_0)}{1 - q_1\tilde{\beta}^{n_0}}\rho_X(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\frac{q_0q_2^2\hat{S}(n_0)}{1 - q_1\tilde{\beta}^{n_0}}d(\psi(x_0), \varphi(x_0)),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

since

$$\hat{a} \leq \frac{q_0}{\alpha}\, d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

Now, using (2.6), and from inequality (2.14) as in the previous section, using (1.5) we obtain

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq \frac{q_0}{\alpha}\frac{q_2^3\hat{S}(n_0)}{1 - q_1\tilde{\beta}^{n_0}}d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

This proves (2.3).

From (2.3) also, by using (2.14), we obtain:

$$\lim_{\eta \to \xi} \rho_X(\eta, x_0) \le \frac{q_0}{\alpha} \frac{q_2^2 \hat{S}(n_0)}{1 - q_1 \tilde{\beta}^{n_0}} d(\psi(x_0), \varphi(x_0)).$$

This proves (2.4). □

We now study the stability of the coincidence point ξ of the mappings ψ, φ. We will interpret stability as follows. Let $\psi_n, \varphi_n : X \to Y$ be defined for all $n \in \mathbb{N}$. Assuming some convergence of these mappings to the original mappings ψ, φ, we will show that for any n, the mappings ψ_n, φ_n have a coincidence point ξ_n, and ξ_n converges to ξ.

Recall that a coincidence point of the mappings $\psi_n, \varphi_n : X \to Y$ is the solution of the equation

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x).$$

Theorem 2.2. *Let (X, ρ_X) be a complete weakly symmetric (q_1, q_2)-quasimetric space, and let $\xi \in X$ be a coincidence point of the mappings $\psi, \varphi : X \to Y$. For each $n \in \mathbb{N}$, given $0 \le \beta_n < \alpha_n$, we define:*

$$S_n = \frac{q_1^3 \alpha_n^{m_0 - 1} S(q_2 \frac{\beta_n}{\alpha_n}, m_0 - 1) + q_1^2 (q_2 \beta_n)^{m_0 - 1}}{\alpha_n^{m_0} - q_2 \beta_n^{m_0}} d(\psi_n(\xi), \varphi_n(\xi)).$$

We assume that for each $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, the mapping ψ_n is α_n-covering and closed, the mapping φ_n is β_n-Lipschitz. If $S_n \to 0$ as $n \to \infty$, then for all $n \in \mathbb{N}$, equation (2.3) has at least one solution ξ_n such that $\xi_n \to \xi$ as $n \to \infty$.

P r o o f. For every $n \in \mathbb{N}$, the conditions of Theorem 2.1 are satisfied for the mappings $\psi_n, \varphi_n : X \to Y$, with $x_0 = \xi$. So for each n, there exists a solution ξ_n for the equation $\psi_n(x) = \varphi_n(x)$ such that $\rho_X(\xi, \xi_n) \le S_n$. Due to the convergence $S_n \to 0$ as $n \to \infty$, we obtain $\xi_n \to \xi$ as $n \to \infty$. □

We note that this theorem is an extension of the result obtained in [9].

References

[1] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[2] E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, “A method for studying integral equations by using a covering set of the Nemytskii operator in spaces of measurable functions”, *Differential Equations*, **58**:1 (2022), 93–104.

[3] E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[4] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of non-linear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[5] E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[6] E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, "On controlling objects whose motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Automation and Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[7] A. V. Arutyunov, "Covering of mappings in metric space and fixed point", *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[8] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, "Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points", *Doklady Mathematics*, **469**:5 (2016), 434–437.

[9] S. Benarab, W. Merchela, N. Khial, "Some results of coincidence point on B-metric space", *Izv. IMI UdGU*, **65** (2025), 28–35.

[10] E. S. Zhukovskiy, "Geometric progressions in distance spaces; applications to fixed points and coincidence points", *Sbornik: Mathematics*, **214**:2 (2023), 246–272.

[11] E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "On the continuous dependence on the parameter of the set of solutions of the operator equation", *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, **54** (2019), 27–37.

[12] S. Benarab, E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation", *Trudy Inst. Matem. Mekh. UrO RAN*, **25**:4 (2019), 52–63.

[13] E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 41–54.

[14] W. Merchela, "On Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73.

[15] T. V. Zhukovskaia, W. Merchela, "On stability and continuous dependence on parameter of the set of coincidence points of two mappings acting in a space with a distance", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 247–260.

[16] T. V. Zhukovskaia, W. Merchela, A. Shindiapin, "On the coincidence points of the mappings in generalized metric spaces", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 18–24.

Information about the authors

Sarra Benarab, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Architecture and Urban Planning. University Salah Boubnider Constantine 3, Constantine, Algeria. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com, sarra.benarab@univ-constantine3.dz
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Wassim Merchela, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Process Engineering. University Salah Boubnider Constantine 3, Constantine, Algeria; Department of Mathematics. Mascara State University, Mascara, Algeria. E-mail: merchela.wassim@gmail.com, wassim.merchela@univ-constantine3.dz
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Mohammed E. Kharoubi, Post-Graduate Student, Laboratory of Applied Mathematics and Modeling. 8 Mai 1945 University, Guelma, Algeria. E-mail: kharoubi.mohammed.elamin@gmail.com, kharoubi.mohamed-elamin@univ-guelma.dz
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-0030-6057

Информация об авторах

Бенараб Сарра, кандидат физико-математических наук, доцент факультета архитектуры и градостроительства. Университет Салаха Бубнидера Константина 3, Константина, Алжир. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com, sarra.benarab@univ-constantine3.dz
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Мерчела Вассим, кандидат физико-математических наук, доцент факультета инженерии процессов. Университет Салаха Бубнидера Константина 3, Константина, Алжир; кафедра математики. Университет Мустафы Стамбули, г. Маскара, Алжир. E-mail: merchela.wassim@gmail.com, wassim.merchela@univ-constantine3.dz
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Харуби Мухаммед Эльамин, аспирант, лаборатория прикладной математики и моделирования. Университет 8 мая 1945 года, Гуэльма, Алжир. E-mail: kharoubi.mohammed.elamin@gmail.com, kharoubi.mohamed-elamin@univ-guelma.dz
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-0030-6057

Naouel Khial, Master's Degree Student, Department of Mathematics. Mustapha Stambouli University, Mascara, Algeria. E-mail: khialnaouel@gmail.com

Хьяль Науэль, магистрант кафедры математики. Университет Мустафы Стамбулли, Маскара, Алжир. E-mail: khialnaouel@gmail.com

There is no conflict of interests.

Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
W. Merchela
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Для контактов:
Мерчела Вассим
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Received 06.08.2025
Reviewed 05.11.2025
Accepted for press 21.11.2025

Поступила в редакцию 06.08.2025 г.
Поступила после рецензирования 05.11.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-322-337

On the control problem for a pseudo-parabolic equation with involution in a bounded domain

Farrukh N. DEKHKONOV[1] **, Batirkhan Kh. TURMETOV**[2,3]

[1] Namangan State University
316 Uychi St., Namangan 1600136, Uzbekistan
[2] Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University
29 Bekzat Sattarhanov St., Turkistan 161200, Kazakhstan
[3] Alfraganus University
2a Yukori Karakamish Str., Tashkent 100190, Uzbekistan

Abstract. This paper considers a control problem for a pseudo-parabolic equation with an involution operator in a bounded domain. A generalized solution to the corresponding initial boundary value problem is obtained. By introducing an additional integral condition, the control problem is reduced to a Volterra integral equation of the first kind. To show that the integral equation has a solution, some estimates are obtained for the kernel of this integral equation. The existence of a solution to the integral equation is shown using the Laplace transform method and the admissibility of the control function is proved.

Keywords: pseudo-parabolic equation, Volterra integral equation, admissible control, initial boundary value problem, Laplace transform, weight function

Acknowledgements: The research was supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP23488086).

Mathematics Subject Classification: 35K70, 35K35.

For citation: Dekhkonov F.N., Turmetov B.Kh. On the control problem for a pseudo-parabolic equation with involution in a bounded domain. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 322–337.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-322-337

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-322-337
УДК 517.977

О задаче управления для псевдопараболического уравнения с инволюцией в ограниченной области

Фаррух Нуриддин угли ДЕХКОНОВ[1] **, Батирхан Худайбергенович ТУРМЕТОВ**[2,3]

[1] Наманганский государственный университет
160136, Узбекистан, г. Наманган, ул. Уйчи, 316

[2] Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави
161200, Казахстан, г. Туркестан, ул. Бекзата Саттарханова, 29

[3] Университет Альфраганус
100190, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Юкори Каракамыш, 2а

Аннотация. В данной работе рассматривается задача управления для псевдопараболического уравнения с оператором инволюции в ограниченной области. Получено обобщенное решение соответствующей начально-краевой задачи. Путем введения дополнительного интегрального условия задача управления сведена к интегральному уравнению Вольтерра первого рода. Для того чтобы показать, что интегральное уравнение имеет решение, получены некоторые оценки для ядра этого интегрального уравнения. С помощью метода преобразования Лапласа показано существование решения интегрального уравнения и доказана допустимость функции управления.

Ключевые слова: псевдопараболическое уравнение, интегральное уравнение Вольтерра, допустимое управление, начально-краевая задача, преобразование Лапласа, весовая функция

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488086).

Для цитирования: *Дехконов Ф.Н., Турметов Б.Х.* О задаче управления для псевдопараболического уравнения с инволюцией в ограниченной области // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 322–337.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-322-337

Introduction

Pseudo-parabolic equations arise in various applied contexts, including fluid flow, heat transfer, and radiative diffusion [1, 2]. These models extend classical parabolic equations by capturing memory and inertial effects, allowing for higher-order diffusion modeling.

In recent years, growing interest in control theory and applied mathematics has spurred extensive research on control problems for pseudo-parabolic equations. Foundational contributions include the study of control and its comparison with classical parabolic models [3], and investigations on stability, uniqueness, and existence of solutions for various pseudo-parabolic systems [4]. Point control for parabolic and pseudoparabolic models is discussed in detail in [5].

The foundations of control problems for parabolic equations were laid by Friedman [6], with significant progress on controllability achieved by Fattorini and Russell [7]. Egorov [8] extended the theory to infinite-dimensional settings by generalizing Pontryagin's maximum principle and proving a bang-bang type result. Comprehensive overviews of optimal control for PDEs are presented in the monographs by Fursikov [9] and Lions [10].

The bang-bang principle in time-optimal boundary control problems was rigorously examined in [11], where it was shown that such controls are optimal for driving the system to any prescribed temperature profile. Initial studies on time-optimal control for heat conduction in bounded n-dimensional domains were presented in [12], where estimates for the minimal time required to reach a prescribed average temperature were established. The boundary control problem for the heat equation in a two-dimensional domain was investigated in [13], where the control function was applied to steer the temperature distribution toward a desired state, and its admissibility was established via geometric bounding techniques. Boundary control problems for heat transfer equations in [14] were further studied in the two-dimensional domain, focusing on the thermal regulation of inhomogeneous media. In [15], null-controllability of two degenerate heat equations with nonlocal spatial terms was established using Carleman estimates adapted to inhomogeneous coupled models.

In [16, 17], boundary control problems for pseudo-parabolic equations were further explored, where the construction of a suitable control function was achieved to ensure the heating of an inhomogeneous thin plate up to a prescribed temperature distribution.

In recent years, increasing attention has been paid to mixed problems for parabolic-type equations involving involution. Various inverse problems for such equations have been analyzed, for instance, in [18, 19]. The study [20] addresses a boundary value problem for the heat equation with an involution term in a one-dimensional spatial domain. A number of boundary value problems involving parabolic equations with involution have also been investigated in [21, 22]. In [23], a fourth-order parabolic equation with an involution is studied under appropriate boundary conditions.

The resolution of inverse problems for a nonlocal analogue of a fourth-order parabolic equation in a multidimensional parallelepiped domain is presented in [24]. In [25], an inverse problem for a fractional-order parabolic equation with a nonlocal biharmonic operator is thoroughly analyzed in a two-dimensional domain. The study [26] addresses inverse problems for the heat equation with involution under Dirichlet, Neumann, periodic, and antiperiodic boundary conditions, establishing existence and uniqueness results for each case. In addition, the works [27, 28] investigated boundary control problems for heat equations with involution, where the Laplace transform was used to find control functions ensuring the desired average temperature.

In this paper, we address a boundary control problem for a pseudo-parabolic equation involving an involution operator, with the principal aim of proving the existence of an admissible control function. By applying the method of separation of variables, the control problem is reduced to a Volterra integral equation of the first kind (see Section 2). Although establishing the solvability of such integral equations is known to be a nontrivial task, we employ the Laplace transform technique to construct a solution, thereby confirming the existence of the desired control. In Section 3, we derive key estimates for the integral kernel, which play a central role in the analysis. Section 4 is devoted to establishing bounds that ensure the admissibility of the control function.

1. Statement of problem. Main result

Consider a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in the form of an open rectangular parallelepiped defined by

$$\Omega := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i < p_i, \quad i = 1, \dots, n\},$$

where each $p_i > 0$ denotes the length of the domain along the x_i-axis. The boundary of Ω is denoted by $\partial\Omega$.

Consider the family of mappings $S_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ defined by

$$S_i x = (x_1, \dots, x_{i-1}, p_i - x_i, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

where each S_i reflects the i-th coordinate of the vector x with respect to the midpoint of the interval $(0, p_i)$. It is straightforward to verify that each S_i is an involution, i. e., $S_i^2 = I$, where I denotes the identity transformation on $\mathbb{R}^n$.

Let us consider all possible products of mappings S_i, i. e., $S_{ji} = S_j S_j$, or $S_{jik} = S_j S_j S_k, \dots$. The total number of such mappings, taking into account the identity mapping $S_0 x = x$, is equal to 2^n. To number such mappings, we will use the binary number system, namely, if $0 \le j < 2^n$ in the binary number system, the representation $j \equiv (j_n \dots j_1)_2 = j_1 + 2j_2 + \dots + 2^{n-1} j_n$, where j_k takes one of the values 0 or 1. Therefore, introduction the vector $j = (j_1, \dots, j_n)$, we can consider mappings of the type $S_j \equiv S_1^{j_1} \dots S_n^{j_n}$ corresponding to the index j.

Using these mappings, we define a nonlocal operator $\mathcal{L}_n$ acting on a function $U(x)$ by

$$\mathcal{L}_n U(x) = \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \, \Delta U(S_j x),$$

where $a_0, \dots, a_{2^n-1}$ are given real coefficients, and Δ denotes the standard Laplace operator. We refer to $\mathcal{L}_n$ as a nonlocal analogue of the Laplacian due to its dependence on spatial reflections.

It is known that the operator $\mathcal{L}_n$ is defined as follows for $n = 2$:

$$\mathcal{L}_2 U(x_1, x_2) = a_0 \Delta U(x_1, x_2) + a_1 \Delta U(p_1 - x_1, x_2) + a_2 \Delta U(x_1, p_2 - x_2) + a_3 \Delta U(p_1 - x_1, p_2 - x_2).$$

In this work, we investigate the following pseudo-parabolic equation with involution:

$$u_t(x,t) - \mathcal{L}_n \, u(x,t) - \mathcal{L}_n \, u_t(x,t) = h(x) \, \nu(t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

with the homogeneous Dirichlet boundary condition

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

and the initial condition

$$u(x,0)=0, \quad x\in\overline{\Omega}. \tag{1.3}$$

Here, $h(x)$ is a given function, and $\nu(t)$ is a control function. We say that function $\nu\in L_2(\mathbb{R}_+)$ is an *admissible control* if it satisfies the pointwise constraint $|\nu(t)|\le 1$ for almost every $t\ge 0$.

We now consider the following spectral problem:

$$\mathcal{L}_n w(x)+\lambda\, w(x)=0, \quad x\in\Omega, \tag{1.4}$$

with the homogeneous Dirichlet boundary condition

$$w(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{1.5}$$

In the special case when $a_0=1$ and $a_j=0$ for all $j=1,\dots,n$, the operator $\mathcal{L}_n$ coincides with the classical Laplace operator, and the spectral problem (1.4)–(1.5) reduces to the standard Dirichlet problem for the Laplacian.

To determine the eigenvalues and eigenfunctions of problem (1.4)–(1.5), we first recall the corresponding classical spectral problem:

$$\Delta\vartheta(x)+\mu\,\vartheta(x)=0, \quad x\in\Omega, \quad \vartheta(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{1.6}$$

It is well known that the eigenfunctions of problem (1.6) are given by

$$\vartheta_{m_1,\dots,m_n}(x)=C_n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{m_k\pi x_k}{p_k}, \quad m_k\in\mathbb{N}, \tag{1.7}$$

where $C_n=2^{n/2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p_k}}$ is the normalization constant ensuring that the functions are orthonormal in $L_2(\Omega)$ (see, e. g., [29, p. 331]).

The system of functions defined by (1.7) forms a complete orthonormal basis in the space $L_2(\Omega)$. The corresponding eigenvalues are given by

$$\mu_{m_1,\dots,m_n}=\pi^2\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{p_k^2}, \quad m_k\in\mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Thus, the eigenfunctions of problem (1.4)–(1.5) are given by (see [30])

$$w_{m_1,\dots,m_n}(x)=\vartheta_{m_1,\dots,m_n}(x)=C_n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{m_k\pi x_k}{p_k},$$

and the corresponding eigenvalues take the form

$$\lambda_{m_1,\dots,m_n}=\theta_{m_1,\dots,m_n}\pi^2\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^2}{p_k^2},$$

where

$$\theta_{m_1,\dots,m_n}=\sum_{j=0}^{2^n-1}a_j\,(-1)^{|j|+j_1m_1+j_2m_2+\dots+j_nm_n}, \quad m_k\in\mathbb{N}.$$

Here, for the index j represented in binary as $j=(j_n\dots j_1)_2$ with $j_k\in\{0,1\}$, $|j|=j_1+j_2+\dots+j_n$ denotes the Hamming weight of the binary vector.

Since the system of functions $\{\vartheta_{m_1,\dots,m_n}(x)\}$ is complete in $L_2(\Omega)$, it follows that the eigenfunctions of problem (1.4)–(1.5) coincide with those of the classical Dirichlet Laplacian whenever $\theta_{m_1,\dots,m_n} \neq 0$. In the subsequent analysis, we assume that $\theta_{m_1,\dots,m_n} > 0$ for all $m_k \in \mathbb{N}$ and $k = 1, \dots, n$.

As a consequence of this completeness, and since $w_{m_1,\dots,m_n}(x) = \vartheta_{m_1,\dots,m_n}(x)$, the following lemma holds.

Lemma 1.1 (see [30]). *The system of functions* $w_{m_1,\dots,m_n}(x)$, $m_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,n}$ *are orthonormal and complete in space* $L_2(\Omega)$.

We define the class of admissible weight functions $\rho(x)$ as

$$\mathcal{A}(\Omega) := \left\{ \rho \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \;\middle|\; \rho(x) \geq 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\rho(x) \leq 0, \quad \int_\Omega \rho(x)\,dx = 1, \quad k = 1, \dots, n \right\},$$

where $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ denotes the Sobolev space of functions that vanish on the boundary of Ω in the trace sense.

Assume that the Fourier coefficients of the given function $h(x)$ with respect to the eigenfunctions $\{w_{m_1,\dots,m_n}(x)\}$ satisfy the non-negativity condition

$$h_{m_1,\dots,m_n} \geq 0, \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$

where the coefficients are defined by

$$h_{m_1,\dots,m_n} = \int_0^{p_1} \cdots \int_0^{p_n} h(x_1, \dots, x_n)\, w_{m_1,\dots,m_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1, \dots, dx_n.$$

Consider the weight function

$$\rho(x) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \rho_{m_1,\dots,m_n}\, w_{m_1,\dots,m_n}(x), \quad x \in \Omega,$$

where $\rho_{m_1,\dots,m_n}$ are the Fourier coefficients of the function $\rho(x)$, i. e.

$$\rho_{m_1,\dots,m_n} = \int_\Omega \rho(x)\, w_{m_1,\dots,m_n}(x)\, dx \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, n.$$

The present study is devoted to the analysis of the following thermal control problem:

Control Problem. *For given a measurable function* $\phi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, *find an admissible control function* $\nu \in L_2(\mathbb{R}_+)$ *such that the solution* $u(x,t)$ *of the mixed problem* (1.1)–(1.3) *satisfies the integral condition*

$$\int_\Omega \rho(x)\, u(x,t)\, dx = \phi(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.10}$$

Physically, the function $\phi(t)$ corresponds to the desired average temperature within the domain Ω. The primary aim of this study is to construct an admissible control function that ensures the temperature of the system evolves in such a way that the prescribed average temperature $\phi(t)$ is attained for all $t \geq 0$.

For any constant $M > 0$, we define the class $W(M)$ as the set of functions $\phi \in W_2^2(\mathbb{R})$ satisfying the conditions

$$\|\phi\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)} \leq M, \quad \phi(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \leq 0.$$

We now state the main result of this paper.

Theorem 1.1. *There exists constant $M > 0$ such that for any function $\phi \in W(M)$, the solution $\nu(t)$ of the equation (1.10) exists and satisfies condition $|\nu(t)| \leq 1$.*

The proof of this theorem will be developed through a sequence of auxiliary results and estimates in the following sections.

2. Main integral equation

In this section, we demonstrate how the control problem governed by the pseudo-parabolic equation can be reduced to an equivalent Volterra integral equation of the first kind. This reduction enables us to apply analytical techniques for integral equations in order to investigate the existence, uniqueness, and admissibility of the control function.

Let B be a Banach space and $T > 0$ a fixed constant. We denote by $C([0,T] \to B)$ the Banach space of all continuous mappings $u\colon [0,T] \to B$ endowed with the norm $\|u\|_T \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B$. This space is itself a Banach space with respect to the given norm.

By $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, we denote the subspace of the Sobolev space $W_2^1(\Omega)$ consisting of functions with zero trace on $\partial\Omega$. Note that due to the closure $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ the sum of a series of functions from $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, converging in metric $W_2^1(\Omega)$ also belongs to $\mathring{W}_2^1(\Omega)$.

D e f i n i t i o n 2.1. Assume that $h \in L_2(\Omega)$ is given, and let $\nu \in L_2([0,T])$. A function $u(x,t)$ is called a generalized solution of problem (1.1)–(1.3) if:

1. $u \in C([0,T] \to \mathring{W}_2^1(\Omega))$;
2. $u(x,0) = 0$ holds for almost every $x \in \Omega$;
3. For every test function $\chi \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ and for all $t \in [0,T]$, the identity holds:

$$\int_\Omega u_t(x,t)\,\chi(x)dx + \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u(S_1^{j_1}\dots S_i^{j_i}\dots S_n^{j_n}x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\chi(x)\,dx$$
$$+\sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j_i} \frac{\partial}{\partial x_i} u_t(S_1^{j_1}\dots S_i^{j_i}\dots S_n^{j_n}x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\chi(x)\,dx = \nu(t)\int_\Omega h(x)\,\chi(x)\,dx.$$

The class $C([0,T] \to \mathring{W}_2^1(\Omega))$ is a subset of the class $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, which was taken into consideration in monograph [31] for defining a solution to the problem homogeneous boundary conditions (refer to the corresponding uniqueness theorem in Chapter III, Theorem 3.2, pp. 173-176), where $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Accordingly, the generalized solution mentioned above is likewise a generalized solution in the sense of [31]. However, a solution from the class $C([0,T] \to \mathring{W}_2^1(\Omega))$ continually relies on $t \in [0,T]$ in the metric $L_2(\Omega)$, in contrast to a solution from the class $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, which is guaranteed to have a trace for practically everywhere $t \in [0,T]$.

Lemma 2.1. *Let $h \in L_2(\Omega)$ and $\nu \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Assume that $\theta_{m_1,\dots,m_n} > 0$ for all $m_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,n}$. Then the function*

$$u(x,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{h_{m_1,\dots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\dots,m_n}}\left(\int_0^t \nu(s)e^{-q_{m_1,\dots,m_n}(t-s)}ds\right) w_{m_1,\dots,m_n}(x), \tag{2.1}$$

is the unique solution of the problem (1.1)–(1.3) in the class $C([0,T] \to \mathring{W}_2^1(\Omega))$, where $h_{m_1,\dots,m_n}$ are the Fourier coefficients of the function $h(x)$, $q_{m_1,\dots,m_n} = \frac{\lambda_{m_1,\dots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\dots,m_n}}$ and $\lambda_{m_1,\dots,m_n} = \theta_{m_1,\dots,m_n}\,\mu_{m_1,\dots,m_n} > 0$.

P r o o f. By using the suggested Fourier series, we will demonstrate that the function $u(x,t)$ is a member of the class $C([0,T] \to \mathring{W}_2^1(\Omega))$. This function's gradient, measured with regard to $x \in \Omega$, may be shown to depend continuously on $t \in [0,T]$ on the space $L_2(\Omega)$ norm. According to Parseval's equality, the norm of this gradient is equal to

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx \\
&= \int_\Omega \Big| \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{h_{m_1,\ldots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \Big(\int_0^t \nu(s) e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)} ds \Big) \nabla w_{m_1,\ldots,m_n}(x) \Big|^2 dx \\
&\le \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \Big| \frac{h_{m_1,\ldots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \int_0^t \nu(s) e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)} ds \Big|^2 \int_\Omega |\nabla w_{m_1,\ldots,m_n}(x)|^2 dx \\
&= \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \Big| \frac{h_{m_1,\ldots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \int_0^t \nu(s) e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)} ds \Big|^2 \mu_{m_1,\ldots,m_n} \\
&\le \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{|h_{m_1,\ldots,m_n}|^2}{(1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n})^2} \mu_{m_1,\ldots,m_n} \Big(\int_0^t |\nu(s)| e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)} ds \Big)^2 \\
&\le \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{|h_{m_1,\ldots,m_n}|^2}{(1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n})^2} \mu_{m_1,\ldots,m_n} \Big(\int_0^t e^{-2q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)} ds \Big) \Big(\int_0^t |\nu(s)|^2 ds \Big) \\
&= \|\nu\|^2_{L_2(0,T)} \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{|h_{m_1,\ldots,m_n}|^2}{(1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n})^2} \mu_{m_1,\ldots,m_n} \Big(\frac{1-e^{-2q_{m_1,\ldots,m_n} t}}{2\, q_{m_1,\ldots,m_n}} \Big) \\
&= \|\nu\|^2_{L_2(0,T)} \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{|h_{m_1,\ldots,m_n}|^2}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \Big(\frac{1-e^{-2q_{m_1,\ldots,m_n} t}}{2\, \theta_{m_1,\ldots,m_n}} \Big) \\
&\le C\, \|\nu\|^2_{L_2(0,T)} \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty |h_{m_1,\ldots,m_n}|^2 = C \|\nu\|^2_{L_2(0,T)} \|h\|^2_{L_2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

where $C > 0$ is a constant.

Accordingly, we have

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \le C \|\nu\|^2_{L_2(0,T)} \|h\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

The function $u(x,t)$ is a generalized solution in the sense of the integral identity (3.5) of monograph [31] follows from Parseval's equality. □

By substituting the expression (2.1) into the integral condition (1.10), we arrive at the following relation:

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_\Omega \rho(x)\, u(x,t)\, dx \\
&= \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{h_{m_1,\ldots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \Big(\int_0^t \nu(s)\, e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)}\, ds \Big) \int_\Omega \rho(x)\, w_{m_1,\ldots,m_n}(x)\, dx \\
&= \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \frac{h_{m_1,\ldots,m_n}\, \rho_{m_1,\ldots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\ldots,m_n}} \int_0^t \nu(s)\, e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)}\, ds \\
&= \sum_{m_1=1}^\infty \cdots \sum_{m_n=1}^\infty \Psi_{m_1,\ldots,m_n} \int_0^t \nu(s)\, e^{-q_{m_1,\ldots,m_n}(t-s)}\, ds,
\end{aligned}
$$

where

$$\Psi_{m_1,\dots,m_n} = \frac{h_{m_1,\dots,m_n}\,\rho_{m_1,\dots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\dots,m_n}}, \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad k = 1,\dots,n, \tag{2.2}$$

and $h_{m_1,\dots,m_n}$, $\rho_{m_1,\dots,m_n}$ are the Fourier coefficients corresponding to the functions $h(x)$ and $\rho(x)$, respectively.

We now introduce the function

$$K(t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \Psi_{m_1,\dots,m_n}\, e^{-q_{m_1,\dots,m_n} t}, \quad t > 0. \tag{2.3}$$

As a result, the control problem reduces to the following Volterra-type integral equation of the first kind:

$$\int_0^t K(t-s)\,\nu(s)\,ds = \phi(t), \quad t > 0. \tag{2.4}$$

3. Main estimates

In this section, we derive the necessary analytical estimates to study the behavior of the kernel function appearing in the Volterra integral equation obtained in the previous section. These estimates play a crucial role in proving the existence and admissibility of the control function, as well as ensuring the well-posedness of the corresponding integral equation.

Lemma 3.1 (see [32]). *Let $\psi(x_k)$ be a function defined on $[0,\infty)$ such that*

$$\psi(x_k) \ge 0 \quad \text{and} \quad \frac{d\psi}{dx_k} \le 0 \quad \text{for all } x_k \in [0,\infty).$$

Then, for each $m_k \in \mathbb{N}$, $k = 1,\dots,n$, the following inequality holds:

$$\int_0^{m_k\pi} \psi(x_k)\, \sin x_k\, dx_k \ge 0.$$

Lemma 3.2. *Suppose that a function $P(x_1,\dots,x_n)$ is defined on the domain $[0,\infty)^n$ and satisfies the following conditions:*

$$P(x_1,\dots,x_n) \ge 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_k} \le 0 \quad \text{for all } k = 1,\dots,n,$$

then the following inequality is valid:

$$\int_0^{m_1\pi} \cdots \int_0^{m_n\pi} P(x_1,\dots,x_n)\, \sin x_1 \cdots \sin x_n\, dx_1 \cdots dx_n \ge 0.$$

P r o o f. We apply mathematical induction on the number of spatial variables n.

Step 1: For $n = 1$, the inequality

$$\int_0^{m_1\pi} P(x_1) \sin x_1\, dx_1 \ge 0$$

follows immediately from Lemma 4.1.

Step 2: Suppose the Lemma holds for dimension $n-1$. Consider the n-dimensional case. Define

$$I_m := \int_0^{m_n\pi} \Big(\int_0^{m_1\pi} \cdots \int_0^{m_{n-1}\pi} P(x_1,\dots,x_n) \sin x_1 \cdots \sin x_{n-1}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} \Big) \sin x_n\, dx_n.$$

Let us denote the inner integral by

$$E(x_n) \coloneqq \int_0^{m_1\pi} \cdots \int_0^{m_{n-1}\pi} P(x_1, \dots, x_n) \sin x_1 \cdots \sin x_{n-1} \, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

By the induction hypothesis and the assumptions on P, it holds that

$$E(x_n) \geq 0 \quad \text{and} \quad \frac{dE}{dx_n} \leq 0.$$

Indeed,

$$\frac{dE}{dx_n} = \int_0^{m_1\pi} \cdots \int_0^{m_{n-1}\pi} \frac{\partial P}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \sin x_1 \cdots \sin x_{n-1} \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \leq 0,$$

since P is decreasing in each x_k by assumption.

Now, applying Lemma 4.1 to $E(x_n)$, we conclude that

$$I_m = \int_0^{m_n\pi} E(x_n) \sin x_n \, dx_n \geq 0.$$

This completes the induction step and proves the Lemma. □

Corollary 3.1. *Let $\rho \in \mathcal{A}(\Omega)$. Then the Fourier coefficients of ρ with respect to the orthonormal system $\{w_{m_1,\dots,m_n}(x)\}$ satisfy the non-negativity condition*

$$\rho_{m_1,\dots,m_n} \geq 0, \quad \textit{for all} \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad k = \overline{1, n}.$$

P r o o f. The conclusion follows immediately from Lemma 3.2, by taking $P(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1, \dots, x_n)$. Since $\rho \in \mathcal{A}(\Omega)$, the function ρ is non-negative and non-increasing in each variable x_k over $[0, p_k]$. Therefore, the conditions of Lemma 3.2 are satisfied, which implies the desired non-negativity of the Fourier coefficients $\rho_{m_1,\dots,m_n}$. □

Lemma 3.3. *Let $\rho \in \mathcal{A}(\Omega)$. Then the following estimate for the Fourier coefficients of ρ holds:*

$$|\rho_{m_1,\dots,m_n}| \leq C \, \lambda_{m_1,\dots,m_n}^{-1/2} \, \|\nabla \rho\|_{L_2(\Omega)}, \quad m_k \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, n,$$

where $\rho_{m_1,\dots,m_n} = (\rho, w_{m_1,\dots,m_n})$ denotes the inner product in $L_2(\Omega)$, $\lambda_{m_1,\dots,m_n}$ are the eigenvalues corresponding to the eigenfunctions $w_{m_1,\dots,m_n}$ of the operator $\mathcal{L}_n$, and $C > 0$ is a constant.

P r o o f. By (1.6), we may write

$$\begin{aligned}
\lambda_{m_1,\dots,m_n} \rho_{m_1,\dots,m_n} &= \lambda_{m_1,\dots,m_n} \int_\Omega \rho(x) \, w_{m_1,\dots,m_n}(x) \, dx = -\int_\Omega \rho(x) \, \mathcal{L}_n \, w_{m_1,\dots,m_n}(x) \, dx \\
&= -\sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \int_\Omega \rho(x) \, \Delta w_{m_1,\dots,m_n}(S_1^{j_1} \dots S_n^{j_n} x) \, dx \\
&= \sum_{j=0}^{2^n-1} a_j \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j_i} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} w_{m_1,\dots,m_n} \left(S_1^{j_1} \dots S_i^{j_i} \dots S_n^{j_n} x\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Note that

$$w_{m_1,\dots,m_n}(S_1^{j_1} \dots S_n^{j_n} x) = C_n \prod_{k=1}^{n} \sin \frac{m_k \pi}{p_k} S_k^{j_k} x_k = C_n \prod_{k=1}^{n} (-1)^{(m_k+1)j_k} \sin \frac{m_k \pi}{p_k} x_k.$$

Then we have

$$\frac{\partial}{\partial x_i} w_{m_1,\dots,m_n}\left(S_1^{j_1}\dots S_n^{j_n}x\right) = C_n\,(-1)^{(m_i+1)j_i}\,\frac{m_i\,\pi}{p_i}\,\cos\frac{m_i\,\pi}{p_i}x_i \prod_{k=1,k\neq i}^{n}(-1)^{(m_k+1)j_k}\sin\frac{m_k\,\pi}{p_k}x_k$$

$$= \Big(\prod_{k=1}^{n}(-1)^{(m_k+1)j_k}\Big)\,\frac{\partial}{\partial x_i} w_{m_1,\dots,m_n}(x) = C_{i,j}\,\frac{\partial}{\partial x_i} w_{m_1,\dots,m_n}(x).$$

It is known that

$$\|\nabla w_{m_1,\dots,m_n}\|^2_{L_2(\Omega)} = (\nabla w_{m_1,\dots,m_n}, \nabla w_{m_1,\dots,m_n}) = (w_{m_1,\dots,m_n}, -\Delta w_{m_1,\dots,m_n}) = \mu_{m_1,\dots,m_n},$$

where $\mu_{m_1,\dots,m_n}$ is defined by (1.8).

Therefore,

$$|\lambda_{m_1,\dots,m_n}\,\rho_{m_1,\dots,m_n}| \le \Big(\sum_{j=0}^{2^n-1}|a_j|\Big)\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}\,\|\nabla w_{m_1,\dots,m_n}\|_{L_2(\Omega)}$$

$$= \Big(\sum_{j=0}^{2^n-1}|a_j|\Big)\,\sqrt{\mu_{m_1,\dots,m_n}}\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}.$$

Using $\lambda_{m_1,\dots,m_n} = \theta_{m_1,\dots,m_n}\,\mu_{m_1,\dots,m_n} > 0$, we get the required estimate

$$|\rho_{m_1,\dots,m_n}| \le C\lambda^{-1/2}_{m_1,\dots,m_n}\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}.$$

□

Now we give the Lemma regarding the continuity of the kernel of the main Volterra integral equation.

Lemma 3.4. *Suppose that* $\theta_{m_1,\dots,m_n} > 0$ *for all indices* $m_k \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1,n}$. *Let* $h \in L_2(\Omega)$ *and* $\rho \in \mathcal{A}(\Omega)$. *Then the kernel function* $K(t)$, *defined by* (2.3), *is continuous for all* $t \ge 0$.

P r o o f. From Lemma 3.2 and the condition (1.9), we know that the product $\Psi_{m_1,\dots,m_n} \ge 0$ for all indices. Hence, the kernel

$$K(t) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\Psi_{m_1,\dots,m_n}\,e^{-q_{m_1,\dots,m_n}t}$$

is strictly positive and monotonically decreasing for $t > 0$, i. e., $K(t) > 0$, $K'(t) < 0$, for all $t > 0$.

Now, using Lemma 3.3 and the definition of $\Psi_{m_1,\dots,m_n}$ in (2.2), we estimate:

$$\Psi_{m_1,\dots,m_n} = \frac{h_{m_1,\dots,m_n}\,\rho_{m_1,\dots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\dots,m_n}} \le C\,\frac{h_{m_1,\dots,m_n}}{1+\lambda_{m_1,\dots,m_n}}\cdot\lambda^{-1/2}_{m_1,\dots,m_n}\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)},$$

where $C > 0$ is a constant independent of $m_1,\dots,m_n$.

Substituting this estimate into the series expression for $K(t)$, we obtain

$$K(t) \le C\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\frac{h_{m_1,\dots,m_n}}{(1+\lambda_{m_1,\dots,m_n})\sqrt{\lambda_{m_1,\dots,m_n}}}\,e^{-q_{m_1,\dots,m_n}t}$$

$$\le C\,\|\nabla\rho\|_{L_2(\Omega)}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=1}^{\infty}\frac{h_{m_1,\dots,m_n}}{(1+\lambda_{m_1,\dots,m_n})\sqrt{\lambda_{m_1,\dots,m_n}}},$$

which converges due to the square integrability of $h(x)$ and the growth of eigenvalues $\lambda_{m_1,\dots,m_n} \to \infty$. □

4. Proof of Theorem 1.1

In this section, we establish the existence of a solution to the Volterra integral equation of the first kind by employing the Laplace transform method. Furthermore, we demonstrate that the corresponding control function satisfies the admissibility condition.

The Laplace transform of the function $\nu(t)$ is defined by

$$\widetilde{\nu}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\nu(t)\,dt,$$

where $p = \delta + i\zeta$ with $\delta > 0$ and $\zeta \in \mathbb{R}$.

Applying the Laplace transform to both sides of the Volterra equation (2.4), and using the convolution theorem, we obtain the relation

$$\widetilde{\phi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\Big(\int_0^t K(t-s)\nu(s)\,ds\Big)dt = \widetilde{K}(p)\cdot\widetilde{\nu}(p). \tag{4.1}$$

Consequently, we obtain

$$\widetilde{\nu}(p) = \frac{\widetilde{\phi}(p)}{\widetilde{K}(p)},$$

and the inverse transform yields

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{\widetilde{\phi}(p)}{\widetilde{K}(p)}e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widetilde{\phi}(\delta+i\zeta)}{\widetilde{K}(\delta+i\zeta)}e^{(\delta+i\zeta)t}\,d\zeta. \tag{4.2}$$

Lemma 4.1. *The following estimate is valid:*

$$|\widetilde{K}(\delta+i\,\zeta)| \geq \frac{C_\delta}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \qquad \delta > 0, \qquad \zeta \in \mathbb{R},$$

where $C_\delta > 0$ is a constant only depending on δ.

P r o o f. The Laplace transform of the kernel $K(t)$ is expressed as

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(p) = \int_0^\infty K(t)e^{-pt}\,dt &= \sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \Psi_{m_1,\dots,m_n}\int_0^\infty e^{-(p+q_{m_1,\dots,m_n})t}\,dt\\ &= \sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{p+q_{m_1,\dots,m_n}}.\end{aligned}$$

For $p = \delta + i\zeta$, this becomes

$$\begin{aligned}\widetilde{K}(\delta+i\zeta) &= \sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{\delta+q_{m_1,\dots,m_n}+i\zeta} = \sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}(\delta+q_{m_1,\dots,m_n})}{(\delta+q_{m_1,\dots,m_n})^2+\zeta^2}\\ &- i\zeta\sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{(\delta+q_{m_1,\dots,m_n})^2+\zeta^2} = \operatorname{Re}\widetilde{K}(\delta+i\zeta) + i\,\operatorname{Im}\widetilde{K}(\delta+i\zeta),\end{aligned}$$

where

$$\operatorname{Re}\widetilde{K}(\delta+i\zeta) = \sum_{m_1=1}^\infty\cdots\sum_{m_n=1}^\infty \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}(\delta+q_{m_1,\dots,m_n})}{(\delta+q_{m_1,\dots,m_n})^2+\zeta^2},$$

and

$$\operatorname{Im} \widetilde{K}(\delta + i\zeta) = -\zeta \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + \zeta^2}.$$

Observing the inequality

$$(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + \zeta^2 \le \big((\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1\big)\,(1 + \zeta^2),$$

we deduce

$$\frac{1}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + \zeta^2} \ge \frac{1}{1+\zeta^2} \cdot \frac{1}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1}.$$

This leads to estimates for the real and imaginary parts of $\widetilde{K}(\delta + i\zeta)$:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \widetilde{K}(\delta + i\zeta)| &= \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + \zeta^2} \\ &\ge \frac{1}{1+\zeta^2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1} = \frac{C_{1,\delta}}{1+\zeta^2}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \widetilde{K}(\delta + i\zeta)| &= |\zeta| \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + \zeta^2} \\ &\ge \frac{|\zeta|}{1+\zeta^2} \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1} = \frac{C_{2,\delta}|\zeta|}{1+\zeta^2}, \end{aligned}$$

where

$$C_{1,\delta} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1}, \quad C_{2,\delta} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \frac{\Psi_{m_1,\dots,m_n}}{(\delta + q_{m_1,\dots,m_n})^2 + 1}.$$

Combining these results, we obtain

$$|\widetilde{K}(\delta + i\zeta)|^2 = |\operatorname{Re} \widetilde{K}(\delta + i\zeta)|^2 + |\operatorname{Im} \widetilde{K}(\delta + i\zeta)|^2 \ge \frac{\min(C_{1,\delta}^2, C_{2,\delta}^2)}{1+\zeta^2},$$

yielding

$$|\widetilde{K}(\delta + i\zeta)| \ge \frac{C_\delta}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \tag{4.3}$$

where $C_\delta = \min(C_{1,\delta}, C_{2,\delta})$. □

Taking the limit as $\delta \to 0$, (4.2) simplifies to

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\phi}(i\zeta)}{\widetilde{K}(i\zeta)} e^{i\zeta t}\, d\zeta. \tag{4.4}$$

To establish admissibility, the following lemma is required.

Lemma 4.2 (see [33])**.** *Suppose* $\phi(t) \in W(M)$*. Then, for the imaginary part of its Laplace transform, the following estimate holds*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\phi}(i\zeta)|\sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \le C_1 \|\phi\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}$$

where $C_1 > 0$ *is a constant.*

Lemma 4.3. *Assume that* $\phi \in W_2^1(-\infty,+\infty)$ *and* $\phi(t) = 0$ *for* $t \le 0$*. Then* $\nu \in L_2(\mathbb{R}_+)$*.*

P r o o f. Using (4.1) and (4.3), we have

$$\begin{aligned}\|\nu\|^2_{L_2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\nu}(\zeta)|^2\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\widetilde{\phi}(i\zeta)}{\widetilde{K}(i\zeta)}\right|^2 d\zeta \\ &\le \frac{C_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\phi}(i\zeta)|^2(1+|\zeta|^2)\, d\zeta = C\,\|\phi\|^2_{W_2^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

where $C = C_1/(2\pi)$. $\square$

P r o o f of **Theorem 1.1.** From (4.3), (4.4) and Lemma 4.2, we have the estimate

$$\begin{aligned}|\nu(t)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{\phi}(i\zeta)|}{|\widetilde{K}(i\zeta)|} d\zeta \le \frac{1}{2\pi C_0}\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\phi}(i\zeta)|\sqrt{1+\zeta^2}\, d\zeta \\ &\le \frac{C_1}{2\pi C_0}\|\phi\|_{W_2^2(R_+)} \le \frac{C_1\, M}{2\pi C_0} = 1,\end{aligned}$$

where $C_0 = \min(C_{1,0}, C_{2,0})$ which is defined by (4.3), and $M = 2\pi C_0/C_1$.

Theorem 1.1 is proved.

References

[1] B. D. Coleman, W. Noll, "An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **6** (1960), 355–370.

[2] P. Chen, M. Gurtin, "On a theory of heat conduction involving two temperatures", *Z. Angew. Math. Phys.*, **19** (1968), 614–627.

[3] L. W. White, "Controllability properties of pseudo-parabolic boundary control problems", *SIAM J. Control and Optimization*, **18** (1980), 534–539.

[4] B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, "Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation on a strip", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19** (1965), 100–116.

[5] L. W. White, "Point control of pseudoparabolic problems", *Journal of Differential Equations*, **42**:3 (1981), 366–374.

[6] A. Friedman, "Optimal control for parabolic equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **18**:3 (1967), 479–491.

[7] H. O. Fattorini, D. L. Russell, "Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **43** (1971), 272–292.

[8] Yu. V. Egorov, "The optimal control in Banach space", *Uspekhi Mat. Nauk.*, **18** (1963), 211–213.

[9] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications*: *Translations of Mathematical Monographs*, **187**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2000, 305 pp.

[10] J. L. Lions, *Contróle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod Gauthier–Villars, Paris, 1968.

[11] G. Schmidt, "The "Bang–Bang" principle for the time-optimal problem in boundary control of the heat equation", *SIAM Journal on Control and Optimization*, **18** (1980), 101–107.

[12] S. Albeverio, Sh. A. Alimov, "On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process", *Appl. Math. Opt.*, **57** (2008), 58–68.

[13] Z. K. Fayazova, "Boundary control of the heat transfer process in the space", *Russian Mathematics*, **12** (2019), 82–90.

[14] F. N. Dekhkonov, "On the time-optimal control problem for a heat equation", *Bulletin of the Karaganda University Mathematics Series*, **111** (2023), 28–38.

[15] B. Allal, G. Fragnelli, J. Salhi, "Null controllability for degenerate parabolic equations with a nonlocal space term", *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, **17** (2024), 1821–1856.

[16] F. Dekhkonov, "On one boundary control problem for a pseudo-parabolic equation in a two-dimensional domain", *Communications in Analysis and Mechanics*, **17** (2025), 1–14.

[17] F. N. Dekhkonov, "On the control problem associated with a pseudo-parabolic type equation in an one-dimensional domain", *International Journal of Applied Mathematics*, **37**:1 (2024), 109–118.

[18] B. K. Turmetov, B. J. Kadirkulov, "An inverse problem for a parabolic equation with involution", *Lobachevskii J. of Math.*, **42** (2021), 3006–3015.

[19] B. K. Turmetov, B. J. Kadirkulov, "On the solvability of an initial-boundary value problem for a fractional heat equation with involution", *Lobachevskii J. Math.*, **43** (2022), 249–262.

[20] E. Mussirepova, A. Sarsenbi, A. Sarsenbi, "The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient", *Bound Value Probl.*, **1** (2022), 99.

[21] B. Ahmad, A. Alsaedi, M. Kirane, R. Tapdigoglu, "An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation", *Quaest. Math.*, **40** (2017), 151–160.

[22] A. Kopzhassarova, A. Sarsenbi, "Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution", *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, 576843.

[23] M. Kirane, A. A. Sarsenbi, "Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative", *Fractal Fract.*, **7** (2023), 131.

[24] B. Turmetov, V. Karachik, "On solvability of some inverse problems for a nonlocal fourth-order parabolic equation with multiple involution", *AIMS Mathematics*, **9** (2024), 6832–6849.

[25] M. Muratbekova, B. Kadirkulov, M. Koshanova, B. Turmetov, "On solvability of some inverse problems for a fractional parabolic equation with a nonlocal biharmonic operator", *Fractal and Fractional*, **7**:5 (2023), 404.

[26] N. Al-Salti, M. Kirane, B. T. Torebek, "On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation", *Hacet. J. Math. Stat.*, **48** (2019), 669–681.

[27] F. N. Dekhkonov, "On the control problem for a heat conduction equation with involution in a two-dimensional domain", *Lobachevskii J. Math.*, **46**:2 (2025), 613–623.

[28] F. N. Dekhkonov, "Boundary control problem for a parabolic equation with involution", *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, **12** (2024), 22–34.

[29] S. G. Mikhlin, *Linear Partial Differential Equations*, Vysshaya Shkola Publ., Moscow, 1977.

[30] B. Turmetov, V. Karachik, "On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with involution in a parallelepiped", *AIP Conf. Proc.*, Sixth International Conference of Mathematical Sciences (ICMS 2022) (Istanbul, Turkey, 20–24 July 2022), **2879**, 2023.

[31] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Nauka Publ., Moscow, 1967.

[32] Sh. A. Alimov, F. N. Dekhkonov, "On a control problem associated with fast heating of a thin rod", *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*, **2** (2019), 1–14.

[33] F. Dekhkonov, W. Li, "On the boundary control problem associated with a fourth order parabolic equation in a two-dimensional domain", *Discrete and Continuous Dynamical Systems - S*, **17** (2024), 2478–2488.

Information about the authors

Farrukh N. Dekhkonov, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department. Namangan State University, Namangan, Uzbekistan. E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4747-8557

Batirkhan Kh. Turmetov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan; Professor, Department of Mathematics and Physics, Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan.
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Batirkhan Kh. Turmetov
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Received 02.05.2025
Reviewed 14.09.2025
Accepted for press 21.11.2025

Информация об авторах

Дехконов Фаррух Нуриддин угли, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа. Наманганский государственный университет, г. Наманган, Узбекистан. E-mail: f.n.dehqonov@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4747-8557

Турметов Батирхан Худайбергенович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан; профессор кафедры математики и физики, Университет Альфраганус, г. Ташкент, Узбекистан.
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7735-6484

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Турметов Батирхан Худайбергенович
E-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Поступила в редакцию 02.05.2025 г.
Поступила после рецензирования 14.09.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

УДК 517.938

Теоремы о возвращении для динамических систем в секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной мерой Лебега

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. Приведено свойство, достаточно полно характеризующее взаимоотношение движений динамической системы g^t, заданной в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ. Отмечено, что в пространстве Γ с инвариантной (относительно g^t) мерой Лебега μ справедлив прямой аналог теоремы Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств. Кроме того, показано, что если $\bar{\mathcal{M}}$ — замыкание объединения $\mathcal{M}$ всех минимальных множеств пространства Γ, то $\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma$, а через каждую точку $p \notin \mathcal{M}$ проходит движение $f(t,p)$, которое является и положительно, и отрицательно асимптотическим по отношению к компактным минимальным множествам $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ и $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$. Если при этом Γ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma$, т. е. в Γ имеет место важное дополнение к теореме Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек.

Ключевые слова: секвенциально компактное топологическое пространство, динамические системы, инвариантная мера Лебега, теоремы о возвращении точек и множеств

Для цитирования: *Дзюба С.М.* Теоремы о возвращении для динамических систем в секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной мерой Лебега // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 338–345. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

Recurrence theorems for dynamical systems in a sequentially compact topological space with invariant Lebesgue measure

Sergei M. DZYUBA

Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. A property is presented that characterizes quite fully the interrelation of motions of a dynamical system g^t defined in a Hausdorff sequentially compact topological space Γ. It is noted that in the space Γ with an invariant (with respect to g^t) Lebesgue measure μ, a direct analogue of the Poincare–Caratheodory recurrence theorem for sets is valid. In addition, it is shown that if $\bar{\mathcal{M}}$ is the closure of the union $\mathcal{M}$ of all minimal sets of the space Γ, then $\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma$, and through each point $p \notin \mathcal{M}$ there passes a motion $f(t,p)$ that is both positively and negatively asymptotic with respect to the compact minimal sets $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ and $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$. If Γ satisfies the second axiom of countability, then $\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma$, i. e. in Γ, there is an important addition to the Poincare-Caratheodory theorem on the points recurrence.

Keywords: sequentially compact topological space, dynamical systems, invariant Lebesgue measure, theorems on the points and sets recurrence

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. Recurrence theorems for dynamical systems in a sequentially compact topological space with invariant Lebesgue measure. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 338–345.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-338-345

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и пусть $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R}\times\Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(c1) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R}\times\Sigma$;

(c2) для всех $p\in\Sigma$

$$g^0 p = p;$$

(c3) для всех $t,\tau\in\mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p\in\Sigma$ функция $t\to f(t,p)$ — *движение* (см. [1, с. 347]).

Как было изначально заявлено Дж. Биркгофом, конечной целью общей теории динамических систем должно служить «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [2, с. 194]). Первые результаты построения такой теории Биркгоф свел вместе в [2, гл. VII]. Дальнейшее развитие этих результатов изложено в [1, гл. V].

Как ни покажется странным, с тех пор, до еще совсем недавнего прошлого, ничего принципиально нового в общей теории динамических систем получено не было (см., например, [3, с. 1–4]). Изменение в ситуации здесь мы свяжем с выходом статей [4–7], в которых существенным образом упрощено классическое представление о взаимоотношении движений как в произвольном метрическом, так и в некоторых топологических пространствах.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов статей [4–7], направленное на изучение аналогов теорем Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств и точек для системы g^t в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве с инвариантной (относительно g^t) мерой Лебега.

1. Основные свойства динамических систем

Пусть Γ — хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство и пусть на Γ задана полная однопараметрическая группа преобразований g^t, которая по определению удовлетворяет аксиомам (c1)–(c3) и поэтому представляет собой динамическую систему (см., например, [8, с. 150, 152]).

Как обычно, множество $A\subset\Gamma$ будем называть *инвариантным*, если для всех $t\in\mathbb{R}$

$$g^t A = A$$

(см. [1, с. 349]).

Для системы g^t в пространстве Γ примем основные определения общей теории динамических систем, изначально введенные Дж. Биркгофом на замкнутом дифференцируемом многообразии (см. [2, гл. VII]):

(d1) если $p\in\Gamma$, то *ω-предельным* множеством Ω_p движения $f(t,p)$ называется множество

$$\Omega_p = \bigcap_{t\ge 0}\overline{\bigcup_{\tau\ge t} f(\tau,p)};$$

(d2) если $p \in \Gamma$, то α*-предельным* множеством A_p движения $f(t,p)$ называется множество

$$\mathrm{A}_p = \bigcap_{t \le 0} \overline{\bigcup_{\tau \le t} f(\tau, p)};$$

(d3) множество $M \subset \Gamma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего теми же тремя свойствами;

(d4) любое движение $f(t,p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M, называется *рекуррентным*.

Нам также потребуются следующие известные определения (см., например, [1, с. 363]):

(d5) движение $f(t,p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к множеству Ω_p, если $p \notin \Omega_p$; в противном случае говорят, что движение $f(t,p)$ *положительно устойчиво по Пуассону*;

(d6) движение $f(t,p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к множеству A_p, если $p \notin \mathrm{A}_p$; в противном случае говорят, что движение $f(t,p)$ *отрицательно устойчиво по Пуассону*.

Заметим теперь, что рассматриваемое хаусдорфово секвенциально компактное топологическое пространство Γ является полуметризуемым пространством с отделимой структурой (см. [9, с. 458]). Поэтому везде в дальнейшем мы будем считать Γ именно полуметрическим пространством с отделимой структурой. Здесь необходимо отметить, что введение отделимой структуры в Γ является естественным, поскольку определение Биркгофа (d3) ее фактически требует. Что же касается секвенциальных свойств пространства Γ, то без них мы не можем ссылаться на результаты работы [6], основополагающие для дальнейших построений и существенно использующиеся в доказательствах теорем 1.1 и 2.2.

Напомним определения полуметрики и полуметрического пространства.

Топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [9, с. 456]).

Функция $d_\gamma\colon \Gamma \times \Gamma \to [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

(s1) для всех $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p,q) = d_\gamma(q,p);$$

(s2) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p,p) = 0$$

(при этом равенство $d_\gamma(p,q) = 0$ не исключается и в случае $q \ne p$);

(s3) для всех $p \in \Gamma$, $q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p,q) \le d_\gamma(p,r) + d_\gamma(r,q).$$

Семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I}$ называется *направленным*, если для любого конечного подмножества $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \ge d_j$ при всех $j \in J$.

Если для каждой пары $(p,q) \in \Gamma \times \Gamma$, $p \ne q$, в семействе $(d_i)_{i\in I}$ найдется такая полуметрика d_γ, что

$$d_\gamma(p,q) > 0,$$

то говорят, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [9, с. 456]).

Рекуррентные движения динамических систем в полуметрических пространствах были подробно исследованы в работе [6].

З а м е ч а н и е 1.1. Очевидно, что простейшим примером полуметрического пространства с отделимой структурой может служить метрическое пространство.

Покажем, что примером полуметризуемого пространства с отделимой структурой является топологическое многообразие V. Зафиксируем произвольную точку $x \in V$, некоторую ее окрестность E и зададим непрерывную функцию $\gamma\colon V \to [0, +\infty)$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in E$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

задает полуметрику d_γ на V (см. [9, с. 457]). Изменяя функцию γ, мы можем получать различные полуметрики d_γ. Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i\in I_E}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ, для которой $d_\gamma(p, q) > 0$. Проделав эту процедуру на всех окрестностях E всех точек $x \in V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология $\mathcal{T}$ индуцирована семейством полуметрик $(d_i)_{i\in I}$. Более полно, множество $E \subset V$ открыто в топологии $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой x оно содержит некоторый шар

$$B_\gamma(x, \varepsilon) = \{p \in V\colon d_\gamma(x, p) < \varepsilon\}$$

(см. [9, с. 456]). Очевидно, что эта топология совпадает с исходной топологией, изначально введенной на V соответствующим атласом.

В силу введенной выше полуметрической структуры пространства Γ, мы можем использовать основной результат работы [6]. Используя его, установим в этом пространстве достаточно полную характеристику взаимоотношения движений системы g^t следующей теоремой.

Теорема 1.1. *Любое нерекуррентное движение $f(t, p)$, расположенное в Γ, является положительно и отрицательно асимптотическим по отношению к секвенциально компактным минимальным множествам Ω_p и A_p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(t, p)$ — произвольное движение, расположенное в Γ. Поскольку пространство Γ секвенциально компактно, согласно теореме 3.1 работы [6], оба множества Ω_p и A_p являются секвенциально компактными минимальными множествами. Это в силу определений (d3), (d5) и (d6) делает утверждение теоремы 1.1 очевидным. □

З а м е ч а н и е 1.2. Вообще говоря, согласно теореме 1.1 любые попытки построения положительно (отрицательно) устойчивого по Пуассону нерекуррентного движения или предельного множества типа гомоклинического (гетероклинического) аттрактора динамической системы g^t лишены какого-либо смысла. В работе [4] приведены простейшие примеры, объясняющие причины возникающих здесь ошибок для системы g^t, заданной соответственно на торе и на круге. Для нас же значение теоремы 1.1 состоит в том, что на нее существенным образом опирается доказательство теоремы 2.2 о возвращении точек.

2. Теоремы о возвращении

По определению пространства Γ без каких-либо дополнительных условий можем принять, что в Γ определена некоторая мера Лебега μ (см., например, [10, с. 490–501]). Будем считать, что мера μ конечна и положительна, и заметим, что множество всех μ-измеримых подмножеств пространства Γ оказывается σ-алгеброй, зависящей, разумеется, от μ и содержащей борелевскую σ-алгебру (см., [10, с. 506]).

Рассмотрим динамическую систему g^t и предположим, что в Γ для g^t мера μ является инвариантной мерой. Другими словами, будем считать, что если A — произвольное измеримое множество, то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mu(g^t A) = \mu A.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 2.1. *Пусть* $A \subset \Gamma$ *— произвольное измеримое множество положительной меры. Тогда найдется такая последовательность натуральных чисел* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, *что для всех* $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu(A \cap g^{N_k} A) > 0 \quad \text{и} \quad \mu(A \cap g^{-N_k} A) > 0.$$

Теорема 2.1 является очевидным прямым аналогом теоремы Пуанкаре–Каратеодори о возвращении множеств, и ее доказательство полностью совпадает с доказательством упомянутой теоремы (см., например, [1, с. 470, 471]).

Продолжая проводить аналогию с теоремой Пуанкаре–Каратеодори, заметим, что наряду с теоремой 2.1 справедлива также

Теорема 2.2. *Пусть* $\bar{\mathcal{M}}$ *— замыкание объединения* $\mathcal{M}$ *всех минимальных множеств пространства* Γ. *Тогда*

$$\mu\bar{\mathcal{M}} = \mu\Gamma,$$

а любое движение $f(t,p)$, *расположенное в множестве* $D = \Gamma \setminus \mathcal{M}$, *является положительно и отрицательно асимптотическим по отношению к секвенциально компактным минимальным множествам* $\Omega_p \subset \mathcal{M}$ *и* $\mathrm{A}_p \subset \mathcal{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, согласно теореме 1.1, множество $\bar{\mathcal{M}}$ непусто, компактно и потому измеримо.

Заметим теперь, что множество

$$E = \Gamma \setminus \bar{\mathcal{M}}$$

открыто. Предположим, что

$$\mu E > 0 \tag{2.1}$$

и приведем это предположение к противоречию.

В силу условия (2.1) существует такая собственная измеримая часть F множества E, что

$$\mu F > 0. \tag{2.2}$$

Докажем, что каждое такое множество для всех достаточно больших значений t удовлетворяет условию

$$F \neq g^t F. \tag{2.3}$$

Пусть p — произвольная точка множества F, которое удовлетворяет неравенству (2.2). Поскольку по построению

$$\mathcal{M} \cap F = \varnothing,$$

то согласно теореме 1.1 найдется такая окрестность $F_p \subset E$ точки p и такое $T > 0$, что

$$F_p \cap g^t F_p = \varnothing$$

для всех $t \geq T$. Отсюда и следует формула (2.3).

Если выполнено условие (2.2), то в силу теоремы 2.1 найдется такая последовательность натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\mu(F \cap g^{N_k} F) > 0.$$

Последнее, однако, невозможно, поскольку согласно соотношению (2.3) множество F не инвариантно, а в силу теоремы 1.1 через каждую точку $p \in F$ проходит нерекуррентное движение $f(t, p)$.

Полученное выше противоречие, очевидно, завершает доказательство. □

Следствие 2.1. *Если пространство* Γ *удовлетворяет второй аксиоме счетности, то*

$$\mu\mathcal{M} = \mu\Gamma.$$

Доказательство. Действуя как в [1, с. 471, 472], несложно показать, что почти для каждой точки $p \in \Gamma$ движение $f(t, p)$ устойчиво по Пуассону как положительно, так и отрицательно. Поэтому дальнейшее доказательство следствия 2.1 очевидно. □

Замечание 2.1. Вообще говоря, без каких-либо дополнительных условий мы не можем утверждать, что множества $\bar{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{M}$ всюду плотны в Γ (см. [1, с. 472]).

Как известно, теорема Пуанкаре–Каратеодори о возвращении точек утверждает, что в метрическом пространстве Σ со второй аксиомой счетности и инвариантной конечной мерой μ почти для каждой точки $p \in \Sigma$ движение $f(t, p)$ устойчиво по Пуассону и положительно, и отрицательно (см., например, [1, с. 471]), т. е. все указанные точки $p \in \Sigma$ могут быть точками компактных минимальных множеств.

Таким образом, теорема 2.2 и следствие 2.1 существенным образом дополняют упомянутую теорему о возвращении точек в хаусдорфовом секвенциально компактном пространстве Γ и, значит, в компактном пространстве Σ.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].

[3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.

[4] A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "The interrelation of motions of dynamical systems in a metric space", *Lobachevskii J. Math.*, **43**:12 (2022), 3414–3419.

[5] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.

[6] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, “On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

[7] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях периодических процессов в секвенциально компактном топологическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:146 (2024), 138–148. [S. M. Dzyuba, “About recurrent motions of periodic processes in a sequentially compact topological space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:146 (2024), 138–148 (In Russian)].

[8] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, УРСС, М., 2009. [L. S. Pontryagin, *Topological Groups*, URSS Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

[9] Л. Шварц, *Анализ*. Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[10] Л. Шварц, *Анализ*. Т. I, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. I, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 19.03.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Received 19.03.2025
Reviewed 02.09.2025
Accepted for press 21.11.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-346-360

УДК 519.6

Глобализованный кусочный метод Левенберга–Марквардта с процедурой для предотвращения сходимости к нестационарным точкам

Алексей Феридович ИЗМАИЛОВ, Чжибай ЯНЬ

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Современные версии метода Левенберга–Марквардта для уравнений с ограничениями обладают сильными свойствами локальной сверхлинейной сходимости, допускающими возможную неизолированность решений и возможную негладкость уравнений. Недавно был разработан соответствующий глобальной сходящийся вариант алгоритма для кусочно-гладкого случая, основанный на одномерном поиске для квадрата невязки в евклидовой норме. Для этого алгоритма была показана глобальная сходимость к стационарным точкам для какого-то активного гладкого кусочного отображения, причем примеры показывают, что установить более сильные свойства глобальной сходимости для этого алгоритма без дальнейших его модификаций невозможно. В этой статье разрабатывается такая модификация глобализованного кусочного метода Левенберга–Марквардта, позволяющая избегать нежелательных предельных точек, тем самым обеспечивая желаемое свойство B-стационарности предельных точек для задачи минимизации квадрата невязки исходного уравнения в евклидовой норме, на множестве, задаваемом ограничениями. Конструкция состоит в идентификации гладких кусочных отображений, активных в потенциальных предельных точках, посредством использования подходящей оценки расстояния для активного гладкого кусочного отображения, используемого на текущей итерации, с последующим переключением, при необходимости, на более перспективное идентифицированное кусочное отображение. Устанавливаются глобальная сходимость к B-стационарным точкам и асимптотическая сверхлинейная скорость сходимости, где последнее также основано на подходящей оценке расстояния, но в этом случае до решений исходного уравнения с ограничениями.

Ключевые слова: кусочно-гладкое уравнение, уравнение с ограничением, кусочный метод Левенберга–Марквардта, глобальная сходимость, сверхлинейная сходимость

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00015, https://rscf.ru/project/24-21-00015/).

Для цитирования: *Измаилов А.Ф., Янь Ч.* Глобализованный кусочный метод Левенберга–Марквардта с процедурой для предотвращения сходимости к нестационарным точкам // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 346–360. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-346-360

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-346-360

Globalized piecewise Levenberg–Marquardt method with a procedure for avoiding convergence to nonstationary points

Alexey F. IZMAILOV, Zhibai YAN
Lomonosov Moscow State University
1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. The modern version of the Levenberg–Marquardt method for constrained equations possess strong properties of local superlinear convergence, allowing for possibly nonisolated solutions and possibly nonsmooth equations. A related globally convergent variant of the algorithm for the piecewise-smooth case, based on linesearch for the squared Euclidian norm residual, has recently been developed. Global convergence of this algorithm to stationary points for some active smooth selections has been shown, and examples demonstrate that no any stronger global convergence properties can be established for this algorithm without further modifications. In this paper, we develop such a modification of the globalized piecewise Levenberg–Marquardt method, that avoids undesirable accumulation points, thus achieving the intended property of B-stationarity of accumulation points for the problem of minimization of the squared Euclidian norm residual of the original equation over the constraint set. The construction consists of identifying smooth selections active at potential accumulation points by means of an appropriate error bound for an active smooth selection employed at the current iteration, and then switching to a more promising identified selection when needed. Global convergence to B-stationary points and asymptotic superlinear convergence rate are established, the latter again relying on an appropriate error bound property, but this time for the solutions of the original constrained equation.

Keywords: piecewise smooth equation, constrained equation, piecewise Levenberg–Marquardt method, global convergence, superlinear convergence

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00015, https://rscf.ru/en/project/24-21-00015/).

Mathematics Subject Classification: 47J05, 49M15, 65H10, 90C33.

For citation: Izmailov A.F., Yan Z. Globalized piecewise Levenberg–Marquardt method with a procedure for avoiding convergence to nonstationary points. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 346–360.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-346-360

Введение

Метод Левенберга–Марквардта для уравнений с ограничениями в виде включения в выпуклое замкнутое множество является признанным средством решения таких задач, обладающим сильными свойствами локальной сверхлинейной сходимости, в том числе в случае неизолированных решений, а также в случаях возможной негладкости уравнения; см. недавний обзор в [1] и цитированную в нем литературу. Для кусочно-гладких уравнений с ограничениями в [2] был предложен кусочный метод Левенберга–Марквардта, а в [3] был разработан соответствующий глобализованный алгоритм и обоснованы свойства его глобальной и асимптотической сверхлинейной сходимости. В частности, была показана глобальная сходимость данного алгоритма к стационарным точкам для какого-то активного гладкого кусочного отображения. При этом для алгоритмов такого рода идеальным был бы результат о B-стационарности предельных точек для задачи минимизации квадрата невязки исходного уравнения в евклидовой норме, на множестве, задаваемом ограничениями. Однако, без дальнейших модификаций алгоритма такое свойство гарантировать нельзя; см. примеры в [3] и разд. 4. ниже.

В этой статье разрабатывается модификация глобализованного кусочного метода Левенберга–Марквардта, позволяющая избегать нежелательных предельных точек, тем самым обеспечивая желаемое свойство B-стационарности. Процедура состоит в идентификации гладких кусочных отображений, активных в потенциальных предельных точках, посредством использования подходящей оценки расстояния для активного гладкого кусочного отображения, используемого на текущей итерации, с последующим переключением, при необходимости, на более перспективное идентифицированное кусочное отображение. Устанавливаются глобальная сходимость к B-стационарным точкам и асимптотическая сверхлинейная скорость сходимости, где последнее также основано на подходящей оценке расстояния, но в этом случае до решений исходного уравнения с ограничениями.

Статья организована следующим образом. В разд. 1. приводится постановка задачи, а также излагается кусочный метод Левенберга–Марквардта для ее решения, а также алгоритм, реализующий глобализацию сходимости этого метода. Обсуждаются имеющиеся результаты о локальной сходимости и скорости сходимости, а также о глобальной сходимости данного алгоритма. Разд. 2. посвящен идентификации гладких кусочных отображений активных в потенциальной предельной точке генерируемой алгоритмом последовательности, и характеризациям используемой для этого оценки расстояния до стационарной точки, соответствующей текущему кусочному отображению. В разд. 3. излагается модификация глобализованного алгоритма, снабженная процедурой, позволяющей избегать нежелательных предельных точек, а также теория глобальной сходимости и асимптотической сверхлинейной сходимости модифицированного алгоритма. Наконец, в разд. 4. приводятся примеры, демонстрирующие возникновение решаемой в этой статье проблемы, а также ее преодоление посредством предложенной процедуры.

Используемые ниже обозначения вполне традиционны. Через $\ker A$ обозначается ядро (множество нулей) линейного оператора A. Всюду $\|\cdot\|$ — это евклидова норма, а $\|\cdot\|_\infty$ — норма, определяемая как максимум модулей компонент. Расстояние от точки $u \in \mathbb{R}^p$ до множества $U \subset \mathbb{R}^p$ определяется как $\operatorname{dist}(u, U) = \inf_{\widetilde{u} \in U} \|u - \widetilde{u}\|$, а единственная проекция u на замкнутое выпуклое множество $P \subset \mathbb{R}^p$ обозначается $\pi_P(u)$. Для последовательности $\{u^k\} \subset \mathbb{R}^p$, сходящейся к некоторому u, скорость сходимости называется сверхлинейной с Q-порядком $\tau > 0$, если существует $c > 0$ такое, что

$$\|u^{k+1} - u\| \leqslant c\|u^k - u\|^\tau$$

для всех достаточно больших k.

1. Кусочно-гладкие уравнения с ограничениями и кусочный метод Левенберга–Марквардта

Данная статья посвящена численным методам решения уравнения с ограничением

$$\Phi(u) = 0, \quad u \in P, \tag{1.1}$$

где $\Phi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ — заданное отображение, а $P \subset \mathbb{R}^p$ — заданное множество. В этой работе всюду предполагается, что P выпукло и замкнуто, и что отображение Φ является кусочно-гладким, т. е. оно непрерывно, и существует конечный набор гладких (непрерывно дифференцируемых) кусочных отображений $\Phi^1, \ldots, \Phi^s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, такой, что

$$\Phi(u) \in \{\Phi^1(u), \ldots, \Phi^s(u)\} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^p.$$

Для каждого $u \in \mathbb{R}^p$ определим множество

$$\mathcal{A}(u) = \{j \in \{1, \ldots, s\} \mid \Phi(u) = \Phi^j(u)\} \tag{1.2}$$

индексов гладких кусочных отображений активных в точке u. Далее будем считать фиксированным произвольное отображение $J : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{q\times p}$, удовлетворяющее условию

$$J(u) \in \{(\Phi^j)'(u) \mid j \in \mathcal{A}(u)\} \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^p. \tag{1.3}$$

Для текущего приближения $u^k \in P$ введенный в [2] кусочный метод Левенберга–Марквардта (LM) с ограничениями определяет следующее приближение как $u^k + v^k$, где смещение v^k есть решение подзадачи

$$\frac{1}{2}\|\Phi(u^k) + J(u^k)v\|^2 + \frac{1}{2}\sigma(u^k)\|v\|^2 \to \min, \quad u^k + v \in P, \tag{1.4}$$

с некоторой функцией $\sigma : P \to \mathbb{R}_+$, определяющей значения параметра регуляризации.

Локальная сверхлинейная сходимость метода обоснована в [2, теорема 2.1]. Помимо того, что производные гладких кусочных отображений $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$ удовлетворяют условию Липшица вблизи решения $\bar{u}$ задачи (1.1), этот результат использует следующие два предположения:

– P-свойство, введенное в [4, с. 434]: существует окрестность U точки $\bar{u}$ такая, что

$$\forall\, j \in \mathcal{A}(\bar{u}) \quad (\Phi^j)^{-1}(0) \cap P \cap U \subset \Phi^{-1}(0) \cap P; \tag{1.5}$$

– кусочная оценка расстояния

$$\forall\, j \in \mathcal{A}(\bar{u}) \quad \operatorname{dist}(u, (\Phi^j)^{-1}(0) \cap P) = O(\|\Phi^j(u)\|) \tag{1.6}$$

при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$.

Тогда для любого $\delta > 0$ и любого $u^0 \in P$, достаточно близкого к $\bar{u}$, описанный выше метод LM, использующий
$$\sigma(u^k) = \|\Phi(u^k)\|^\theta \tag{1.7}$$
с некоторым фиксированным $\theta \in (0, 2]$, однозначно определяет последовательность $\{u^k\} \subset B(\bar{u}, \delta)$, и эта последовательность сходится к некоторому решению задачи (1.1), причем скорость сходимости сверхлинейная с Q-порядком $\min\{\theta + 1, 2\}$ (либо u^k совпадает с таким решением после конечного числа шагов).

Отметим, что предположения указанного результата допускают как негладкость отображения Φ, так и неизолированность решения $\bar{u}$ задачи (1.1).

Глобализация сходимости метода LM реализована в следующем алгоритме, предложенном в [3, алгоритм 3.2]. Введем функцию $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,
$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\|\Phi(u)\|^2.$$

Алгоритм 1. Фиксируем отображение $J : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{q \times p}$, удовлетворяющее (1.3). Фиксируем параметры $\theta > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\varkappa \in (0, 1)$. Выбираем $u^0 \in P$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $\Phi(u^k) = 0$, стоп. Иначе вычисляем $\sigma(u^k)$ согласно (1.7).

2. Вычисляем v^k как решение подзадачи (1.4). Если $v^k = 0$, стоп.

3. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство
$$\varphi(u^k + \alpha v^k) \leqslant \varphi(u^k) - \varepsilon\alpha\sigma(u^k)\|v^k\|^2, \tag{1.8}$$
полагаем $\alpha_k = \alpha$. Иначе заменяем α на $\kappa\alpha$ до тех пор, пока неравенство (1.8) не будет выполнено.

4. Полагаем $u^{k+1} = u^k + \alpha_k v^k$, увеличиваем k на 1, и переходим к шагу 1.

Свойства глобальной сходимости данного алгоритма установлены в [3, теорема 3.3] (см. также [3, замечание 3.1]). А именно, при выполнении условия
$$\|\Phi(u)\| \leqslant \|\Phi^j(u)\| \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, s\},\ \forall\, u \in P, \tag{1.9}$$
алгоритм однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, любая предельная точка $\bar{u}$ которой удовлетворяет, *для некоторого* $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$, условию стационарности
$$\langle \varphi_j'(\bar{u}),\, u - \bar{u}\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P \tag{1.10}$$
в задаче оптимизации
$$\varphi_j(u) \to \min, \quad u \in P, \tag{1.11}$$
где для всякого $j \in \{1, \ldots, s\}$ гладкая функция $\varphi_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ определяется равенством
$$\varphi_j(u) = \frac{1}{2}\|\Phi^j(u)\|^2.$$

Здесь имеется в виду, что если алгоритм 1 останавливается (на шаге 1 или 2) с текущим приближением u^k после конечного числа итераций, то $\bar{u} = u^k$.

Приведенный результат о глобальной сходимости не идеален: идеальный результат для методов такого рода должен был бы состоять в B-стационарности предельной точки $\bar{u}$, что означает выполнение

$$\varphi'(\bar{u};\, u-\bar{u}) \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P,$$

где через $\varphi'(\bar{u};\, v)$ обозначается производная функции φ в точке $\bar{u}$ по направлению $v \in \mathbb{R}^p$. Однако, если $\mathcal{A}(\bar{u})$ состоит более чем из одного элемента, то B-стационарность может не иметь места при выполнении (1.10) для какого-то $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$, и более того, такие точки $\bar{u}$ могут притягивать последовательности, генерируемые алгоритмом 1, из широких областей начальных точек; см. [3, пример 3.1]. Согласно [3, предложение 3.2], при выполнении условия (1.9), B-стационарность равносильна выполнению (1.10) *для всех* $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$. Соответственно, целью дальнейшего является модификация алгоритма 1, обеспечивающая выполнение последнего свойства в предельных точках генерируемых последовательностей.

2. Оценка расстояния и идентификация активных кусочных отображений

Пусть $\widehat{\jmath} \in \{1,\, \ldots,\, s\}$ — фиксированный индекс гладкого кусочного отображения $\Phi^{\widehat{\jmath}}$. (Имеется в виду, что для текущего приближения u^k это тот индекс $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(u^k)$, для которого $J(u^k) = (\Phi^{\widehat{\jmath}})'(u^k)$; см. (1.3).) Конструкция процедуры, рассматриваемой в следующем разделе, основана на асимптотической идентификации гладких кусочных отображений, являющихся активными в потенциальных предельных точках последовательности $\{u^k\}$, по информации, доступной в текущем приближении u^k. Такая идентификация использует оценки расстояния до потенциальных предельных точек.

В [5] в контексте метода LP-Newton оценивается расстояние до C-стационарных (или, что в данном случае то же самое [6, предложение 3.2], B-стационарных) точек задачи оптимизации

$$f_{\widehat{\jmath}}(u) \to \min, \quad u \in P,$$

где функции $f_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $j \in \{1,\, \ldots,\, s\}$, определяются равенством

$$f_j(u) = \|\Phi^j(u)\|_\infty.$$

Эти функции негладкие из-за негладкости ∞-нормы, и в [5, теорема 3.1] для оценки расстояния используется функция $\Delta(\cdot)$, значения которой вычисляются на итерациях глобализованного метода LP-Newton.

В контексте метода LM нужно оценивать расстояние до стационарных точек задачи оптимизации (1.11) с $j = \widehat{\jmath}$. Естественная мера нестационарности точки $u \in P$ при этом имеет вид $r_{\widehat{\jmath}}(u)$, где $r_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$,

$$r_j(u) = \|u - \pi_P(u - \varphi_j'(u))\|, \tag{2.1}$$

$$\varphi_j'(u) = ((\Phi^j)'(u))^\top \Phi^j(u). \tag{2.2}$$

Требуемая оценка расстояния вблизи стационарной точки $\bar{u}$ задачи (1.11) с $j = \widehat{\jmath}$ состоит в выполнении

$$u - \bar{u} = O(r_{\widehat{\jmath}}(u)) \tag{2.3}$$

при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$. Напомним, что стационарность точки $\bar{u}$ в такой задаче характеризуется равенством $r_{\widehat{\jmath}}(u) = 0$, что равносильно выполнению условий $\bar{u} \in P$ и (1.10) с $j = \widehat{\jmath}$.

Согласно [7, предложение 1.31], оценка расстояния (2.3) при $u \to \bar{u}$ (без требования $u \in P$) равносильна так называемой полуустойчивости $\bar{u}$ как решения вариационного неравенства

$$u \in P, \quad \langle \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u),\, \widetilde{u} - u \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \widetilde{u} \in P, \tag{2.4}$$

что, согласно [7, предложение 1.33], в случае двукратной дифференцируемости $\varphi_{\widehat{\jmath}}$ в точке $\bar{u}$ и полиэдральности множества P имеет место тогда и только тогда, когда решение $v = 0$ аффинного вариационного неравенства

$$\bar{u} + v \in P, \quad \langle \varphi'_{\widehat{\jmath}}(\bar{u}) + \varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v,\, u - \bar{u} - v \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P,$$

изолировано.

Дальнейшие расшифровки приведенной характеризации оценки расстояния (2.3) возможны для более специальных множеств P, например, когда P является параллелепипедом, т. е. имеет вид

$$P = \{u \in \mathbb{R}^p \mid a_i \leqslant u_i \leqslant b_i,\, i \in \{1,\, \ldots,\, p\}\} \tag{2.5}$$

с некоторыми a_i и b_i такими, что $-\infty \leqslant a_i < b_i \leqslant +\infty$, $i \in \{1,\, \ldots,\, p\}$. В частности, если $P = \mathbb{R}^p_+$, то из (2.1) следует, что

$$r_{\widehat{\jmath}}(u) = \|\min\{u,\, \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u)\}\|,$$

где минимум берется покомпонентно, а стационарность точки $\bar{u}$ в задаче (1.11) означает, что $\bar{u}$ является решением нелинейной комплементарной задачи

$$u \geqslant 0, \quad \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u) \geqslant 0, \quad \langle u,\, \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u) \rangle = 0.$$

Согласно [7, предложение 1.34], полуустойчивость $\bar{u}$, а значит, и оценка расстояния (2.3) при этом имеют место тогда и только тогда, когда система

$$v_i \geqslant 0, \quad (\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v)_i \geqslant 0, \quad v_i(\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v)_i = 0, \quad i \in \{1,\, \ldots,\, p\} :\, \bar{u}_i = 0 = (\varphi'_{\widehat{\jmath}}(\bar{u}))_i,$$
$$(\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v)_i = 0, \quad i \in \{1,\, \ldots,\, p\} :\, \bar{u}_i > 0 = (\varphi'_{\widehat{\jmath}}(\bar{u}))_i,$$
$$v_i = 0, \quad i \in \{1,\, \ldots,\, p\} :\, \bar{u}_i = 0 < (\varphi'_{\widehat{\jmath}}(\bar{u}))_i,$$

имеет единственное решение $v = 0$.

Если же $P = \mathbb{R}^p$, то из (2.1) следует, что

$$r_{\widehat{\jmath}}(u) = \|\varphi'_{\widehat{\jmath}}(u)\|, \tag{2.6}$$

а стационарность точки $\bar{u}$ в задаче (1.11) означает, что $\varphi'_{\widehat{\jmath}}(\bar{u}) = 0$. Полуустойчивость, а значит, и оценка расстояния (2.3), при этом сводятся к невырожденности матрицы $\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})$. Далее, поскольку для всякого $v \in \mathbb{R}^p$

$$\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v = ((\Phi^{\widehat{\jmath}})'(\bar{u}))^\top (\Phi^{\widehat{\jmath}})'(\bar{u})v + ((\Phi^{\widehat{\jmath}})''(\bar{u})[v])^\top \Phi^{\widehat{\jmath}}(\bar{u}),$$

то

$$\langle \varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})v,\, v \rangle = \|(\Phi^{\widehat{\jmath}})'(\bar{u})v\|^2 + \langle \Phi^{\widehat{\jmath}}(\bar{u}),\, (\Phi^{\widehat{\jmath}})''(\bar{u})[v,\, v] \rangle,$$

и, например, если квадратичная форма $v \mapsto \langle \Phi^{\widehat{\jmath}}(\bar{u}),\, (\Phi^{\widehat{\jmath}})''(\bar{u})[v,\, v]\rangle : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ положительно определена на $\ker(\Phi^{\widehat{\jmath}})'(\bar{u})$, то матрица $\varphi''_{\widehat{\jmath}}(\bar{u})$ также положительно определена, и, в частности, невырождена. Сказанное справедливо и для произвольного P, если $\bar{u} \in \operatorname{int} P$ (при этом равенство (2.6) имеет место для всех $u \in \mathbb{R}^p$, достаточно близких к $\bar{u}$).

В завершение этого обсуждения заметим, что характеризация (или хотя бы какие-то достаточные условия для) требуемой оценки расстояния (2.3) могут быть получены и в случае неполиэдрального P, однако, по-видимому, это требует задания P какими-то функциональными ограничениями и предположений о выполнении условий регулярности для этих ограничений, таких, как условие постоянного ранга. Такие предположения позволяют непосредственно вычислять производных по направлениям функции $r_{\widehat{\jmath}}$ [8, теорема 4.5.3], с последующим применением [7, предложение 1.64], согласно которому требуемая оценка расстояния равносильна тому, что все такие производные по ненулевым направлениям отличны от нуля.

Способ идентификации активных в точке $\bar{u}$ гладких кусочных отображений при выполнении оценки расстояния (2.3) описывается следующим результатом.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть для некоторого $\widehat{\jmath} \in \{1,\, \ldots,\, s\}$ точка $\bar{u}$ является стационарной в задаче (1.11), и выполняется оценка расстояния (2.3) при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$. Пусть $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — любая функция, удовлетворяющая $\rho(0) = 0$, $\rho(t) \to 0$ и $t = o(\rho(t))$ при $t \to 0+$. Для каждого $u \in \mathbb{R}^p$ положим*

$$\mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u) = \{j \in \{1,\, \ldots,\, s\} \mid \|\Phi^j(u) - \Phi(u)\| \leqslant \rho(r_{\widehat{\jmath}}(u))\}. \tag{2.7}$$

Тогда для любого $u \in P$, достаточно близкого к $\bar{u}$, выполняется

$$\mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u) = \mathcal{A}(\bar{u}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$. Тогда, согласно (2.3), для $u \in P$, достаточно близкого к $\bar{u}$, выполняется

$$\|\Phi^j(u) - \Phi(u)\| = \|(\Phi^j(u) - \Phi(u)) - (\Phi^j(\bar{u}) - \Phi(\bar{u}))\| = O(\|u - \bar{u}\|) = O(r_{\widehat{\jmath}}(u)) \leqslant \rho(r_{\widehat{\jmath}}(u)),$$

и следовательно $j \in \mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u)$.

Наоборот, если $j \notin \mathcal{A}(\bar{u})$, то $\|\Phi^j(\bar{u}) - \Phi(\bar{u})\| > 0$, и поскольку $r_{\widehat{\jmath}}(u) \to 0$ при $u \to \bar{u}$, отсюда следует, что $j \notin \mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u)$ для u достаточно близкого к $\bar{u}$. □

3. Глобализованный кусочный метод Левенберга–Марквардта с процедурой выхода из окрестности нестационарной точки

Прототипом для предлагаемого ниже алгоритма 2 служит [5, алгоритм 4.1], реализующий глобализованный метод LP-Newton с процедурой выхода из стационарных точек, не являющихся решениями.

Для всякого $u \in \mathbb{R}^p$ введем обозначения $r_J(u) = r_{\widehat{\jmath}}(u)$ и $\mathcal{A}_J(u) = \mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u)$ для $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(u)$ такого, что $J(u) = (\Phi^{\widehat{\jmath}})'(u)$, т. е., согласно (2.1), (2.2), (2.7),

$$r_J(u) = \left\| u - \pi_P\left(u - (J(u))^\top \Phi(u)\right)\right\|. \tag{3.1}$$

$$\mathcal{A}_J(u) = \{j \in \{1,\, \ldots,\, s\} \mid \|\Phi^j(u) - \Phi(u)\| \leqslant \rho(r_J(u))\}. \tag{3.2}$$

Заметим, что при этом всегда выполняется $\mathcal{A}(u) \subset \mathcal{A}_J(u)$, и в частности, $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}_J(u)$.

Алгоритм 2. Фиксируем отображение $J : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{q\times p}$, удовлетворяющее (1.3). Фиксируем параметры $\theta > 0$, $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\nu \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, и $\varkappa \in (0, 1)$. Выбираем функцию $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющую $\rho(t) \to 0$, $t = o(\rho(t))$ при $t \to 0+$. Выбираем $u^0 \in P$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $\Phi(u^k) = 0$, стоп. Иначе вычисляем $\sigma(u^k)$ согласно (1.7).

2. Пусть индекс $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(u^k)$ таков, что $J(u^k) = (\Phi^{\widehat{\jmath}})'(u^k)$. Если

$$\frac{(r_J(u^k))^\nu}{\|\Phi(u^k)\|} \leqslant \delta_0 \tag{3.3}$$

   и $\mathcal{A}_J(u^k) \neq \{\widehat{\jmath}\}$, переходим к шагу 3. В противном случае, вычисляем v^k как решение подзадачи (1.4), и если $v^k \neq 0$, переходим к шагу 5; иначе стоп.

3. Выбираем $j \in \mathcal{A}_J(u^k) \setminus \{\widehat{\jmath}\}$ такой, что $r_j(u^k) \geqslant \delta_1$. Если такого j не существует, выбираем $j \in \mathcal{A}_J(u^k) \setminus \{\widehat{\jmath}\}$ с максимальным значением $r_j(u^k)$.

   Если $r_j(u^k) > r_J(u^k)$, вычисляем $v^{k,j}$ как решение подзадачи

$$\frac{1}{2}\|\Phi(u^k) + (\Phi^j)'(u^k)v\|^2 + \frac{1}{2}\sigma(u^k)\|v\|^2 \to \min, \quad u^k + v \in P, \tag{3.4}$$

   и переходим к шагу 4. В противном случае, если $r_J(u^k) > 0$, вычисляем $v^{k,\widehat{\jmath}}$ как решение подзадачи (1.4), полагаем $v^k = v^{k,\widehat{\jmath}}$, и переходим к шагу 5; иначе стоп.

4. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство

$$\varphi_j(u^k + \alpha v^{k,j}) \leqslant \varphi_j(u^k) - \varepsilon\alpha\sigma(u^k)\|v^{k,j}\|^2, \tag{3.5}$$

   полагаем $\alpha_{k,j} = \alpha$. Иначе заменяем α на $\varkappa\alpha$ до тех пор, пока неравенство (3.5) не будет выполнено.

   Если

$$\varphi(u^k + \alpha_{k,j} v^{k,j}) < \varphi(u^k), \tag{3.6}$$

   полагаем $v^k = v^{k,j}$, $\alpha_k = \alpha_{k,j}$, и переходим к шагу 6. В противном случае полагаем $v^k = v^{k,\widehat{\jmath}}$.

5. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство

$$\varphi(u^k + \alpha v^k) \leqslant \varphi(u^k) - \varepsilon\alpha\sigma(u^k)\|v^k\|^2, \tag{3.7}$$

   полагаем $\alpha_k = \alpha$. Иначе заменяем α на $\varkappa\alpha$ до тех пор, пока неравенство (3.7) не будет выполнено.

6. Полагаем $u^{k+1} = u^k + \alpha_k v^k$, увеличиваем k на 1, и переходим к шагу 1.

В сформулированном алгоритме подразумевается, что значения π_P, а значит, и r_j, относительно легко вычисляются. Если трудоемкость вычисления π_P сравнима с трудоемкостью решения подзадачи метода LM, то на шаге 3 алгоритма вместо $r_j(u^k)$ можно использовать $\|v^{k,j}\|$ для предварительно вычисленного $v^{k,j}$.

З а м е ч а н и е 3.1. Остановка алгоритма 2 для некоторого k происходит только в следующих случаях:

- если u^k является решением (1.1) (остановка на шаге 1);
- если $(r_J(u^k))^\nu/\|\Phi(u^k)\| > \delta_0$ (т. е. нарушается условие (3.3)) или $\mathcal{A}_J(u^k) = \{\widehat{\jmath}\}$, и $v^{k,\widehat{\jmath}} = 0$ (остановка на шаге 2); но последнее возможно только при $r_J(u^k) = 0$, и значит, согласно (2.7), $\mathcal{A}(u^k) = \mathcal{A}_J(u^k) = \{\widehat{\jmath}\}$, и при этом выполняется условие стационарности
$$\langle \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u^k),\, u - u^k\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P;$$
- если $r_j(u^k) \leqslant r_J(u^k) = 0$ (остановка на шаге 3); при этом не может выполняться $r_j(u^k) \geqslant \delta_1$, а значит, согласно выбору j на шаге 3, $r_j(u^k) = 0$ для всех $j \in \mathcal{A}_J(u^k)$, и поскольку при этом $\mathcal{A}_J(u^k) = \mathcal{A}(u^k)$, то выполняется
$$\langle \varphi'_j(u^k),\, u - u^k\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P,\ \forall\, j \in \mathcal{A}(u^k). \tag{3.8}$$

З а м е ч а н и е 3.2. При переборе $j \in \mathcal{A}_J(u^k) \setminus \{\widehat{\jmath}\}$ на шаге 3 алгоритма 2 имеет смысл сначала пробовать индексы j с наименьшим значением $\|\Phi^j(u^k) - \Phi(u^k)\|$.

З а м е ч а н и е 3.3. Параметры δ_0 и δ_1 в алгоритме 2 предполагаются положительными и фиксированными, но можно рассматривать и какие-то динамические правила управления этими параметрами. Для справедливости излагаемой ниже теории достаточно предполагать, что эти параметры не становятся меньше некоторых фиксированных положительных величин.

Для обоснования глобальной сходимости алгоритма 2 потребуется следующая

Лемма 3.1. *Для любых $\bar{u} \in P$ и $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$ таких, что $r_j(\bar{u}) > 0$, существует $\widetilde{\delta} > 0$ такое, что для любого $u^k \in P$, достаточно близкого к $\bar{u}$, подзадача (3.4) имеет единственное решение v^k, и для него выполняется $\|v^k\| \geqslant \widetilde{\delta}$.*

Доказательство этой леммы по сути содержится в доказательстве в [3, теорема 3.3]. Следующее предложение выводится как дополнительный факт, также вытекающий из доказательства в [3, теорема 3.3].

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть $\{u^k\} \subset P$ — любая последовательность, для которой последовательность $\{\|\Phi(u^k)\|\}$ монотонно невозрастает, и для любой предельной точки $\bar{u}$ последовательности $\{u^k\}$ существует сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$ такая, что точка u^{k_i+1} получена шагом алгоритма 1 для всех i.*

Тогда для любой такой предельной точки выполняется (1.10) для некоторого $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$, и $r_J(u^{k_i}) \to 0$ при $i \to \infty$.

Свойства глобальной сходимости алгоритма 2 характеризуются следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие (1.9).*

Тогда алгоритм 2 либо останавливается в точке $u^k \in P$, удовлетворяющей (3.8), либо генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\} \subset P$. В последнем случае, если $\bar{u}$ — предельная точка этой последовательности (автоматически лежащая в P в силу его замкнутости), то либо оценка расстояния (2.3) при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$ нарушается при некотором $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(\bar{u})$, либо
$$\langle \varphi'_j(\bar{u}),\, u - \bar{u}\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, u \in P,\ \forall\, j \in \mathcal{A}(\bar{u}). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если алгоритм 2 не останавливается в точке u^k, то очередное приближение u^{k+1} всегда успешно определяется алгоритмом. Это устанавливается теми же рассуждениями, что и в [3, теорема 3.3]. А именно, подзадачи (1.4) на шаге 2 и (3.4) на шаге 3 алгоритма всегда имеют имеют единственные решения, а процедуры одномерного поиска на шагах 4 и 5 алгоритма позволяют найти подходящие значения $\alpha_{k,j}$ и α_k, соответственно, после конечного числа дроблений, т. е. замен α на $\kappa\alpha$. Кроме того, согласно конструкции алгоритма, все генерируемые им приближения лежат в P.

Далее, согласно замечанию 3.1, с учетом (2.1), (2.2) получаем, что если алгоритм останавливается в точке u^k, то выполняется (3.8). Если же алгоритм не останавливается, то, согласно сказанному выше, он генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\} \subset P$. Пусть $\bar{u} \in P$ — предельная точка этой последовательности, и предположим, что неравенство в (3.9) нарушается для некоторого $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$. Последнее эквивалентно тому, что $r_j(\bar{u}) \neq 0$ и, в частности, в силу (1.2), (2.1) и (2.2), $\Phi(\bar{u}) = \Phi^j(\bar{u}) \neq 0$.

Пусть $\{u^{k_i}\}$ — сходящаяся к $\bar{u}$ подпоследовательность последовательности $\{u^k\}$, и предположим сначала, что для всех i на шаге 2 алгоритма реализуется

$$\frac{(r_J(u^{k_i}))^\nu}{\|\Phi(u^{k_i})\|} > \delta_0. \tag{3.10}$$

Тогда приближения u^{k_i+1} генерируются алгоритмом 1 (без каких-либо модификаций), и поэтому из предложения 3.1 вытекает, что $r_J(u^{k_i}) \to 0$ при $i \to \infty$, что противоречит (3.10). Таким образом, для любой сходящейся к $\bar{u}$ подпоследовательности $\{u^{k_i}\}$ последовательности $\{u^k\}$ модификация алгоритма 1 инициируется на итерации k_i для всех достаточно больших i, а именно, на шаге 2 алгоритма 2 выполняется $(r_J(u^{k_i}))^\nu/\|\Phi(u^{k_i})\| \leqslant \delta_0$, и если $\mathcal{A}_{\widehat{\jmath}}(u^k) \neq \{\widehat{\jmath}\}$, то осуществляется переход к шагу 3.

Предположим, что оценка расстояния (2.3) при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$ выполняется для всех $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$. Поскольку по непрерывности $\mathcal{A}(u^{k_i}) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$ для всех достаточного больших i, то $\widehat{\jmath}$, отвечающий u^{k_i} при таких i, содержится в $\mathcal{A}(\bar{u})$, а значит, применимо предложение 2.1 с любым таким $\widehat{\jmath}$, позволяющее заключить, что $\mathcal{A}_J(u^{k_i}) = \mathcal{A}(\bar{u})$ для всех достаточного больших i.

Далее, из существования $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$ такого, что $r_j(\bar{u}) \neq 0$, и из правила выбора j на шаге 3 алгоритма 2 вытекает существование $\widehat{\delta} > 0$ такого, что для всех таких j при достаточно большом i выполняется $r_j(u^{k_i}) \geqslant \widehat{\delta}$. В силу конечности множества $\mathcal{A}(\bar{u})$, еще раз переходя при необходимости к подпоследовательности, можем считать, что для $j = \widetilde{\jmath}$ при некотором фиксированном $\widetilde{\jmath} \in \mathcal{A}(\bar{u})$, и для всех i алгоритм использует либо $v^{k_i} = v^{k_i,\widetilde{\jmath}}$, вычисленное на шаге 3 как решение подзадачи (3.4), и удовлетворяющее (3.5) $\alpha^{k_i} = \alpha^{k_i,\widetilde{\jmath}}$, вычисленное на шаге 4, либо $\widetilde{\jmath} = \widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(u^{k_i})$, и алгоритм использует v^{k_i}, вычисленное на шаге 3 как решение подзадачи (3.4), и удовлетворяющее (3.7) α_{k_i}, вычисленное на шаге 5, причем в любом случае $r_{\widetilde{\jmath}}(u^{k_i}) \geqslant \widehat{\delta}$.

Согласно лемме 3.1, из последнего неравенства следует существование $\widetilde{\delta} > 0$ такого, что для всех достаточно больших i выполняется $\|v^{k_i}\| \geqslant \widetilde{\delta}$, и при этом из (1.9), и (3.5) или (3.7), вытекает выполнение

$$\varphi(u^{k_i+1}) \leqslant \varphi_{\widetilde{\jmath}}(u^{k_i}) - \varepsilon\alpha_{k_i}\sigma(u^{k_i})\widetilde{\delta}^2. \tag{3.11}$$

(Напомним, что всегда $\varphi(u^{k_i}) = \varphi_{\widetilde{\jmath}}(u^{k_i})$.) Конструкция алгоритма такова, что последовательность $\{\varphi(u^k)\}$ монотонно невозрастает (в частности, для обеспечения этого предназначен тест (3.6)), причем эта последовательность ограничена снизу (нулем), а значит, сходится. Отсюда следует, что для (любой) предельной точки точки $\bar{u}$ последовательности $\{u^k\}$ последовательность $\{\varphi(u^k)\}$ (а значит, и ее подпоследовательнось $\{\varphi(u^{k_i+1})\}$) сходится к $\varphi(\bar{u})$, в силу непрерывности φ. С другой стороны, из сходимости $\{u^{k_i}\}$ к $\bar{u}$ и из непрерывности $\varphi_{\widetilde{\jmath}}$ следует, что $\{\varphi_{\widetilde{\jmath}}(u^{k_i})\} \to \varphi_{\widetilde{\jmath}}(\bar{u}) = \varphi(\bar{u})$, где последнее равенство имеет место потому, что $\widetilde{\jmath} \in \mathcal{A}(\bar{u})$). С учетом того, что $\sigma(\bar{u}) > 0$ (так как $\Phi(\bar{u}) \neq 0$), а значит, значения $\sigma(u^{k_i})$ отделены от нуля положительной константой, из (3.11) при этом следует, что $\alpha_{k_i} \to 0$ при $i \to \infty$. Но тогда, повторяя соответствующее рассуждение из [3, теорема 3.3] для $j = \widetilde{\jmath}$, снова приходим к противоречию. □

Наконец, приведем результат о сверхлинейной скорости сходимости, демонстрирующий, что соответствующие свойства алгоритма 1, установленные в [3, теорема 3.4], сохраняются и для алгоритма 2.

Теорема 3.2. *Пусть производные кусочных отображениями $\Phi^1, \ldots, \Phi^s$ удовлетворяют условию Липшица вблизи решения $\bar{u}$ задачи* (1.1)*, а множество P является параллелепипедом, т. е. имеет вид* (2.5)*. Пусть выполнено P-свойство* (1.5) *с некоторой окрестностью U точки $\bar{u}$ (что является автоматическим при выполнении* (1.9)*), а также кусочная оценка расстояния* (1.6) *при $u \in P$ стремящемся к $\bar{u}$.*

Тогда если алгоритм 2*, в котором используется $\theta \in (0, 2]$, генерирует приближение достаточно близкое к $\bar{u}$, то алгоритм либо останавливается в решении u^k задачи* (1.1)*, либо генерирует бесконечную последовательность $\{u^k\}$, сходящуюся к некоторому решению $\bar{u}$ задачи* (1.1)*, причем скорость сходимости сверхлинейная с Q-порядком* $\min\{\theta + 1, 2\}$.

Доказательство. Напомним, что для индекса $\widehat{\jmath}$, отвечающего u^k, достаточно близкому к $\bar{u}$, выполняется $\widehat{\jmath} \in \mathcal{A}(u^k) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$. Тогда, с учетом (2.2), из (1.6) и из [9, лемма 1] следует свойство верхней липшицевости решений вариационного неравенства (2.4). Точнее, для $w \in \mathbb{R}^p$ и для любого решения $u(w)$ возмущенного вариационного неравенства

$$u \in P, \quad \langle \varphi'_{\widehat{\jmath}}(u) - w, \widetilde{u} - u \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, \widetilde{u} \in P,$$

достаточно близкого к $\bar{u}$, имеет место оценка

$$\operatorname{dist}(u(w), (\Phi^{\widehat{\jmath}})^{-1}(0) \cap P) = O(\|w\|)$$

при $w \to 0$. В частности, полагая $w = 0$, отсюда получаем, что вблизи $\bar{u}$ решения кусочной задачи

$$\Phi^{\widehat{\jmath}}(u) = 0, \quad u \in P,$$

совпадают с решениями вариационного неравенства (2.4).

Далее, для множества P из (2.5) вариационное неравенство (2.4) является так называемой смешанной комплементарной задачей, и для нее из установленного свойства верхней липшицевости и из [10, теорема 2] следует выполнение оценки расстояния

$$\operatorname{dist}(u, (\Phi^{\widehat{\jmath}})^{-1}(0) \cap P) = O(\|r_J(u)\|)$$

при $u \to \bar{u}$. (Отметим, что для случая $P = \mathbb{R}^n$ такая оценка вытекает непосредственно из [10, следствие 2].) В комбинации с (1.6) и условием $\nu \in (0, 1)$ эта оценка позволяет утверждать, что условие (3.3) нарушается для любого $u^k \in \mathbb{R}^p$, достаточно близкого к $\bar{u}$

и такого, что $\Phi(u^k) \neq 0$. Значит, в этом случае следующее приближение u^{k+1} вычисляется так же, как в алгоритме 1 (без каких-либо модификаций), и требуемый результат получается так же, как [3, теорема 3.4], с применением [3, теорема 2.1]. □

4. Иллюстративный пример

Следующий пример взят из [3, пример 3.1], [5, примеры 1.2, 2.1, 4.1].

Пример 4.1. Пусть $p = 1$, $q = 2$,

$$\Phi(u) = \begin{pmatrix} 1-u \\ \min\{1+u,\, 1-u\} \end{pmatrix}, \quad P = [-1,\, 1].$$

Задача (1.1) с такими данными имеет единственное решение $\widehat{u} = 1$. Отображение Φ является кусочно-гладким, с естественным набором из $s = 2$ гладких кусочных отображений

$$\Phi^1(u) = \begin{pmatrix} 1-u \\ 1+u \end{pmatrix}, \quad \Phi^2(u) = \begin{pmatrix} 1-u \\ 1-u \end{pmatrix},$$

из которых активным в решении $\widehat{u}$ является только Φ^2, т. е. $\mathcal{A}(\widehat{u}) = \{2\}$. Отметим, что такая задача (1.1) является эквивалентной переформулировкой комплементарной системы

$$1-u = 0, \quad 1+u \geqslant 0, \quad 1-u \geqslant 0, \quad (1+u)(1-u) = 0,$$

и как и для всякой такой переформулировки, для нее выполняется условие (1.9); см. [3, пример 3.1].

Далее, непосредственно проверяется, что в точке $\bar{u} = 0 \in \operatorname{int} P$ выполняется $\mathcal{A}(\bar{u}) = \{1,\, 2\}$, причем $\varphi_1'(\bar{u}) = 0$, в то время как $\varphi_2'(\bar{u}) = -2$, т. е. точка $\bar{u}$ удовлетворяет (1.10) для $j = 1$, но не для $j = 2$. При этом, как показано в [3, пример 3.1], будучи запущен из точки $u^0 \in [-1,\, 0)$, алгоритм 1 генерирует монотонно возрастающую последовательность, сходящуюся к $\bar{u}$ линейно, с асимптотическим общим частным $2^{\theta/2}/(2+2^{\theta/2})$. Если же $u^0 \in (0,\, 1)$, то аналогичным анализом можно показать, что имеет место монотонная сходимость к решению $\widehat{u} = 1$, причем скорость сходимости сверхлинейная с Q-порядком $\theta + 1$.

Что же касается точки $u^0 = \bar{u} = 0$, то в этом случае поведение алгоритма определяется выбором $J(0):$ если выбирается $J(0) = (\Phi^1)'(0)$, то алгоритм 1 останавливается в этой точке, поскольку генерирует $v^k = 0$; если же выбирается $J(0) = (\Phi^2)'(0)$, то алгоритм «выходит» из точки u^0, генерируя $u^1 \in (0,\, 1)$, и имеет место сверхлинейная сходимость к решению $\widehat{u} = 1$. Идея алгоритма 2 как раз и состоит в переключении в подобных ситуациях на альтернативное гладкое кусочное отображение, что может давать возможность покинуть стационарную точку для текущей ветви, не являющуюся решением, или ее окрестность. Заметим, что $\varphi_1''(\bar{u}) = 2 \neq 0$, и выполнение оценки расстояния (2.3) при $\widehat{\jmath} = 1$ здесь гарантировано.

Пусть для определенности $J(0) = (\Phi^1)'(0)$, т. е.

$$J(u) = \begin{cases} (\Phi^1)'(u) = (-1,\, 1), & \text{если } -1 \leqslant u \leqslant 0, \\ (\Phi^2)'(u) = (-1,\, -1), & \text{если } \quad 0 < u \leqslant 1. \end{cases}$$

Возьмем, например, $\rho(t) = \sqrt{t}$. Тогда, из (3.1) и (3.2) прямыми вычислениями выводится, что

$$\mathcal{A}_J(u) = \begin{cases} \{1\} = \mathcal{A}(u), & \text{если} \quad -1 \leqslant u < -1/2, \\ \{1,\, 2\}, & \text{если} \ -1/2 \leqslant u \leqslant \widetilde{u}, \\ \{2\} = \mathcal{A}(u), & \text{если} \quad \widetilde{u} < u \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\widetilde{u} = (-1 + \sqrt{33})/8 \approx 0.5931$ — положительный корень уравнения $4u^2 + u - 2 = 0$.

Таким образом, если $-1 \leqslant u^k < -1/2$ или $\widetilde{u} < u^k < 1$, то альтернативные гладкие кусочные отображения не рассматриваются, и следующее приближение u^{k+1}, генерируемое алгоритмом 2, совпадает с приближением, получаемым алгоритмом 1. Во втором случае это имеет место и для всех последующих приближений, что приводит к сверхлинейной сходимости последовательности $\{u^k\}$ к решению $\widehat{u} = 1$. В первом же случае после конечного числа итераций очередное приближение будет удовлетворять $-1/2 \leqslant u^k \leqslant 0$, и при этом $\mathcal{A}_J(u^k) = \{1,\, 2\} \neq \{\widehat{\jmath}\} = \{1\}$, и

$$\frac{(r_J(u^k))^\nu}{\|\Phi(u^k)\|} = \frac{(-2u^k)^\nu}{\sqrt{2(1 + (u^k)^2)}},$$

где правая часть стремится к 0 при $u^k \to 0$. Поэтому, для любых фиксированных $\delta_0 > 0$ и $\nu > 0$, на шаге 2 алгоритма 2 тест (3.3) будет выполнен либо для текущего u^k, либо для какого-то из последующих приближений u^k, когда оно станет достаточно близким в 0. Тогда на шаге 3 алгоритма 2 вычисляется величина $r_2(u^k) = 2 - u^k > r_J(u^k) = -2u^k$ при u^k достаточно близком к 0. Поэтому следующее приближение u^{k+1} определяется шагами 3, 4 и 6 алгоритма 2 с $j = 2$, и прямые вычисления показывают, что при этом всегда $u^{k+1} > u^k$, и $u^{k+1} > 0$ или $u^{k+2} > 0$ (в зависимости от того, насколько близко к 0 расположено u^k).

Остается рассмотреть случай, когда $0 < u^k \leqslant \widetilde{u}$. При этом $\mathcal{A}_J(u^k) = \{1,\, 2\} \neq \{\widehat{\jmath}\} = \{2\}$ и

$$\frac{(r_J(u^k))^\nu}{\|\Phi(u^k)\|} = \frac{(2 - u^k)^\nu}{1 - u^k}.$$

Функция в правой части относительно u^k монотонно возрастает на $[0,\, 1)$, а значит ее значения всюду в этой области не меньше, чем значение в 0, равное 2^ν. Соответственно, если, например, $\delta_0 \leq 2^\nu$, то тест (3.3) не выполняется, и все последующие итерации осуществляются шагами алгоритма 1, что приводит к сверхлинейной сходимости к решению $\widehat{u} = 1$.

Если же $\delta_0 > 2^\nu$, то для u^k близких к 0 тест (3.3) выполняется, и тогда на шаге 3 алгоритма 2 вычисляется величина $r_1(u^k) = -2u^k < r_J(u^k) = 2 - u^k$. Поэтому, независимо от выполнения условия $r_1(u^k) \geqslant \delta_1$, следующее приближение u^{k+1} определяется шагами 5 и 6 алгоритма 1. При этом $u^{k+1} > u^k$, откуда следует, что и все последующие итерации осуществляются шагами алгоритма 1, что снова приводит к сверхлинейной сходимости к решению.

References

[1] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “The Levenberg–Marquardt method: an overview of modern convergence theories and more”, *Computational Optimization and Applications*, **89**:1 (2024), 33–67.

[2] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, Z. Yan, “The piecewise Levenberg–Marquardt method”, *Advances in System Sciences and Applications*, **24**:1 (2024), 29–39.

[3] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, Z. Yan, “Globalization of convergence of the constrained piecewise Levenberg–Marquardt method”, *Optimization Methods and Software*, **40**:2 (2025), 243–265.

[4] A. Fischer, M. Herrich, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Convergence conditions for Newton-type methods applied to complementarity systems with nonisolated solutions”, *Computational Optimization and Applications*, **63**:2 (2016), 425–459.

[5] A. Fischer, M. Herrich, A. F. Izmailov, W. Scheck, M. V. Solodov, “A globally convergent LP-Newton method for piecewise smooth constrained equations: escaping nonstationary accumulation points”, *Computational Optimization and Applications*, **69**:2 (2018), 325–349.

[6] A. Fischer, M. Herrich, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “A globally convergent LP-Newton method”, *SIAM J. on Optimization*, **26** (2016), 2012–2033.

[7] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, Cham, 2014.

[8] F. Facchinei, J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems.*, Springer–Verlag, New York, 2003.

[9] R. Behling, A. Fischer, “A unified local convergence analysis of inexact constrained Levenberg–Marquardt methods”, *Optimization Letters*, **6** (2012), 927–940.

[10] A. Fischer, “Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions”, *Mathematical Programming*, **94** (2002), 91–124.

Информация об авторах

Измаилов Алексей Феридович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-0524

Янь Чжибай, аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: yanzhibai@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-6425-0332

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Измаилов Алексей Феридович
E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 26.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 19.11.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the authors

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: izmaf@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9851-0524

Zhibai Yan, Post-Graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: yanzhibai@cs.msu.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-6425-0332

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Alexey F. Izmailov
E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Received 26.10.2025
Reviewed 19.11.2025
Accepted for press 21.11.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

УДК 517.955

Интегральное представление решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе без граничных вершин

Владимир Леонидович ПРЯДИЕВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Аннотация. Изучается начальная задача $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$ для волнового уравнения $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ при $x \in \Gamma \setminus J$ и $t > 0$, в которой Γ – геометрический граф (по Ю. В. Покорному) с прямолинейными рёбрами и без граничных вершин ($\partial\Gamma = \varnothing$), J – множество всех внутренних вершин Γ, функция φ задана; условия трансмиссии, замыкающие задачу, – это, помимо непрерывности функции $u(\,\cdot\,,t)$ во внутренних вершинах, условия гладкости для неё, суть которых состоит в том, что при каждом $t \geqslant 0$ в каждой внутренней вершине $a \in J$ сумма правых производных функции $u(\,\cdot\,,t)$ по всем допустимым направлениям равна 0. Доказывается, что если G^* есть обобщённая функция Грина (по М. Г. Завгороднему, 2019) для краевой задачи $-y''(x) = f(x)$, $x \in \Gamma \setminus J$, при гладких условиях трансмиссии (здесь y – искомая функция, непрерывная в точках из J, а f – заданная функция, равномерно непрерывная на каждом ребре Γ), то классическое решение u начальной задачи представимо в виде:

$$u(x,t) = \langle\varphi\rangle - \int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,$$

где $\langle\varphi\rangle$ – среднее от φ по Γ, а $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)](x)$, где, в свою очередь, $\mathcal{C}$ есть операторная функция, конечным образом описываемая только через метрические и топологические характеристики Γ. Подход к получению этого представления u аналогичен подходу, реализованному автором ранее (2006) в случае, когда $\partial\Gamma \neq \varnothing$ и в точках $\partial\Gamma$ ставятся условия Дирихле.

Ключевые слова: волновое уравнение на геометрическом графе, гладкие условия трансмиссии, начальная задача, существование и единственность решения, интегральная формула решения, обобщенная функция Грина

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1530).

Для цитирования: *Прядиев В.Л.* Интегральное представление решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе без граничных вершин // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 361–381.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

Integral representation of the solution of the initial value problem for the wave equation on a geometric graph without boundary vertices

Vladimir L. PRYADIEV
Voronezh State University
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394018, Russian Federation

Abstract. We study the initial value problem $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = 0$ for the wave equation $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t)$ for $x \in \Gamma \backslash J$ and $t > 0$, where Γ is a geometric graph (according to Yu. V. Pokornyi) with straight-line edges and without boundary vertices ($\partial\Gamma = \varnothing$), J is the set of all internal vertices of Γ, and the function φ is given; the transmission conditions that close the problem are, in addition to the continuity of the function $u(\,\cdot\,,t)$ at the interior vertices, the smoothness conditions for it, the essence of which is that for each $t \geqslant 0$ at each interior vertex $a \in J$ the sum of the right derivatives of the function $u(\,\cdot\,,t)$ in all admissible directions is 0. It is proved that if G^* is a generalized Green's function (according to M. G. Zavgorodniy, 2019) for the boundary value problem $-y''(x) = f(x)$, $x \in \Gamma \setminus J$, under smooth transmission conditions (here y is the desired function, continuous at the points of J, and f is a given function, uniformly continuous on each edge of Γ), then the classical solution u of the initial value problem is representable in form:

$$u(x,t) = \langle\varphi\rangle - \int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,$$

where $\langle\varphi\rangle$ is the average of φ over Γ, and $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)](x)$, where, in turn, $\mathcal{C}$ is an operator function finitely described only through the metric and topological characteristics of Γ. The approach to obtaining this representation of u is similar to the approach implemented by the author earlier (2006) in the case where $\partial\Gamma \neq \varnothing$ and Dirichlet conditions are imposed at the points of $\partial\Gamma$.

Keywords: wave equation on a geometric graph, smooth transmission conditions, initial value problem, existence and uniqueness of a solution, integral formula for a solution, generalized Green's function

Acknowledgements: The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-02-2025-1530).

Mathematics Subject Classification: 35R02, 35A09, 35B30, 35C15, 35E15, 35E05, 35L05.

For citation: Pryadiev V.L. Integral representation of the solution of the initial value problem for the wave equation on a geometric graph without boundary vertices. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 361–381. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-361-381

Введение

В настоящей статье осуществлен один из подходов к описанию решения начальной задачи для волнового уравнения на геометрическом графе Γ с пустым множеством $\partial\Gamma$ граничных вершин при условиях трансмиссии вида

$$\sum_{h\in D(a)} u_h^+(a,t)=0,\quad a\in J,\ t\geqslant 0. \tag{0.1}$$

Здесь u обозначает вещественное решение названного уравнения, J — множество внутренних вершин Γ, $D(a)$ — множество единичных векторов, допустимых в точке a относительно Γ, $u_h^+(a,t)$ — правую производную функции $u(\,\cdot\,,t)$ в точке a по направлению h. Сразу подчеркнем: существование правых производных $u_h^+(a,t)$ для всех h из $D(a)$ влечет непрерывность $u(\,\cdot\,,t)$ в точке a.

Случай, когда $\partial\Gamma\neq\varnothing$, и, в дополнение к (0.1), в каждой граничной вершине поставлено краевое условие первого рода, рассмотрен, в частности, в [1]. Там показано, что в этом случае решение начально-краевой задачи при нулевой начальной скорости представимо в виде

$$u(x,t)=-\int\limits_{\Gamma\setminus(J\cup\partial\Gamma)} g(x,t,s)\varphi''(s)\,ds,\quad x\in\Gamma,\ t\geqslant 0, \tag{0.2}$$

где $\varphi=u(\,\cdot\,,0)$, а $g(x,t,s)=[\mathcal{C}(t)G(\,\cdot\,,s)]\,(x)$, где, в свою очередь, G — функция Грина соответствующей стационарной краевой задачи, а $\mathcal{C}$ — операторная косинус-функция, порождаемая начально-краевой задачей; при этом $\mathcal{C}$ допускает конечное описание благодаря принципу Гюйгенса.

Если же $\partial\Gamma=\varnothing$, то G не существует, но замена G на обобщенную функцию Грина G^* в (0.2) дает формулу решения начальной задачи. Это и доказывается ниже.

Стоит здесь отметить, что хотя теория *обобщенной* функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка на Γ и не создана в том виде, в каком создана теория просто функции Грина такой задачи (см., к примеру, [2] или подпункт 3.2.3 и пункт 6.3 в [3]), — тем не менее, с учетом классической теории обобщенной функции Грина (см., например, [4, с. 334–337]), конструкция функции G^*, приводимая ниже, и ее свойства позволяют назвать G^* обобщенной функцией Грина указанного вида задачи.

1. Основной объект исследования

Пусть Γ — связный конечный ограниченный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [3] (см. там п. 3.1.1, первый абзац). Это означает, что Γ есть связное множество, являющееся объединением конечного числа интервалов конечной длины, называемых ребрами, и некоторого подмножества J из множества всех концов этих интервалов. При этом о ребрах дополнительно предполагается, что $\gamma_1\cap\overline{\gamma}_2=\varnothing$ для любых различных ребер γ_1 и γ_2; здесь и далее: $\overline{M}$ — замыкание множества $M\subseteq\mathbb{R}^n$ по евклидовой метрике $\mathbb{R}^n$. Объединение ребер обозначается $R(\Gamma)$. Точки из J называются внутренними вершинами Γ. Концы ребер, не вошедшие в J, называются граничными вершинами Γ, а их множество обозначается $\partial\Gamma$.

Для определения производной от функции, определенной в точках ребер Γ, все ребра Γ ориентируются: каждому $\gamma=(a;b)$, являющемуся ребром Γ, ставится в соответствие единичный вектор h_γ — один из двух, коллинеарных вектору $b-a$. Если функция w

определена в точках ребра γ и $x \in \gamma$, то производной функции w в точке x называется число $w'(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1}[w(x+\varepsilon h_\gamma) - w(x)]$, то есть производная w в точке x по вектору h_γ. Если функция w определена в точке $x \in \overline{\Gamma}$, а $D(x)$ — множество допустимых в точке x относительно $\overline{\Gamma}$ единичных векторов, то есть $D(x) = \left\{h \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |h| = 1 \text{ и } (x+\varepsilon h) \in \overline{\Gamma} \text{ для достаточно малых } \varepsilon > 0\right\}$, то правую производную w в точке x по вектору h обозначим $w_h^+(x)$. Если для достаточно малых $\varepsilon \geqslant 0$ существуют $w_h^+(x+\varepsilon h)$, то $w_{hh}^{++}(x)$ будет обозначать правую производную от функции w_h^+ в точке x по вектору h.

Если $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \Gamma \times \mathbb{R}$, то первый и второй аргументы u будем обозначать, как правило, буквами x и t соответственно и, согласно одной из традиций, производные u по первому и второму аргументу будем обозначать соответственно u_x и u_t; согласно той же традиции, u_{xx}, u_{xt}, u_{tx} и u_{tt} у нас — производные второго порядка от u. Первую и вторую правые производные $u(\,\cdot\,,t)$ в точке x по вектору $h \in D(x)$ будем обозначать, соответственно, $u_h^+(x,t)$ и $u_{hh}^{++}(x,t)$.

Основной объект исследования в настоящей статье — начальная задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \quad x \in R(\Gamma), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

при условиях трансмиссии (0.1), начальных условиях

$$u(x,0) = \varphi(x) \ \text{ и } \ u_t(x,0+) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

и в предположении пустоты $\partial\Gamma$ (и значит, $\Gamma = \overline{\Gamma}$). Здесь $u : \Gamma \times [0;+\infty) \to \mathbb{R}$ — искомая функция, такая, что

$$u\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)} \in C^2\left(\overline{\gamma} \times [0;+\infty)\right) \text{ для любого ребра } \gamma, \tag{1.3}$$

а вещественная функция φ задана. Всюду далее, говоря о задаче (1.1), (0.1), (1.2), (1.3), будем предполагать, что $\partial\Gamma = \varnothing$.

Перейдем к согласованию начальных условий (1.2) с уравнением (1.1), условиями трансмиссии (0.1) и включениями (1.3). Отметим: ввиду непрерывности $u(\,\cdot\,,t)$ в точках из J при любом $t \geqslant 0$ (что, как подчеркнуто в конце первого абзаца, следует из (0.1)) выполнение (1.3) влечет включение $u \in C(\Gamma \times [0;+\infty))$. Поэтому $\varphi \in C(\Gamma)$. А кроме того, из (1.3) следует, что $\varphi\big|_{\overline{\gamma}} \in C^2(\overline{\gamma})$ для любого ребра γ. С учетом последних двух обстоятельств существуют конечные $\varphi_h^+(a)$ и $\varphi_{hh}^{++}(a)$ для любой $a \in J$ и любого $h \in D(a)$. Далее, подстановка $t = 0$ в условия трансмиссии (0.1) дает равенства

$$\sum_{h \in D(a)} \varphi_h^+(a) = 0, \quad a \in J, \tag{1.4}$$

и, на первый взгляд, других условий на φ, помимо выписанных выше, из постановки задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) не вытекает. Однако есть еще одно условие, которое, как будет показано ниже, необходимо для существования решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3), и условие это следующее:

$$\varphi_{hh}^{++}(a) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad h \in D(a), \quad \eta \in D(a). \tag{1.5}$$

Предполагая далее (1.5) выполненным, договоримся доопределять φ'' в любой точке $a \in J$ общим значением производных $\varphi_{hh}^{++}(a)$, $h \in D(a)$. При таком доопределении $\varphi'' \in C(\Gamma)$.

Все вышевыписанные условия на φ ниже предполагаются выполненными.

2. Существование и единственность решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3)

Существование и единственность решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) доказаны в статьях [5] и [6], в которых изучались классы условий трансмиссии, включающие в себя (0.1) как частный случай. Из доказательств, проведенных в [5] и [6], можно усмотреть, хотя это там специально и не оговорено, что условие (1.5) не только достаточно, но и необходимо для существования решения задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3). Ниже у нас будет возможность еще раз, уже предметно обращаясь к полученным по ходу выкладок равенствам, обосновать это обстоятельство. Во избежание двусмысленности отметим: представления решения, устанавливаемые в настоящей статье, отличаются по структуре от полученных в [5] и [6].

3. Интегральный оператор, обращающий задачу (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) в случае нулевого среднего от φ

В этом пункте мы покажем, что существует непрерывная функция $\widetilde{g}$, действующая из $\Gamma \times [0;+\infty) \times \Gamma^2$ в $\mathbb{R}$, такая, что для любой φ, имеющей нулевое среднее на Γ, решение задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) представимо в виде

$$u(x,t) = -\frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma} \widetilde{g}(x,t,s,\sigma)\varphi''(s)\, ds\, d\sigma, \quad x \in \Gamma, \quad t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

где $|\Gamma|$ обозначает сумму длин всех ребер Γ, а интеграл по Γ понимается как сумма интегралов по замыканиям ребер Γ.

При построении $\widetilde{g}$ нам понадобится операторная функция $\mathcal{C}$, определяемая тем же построением, что и в [1] (см. также [7]), только с учетом пустоты $\partial\Gamma$. Это построение начинается с введения множества ориентированных ломаных, которое обозначим P. Ориентированную ломаную p с вершинами $a_i \in \Gamma$, $i = \overline{0,k}$, $k \in \mathbb{N}$, перенумерованными согласно ориентации p, отнесем ко множеству P тогда и только тогда, когда 1) $a_{i-1} \neq a_i$ при любом $i = \overline{1,k}$, 2) непервое и непоследнее звенья p являются замыканиями некоторых ребер Γ, а первое и последнее звенья p содержатся в замыканиях некоторых ребер Γ; при этом допускаем как совпадение некоторых вершин p, так и то, что некоторые звенья p, в том числе соседние, совпадают или вложены одно в другое. Точку a_0 будем называть началом ломаной p, а a_k – концом p. Конец p далее обозначается e_p. Длиной ломаной p назовем $\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i - a_{i-1}|$.

Теперь каждой паре (p,i), в которой p — ломаная из P, а i — номер ее вершины, отличной от e_p (т. е. $i = \overline{0,k-1}$), поставим в соответствие число

$$\beta_i(p) = \begin{cases} 2\,|D(a_i)|^{-1}, & \text{если } i = 0 \text{ или } [a_{i-1};a_i] \cap [a_i;a_{i+1}] = \{a_i\}, \\ 2\,|D(a_i)|^{-1} - 1, & \text{если } i \neq 0 \text{ и } [a_{i-1};a_i] \cap [a_i;a_{i+1}] \neq \{a_i\}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Затем положим $\beta_p = \dfrac{1}{2}\prod\limits_{i=0}^{k-1} \beta_i(p)$ и для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор $\mathcal{C}(t)$, действующий в пространстве определенных на Γ функций по правилу:

$$[\mathcal{C}(t)\xi](x) = \begin{cases} \sum\limits_{p \in P(x,t)} \beta_p \xi(e_p), & \text{если } x \in \Gamma \text{ и } t > 0, \\ \xi(x), & \text{если } x \in \Gamma \text{ и } t = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $P(x,t)$ есть множество всех ломаных из P с началом в точке x и длины t. Далее β_p будем называть *передаточным коэффициентом* ломаной p.

Также при построении $\widetilde{g}$ нам понадобится вводимая ниже функция H, которую по аналогии с физическим смыслом *функции влияния* (см. [4, гл. V, § 14, п. 1]) можно назвать *функцией противоположных влияний* для стационарной задачи, порождаемой задачей (1.1), (0.1), (1.2), (1.3).

Лемма 3.1. *Пусть* $\partial\Gamma = \varnothing$. *Тогда существует непрерывная функция* $H : \Gamma^3 \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим требованиям:*

1) $H(\,\cdot\,,s,s) \equiv 0$,
2) $H_{xx}(x,s,\sigma) = 0$ *при* $x \in R(\Gamma) \setminus \{s;\sigma\}$,
3) $\sum\limits_{h\in D(a)} H_h^+(a,s,\sigma) = 0$ *при* $a \in J \setminus \{s;\sigma\}$, *где производные — по первому аргументу,*
4) *если* $s \neq \sigma$, *то* $\sum\limits_{h\in D(s)} H_h^+(s,s,\sigma) = -1$ *и* $\sum\limits_{h\in D(\sigma)} H_h^+(\sigma,s,\sigma) = 1$, *где производные — по первому аргументу,*
5) $\int\limits_\Gamma H(x,s,\sigma)\,dx = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любую вершину $b \in J$ такую, что множество $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \{b\}$ связно. Будем считать, что Γ_1 — геометрический граф с теми же ребрами, что и Γ, с множеством внутренних вершин $J_1 = J \setminus \{b\}$ и единственной граничной вершиной b. Пусть G — функция Грина задачи

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), \quad x \in R(\Gamma_1), \\ \sum\limits_{h\in D(x)} y_h^+(x) = 0, \quad x \in J_1, \\ y(b) = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

понимаемая здесь в соответствии с [2], или, что то же самое, в соответствии со *связной версией* задачи (3.4) (см. в [3] пункт 3.2, подпункт 3.2.3 и следствие из теоремы 3.6); в частности, это означает, что G определена на $\Gamma_1 \times R(\Gamma_1) = \Gamma_1 \times R(\Gamma)$. При этом G непрерывно доопределяема на Γ^2 (см. [2, теорема 2] или [8, теорема 2.2]); это доопределение обозначим $\overline{G}$. Далее, с учетом того, что $G_{xx}(\,\cdot\,,s) \equiv 0$ на $R(\Gamma_1) \setminus \{s\} = R(\Gamma) \setminus \{s\}$, $\sum\limits_{h\in D(s)} G_h^+(s,s) = -1$ и $\sum\limits_{h\in D(a)} G_h^+(a,s) = 0$ при всех $a \in J_1 \setminus \{s\}$ (производные здесь — по первому аргументу), имеем для $s \in \Gamma \setminus \{b\}$:

$$0 = \int\limits_{R(\Gamma)\setminus\{s\}} \overline{G}_{xx}(x,s)\,dx = \sum_{h\in D(s)} \overline{G}_h^+(s,s) + \sum_{a\in J\setminus\{s;b\}} \sum_{h\in D(a)} \overline{G}_h^+(a,s) + \sum_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s)$$
$$= -1 + \sum_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s),$$

то есть $\sum\limits_{h\in D(b)} \overline{G}_h^+(b,s) = 1$ для $s \in \Gamma \setminus \{b\}$. Но тогда функция

$$H(x,s,\sigma) = \overline{G}(x,s) - \overline{G}(x,\sigma) - \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_\Gamma \left(\overline{G}(x,s) - \overline{G}(x,\sigma)\right)\,dx \tag{3.5}$$

будет удовлетворять всем свойствам из формулировки леммы 3.1, что проверяется непосредственно с использованием указанных выше свойств G. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть* $\partial\Gamma = \varnothing$ *и* $\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx = 0$. *Пусть*

$$\widetilde{g}(x,t,s,\sigma) = \big[\mathcal{C}(t)H(\,\cdot\,,s,\sigma)\big](x), \quad x\in\Gamma, \quad t\geqslant 0, \quad s\in\Gamma, \quad \sigma\in\Gamma, \tag{3.6}$$

где оператор $\mathcal{C}(t)$ *применяется к* H, *как к функции ее первого аргумента. Тогда формула* (3.1) *определяет решение задачи* (1.1), (0.1), (1.2), (1.3).

Для доказательства теоремы 3.1 удобно воспользоваться следующей цепочкой из пяти лемм.

Лемма 3.2. $x\in\Gamma \Rightarrow -\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds = \varphi(x)-\varphi(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения функции Грина задачи (3.4) достаточно доказать, что $\varphi-\varphi(b)$ есть решение задачи (3.4) при $f=-\varphi''$. А это проверяется непосредственно. $\square$

Лемма 3.3. $\int\limits_\Gamma \varphi''(s)\,ds = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив на каждом ребре формулу Ньютона–Лейбница, получим: $\int\limits_\Gamma \varphi''(s)\,ds = -\sum\limits_{a\in J}\sum\limits_{h\in D(a)} \varphi_h^+(a)$, что в силу (1.4) равно 0. $\square$

Лемма 3.4. $\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds\,dx = |\Gamma|\varphi(b) - \int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.2

$$\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds\,dx = \int\limits_\Gamma (\varphi(b)-\varphi(x))\,dx = |\Gamma|\varphi(b) - \int\limits_\Gamma \varphi(x)\,dx,$$

что и требуется доказать. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть функция* u *определяется формулой* (3.1) *и среднее* φ *на* Γ *равно* 0. *Тогда*

$$u(x,0) = -\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma H(x,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma = \varphi(x), \quad x\in\Gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $t=0$ формула (3.1), с учетом (3.6), (3.3) и (3.5), принимает вид:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= -\frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma H(x,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma \\ &= -\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,ds + \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma \\ &+ \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,s)\varphi''(s)\,dx\,ds - \frac{1}{|\Gamma|^2}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \overline{G}(x,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma\,dx. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В силу леммы 3.2 первое слагаемое в правой части (3.7) равно $\varphi(x)-\varphi(b)$. В силу леммы 3.3 второе и четвертое слагаемые в правой части (3.7) равны 0, а в силу леммы 3.4 третье слагаемое там равно $\varphi(b)$ — с учетом равенства нулю среднего φ на Γ. Это и доказывает лемму 3.5. □

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия леммы 3.5. Тогда при* $t>0$

$$u(x,t)=-\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\int_\Gamma\int_\Gamma H(e_p,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma=\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p u(e_p,0)=\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varphi(e_p). \quad (3.8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое равенство в (3.8) следует из (3.1), (3.6) и (3.3), а второе и третье — следуют из леммы 3.5. □

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. В силу лемм 3.6 и 3.5 и с учетом (3.3) достаточно доказать, что в условиях теоремы 3.1 функция

$$u(x,t)=[\mathcal{C}(t)\varphi](x),\quad x\in\Gamma,\ t\geqslant 0, \quad (3.9)$$

есть решение задачи (1.1), (0.1), (1.2), (1.3). То, что функция (3.9) удовлетворяет, по отдельности, каждому соотношению из списка (1.1), (0.1), (1.2), уже доказано — см. [9] или [10, пункт 2.1] [1]. Там же доказаны следующие три равенства:

$$u_{xx}(x,t)=\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varphi''(e_p),\quad x\in\Gamma,\quad t>0, \quad (3.10)$$

где $u_{xx}(x,t)$ при $x\in J$ есть общее значение производных $u^{++}_{hh}(x,t)$ для всех $h\in D(x)$ (совпадение этих производных тоже доказано и в [9], и в [10]),

$$u_t(x,t)=-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p),\quad x\in\Gamma,\quad t>0, \quad (3.11)$$

$$u^+_h(x,t)=\sum_{p\in P''}\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p)+(1-|D(x)|)\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p),\quad x\in\Gamma,\quad h\in D(x),\quad t>0, \quad (3.12)$$

где $P'=P'(x,t,h)=\left\{p\in P(x,t)\,\middle|\,(a_1^p-x)\uparrow\uparrow h\right\}$, $P''=P''(x,t,h)=P(x,t)\setminus P'$, а $\theta(p)$ — вектор из $D(e_p)$ такой, что $\theta(p)\uparrow\uparrow(a^p_{k(p)-1}-e_p)$. Вектор $\theta(p)$ назовем *концевым вектором* ломаной p.

Остается проверить, что функция (3.9) удовлетворяет требованию (1.3), а с учетом того, что она удовлетворяет уравнению (1.1), достаточно проверить (учитываем также (3.10) и выполнение (1.2) для функции (3.9)), что для любого ребра γ

$$u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)}\in C(\overline{\gamma}\times[0;+\infty)), \quad (3.13)$$

$$u_{xt}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}\quad\text{непрерывно доопределяема на}\quad\overline{\gamma}\times[0;+\infty) \quad (3.14)$$

и

$$u_{xt}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}=u_{tx}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}. \quad (3.15)$$

[1] В [9] $\partial\Gamma=\varnothing$ и допускаются ребра-лучи, а в [10] рассмотрен класс условий трансмиссии, включающий в себя (0.1), как частный случай, и допускается $\partial\Gamma=\varnothing$.

Использование формул (3.10)–(3.12) для доказательства свойств (3.13)–(3.15) подразумевает описание того, как связаны между собой, во-первых, множества ломаных из $P(x,t)$ и из $P(x+\mu h, t+\tau)$, где $\mu \geqslant 0$ и τ достаточно малы, $h \in D(x)$, во-вторых, концы и концевые векторы этих ломаных, и в-третьих, передаточные коэффициенты этих ломаных. Для описания этих связей введем в рассмотрение некоторые преобразования ломаных из P (см. ниже определения 3.1–3.6). Ниже для каждой $p \in P$ через $k(p)$ обозначается количество звеньев p, а через a_i^p, $i = \overline{0, k(p)}$, — i-я последовательная вершина p.

Определение 3.1. Пусть $p \in P$ и $e_p \notin J$, а $q \in P$ такова, что $k(q) = k(p)$, $a_i^q = a_i^p$ для всех $i = \overline{0, k(p)-1}$ и $e_q = e_p - \tau\theta(p)$, где τ — некоторое положительное число. Тогда q назовем τ-удлинением ломаной p, а p — наоборот, τ-укорочением ломаной q; записывать это будем так: $q = \pi(p,\tau)$ или, соответственно, $p = \pi(q,-\tau)$.

Определение 3.2. Пусть $p \in P$, $e_p \in J$ и $\eta \in D(e_p)$, а $q \in P$ такова, что $k(q) = k(p)+1$, $a_i^q = a_i^p$ для всех $i = \overline{0, k(p)}$ и $e_q = e_p + \tau\eta$, где τ — некоторое положительное число. Тогда q назовем τ-удлинением ломаной p в направлении η и записывать это будем так: $q = \pi(p,\tau,\eta)$.

Определение 3.3. Пусть $p \in P$ и $e_p \notin J$, а $q \in P$ такова, что $k(q) = k(p)$, $a_i^q = a_i^p$ для всех $i = \overline{1, k(p)-1}$, $a_0^q \in (a_0^p; a_1^p)$, причем $|a_0^p - a_0^q| = \mu$ и $e_q = e_p - \mu\theta(p)$, где μ — некоторое положительное число. Тогда q назовем положительным μ-сдвигом ломаной p, а p — отрицательным μ-сдвигом q; писать в этом случае будем так: $q = m^+(p,\mu)$ или, соответственно, $p = m^-(q,\mu)$.

Определение 3.4. Пусть $p \in P$, $e_p \in J$ и $\eta \in D(e_p)$, а $q \in P$ такова, что $k(q) = k(p)+1$, $a_i^q = a_i^p$ при всех $i = \overline{1, k(p)}$, $a_0^q \in (a_0^p; a_1^p)$, причем $|a_0^p - a_0^q| = \mu$ и $e_q = e_p + \mu\eta$, где μ — некоторое положительное число. Тогда q назовем положительным μ-сдвигом ломаной p в направлении вектора η; писать в этом случае будем так: $q = m^+(p,\mu,\eta)$.

Определение 3.5. Будем говорить, что ломаные p и q из P противоположны, если $k(p) = k(q)$ и $a_i^q = a_{k(p)-i}^p$ для всех $i = \overline{0, k(p)}$; писать в этом случае будем так: $q = -p$ (или $p = -q$).

Определение 3.6. Пусть $p \in P$, $a_0^p \in J$ и $h \in D(a_0^p)$. Ломаную q, противоположную ломаной $m^+(-p,\mu,h)$, назовем отрицательным μ-сдвигом p в направлении вектора h, записывая это в виде: $q = m^-(p,\mu,h)$.

Ниже, фиксируя $x \in \Gamma$ и $t > 0$, всегда будем предполагать, что μ и τ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant \mu < \zeta$ и $|\tau| < \zeta$, где $\zeta = \dfrac{\delta}{2}$, а $\delta = \delta(x,t) > 0$ — любое число, такое, что 1) $\delta \leqslant t$, 2) $\delta \leqslant |x - a_1^p|$ для любой $p \in P(x,t)$, 3) $\delta \leqslant |e_p - a|$ для любой $p \in P(x,t)$ и $a \in J\setminus\{e_p\}$. Для описания связи между $P(x,t)$ и $P(x+\mu h, t+\tau)$ множество допускаемых нами пар $(\mu;\tau)$ удобно разбить на подмножества: $[0;\zeta)\times(-\zeta;\zeta) = \{(0;0)\} \cup \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{6} A_j\Big)$, где $A_1 = \big\{(0;\tau)\,\big|\,\tau < 0\big\}$, $A_2 = \big\{(\mu;\tau)\,\big|\,\tau \leqslant -\mu < 0\big\}$, $A_3 = \big\{(\mu;0)\,\big|\,\mu > 0\big\}$, $A_4 = \big\{(\mu;\tau)\,\big|\,\mu > 0, \tau \in (-\mu;0)\cup(0;\mu]\big\}$, $A_5 = \big\{(\mu;\tau)\,\big|\,0 < \mu < \tau\big\}$ и $A_6 = \big\{(0;\tau)\,\big|\,\tau > 0\big\}$.

Пусть $P_R = \big\{p \in P(x,t)\,\big|\,e_p \in R(\Gamma)\big\}$, $P_J = \big\{p \in P(x,t)\,\big|\,e_p \in J\big\}$, $P'_R = P' \cap P_R$, $P'_J = P' \cap P_J$, $P''_R = P'' \cap P_R$, $P''_J = P'' \cap P_J$. Непосредственно из определений 3.1–3.6

следуют импликации:

$$\tau < 0 \Rightarrow P(x, t+\tau) = \{\pi(p,\tau) \,|\, p \in P(x,t)\}\,, \tag{3.16}$$

$$\tau > 0 \Rightarrow P(x, t+\tau) = \{\pi(p,\tau) \,|\, p \in P_R\} \cup \{\pi(p,\tau,\eta) \,|\, p \in P_J, \eta \in D(e_p)\}\,, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\big[\mu > 0 \,\wedge\, x \in R(\Gamma)\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t) = \{m^-(p,\mu) \,|\, p \in P''\}&\\ \cup \{m^+(p,\mu) \,|\, p \in P'_R\} \cup \{m^+(p,\mu,\eta) \,|\, p \in P'_J, \eta \in D(e_p)\}\,,&\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\big[\mu > 0 \,\wedge\, x \in J\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t) = \{m^-(p,\mu,h) \,|\, p \in P(x,t)\}&\\ \cup \{m^+(p,\mu) \,|\, p \in P'_R\} \cup \{m^+(p,\mu,\eta) \,|\, p \in P'_J, \eta \in D(e_p)\}\,,&\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\big[\tau \leqslant -\mu < 0 \,\wedge\, x \in R(\Gamma)\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t+\tau)&\\ = \{m^+(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P'\} \cup \{m^-(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P''\}\,,&\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\big[\tau \leqslant -\mu < 0 \,\wedge\, x \in J\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t+\tau)&\\ = \{m^+(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P'\} \cup \{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h) \,|\, p \in P(x,t)\}\,,&\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\big[\tau > \mu > 0 \,\wedge\, x \in R(\Gamma)\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t+\tau)&\\ = \{m^+(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P'_R\} \cup \{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu) \,|\, p \in P'_J, \eta \in D(e_p)\}&\\ \cup \{m^-(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P''_R\} \cup \{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu) \,|\, p \in P''_J, \eta \in D(e_p)\}\,,&\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}\big[\tau > \mu > 0 \,\wedge\, x \in J\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t+\tau)&\\ = \{m^+(\pi(p,\tau),\mu) \,|\, p \in P'_R\} \cup \{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu) \,|\, p \in P'_J, \eta \in D(e_p)\}&\\ \cup \{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h) \,|\, p \in P_R\} \cup \{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h) \,|\, p \in P_J, \eta \in D(e_p)\}\,,&\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\big[\mu > 0 \,\wedge\, \tau \in (-\mu;0) \cup (0;\mu]\big] \Rightarrow P(x+\mu h, t+\tau) = \{\pi(r,\tau) \,|\, r \in P(x+\mu h, t)\}\,. \tag{3.24}$$

Импликации (3.16)–(3.24) для каждой пары $(\mu;\tau) \in \big([0;\zeta) \times (-\zeta;\zeta)\big) \setminus \{(0;0)\}$, в зависимости от того, какое из включений $(\mu;\tau) \in A_j$, $j = \overline{1,6}$, выполнено, определяют соответствие $\alpha_{\mu,\tau} \subseteq P(x,t) \times P(x+\mu h, t+\tau)$, обладающее свойствами: 1) $\forall\, p \in P(x,t)$ $\exists\, q \in P(x+\mu h, t+\tau)\colon$ $(p;q) \in \alpha_{\mu,\tau}$, 2) $\forall\, q \in P(x+\mu h, t+\tau)$ $\exists!\, p \in P(x,t)\colon$ $(p;q) \in \alpha_{\mu,\tau}$. Поэтому для любого функционала λ, заданного на $P(x+\mu h, t+\tau)$, имеем

$$\sum_{q \in P(x+\mu h, t+\tau)} \lambda(q) = \sum_{p \in P(x,t)} \Big(\sum_{q \,|\, (p;q) \in \alpha_{\mu,\tau}} \lambda(q) \Big). \tag{3.25}$$

В силу (3.16)–(3.24) для описания связи между концами ломаных из $P(x,t)$ и из $P(x+\mu h, t+\tau)$, а также их концевыми векторами и передаточными коэффициентами, достаточно описания следующих связей, непосредственно следующих из определений 3.1–3.6:

$$e_{\pi(p,\tau)} = e_p - \tau\theta(p), \quad \theta(\pi(p,\tau)) = \theta(p), \quad \beta_{\pi(p,\tau)} = \beta_p, \tag{3.26}$$

$$e_{\pi(p,\tau,\eta)} = e_p + \tau\eta, \quad \theta(\pi(p,\tau,\eta)) = -\eta, \quad \beta_{\pi(p,\tau,\eta)} = \beta_p \varkappa(p,\eta), \tag{3.27}$$

$$e_{m^-(p,\mu)} = e_p + \mu\theta(p), \quad \theta(m^-(p,\mu)) = \theta(p), \quad \beta_{m^-(p,\mu)} = \beta_p \beta_0(m^-(p,\mu)), \tag{3.28}$$

$$e_{m^+(p,\mu)} = e_p - \mu\theta(p), \quad \theta(m^+(p,\mu)) = \theta(p), \quad \beta_{m^+(p,\mu)} = \frac{\beta_p}{\beta_0(p)}, \tag{3.29}$$

$$e_{m^-(p,\mu,h)} = e_p + \mu\theta(p), \quad \theta(m^-(p,\mu,h)) = \theta(p), \quad \beta_{m^-(p,\mu,h)} = \frac{\beta_p \varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}, \tag{3.30}$$

$$e_{m^+(p,\mu,\eta)} = e_p + \mu\eta, \quad \theta(m^+(p,\mu,\eta)) = -\eta, \quad \beta_{m^+(p,\mu,\eta)} = \frac{\beta_p \varkappa(p,\eta)}{\beta_0(p)}, \tag{3.31}$$

где
$$\varkappa(p,\eta)=2|D(e_p)|^{-1}, \quad \text{если} \quad \eta\neq\theta(p), \quad \text{и} \quad \varkappa(p,\eta)=2|D(e_p)|^{-1}-1, \quad \text{если} \quad \eta=\theta(p). \tag{3.32}$$
Непосредственно проверяется, что
$$\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)=1. \tag{3.33}$$
И еще нам понадобятся следующие импликации, непосредственно вытекающие из (3.2), (3.32) и определения 3.5:
$$\bigl[x\in R(\Gamma)\ \wedge\ p\in P(x,t)\bigr]\ \Rightarrow\ \bigl[|D(x)|=2\ \wedge\ \beta_0(p)=\beta_0(\pi(p,\mu))=\beta_0(\pi(p,\mu,\eta))=1\bigr], \tag{3.34}$$
$$\bigl[x\in J\ \wedge\ p\in P(x,t)\bigr]\ \Rightarrow\ \beta_0(p)=\beta_0(\pi(p,\mu))=\beta_0(\pi(p,\mu,\eta))=2|D(x)|^{-1}, \tag{3.35}$$
$$\bigl[p\in P(x,t)\ \wedge\ q=m^-(p,\mu)\bigr]\ \Rightarrow\ \bigl[|D(a_0^q)|=2\ \wedge\ \beta_0(q)=1\bigr], \tag{3.36}$$
$$\begin{gathered}\bigl[x\in J\ \wedge\ h\in D(x)\ \wedge\ p\in P(x,t)\bigr]\\ \Rightarrow\varkappa(-p,h)=\varkappa(-\pi(p,\mu),h)=\varkappa(-\pi(p,\mu,\eta),h)=\begin{cases}2|D(x)|^{-1}, & \text{если } p\in P'',\\ 2|D(x)|^{-1}-1, & \text{если } p\in P'.\end{cases}\end{gathered} \tag{3.37}$$

Начнем с включения (3.13). Зафиксируем ребро γ, $t>0$, $x\in\overline{\gamma}$ и $h\in D(x)$, допустимый в точке x относительно $\overline{\gamma}$, и рассмотрим функцию $z(\mu,\tau)=u_{xx}(x+\mu h,t+\tau)$. Для доказательства непрерывности функции $u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times[0;+\infty)}$ в точке $(x;t)$ достаточно доказать непрерывность z в точке $(0;0)$. На следующую лемму мы сошлемся неоднократно.

Лемма 3.7. *Пусть $\xi\in C(\Gamma)$, а*
$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q), \tag{3.38}$$
где функционал $q\mapsto\chi_q$ таков, что при любых $(\mu;\tau)\in\bigl([0;\zeta)\times(-\zeta;\zeta)\bigr)\setminus\{(0;0)\}$
$$(p;q)\in\alpha_{\mu,\tau}\Rightarrow\chi_q=\chi_p. \tag{3.39}$$
Тогда $\widehat{z}$ непрерывна в точке $(0;0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3.7 проделаем, рассмотрев пределы $\widehat{z}$ в точке $(0;0)$ по множествам A_j, $j=\overline{1,6}$. Если $(\mu;\tau)\in A_1$, то из (3.38) с учетом (3.16), (3.25), (3.39) и (3.26) получим:
$$\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(0,\tau)=\sum_{q\in P(x,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\xi(e_p-\tau\theta(p))\xrightarrow[\tau\to0-]{}\widehat{z}(0,0).$$
Если же $(\mu;\tau)\in A_6$, то из (3.38), в силу (3.17), (3.25), (3.39) и (3.27) и с учетом (3.33), следует [2]:
$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(0,\tau)=\sum_{q\in P(x,t+\tau)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)&=\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\xi(e_p-\tau\theta(p))+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\tau\eta)\\ &\xrightarrow[\tau\to0+]{}\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\xi(e_p)+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\xi(e_p)\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)=\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

[2] Отказ от непрерывности ξ в какой-либо точке из J повлек бы, вообще говоря, некорректность приводимого ниже предельного перехода, так как тогда $\xi(e_p+\tau\eta)$ может и не стремиться к $\xi(e_p)$, и равенство (3.33) неприменимо. Поскольку далее мы будем применять лемму 3.7 при $\xi=\varphi''$, то теперь становится понятной необходимость условия (1.5) для выполнения (1.3). Отказ от (1.5) повлек бы существование лишь *сильного* решения, допускающего разрывы вторых производных на характеристиках, выходящих из точек множества $J\times\{0\}$.

Переходя к включениям $(\mu;\tau)\in A_j$, $j=\overline{2,5}$, отметим: при их выполнении $\mu\in(0;\zeta)$, что влечет $x+\mu h\in R(\Gamma)$, а значит, и $|D(x+\mu h)|=2$. Поэтому, в силу (3.2),

$$(\mu;\tau)\in\bigcup_{j=2}^{5}A_j\Rightarrow\big[q\in P(x+\mu h,t+\tau)\ \Rightarrow\ \beta_0(q)=1\big].\tag{3.40}$$

Пусть $(\mu;\tau)\in A_3$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.18) и (3.25), а затем (3.39), (3.28), (3.29) и (3.31), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(\mu,0)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\beta_0(m^-(p,\mu))\xi(e_p+\mu\theta(p))\\+\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\xi(e_p-\mu\theta(p))+\sum_{p\in P'_J}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\mu\eta),\end{aligned}$$

что с учетом (3.40), (3.34) и (3.33) стремится при $\mu\to0+$ к $\widehat{z}(0,0)$. Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.19) и (3.25), а затем (3.39), (3.30), (3.29) и (3.31), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)=\widehat{z}(\mu,0)=\sum_{q\in P(x+\mu h,t)}\chi_q\beta_q\xi(e_q)=\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\xi(e_p+\mu\theta(p))\\+\sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\xi(e_p-\mu\theta(p))+\sum_{p\in P'_J}\frac{\chi_p\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi(e_p+\mu\eta),\end{aligned}$$

что с учетом (3.35) и (3.33) стремится при $\mu\to0+$ к

$$\begin{aligned}&\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)+\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi(e_p)\Big]\\&\qquad=\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\big(\varkappa(-p,h)+1\big)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Big]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

Итак, предел $\widehat{z}$ по множеству A_3 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ и при $x\in R(\Gamma)$, и при $x\in J$.

Пусть теперь $(\mu;\tau)\in A_2$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.20) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.28) и (3.26), а затем (3.34) и (3.40), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)&=\sum_{p\in P'}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau),\mu))\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)\\&=\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)\underset{A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)}{\longrightarrow}\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.21) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.30) и (3.26), а затем (3.35) и (3.37), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau)&=\sum_{p\in P'}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)\\&=\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)\Big]\\&\underset{A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)}{\longrightarrow}\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\big(1+\varkappa(-p,h)\big)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Big]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

Итак, предел $\widehat{z}$ и по множеству A_2 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ — при любом $x\in\overline{\gamma}$.

Теперь пусть $(\mu;\tau)\in A_5$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.22) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.28), (3.26) и (3.27), а затем (3.34) и (3.40), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau) &= \sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\eta\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P''_R}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau),\mu))\xi\big(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P''_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\beta_0(m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu))\xi\big(e_p+(\tau-\mu)\eta\big)\\ &=\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\eta\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P''_R}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P''_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p+(\tau-\mu)\eta\big),\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к $\widehat{z}(0,0)$ при $A_5\ni(\mu;\tau)\to(0;0)$. Если же $x\in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.23) и (3.25), затем (3.39), (3.29), (3.30), (3.26) и (3.27), а затем (3.35) и (3.37), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau) &= \sum_{p\in P'_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\eta\big)\\ &+\sum_{p\in P_R}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\xi\big(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\chi_p\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\varkappa(-\pi(p,\tau,\eta),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\xi\big(e_p+(\tau-\mu)\eta\big)\\ &=\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\eta\big)\\ &+\sum_{p\in P_R}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\big(e_p-(\tau-\mu)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varkappa(-p,h)\xi\big(e_p+(\tau-\mu)\eta\big)\Big],\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к

$$\begin{aligned}&\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\xi(e_p)+\sum_{p\in P(x,t)}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Big]\\ &\qquad=\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P'}\chi_p\beta_p\big(1+\varkappa(-p,h)\big)\xi(e_p)+\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p)\Big]\overset{(3.37)}{=}\widehat{z}(0,0).\end{aligned}$$

Итак, и по множеству A_5 предел $\widehat{z}$ в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ — при любом $x\in\overline{\gamma}$.

Пусть, наконец, $(\mu;\tau)\in A_4$. Если $x\in R(\Gamma)$, то из (3.38), применяя сначала (3.24) и (3.25), затем (3.39), (3.18), (3.26), (3.28), (3.29) и (3.31), а затем (3.36) и (3.34), получим:

$$\begin{aligned}\widehat{z}(\mu,\tau) &= \sum_{p\in P''}\chi_p\beta_{m^-(p,\mu)}\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_{m^+(p,\mu)}\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\chi_p\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\xi\big(e_p+(\tau+\mu)\eta\big)=\sum_{p\in P''}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p+(\mu-\tau)\theta(p)\big)\\ &\qquad+\sum_{p\in P'_R}\chi_p\beta_p\xi\big(e_p-(\mu+\tau)\theta(p)\big)+\sum_{p\in P'_J}\chi_p\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p+(\tau+\mu)\eta\big),\end{aligned}$$

что с учетом (3.33) стремится к $\widehat{z}(0,0)$ при $A_5 \ni (\mu;\tau) \to (0;0)$. Если же $x \in J$, то из (3.38), применяя сначала (3.24) и (3.25), затем (3.39), (3.19), (3.26), (3.30), (3.29) и (3.31), а затем (3.35), получим:

$$\widehat{z}(\mu,\tau) = \sum_{p\in P(x,t)} \chi_p \beta_{m^-(p,\mu,h)} \xi\big(e_p + (\mu-\tau)\theta(p)\big) + \sum_{p\in P'_R} \chi_p \beta_{m^+(p,\mu)} \xi\big(e_p - (\mu+\tau)\theta(p)\big)$$
$$+ \sum_{p\in P'_J} \sum_{\eta\in D(e_p)} \chi_p \beta_{m^+(p,\mu,\eta)} \xi\big(e_p + (\tau+\mu)\eta\big) = \frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P''} \chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi\big(e_p + (\mu-\tau)\theta(p)\big)$$
$$+ \sum_{p\in P'_R} \chi_p\beta_p\xi\big(e_p - (\mu+\tau)\theta(p)\big) + \sum_{p\in P'_J} \chi_p\beta_p \sum_{\eta\in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\xi\big(e_p + (\tau+\mu)\eta\big)\Big],$$

что с учетом (3.33) стремится к

$$\frac{|D(x)|}{2}\Big[\sum_{p\in P''} \chi_p\beta_p\varkappa(-p,h)\xi(e_p) + \sum_{p\in P'} \chi_p\beta_p\big(1+\varkappa(-p,h)\big)\xi(e_p)\Big] \overset{(3.37)}{=} \widehat{z}(0,0).$$

Итак, предел $\widehat{z}$ и по множеству A_4 в точке $(0;0)$ равен $\widehat{z}(0,0)$ – при любом $x \in \overline{\gamma}$.

Лемма 3.7 доказана.

П р о д о л ж и м   д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.1. В силу леммы 3.7 функция z непрерывна в точке $(0;0)$. Значит, для любого ребра γ функция $u_{xx}\big|_{\overline{\gamma}\times(0;+\infty)}$ непрерывна, и для завершения доказательства включения (3.13) остается доказать непрерывность u_{xx} в точках из $\overline{\gamma}\times\{0\}$ для любого ребра γ.

Пусть γ — ребро Γ, $x \in \overline{\gamma}$ и $h \in D(x)$ допусти́м в точке x относительно $\overline{\gamma}$. Пусть $\Delta = \dfrac{1}{2}\min\big\{|x-a| \,\big|\, a \in J\setminus\{x\}\big\}$, и рассмотрим $z_0(\nu,\rho) = u_{xx}(x+\nu h,\rho)$ при $0 \leqslant \nu < \Delta$ и $0 < \rho < \Delta$. Если $x \in \gamma \vee (x \in \partial\gamma \wedge \nu \geqslant \rho)$, где, и всюду далее, $\partial\gamma = \overline{\gamma}\cap J$, то $P(x+\nu h,\rho)$ состоит из двух однозвенных ломаных с концами в точках $x+\nu h \pm \rho h \in \gamma$, и значит, в рассматриваемом случае

$$z_0(\nu,\rho) = \frac{1}{2}\big[\varphi''(x+\nu h+\rho h) + \varphi''(x+\nu h-\rho h)\big] \to \varphi''(x) \tag{3.41}$$

при $(\nu;\rho) \to (0;0)$. Пусть теперь $x \in \partial\gamma$ и $0 < \nu < \rho$. Тогда $P(x,\rho)$ есть множество всех однозвенных ломаных r_η с общим началом x и концами $x+\rho\eta$, $\eta \in D(x)$, и значит, $P(x+\nu h,\rho) = \big\{m^-(r,\nu,h) \,\big|\, r \in P(x,\rho)\big\} \cup \{\widetilde{q}\}$, где $\widetilde{q} = m^+(r_h,\nu)$. При этом $r \in P(x,\rho)$ $\Rightarrow$ $\big(\beta_0(r) = 2|D(x)|^{-1} \wedge \beta_r = |D(x)|^{-1}\big)$ и $\theta(r_\eta) = -\eta$. Но тогда, с учетом (3.30), из (3.10) следует, что в рассматриваемом случае

$$z_0(\nu,\rho) = \sum_{r\in P(x,\rho)} \frac{\beta_r\varkappa(-r,h)}{\beta_0(r)}\varphi''(e_r+\nu\theta(r)) + \beta_{\widetilde{q}}\varphi''((x+\rho h)+\nu h)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\eta\in D(x)} \varkappa(-r_\eta,h)\varphi''((x+\rho\eta)-\nu\eta) + \frac{1}{2}\varphi''(x+(\rho+\nu)h)$$
$$\overset{(3.32)}{=} |D(x)|^{-1}\sum_{\eta\in D(x)} \varphi''(x+(\rho-\nu)\eta) + \Big(|D(x)|^{-1} - \frac{1}{2}\Big)\varphi''(x+(\rho-\nu)h) + \frac{1}{2}\varphi''(x+(\rho+\nu)h),$$

что при $(\nu;\rho) \to (0;0)$ (при условии $0 < \nu < \rho$) стремится к

$$\varphi''(x)\Big(|D(x)|^{-1}(|D(x)|-1) + |D(x)|^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Big) = \varphi''(x).$$

Если же $x \in \partial\gamma$ и $\nu = 0$, то ввиду импликации $r \in P(x,\rho) \Rightarrow \beta_r = |D(x)|^{-1}$ будет

$$z_0(\nu,\rho) = z_0(0,\rho) = \sum_{r \in P(x,\rho)} \beta_r \varphi''(e_r) = |D(x)|^{-1} \sum_{\eta \in D(x)} \varphi''(x+\rho\eta) \underset{\rho\to 0+}{\longrightarrow} \varphi''(x).$$

Таким образом, предел $z_0(\nu,\rho)$ при $(\nu;\rho) \to (0;0)$ существует и равен $\varphi''(x)$, что в сочетании с $\varphi'' \in C(\Gamma)$ и выполнением (1.2) для функции (3.9) окончательно доказывает включение (3.13).

Докажем теперь (3.15). Зафиксируем, по-прежнему, любое ребро γ и любые $t > 0$ и $x \in \gamma$ и положим $h = \pm h_\gamma$. Тогда в силу (3.18) и (3.25), а также (3.28), (3.29) и (3.31), из (3.11) получим, что при $\mu > 0$

$$\begin{aligned} u_t(x+\mu h, t) &= -\sum_{p \in P''} \beta_{m^-(p,\mu)} \varphi^+_{\theta(m^-(p,\mu))}(e_p + \mu\theta(p)) - \sum_{p \in P'_R} \beta_{m^+(p,\mu)} \varphi^+_{\theta(m^+(p,\mu))}(e_{m^+(p,\mu)}) \\ &- \sum_{p \in P'_J} \sum_{\eta \in D(e_p)} \beta_{m^+(p,\mu,\eta)} \varphi^+_{\theta(m^+(p,\mu,\eta))}(e_{m^+(p,\mu,\eta)}) = -\sum_{p \in P''} \beta_p \beta_0(m^-(p,\mu)) \varphi^+_{\theta(p)}(e_p + \mu\theta(p)) \\ &- \sum_{p \in P'_R} \frac{\beta_p}{\beta_0(p)} \varphi^+_{\theta(p)}(e_p - \mu\theta(p)) - \sum_{p \in P'_J} \frac{\beta_p}{\beta_0(p)} \sum_{\eta \in D(e_p)} \varkappa(p,\eta) \varphi^+_{-\eta}(e_p + \mu\eta). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3.36) и (3.34), следует:

$$(u_t)^+_h(x,t) = \lim_{\mu\to 0+} \frac{u_t(x+\mu h,t) - u_t(x,t)}{\mu} = -\sum_{p \in P''} \beta_p \varphi''(e_p) + \sum_{p \in P'_R} \beta_p \varphi''(e_p) - \sum_{p \in P'_J} \beta_p \lim_{\mu \to 0+} \ell(p,\mu),$$

где

$$\begin{aligned} \ell(p,\mu) &= \frac{1}{\mu}\Big[\sum_{\eta \in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{-\eta}(e_p+\mu\eta) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] = -\frac{1}{\mu}\Big[\sum_{\eta \in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{\eta}(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] \\ &\overset{(3.32)}{=} -\frac{1}{\mu}\Big[\Big(\frac{2}{|D(e_p)|} - 1\Big)\varphi^+_{\theta(p)}(e_p + \mu\theta(p)) + \frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta \in D(e_p)\setminus\{\theta(p)\}} \varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] \\ &= -\frac{1}{\mu}\Big[\frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta \in D(e_p)} \varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) + \varphi^+_{\theta(p)}(e_p) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p))\Big] \\ &\overset{(1.4)}{=} \frac{1}{\mu}\Big[\varphi^+_{\theta(p)}(e_p+\mu\theta(p)) - \varphi^+_{\theta(p)}(e_p)\Big] - \frac{2}{|D(e_p)|} \sum_{\eta \in D(e_p)} \frac{1}{\mu}\Big[\varphi^+_\eta(e_p+\mu\eta) - \varphi^+_\eta(e_p)\Big] \end{aligned}$$

и, в силу чего,

$$\ell(p,\mu) \underset{\mu\to 0+}{\longrightarrow} \varphi''(e_p) - 2\varphi''(e_p) = -\varphi''(e_p). \tag{3.42}$$

Таким образом,

$$(u_t)^+_h(x,t) = -\sum_{p \in P''} \beta_p \varphi''(e_p) + \sum_{p \in P'} \beta_p \varphi''(e_p). \tag{3.43}$$

Поскольку

$$P''(x,t,h_\gamma) = P'(x,t,-h_\gamma) \text{ и } P'(x,t,h_\gamma) = P''(x,t,-h_\gamma) \text{ при } x \in \gamma \text{ и } t > 0, \tag{3.44}$$

то из (3.43) следует $(u_t)^+_{-h_\gamma}(x,t) = -(u_t)^+_{h_\gamma}(x,t)$, что в итоге, вместе с (3.43), означает, что

$$\Big(u_{tx}\big|_{\gamma\times(0;+\infty)}\Big)(x,t) = -\sum_{p \in P''(x,t,h_\gamma)} \beta_p \varphi''(e_p) + \sum_{p \in P'(x,t,h_\gamma)} \beta_p \varphi''(e_p) = \sum_{p \in P(x,t)} s_p \beta_p \varphi''(e_p), \tag{3.45}$$

где $s_p = -1$, если $p \in P''$, и $s_p = 1$, если $p \in P'$.

Теперь найдем выражение для u_{xt}. Так же, как из (3.43) было получено (3.45), из (3.12) ввиду $|D(x)| = 2$ следует, что

$$u_x(x,t) = -\sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p), \quad x \in R(\Gamma), \quad t > 0, \tag{3.46}$$

где подразумевается, что $h = h_\gamma$. Из (3.46) в силу (3.16) и (3.17) и с учетом (3.26) и (3.27) получаем импликации

$$\tau < 0 \;\Rightarrow\; u_x(x,t+\tau) = -\sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p - \tau\theta(p)),$$

и

$$\tau > 0 \;\Rightarrow\; u_x(x,t+\tau) = -\sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi^+_{\theta(p)}(e_p - \tau\theta(p)) - \sum_{p\in P_J} s_p\beta_p \sum_{\eta\in D(e_p)} \varkappa(p,\eta)\varphi^+_{-\eta}(e_p + \tau\eta),$$

в силу первой из которых $(u_x)^-_t(x,t)$ совпадает с правой частью (3.45) (что получается сразу же), а в силу второй —

$$(u_x)^+_t(x,t) = \sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P_J} s_p\beta_p \sum_{\eta\in D(e_p)} \lim_{\tau\to 0+} \ell(p,\tau)$$

$$\overset{(3.42)}{=} \sum_{p\in P_R} s_p\beta_p\varphi''(e_p) + \sum_{p\in P_J} s_p\beta_p\varphi''(e_p) = \sum_{p\in P(x,t)} s_p\beta_p\varphi''(e_p),$$

что тоже совпадает с правой частью (3.45). Равенство (3.15) доказано.

Осталось доказать (3.14). Фиксируя ребро γ, $x \in \gamma$, $h \in D(x)$ и $t > 0$, имеем:

$$u_{tx}(x+\mu h, t+\tau) = \sum_{q\in P(x+\mu h, t+\tau)} s_q\beta_q\varphi''(e_q), \tag{3.47}$$

где $s_q = -1$, если $q \in P''(x+\mu h, t+\tau, h)$, и $s_q = 1$, если $q \in P'(x+\mu h, t+\tau, h)$. При этом, если $(p;q) \in \alpha_{\mu,\tau}$, то $q \in P'(x+\mu h, t+\tau, h) \;\Rightarrow\; p \in P'(x,t,h)$ и $q \in P''(x+\mu h, t+\tau, h) \;\Rightarrow\; p \in P''(x,t,h)$, и значит, $(p;q) \in \alpha_{\mu,\tau} \Rightarrow s_q = s_p$. Таким образом, к функции (3.47) применима лемма 3.7, и значит, u_{tx} непрерывна на $\gamma \times (0;+\infty)$ для любого ребра γ.

Пусть теперь γ — ребро Γ, $x \in \partial\gamma$, h допусти́м в точке x относительно $\overline{\gamma}$, $t > 0$. При достаточно малых $\mu > 0$ выполнено $x + \mu h \in R(\Gamma)$, и значит,

$$u_{tx}(x+\mu h, t+\tau) \overset{(3.47)}{=} \sum_{q\in P'(x+\mu h, t+\tau, h_\gamma)} \beta_q\varphi''(e_q) - \sum_{p\in P''(x+\mu h, t+\tau, h_\gamma)} \beta_q\varphi''(e_q). \tag{3.48}$$

Пусть пока $h = h_\gamma$. Обозначим через ℓ_j предел $u_{tx}(x+\mu h, t+\tau)$ при $(\mu;\tau) \to (0;0)$ по множеству A_j, $j = \overline{2,5}$. Тогда в силу (3.48)

$$\ell_3 = \lim_{\mu\to 0+} u_{tx}(x+\mu h, t) = \lim_{\mu\to 0+} \Bigg(\sum_{q\in P'(x+\mu h, t, h)} \beta_q\varphi''(e_q) - \sum_{p\in P''(x+\mu h, t, h)} \beta_q\varphi''(e_q) \Bigg). \tag{3.49}$$

Если $0 < \mu < \zeta$, то с учетом (3.19) имеем: 1) ломаные из $P'(x+\mu h, t, h)$ есть положительные μ-сдвиги ломаных из $P'(x,t,h)$, то есть

$$P'(x+\mu h, t, h) = \left\{ m^+(p,\mu) \,\middle|\, p \in P'_R \right\} \cup \left\{ m^+(p,\mu,\eta) \,\middle|\, p \in P'_J, \eta \in D(e_p) \right\}, \tag{3.50}$$

2) ломаные из $P''(x+\mu h, t, h)$ есть отрицательные μ-сдвиги ломаных из $P(x,t)$ в направлении вектора h:

$$P''(x+\mu h, t, h) = \bigl\{m^-(p,\mu,h)\,\big|\, p\in P(x,t)\bigr\}. \tag{3.51}$$

На основании (3.50) и (3.51) из (3.49) и (3.25) получаем:

$$\begin{aligned}
\ell_3 = \lim_{\mu\to 0+}\Bigl(\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(p,\mu)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu)}) + \sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu,\eta)})\\
-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^-(p,\mu,\eta)})\Bigr) \overset{(3.30),(3.31),(3.29)}{=} \lim_{\mu\to 0+}\Bigl(\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\varphi''(e_p-\mu\theta(p))\\
+\sum_{p\in P'_J}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''(e_p+\mu\eta) - \sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\varphi''(e_p+\mu\theta(p))\Bigr)\\
\overset{(3.35),(3.33)}{=} \frac{|D(x)|}{2}\Bigl(\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Bigr)\\
= \frac{|D(x)|}{2}\Bigl(\sum_{p\in P'}\beta_p(1-\varkappa(-p,h))\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P''}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Bigr)\\
\overset{(3.37)}{=} \frac{|D(x)|}{2}\Bigl(\Bigl(2-\frac{2}{|D(x)|}\Bigr)\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p) - \frac{2}{|D(x)|}\sum_{p\in P''}\beta_p\varphi''(e_p)\Bigr),
\end{aligned}$$

то есть

$$\ell_3 = (|D(x)|-1)\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P''}\beta_p\varphi''(e_p). \tag{3.52}$$

Если $(\mu;\tau)\in A_2$, то с учетом (3.21) имеем: $P'(x+\mu h, t+\tau, h) = \bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\, p\in P'\bigr\}$ и $P''(x+\mu h, t+\tau, h) = \bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\, p\in P(x,t)\bigr\}$. Поэтому из (3.48) и (3.51) получаем, что ℓ_2 есть предел при $A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)$ выражения:

$$\begin{aligned}
\sum_{p\in P'}\beta_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)}) - \sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)})\\
\overset{(3.29),(3.30)}{=} \sum_{p\in P'}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}-\mu\theta(\pi(p,\tau)))\\
-\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}+\mu\theta(\pi(p,\tau)))\\
\overset{(3.35),(3.26)}{=} \frac{|D(x)|}{2}\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''((e_p-\tau\theta(p))-\mu\theta(p)) - \sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''((e_p-\tau\theta(p))+\mu\theta(p))\\
\xrightarrow[A_2\ni(\mu;\tau)\to(0;0)]{} \frac{|D(x)|}{2}\Bigl(\sum_{p\in P'}\beta_p\varphi''(e_p) - \sum_{p\in P(x,t)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''(e_p)\Bigr),
\end{aligned}$$

что, как и выше, равно правой части (3.52). То есть $\ell_2=\ell_3$.

Если $(\mu;\tau)\in A_5$, то с учетом (3.23) имеем:

$$P'(x+\mu h, t+\tau, h) = \bigl\{m^+(\pi(p,\tau),\mu)\,\big|\, p\in P'_R\bigr\}\cup\bigl\{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)\,\big|\, p\in P'_J, \eta\in D(e_p)\bigr\}$$

и

$$P''(x+\mu h, t+\tau, h) = \bigl\{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)\,\big|\, p\in P_R\bigr\}\cup\bigl\{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)\,\big|\, p\in P_J, \eta\in D(e_p)\bigr\}.$$

И тогда из (3.48) и (3.51) следует, что

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)=\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau),\mu)})+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)}\varphi''(e_{m^+(\pi(p,\tau,\eta),\mu)})$$

$$-\sum_{p\in P_R}\beta_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau),\mu,h)})-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(\pi(p,\tau,\eta),\mu,h)})$$

$$\overset{(3.29),(3.30)}{=}\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}-\mu\theta(\pi(p,\tau)))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau,\eta)}-\mu\theta(\pi(p,\tau,\eta)))$$

$$-\sum_{p\in P_R}\frac{\beta_{\pi(p,\tau)}\varkappa(-\pi(p,\tau),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau)}+\mu\theta(\pi(p,\tau)))$$

$$-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\frac{\beta_{\pi(p,\tau,\eta)}\varkappa(-\pi(p,\tau,\eta),h)}{\beta_0(\pi(p,\tau,\eta))}\varphi''(e_{\pi(p,\tau,\eta)}+\mu\theta(\pi(p,\tau,\eta)))$$

$$\overset{(3.35),(3.26),(3.27),(3.37)}{=}\frac{|D(x)|}{2}\Big(\sum_{p\in P'_R}\beta_p\varphi''((e_p-\tau\theta(p))-\mu\theta(p))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\beta_p\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\tau\eta)-\mu\cdot(-\eta))-\sum_{p\in P_R}\beta_p\varkappa(-p,h)\varphi''((e_p-\tau\theta(p))+\mu\theta(p))$$

$$-\sum_{p\in P_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_p\varkappa(-p,h)\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\tau\eta)+\mu\cdot(-\eta))\Big).$$

Переходя здесь к пределу и учитывая (3.33), получим для ℓ_5 выражение, совпадающее с финальным выражением для ℓ_2. Значит, и $\ell_5=\ell_3$.

Пусть, наконец, $(\mu;\tau)\in A_4$. Тогда в силу (3.24) имеем: $P'(x+\mu h,t+\tau,h)=\{\pi(r,\tau)\,|\,r\in P'(x+\mu h,t,h)\}$ и $P''(x+\mu h,t+\tau,h)=\{\pi(r,\tau)\,|\,r\in P''(x+\mu h,t,h)\}$. Поэтому при $(\mu;\tau)\in A_4$ из (3.48) и (3.25), и при последующем учете (3.50) и (3.51), следует, что

$$u_{tx}(x+\mu h,t+\tau)=\sum_{r\in P'(x+\mu h,t,h)}\beta_{\pi(r,\tau)}\varphi''(e_{\pi(r,\tau)})-\sum_{r\in P''(x+\mu h,t,h)}\beta_{\pi(r,\tau)}\varphi''(e_{\pi(r,\tau)})$$

$$\overset{(3.26)}{=}\sum_{r\in P'(x+\mu h,t,h)}\beta_r\varphi''(e_r-\tau\theta(r))-\sum_{r\in P''(x+\mu h,t,h)}\beta_r\varphi''(e_r-\tau\theta(r))$$

$$\overset{(3.50),(3.51),(3.25)}{=}\sum_{p\in P'_R}\beta_{m^+(p,\mu)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu)}-\tau\theta(m^+(p,\mu)))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\sum_{\eta\in D(e_p)}\beta_{m^+(p,\mu,\eta)}\varphi''(e_{m^+(p,\mu,\eta)}-\tau\theta(m^+(p,\mu,\eta)))$$

$$-\sum_{p\in P(x,t)}\beta_{m^-(p,\mu,h)}\varphi''(e_{m^-(p,\mu,h)}-\tau\theta(m^-(p,\mu,h)))$$

$$\overset{(3.29),(3.31),(3.30)}{=}\sum_{p\in P'_R}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\varphi''((e_p-\mu\theta(p))-\tau\theta(p))$$

$$+\sum_{p\in P'_J}\frac{\beta_p}{\beta_0(p)}\sum_{\eta\in D(e_p)}\varkappa(p,\eta)\varphi''((e_p+\mu\eta)-\tau\cdot(-\eta))-\sum_{p\in P(x,t)}\frac{\beta_p\varkappa(-p,h)}{\beta_0(p)}\varphi''((e_p+\mu\theta(p))-\tau\theta(p)).$$

Переходя здесь к пределу и учитывая (3.35) и (3.33), получим, что $\ell_4=\ell_3$.

Итак, доказано, что если $h = h_\gamma$, то предел $u_{tx}(x+\mu h, t+\tau)$ при $(\mu;\tau) \to (0;0)$ равен ℓ_3. В случае, когда $h = -h_\gamma$, в силу (3.44) (с заменой x на $x+\mu h$ и t на $t+\tau$) получается, что предел $u_{tx}(x+\mu h, t+\tau)$ при $(\mu;\tau)\to(0;0)$ равен $-\ell_3$. Применив лемму 3.7, получим из (3.52), что ℓ_3 есть функция непрерывная по t на $(0;+\infty)$, в силу чего получается, что u_{tx} непрерывно доопределяема на $(\partial\gamma)\times(0;+\infty)$.

Для завершения доказательства справедливости (3.14) остается доказать непрерывную доопределяемость u_{tx} в точках $\overline{\gamma}\times\{0\}$. Это доказательство осуществляется так же, как и доказательство непрерывности u_{xx} в точках $\overline{\gamma}\times\{0\}$ — см. абзац, содержащий утверждение (3.41). Действительно, если в условиях и обозначениях этого абзаца рассмотреть функцию $z_1(\nu,\rho) = u_{tx}(x+\nu h, \rho)$, то установим следующее. Первое, в случае $x\in\gamma \vee (x\in\partial\gamma \wedge \nu \geqslant \rho)$ вместо (3.41) получим

$$z_1(\nu,\rho) = \frac{1}{2}\big[\varphi''(x+\nu h+\rho h) - \varphi''(x+\nu h-\rho h)\big] \to 0.$$

Второе, в случае $x\in\partial\gamma \wedge 0<\nu<\rho$ ввиду $P'(x+\nu h,\rho,h) = \{\widetilde{q}\}$ и $P''(x+\nu h,\rho,h) = \big\{m^-(r,\nu,h)\,\big|\, r\in P(x,\rho)\big\}$ получим для $z_1(\nu,\rho)$ ту же цепочку равенств, что и для $z_0(\nu,\rho)$, только с минусом перед последним слагаемым в каждом из выражений этой цепочки. Это приводит к стремлению $z_1(\nu,\rho)$ к 0 при $(\nu;\rho)\to(0;0)$ и в этом случае. Наконец, третье. Если $x\in\partial\gamma$ и $\nu=0$, то $P'(x,\rho,h)=\{h\}$, тогда применение (3.52) дает:

$$\begin{aligned} z_1(\nu,\rho) = z_1(0,\rho) &= (|D(x)|-1)\sum_{r\in P'(x,\rho,h)} \beta_r\varphi''(e_r) - \sum_{r\in P''(x,\rho,h)} \beta_r\varphi''(e_r) \\ &= \frac{|D(x)|-1}{|D(x)|}\varphi''(x+\rho h) - \frac{1}{|D(x)|}\sum_{\eta\in D(x)\setminus\{h\}}\varphi''(x+\rho\eta) \underset{\rho\to 0+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Таким образом, предел u_{tx} в точках $\overline{\gamma}\times\{0\}$ равен 0, что и завершает доказательство утверждения (3.14).

Теорема 3.1 доказана.

4. Случай ненулевого среднего от φ

Рассматривая φ в задаче (1.1), (0.1), (1.2), (1.3) как параметр, обозначим решение этой задачи через $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\varphi)$. Ниже $\langle\xi\rangle$ для $\xi\in C(\Gamma)$ обозначает среднее от ξ по Γ.

Теорема 4.1. *Пусть* $\partial\Gamma=\varnothing$. *Тогда*

$$u(x,t;\varphi) = \langle\varphi\rangle - \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \widetilde{g}(x,t,s,\sigma)\varphi''(s)\,ds\,d\sigma = \langle\varphi\rangle + [\mathcal{C}(t)\varphi]\,(x). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\varphi_0\in\mathbb{R}$ и $\varphi\equiv\varphi_0$, то непосредственно проверяется, что $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\varphi)\equiv\varphi_0$. Поэтому применение теоремы 3.1 при учете равенства $u(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\varphi) = u(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\varphi-\langle\varphi\rangle) + u(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\langle\varphi\rangle)$ и того, что $\langle\varphi-\langle\varphi\rangle\rangle = 0$, дает (4.1). □

5. Об обобщенной функции Грина в формуле решения

Начнем с тавтологии: функция φ при нулевом своем среднем на Γ есть решение задачи

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x), & x\in R(\Gamma), \\ \displaystyle\sum_{h\in D(x)} y_h^+(x) = 0, & x\in J, \end{cases} \tag{5.1}$$

при $f = -\varphi''$. В то же время, любая φ (с необязательно нулевым средним) представима в виде суммы функции с нулевым средним и константы: $\varphi = (\varphi - \langle\varphi\rangle) + \langle\varphi\rangle$, причем любая константа есть решение задачи (5.1) при $f \equiv 0$. Поэтому второе равенство в лемме 3.5 говорит о том, что функция G^*, определяемая формулой

$$G^*(x,s) = \frac{1}{|\Gamma|} \int\limits_{\Gamma} H(x,s,\sigma)\, d\sigma,$$

есть обобщенная функция Грина задачи (5.1). Но тогда формула (3.1) может быть записана в виде, аналогичном (0.2):

$$u(x,t) = -\int\limits_{\Gamma} g^*(x,t,s)\varphi''(s)\, ds, \quad x \in \Gamma, \quad t \geqslant 0,$$

где $g^*(x,t,s) = [\mathcal{C}(t)G^*(\,\cdot\,,s)]\,(x)$.

References

[1] В. Л. Прядиев, “Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения”, *Современная математика и ее приложения*, **38**:3 (2006), 82–94; англ. пер.:V. L. Pryadiev, “Description of solutions to the initial-boundary-value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation”, *J. of Math. Sci.*, **147**:1 (2007), 6470–6482.

[2] Ю. В. Покорный, И. Г. Карелина, “О функции Грина задачи Дирихле на графе”, *Доклады Академии наук СССР*, **318**:3 (1991), 542–544; англ. пер.:Yu. V. Pokornyĭ, I. G. Karelina, “On the Green function of the Dirichlet problem on a graph”, *Soviet Mathematics Doklady*, **43**:3 (1991), 732–734.

[3] Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004. [Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov, *Differential Equations on Geometrical Graphs*, FIZMATLIT Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[4] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики. Т. I*, ГТТИ, М.-Л., 1933; нем. ориг.:R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik. V. I*, Julius Springer, Berlin, 1930.

[5] В. Л. Прядиев, “Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети”, *Спектральные и эволюционные проблемы*, Труды XV Крымской осенней математической школы-симпозиума (Севастополь, 17–29 сентября), Севастополь–Ласпи, 2005, 132–139. [V. L. Pryadiev, “One approach to the finite-form description of solutions of the wave equation on a spatial network”, *Spectral and Evolution Problems*, Proceeding of the Fifteenth Crimean Autumn Math. School – Symposium (Sevastopol, September 17–29), **15**, Sevastopol–Laspi, 2005, 132–139 (In Russian)].

[6] Н. В. Глотов, В. Л. Прядиев, “Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого» трения”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2006, № 2, 185–193. [N. V. Glotov, V. L. Pryadiev, “Opisanie resheniy volnovogo uravneniya na konechnom i ogranichennom geometricheskom grafe pri usloviyakh transmissii tipa “zhidkogo” treniya”, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2006, № 2, 185–193 (In Russian)].

[7] Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, “Волновое уравнение на пространственной сети”, *Доклады РАН*, **388**:1 (2003), 16–18; англ. пер.:Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, “The wave equation on a spatial network”, *Doklady Mathematics*, **67**:1 (2003), 10–12.

[8] И. Г. Карелина, *Некоторые дифференциальные неравенства на графах*, дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Воронежский государственный университет, Воронеж, 1992. [I. G. Karelina, *Some Differential Inequalities on Graphs*, Diss. ... Cand. Sci. (Phys. and Mathematics), Voronezh State University, Voronezh, 1992 (In Russian)].

[9] В. Л. Прядиев, Л. Г. Фадеева, "Представление решения волнового уравнения на неограниченном геометрическом графе без граничных вершин", *Сборник научных трудов*: *Совершенствование преподавания физико-математических и общетехнических дисциплин в педвузе и школе*, **4**, Борисоглеб. гос. пед. ин-т, Борисоглебск, 2007, 39–53. [V. L. Pryadiev, L. G. Fadeeva, "Representation of the Solution of the Wave Equation on an Unbounded Geometric Graph Without Boundary Vertices", *Collection of Scientific Papers*: *Improving the Teaching of Physics, Mathematics, and General Technical Disciplines in Pedagogical Universities and Schools*, **4**, Borisoglebsk State Pedagogical Institute, Borisoglebsk, 2007, 39–53 (In Russian)].

[10] О. В. Коровина, *О некоторых свойствах решений волнового уравнения на геометрическом графе*, дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Белгородский государственный университет, Белгород, 2009. [O. V. Korovina, *On Some Properties of Solutions to the Wave Equation on a Geometric Graph*, Diss. ... Cand. Sci. (Phys. and Mathematics), Belgorod State University, Belgorod, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Прядиев Владимир Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и геометрии. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: pryad@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-8301-5674

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 16.08.2025 г.
Поступила после рецензирования 22.10.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Vladimir L. Pryadiev, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functions Theory and Geometry Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: pryad@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0005-8301-5674

There is no conflict of interests.

Received 16.08.2025
Reviewed 22.10.2025
Accepted for press 21.11.2025

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

УДК 517.922

Решение задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г. Ф. Морозова»

394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Аннотация. В работе исследуется задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с необратимым оператором при старшей производной, вследствие чего решение существует не при каждых начальных значениях. Этот оператор фредгольмов с нулевым индексом. Для решения задачи используется метод каскадной декомпозиции уравнения и начальных условий на соответствующие уравнения и условия в подпространствах уменьшающихся размерностей. Исследуется случай обратимости некоторого оператора, построенного с помощью операторных коэффициентов уравнения. Определены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдено это решение в аналитическом виде.

Ключевые слова: задача Коши, вырожденное дифференциальное уравнение второго порядка, фредгольмовский оператор, каскадная декомпозиция

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-20012, https://rscf.ru/project/24-21-20012/).

Для цитирования: *Усков В.И.* Решение задачи Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 382–391.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

Solution of the Cauchy problem for a degenerate second order differential equation in a Banach space

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies after named G. F. Morozov

8 Timiryazeva St., Voronezh 394613, Russian Federation

Abstract. This article is devoted to the study of the Cauchy problem for a second-order differential equation with a non-invertible operator at the highest derivative, as a result of which, the solution exists not for every initial value. This operator is Fredholm with a zero index. The cascade splitting method is used to solve the problem. This method splits the equation and conditions into the corresponding equation and conditions in subspaces of smaller dimensions. The case of invertibility of some operator constructed by using the operator coefficients of the equation is investigated. The conditions under which a solution to the problem exists and is unique are determined; it is found in the analytical form.

Keywords: Cauchy problem, degenerate second order differential equation, Fredholm operator, cascade splitting

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-20012, https://rscf.ru/en/project/24-21-20012/).

Mathematics Subject Classification: 34A09.

For citation: Uskov V.I. Solution of the Cauchy problem for a degenerate second order differential equation in a Banach space. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 382–391.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-382-391

Введение

Пусть заданы линейные ограниченные операторы $A(t), B(t), C(t)$, действующие из банахова пространства $\mathcal{X}_1$ в банахово пространство $\mathcal{X}_2$ и сильно непрерывно зависящие от $t \in \mathfrak{T} = [0; t_k]$, $u^0, u^1 \in \mathcal{X}_1$ и $f(t) \in \mathcal{X}_2$, $t \in \mathfrak{T}$. Рассмотрим задачу Коши

$$A(t)\frac{d^2u}{dt^2} = B(t)\frac{du}{dt} + C(t)u(t) + f(t), \tag{0.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1. \tag{0.2}$$

Под решением задачи (0.1), (0.2) подразумевается функция $u(t)$, дважды дифференцируемая и удовлетворяющая (0.1) при каждом $t \in \mathfrak{T}$ и (0.2).

Дифференциальное уравнение второго порядка с вырожденным оператором при старшей производной рассматривалось другими авторами: в работе [1] исследовалось уравнение вязкоупругости с сильным затуханием с самосопряженным нормально разрешимым фредгольмовым оператором, имеющим длину всех жордановых цепочек 1; в работе [2] этот оператор нормально разрешимый с n-мерным ядром, обладающий относительно некоторой оператор-функции полным биканоническим жордановым набором.

В настоящей работе для решения задачи (0.1), (0.2) применяется метод каскадной декомпозиции. Каскадный метод направлен на решение задач, в которых получение решения другими методами или невозможно, или затруднительно. Он основан на:

1) расщеплении уравнения типа $Av = w$ на уравнения в подпространствах;

2) получении в одном из подпространств уравнения, аналогичного исходному уравнению;

3) получении для новой неизвестной функции условий, аналогичных заданным условиям;

4) повторении перечисленных действий с новыми уравнением и условиями.

Дифференциальное уравнение вида (0.1) с постоянными коэффициентами исследовалось с применением метода каскадной декомпозиции в работе [3]. В работе [4] задача (0.1), (0.2) решена в случае постоянного фредгольмова оператора A с n-мерным ядром при условии $\langle QBe_i, \varphi_j\rangle \neq 0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\operatorname{Coker} A$. Этот результат применялся в работе [5] при исследовании рабочего процесса шнекороторного лесопожарного грунтомета.

В настоящей работе рассмотрена задача (0.1), (0.2) в более общей постановке: все операторные коэффициенты переменные, длины жордановых цепочек различные. Оператор $A(t)$ полагается фредгольмовым с нулевым индексом (далее, фредгольмов) при каждом $t \in \mathfrak{T}$.

Статья организована следующим образом. Вначале приводятся необходимые сведения, после чего решается вспомогательная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с единичным оператором при старшей производной. Затем исследуется задача Коши (0.1), (0.2). Исследуется случай обратимости некоторого оператора, построенного с помощью заданных коэффициентов. Определяются условия, при которых решение задачи существует, единственно; находится это решение в аналитическом виде.

1. Необходимые сведения

Имеет место (см. [6]) следующее свойство.

С в о й с т в о 1.1. Фредгольмов оператор $A : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ вполне определяется свойством:

$$\mathcal{X}_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad \mathcal{X}_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A,$$

где $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к ядру $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$ — образ, $\operatorname{Coker} A$ — дефект оператора A, $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$, сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A$.

Введем проекторы $P(A)$ на $\operatorname{Ker} A$, $Q(A)$ на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q(A))$, где I обозначен единичный оператор в соответствующем подпространстве.

Нам понадобится следующая лемма, полученная в [7].

Лемма 1.1. *Уравнение*

$$A\xi = \eta, \quad \xi \in \mathcal{X}_1, \quad \eta \in \mathcal{X}_2,$$

равносильно системе:

$$\xi = A^-\eta + \zeta \quad \text{для любого} \quad \zeta \in \operatorname{Ker} A,$$

$$Q(A)\eta = 0.$$

Заметим, что $\zeta = P(A)\xi$ произвольно.

Пусть $R(t)$ — некоторый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $v(t)$ — некоторая функция из $\mathcal{X}$. Обозначим через C_n^i биномиальный коэффициент.

Имеет место следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Пусть $R(t)$, $v(t)$ n_0 раз дифференцируемы. Тогда для любого натурального $n \leqslant n_0$ выполнено равенство:*

$$\frac{d^n(R(t)v(t))}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{d^{n-i}R(t)}{dt^{n-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем предложение индукцией по n. При $n = 1$ оно выполнено (см. [8, лемма 3.6]). Пусть оно выполнено при $n = N$. Тогда при $n = N + 1$ имеем:

$$\frac{d^{N+1}(R(t)v(t))}{dt^{N+1}} = \sum_{i=0}^{N} C_N^i \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{N-i}R(t)}{dt^{N-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right).$$

Применив еще раз предложение при $n = 1$ к производной в правой части и раскрыв скобки, получим:

$$\sum_{i=0}^{N} C_N^i \left(\frac{d^{N+1-i}R(t)}{dt^{N+1-i}} \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right) + \sum_{i=0}^{N} C_N^i \left(\frac{d^{N-i}R(t)}{dt^{N-i}} \frac{d^{i+1} v(t)}{dt^{i+1}} \right).$$

Выделив в первой сумме слагаемое при $i = 0$, во второй — при $i = N$ и применив основное биномиальное тождество, получим:

$$\frac{d^{N+1}R(t)}{dt^{N+1}} + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(C_N^i + C_N^{i-1})}_{=C_{N+1}^i} \frac{d^{N+1-i}R(t)}{dt^{N+1-i}} \frac{d^i u(t)}{dt^i} + R(t) \frac{d^{N+1}u(t)}{dt^{N+1}},$$

что и требовалось доказать. □

2. Решение вспомогательной задачи

Для решения задачи (0.1), (0.2) будем использовать следующую вспомогательную задачу Коши:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{A}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{f}(t), \tag{2.1}$$

$$u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u^1, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)$ — действующие в банаховом пространстве $\mathcal{X}$ линейные ограниченные операторы, сильно непрерывно зависящие от t, $u^0, u^1 \in \mathcal{X}$, $f(t) \in \mathcal{X}$, $t \in \mathfrak{T}$.

Перейдем к решению этой задачи.

Здесь и далее будем обозначать O — нулевой оператор, а I — единичный оператор в соответствующем пространстве.

Определим следующее условие.

Условие 2.1.

1) Операторы $\mathcal{A}(t)$ и $\mathcal{B}(t)$ бесконечно дифференцируемы в точке $t = 0$, а все их производные $\dfrac{d^n\mathcal{A}}{dt^n}(0)$, $\dfrac{d^n\mathcal{B}}{dt^n}(0)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются ограниченными операторами;

2) функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывна на $\mathfrak{T}$;

3) функция $\mathfrak{f}(t)$ бесконечно непрерывно дифференцируема в точке $t = 0$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 2.1. Тогда решение задачи (2.1), (2.2) существует, единственно и определяется формулой:*

$$u(t) = \mathcal{V}^{(1)}(t)u^1 + \mathcal{V}^{(0)}(t)u^0 + \mathfrak{g}(t), \tag{2.3}$$

где операторы $\mathcal{V}^{(1)}(t)$, $\mathcal{V}^{(0)}(t)$ и функция $\mathfrak{g}(t)$ определяются по формулам:

$$\mathcal{V}^{(1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{D}_n^{(1)}, \quad \mathcal{V}^{(0)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{D}_n^{(0)}, \quad \mathfrak{g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathfrak{g}_n, \quad t \in \mathfrak{T}, \tag{2.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_0^{(1)} = O, \quad \mathcal{D}_0^{(0)} = I, \quad \mathfrak{g}_0 = O, \quad \mathcal{D}_1^{(1)} = I, \quad \mathcal{D}_1^{(0)} = O, \quad \mathfrak{g}_1 = O,\\
&\mathcal{D}_2^{(1)} = \mathcal{A}(0), \quad \mathcal{D}_2^{(0)} = \mathcal{B}(0), \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{f}(0),\\
&\mathcal{K}_n^{(0)} = \frac{d^{n-2}\mathcal{B}}{dt^{n-2}}(0), \quad \mathcal{K}_n^{(n-1)} = \mathcal{A}(0),\\
&\mathcal{K}_n^{(i)} = C_{n-2}^{i-1}\frac{d^{n-1-i}\mathcal{A}}{dt^{n-1-i}}(0) + C_{n-2}^{i}\frac{d^{n-2-i}\mathcal{B}}{dt^{n-2-i}}(0), \quad i = 1, 2, \ldots, n-2, \quad n = 3, 4, \ldots,\\
&\mathcal{D}_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}\mathcal{D}_i^{(1)}, \quad \mathcal{D}_n^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}\mathcal{D}_i^{(0)}, \quad \mathfrak{g}_n = \sum_{i=0}^{n-1}\mathcal{K}_n^{(i)}g_i, \quad n = 3, 4, \ldots .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Доказательство. 1. Докажем единственность решения. Заменой

$$\frac{du}{dt} = v(t) \tag{2.6}$$

уравнение (2.1) сводится к уравнению

$$\frac{dv}{dt} = \mathcal{A}(t)v(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{f}(t). \tag{2.7}$$

Система (2.6), (2.7) — это уравнение

$$\frac{dw}{dt} = \mathcal{C}(t)w(t) + \mathcal{F}(t),$$

где

$$w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}(t) = \begin{pmatrix} O & I \\ \mathcal{B}(t) & \mathcal{A}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{f}(t) \end{pmatrix}.$$

Ввиду замены (2.6) начальное условие имеет вид

$$w(0) = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{B}(t)$ ограничены, функция $f(t)$ непрерывна, следовательно, оператор $\mathcal{C}(t)$ ограничен, и функция $\mathcal{F}(t)$ непрерывна. В силу результатов монографии [8, с. 231] это влечет единственность решения.

2. Докажем справедливость формулы (2.3). Построим решение $u(t)$ в виде ряда Маклорена

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n u}{dt^n}(0) \tag{2.8}$$

и вычислим его коэффициенты. При $t = 0$ из (2.1) следует соотношение

$$\frac{d^2 u}{dt^2}(0) = \mathcal{A}(0)u^1 + \mathcal{B}(0)u^0 + \mathfrak{f}(0) = \mathcal{D}_2^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_2^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_2.$$

Продифференцировав (2.1) при $t = 0$, получим

$$\begin{aligned}\frac{d^3 u}{dt^3}(0) &= \Big(\mathcal{A}^2(0) + \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) + \mathcal{B}(0)\Big)u^1 + \Big(\mathcal{A}(0)\mathcal{B}(0) + \frac{d\mathcal{B}}{dt}(0)\Big)u^0 + \Big(\mathcal{A}(0)\mathfrak{f}(0) + \frac{d\mathfrak{f}}{dt}(0)\Big) \\ &= \mathcal{D}_3^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_3^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_3.\end{aligned}$$

Пусть справедливы формулы:

$$\frac{d^n u}{dt^n}(0) = \mathcal{D}_n^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_n^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.9}$$

Тогда продифференцировав (2.1) $N-1$ раз и применив предложение 1.1, получим, что выполнено соотношение

$$\begin{aligned}\frac{d^{N+1}u(t)}{dt^{N+1}} = \mathcal{A}(t)\frac{d^N u(t)}{dt^N} + \sum_{i=1}^{N-1}\Big(C_{N-1}^{i-1}\frac{d^{N-i}\mathcal{A}(t)}{dt^{N-i}} + C_{N-1}^{i}\frac{d^{N-1-i}\mathcal{B}(t)}{dt^{N-1-i}}\Big)\frac{d^i u(t)}{dt^i} \\ + \frac{d^{N-1}B(t)}{dt^{N-1}}u(t) + \frac{d^{N-1}\mathfrak{f}(t)}{dt^{N-1}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

При $t = 0$ соотношение (2.10) в обозначениях (2.5) принимает вид

$$\frac{d^{N+1}u}{dt^{N+1}}(0) = \mathcal{D}_{N+1}^{(1)}u^1 + \mathcal{D}_{N+1}^{(0)}u^0 + \mathfrak{g}_{N+1}.$$

Подставив (2.9) в (2.8), получим формулу (2.3).

Покажем, что ряды (2.4) сходятся. Возьмем некоторый элемент $\xi \in \mathcal{X}$. Операторы $\dfrac{d^n\mathcal{A}}{dt^n}(0)$, $\dfrac{d^n\mathcal{B}}{dt^n}(0)$, $n = 0, 1, \ldots,$ ограничены, что влечет ограниченность операторов $\mathcal{K}_n^{(0)}$, $\mathcal{K}_n^{(n-1)}$ и операторов $\mathcal{K}_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{K}_n^{(0)}\xi\| \leqslant \Big\|\frac{d^{n-2}\mathcal{B}}{dt^{n-2}}(0)\Big\|\|\xi\| = \kappa_0\|\xi\|,\\
&\|\mathcal{K}_n^{(n-1)}\xi\| \leqslant \|\mathcal{A}(0)\|\|\xi\| = \kappa_{n-1}\|\xi\|,\\
&\|K_n^{(i)}\xi\| \leqslant (C_{n-2}^{i-1}\Big\|\frac{d^{n-1-i}\mathcal{A}}{dt^{n-1-i}}(0)\Big\| + C_{n-2}^{i}\Big\|\frac{d^{n-2-i}\mathcal{B}}{dt^{n-2-i}}(0)\Big\|)\|\xi\| = \kappa_i\|\xi\|.
\end{aligned}$$

Операторы $\mathcal{D}_0^{(j)}$, $\mathcal{D}_1^{(j)}$, $\mathcal{D}_2^{(j)}$, $j = 0, 1,$ — очевидно, ограничены, значит, и операторы $\mathcal{D}_n^{(j)}$, $j = 0, 1,$ $n = 3, 4, \ldots,$ как определяемые рекуррентным образом, ограничены:

$$\|\mathcal{D}_i^{(j)}\xi\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{K}_n^{(i)}\|\|\mathcal{D}_i^{(j)}\|\|\xi\| = \sigma_{jn}\|\xi\|, \quad j = 0, 1.$$

Функция $\mathfrak{f}(t)$ непрерывно дифференцируема в точке $t = 0$, следовательно,

$$\|\mathfrak{g}_n\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathcal{K}_n^{(i)}\|\|\mathfrak{g}_i\| = \sigma_n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{V}^{(j)}(t)\xi\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\mathcal{D}_n^{(j)}\xi\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_k^n}{n!}\sigma_{jn}\|\xi\|, \quad j = 0, 1,\\
&\|\mathfrak{g}(t)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\|\mathfrak{g}_n\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_k^n}{n!}\sigma_n.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ряды в оценках (2.11) сходятся, что влечет требуемое. □

3. Решение задачи (0.1), (0.2)

Перейдем к решению задачи (0.1), (0.2).

Разрешим уравнение (0.1) относительно второй производной.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&A_1 = Q(A)BP(A),\\
&R_1 = \frac{dQ(A)B}{dt} + Q(A)BA^{-}B + Q(A)C, \quad R_0 = \frac{dQ(A)C}{dt} + Q(A)BA^{-}C,\\
&Gf(t) = \frac{dQ(A)f(t)}{dt} + Q(A)BA^{-}f(t),\\
&\mathcal{A} = A^{-}B - A_1^{-1}R_0^{(1)}, \quad \mathcal{B} = A^{-}C - A_1^{-1}R_0^{(0)},\\
&\mathfrak{f}(t) = A^{-}f(t) - A_1^{-1}Gf(t).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что все производные в этих обозначениях существуют.

В силу леммы 1.1 уравнение (0.1) равносильно системе:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = A^- B\frac{du}{dt} + A^- Cu + A^- f + P(A)\frac{d^2u}{dt^2}, \tag{3.2}$$

$$Q(A)B\frac{du}{dt} + Q(A)Cu + Q(A)f = 0, \tag{3.3}$$

где элемент $P(A)\dfrac{d^2u}{dt^2} \in \operatorname{Ker} A$ надлежит найти. Продифференцируем (3.3):

$$\frac{dQ(A)B}{dt}\frac{du}{dt} + Q(A)B\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{dQ(A)C}{dt}u + Q(A)C\frac{du}{dt} + \frac{dQ(A)f}{dt} = 0. \tag{3.4}$$

Подставив в (3.4) равенство выражение (3.2) с учетом идемпотентности проектора, получим уравнение

$$A_1\left(P(A)\frac{d^2u}{dt^2}\right) = -R_1\frac{du}{dt} - R_0u - Gf. \tag{3.5}$$

Рассмотрим следующий случай: *оператор* $A_1(t) : \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Coker} A$ *обратим в* $\operatorname{Ker} A$ *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$; *имеет место соотношение*

$$\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}(t), \quad t \in \mathfrak{T}.$$

В рассматриваемом случае из уравнения (3.5) следует

$$P(A)\frac{d^2u}{dt^2} = -A_1^{-1}R_1\frac{du}{dt} - A_1^{-1}R_0u - A_1^{-1}Gf. \tag{3.6}$$

Подстановка (3.6) в (3.2) приводит к следующему уравнению вида (2.1):

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{A}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathfrak{g}(t). \tag{3.7}$$

Тем самым, получен следующий результат.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия:*

1) *оператор* $A_1(t)$ *обратим при каждом* $t \in \mathfrak{T}$;

2) *имеет место соотношение* $\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}(t)$, $t \in \mathfrak{T}$;

3) *операторы* $Q(A(t))B(t)$, $Q(A(t))C(t)$ *и функция* $Q(A(t))f(t)$ *дифференцируемы при каждом* $t \in \mathfrak{T}$.

Тогда уравнение (0.1) *равносильно системе* (3.7), (3.3).

С применением теоремы 2.1 эта лемма влечет следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условие* 2.1 *и условия:*

1) *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$ *оператор* $A_1(t)$ *обратим в* $\operatorname{Coker} A(t)$;

2) *имеет место соотношение* $\dim \operatorname{Ker} A(t) = \dim \operatorname{Coker} A(t) = \operatorname{const}$, $t \in \mathfrak{T}$;

3) *при каждом* $t \in \mathfrak{T}$ *операторы* $Q(A)B(t)$, $Q(A)C(t)$ *и функция* $Q(A)f(t)$ *дифференцируемы;*

4) *функция* $\mathfrak{g}(t)$ *непрерывна на* $\mathfrak{T}$;

5) *справедливо равенство*

$$Q(A)(0)B(0)u^1 + Q(A)(0)C(0)u^0 + Q(A)(0)f(0) = 0.$$

Тогда решение задачи (0.1), (0.2) *существует, единственно и определяется формулами* (2.3), (2.4), (2.5), (3.1).

References

[1] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, "Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **24**:14 (2001), 1043–1053.

[2] С. С. Орлов, "Непрерывные решения вырожденного интегро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах", *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*, **2**:1 (2009), 328–332. [S. S. Orlov, "The continuous solutions of a singular integro-differential equation of the second order in Banach spaces", *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **2**:1 (2009), 328–332 (In Russian)].

[3] В. И. Усков, "Разрешение алгебро-дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 375–385. [V. I. Uskov, "Solution of a second-order algebro-differential equation in a banach space", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 375–385 (In Russian)].

[4] В. И. Усков, "Задача Коши для вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве", *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*, 2023, № 4, 70–80. [V. I. Uskov, "Cauchy problem for a sedond-order degeneracy differential equation in a Banach space", *Vestnik TVGU. Ser. Prikl. Matem. [Herald of Tver State University. Ser. Appl. Math.]*, 2023, № 4, 70–80 (In Russian)].

[5] П. И. Попиков, А. В. Зленко, А. Ф. Петков, В. П. Попиков, В. И. Усков, Р. Г. Боровиков, "Прогнозирование изменения кинематических и динамических параметров новой конструкции шнекороторного грунтомета на основе авторской методики", *Лесотехнический журнал*, **14**:3(55) (2024), 204–221. [P. I. Popikov, A. V. Zlenko, A. F. Petkov, V. P. Popikov, V. I. Uskov, R. G. Borovikov, "Prediction of changes in kinematic and dynamic parameters of a new design of auger soil thrower based on the author's methodology", *Lesotekhnicheskii zhurnal [Forestry Engineering Journal]*, **14**:3(55) (2024), 204–221 (In Russian)].

[6] С. М. Никольский, "Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах", *Известия АН СССР. Серия математическая*, **7**:3 (1943), 147–166. [S. Nikolsky, "Linear equations in normed linear spaces", *Izv. Math.*, **7**:3 (1943), 147–166 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Матем. заметки*, **103**:3 (2018), 392–403; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic solution of the Cauchy problem for a first-order equation with a small parameter in a banach space. The regular case", *Math. Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[8] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 19.06.2025 г.
Поступила после рецензирования 07.09.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3542-9662

There is no conflict of interests.

Received 19.06.2025
Reviewed 07.09.2025
Accepted for press 21.11.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 152 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424
УДК 517.977

Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости и их представления в терминах ультрафильтров

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Рассматриваются абстрактные задачи о достижимости в топологическом пространстве (ТП) с ограничениями асимптотического характера (ОАХ), реализуемыми посредством непустого семейства множеств в пространстве обычных решений (управлений). В качестве аналога множества достижимости, определяемого образом целевого оператора (ЦО) со значениями в ТП, рассматривается множество притяжения (МП) в классе фильтров или направленностей обычных решений. Исследуются вопросы, связанные с зависимостью МП при изменении семейства множеств в пространстве обычных решений, порождающего ОАХ. Особое внимание уделяется случаю, когда данное семейство является фильтром (всякое МП или может быть порождено ОАХ на основе фильтра, или пусто). В то же время МП при ОАХ, порождаемых ультрафильтром (у/ф), т. е. максимальным фильтром, при неограничительных условиях на ТП и ЦО является синглетоном, что позволяет ввести оператор притяжения (ОП), который в случае регулярного ТП оказывается непрерывным при оснащении множества всех у/ф на множестве обычных решений топологией Стоуна. На этой основе удается дать практически исчерпывающее представление конструкций, связанных с построением МП в регулярном ТП, в классе у/ф при их естественной факторизации на основе ЦО. Целый ряд полученных свойств распространяется на случай ЦО со значениями в хаусдорфовом ТП. Исследуются некоторые вопросы, связанные с ослаблением топологии пространства, в котором реализуется МП.

Ключевые слова: множество притяжения, топология, ультрафильтр

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости и их представления в терминах ультрафильтров // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 152. С. 392–424.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

Attraction sets in abstract attainability problems and their representations in terms of ultrafilters

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. Abstract problems about attainability in topological space (TS) under constraints of asymptotic nature (CAN) realized by nonempty family of sets in the space of usual solutions (controls) are considered. As analog of the attainability set defined by image of the target operator (TO) with values in TS, attraction set (AS) in classes of filters or directednesses of usual solutions is considered. Questions connected with the AS dependence under cange in the family of sets of usual solutions generating CAN are investigated. The special attention is paid to the case when this family is a filter (every AS is either generated by a filter used as CAN or is empty set). At the same time, AS under CAN generated by ultrafilters (u/f) that is by maximal filter under unrestrictive conditions on TS and TO there is a singleton, which allows to enter attraction operator which, in the case of regular TS, is continuous under equipment of the set of all ultrafilters on the set of usual solutions with Stone topology. On this basis, it is possible to give a practically exhaustive representation of constructions connected with AS in a regular TS in the class of u/f with their natural factorization based on TO. A whole range of obtained properties extend to the case of TO with values in a Hausdorff TS. Some questions connected with topology weakening of the space in which AS is realized are investigated.

Keywords: attraction set, topology, ultrafilter

Mathematics Subject Classification: 93C83.

For citation: Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems and their representations in terms of ultrafilters. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:152 (2025), 392–424.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-152-392-424

Введение

В теории управления важную роль играет проблема построения и исследования свойств области достижимости (ОД) (см. [1–3] и др.) при наличии тех или иных ограничений на выбор управляющих функций. При ослаблении ограничений может, однако, возникать скачкообразное расширение ОД; получающиеся при этом множества — аналоги ОД — могут при ужесточении ослабленных ограничений не сходиться к замыканию исходной ОД. Подобные эффекты для экстремальных задач и, в частности, для задач оптимального управления детально рассматривались в [4, гл. III,IV]. Возвращаясь к задаче об исследовании ОД, заметим, что при ослаблении исходной системы ограничений у нас возникает свое множество допустимых элементов (ДЭ) в пространстве обычных (по смыслу, реализуемых) решений. Поскольку обычно мы допускаем ослабление условий «на разную глубину», у нас получается целое семейство упомянутых множеств, «составленных» всякий раз из ДЭ в задаче о достижимости с ослабленными ограничениями. Возникающее таким образом семейство будем рассматривать в качестве ограничений асимптотического характера (ОАХ). Соответственно, у нас возникает и целое семейство ОД, отвечающее данным ОАХ; предел данного семейства ОД при неограниченном ужесточении ослабленных ограничений мы и рассматриваем (здесь) в качестве множества притяжения (МП).

Уже из упомянутых рассуждений видно, что проблема перехода от ОД к МП может рассматриваться как вариант более общей постановки, уже необязательно связанной с задачами управления. Речь идет о построении некоторых предельных множеств в топологическом (вообще говоря) пространстве для семейства образов характерных множеств в пространстве обычных (доступных для реализации) решений при действии заданного оператора, называемого далее целевым. Сами же упомянутые (характерные, для той или иной постановки) множества образуют в совокупности непустое семейство, с которым, собственно говоря, и можно отождествить ограничения асимптотического характера (ОАХ). В случае «обычной» задачи управления, как уже отмечалось, точками упомянутых множеств являются ДЭ в смысле ослабленных ограничений. Наиболее естественным является вариант, когда данное семейство является направленным: любые два множества этого семейства содержат в пересечении некоторое третье множество, также принадлежащее семейству, порождающему ОАХ. Мы ограничимся сейчас этим случаем. Тогда МП определяется в виде пересечения замыканий образов множеств семейства, порождающего соответствующие ОАХ, при действии целевого оператора (ЦО). Вместе с тем, указанное МП допускает представление [5, (8.3.11)], в котором задействованы обобщенные пределы семейств, являющихся образами у/ф пространства обычных решений, мажорирующих семейство, порождающее ОАХ (отметим аналогичное представление в классе направленностей; см. [5, (8.3.10)]). Заметим, кстати, что множество у/ф, мажорирующих семейство, порождающее ОАХ, само является МП в компакте Стоуна при условии, что обычным решениям сопоставляются всякий раз соответствующие тривиальные у/ф (здесь, строго говоря, мы также имеем задачу о достижимости в компакте при ОАХ, не имеющую, конечно, никакого отношения к случаю ОД управляемых систем).

Нетрудно показать, что всякое МП либо пусто, либо может быть порождено фильтром множества обычных решений; последний случай собственно и представляет основной интерес. В частности, мы можем рассматривать случай, когда упомянутый фильтр максимален, т. е. является у/ф (см. [6, гл. I]). Оказывается, что в этом последнем случае МП (отвечающее ОАХ, порожденным у/ф) непременно одноэлементно, т. е. является синглетоном; данный факт имеет место при очень общих предположениях (имеется в виду случай, когда исследуется проблема в T_2-пространстве на значениях ЦО, для которого образ исходного множества обычных решений содержится в компакте; данный случай типичен для задач управления). С учетом этого (в упомянутом случае) каждому у/ф можно сопоставить (см. [7, раздел 4]) элемент притяжения (ЭП) и получить, как следствие, оператор притяжения (ОП), действующий из компакта у/ф в T_2-пространство. Если же последнее топологическое пространство (ТП) регулярно, то данный ОП непрерывен. Важно, что МП в исходном T_2-пространстве, отвечающее действию ЦО, совпадает в случае, когда ОАХ порождаются фильтром, с образом множества всех у/ф, мажорирующих упомянутый фильтр.

Комбинируя вышеупомянутые положения, получаем, что в случае, когда исходное ТП, содержащее значения ЦО, регулярно, а само ЦО обладает свойством предкомпактности образа множества обычных решений, компакт Стоуна в сочетании с ОП реализует компактификатор [5, с. 325] исходной задачи, который по смыслу является [5, предложение 8.6.1] инструментом решения исходной задачи о достижимости на значениях данного ЦО. Целый ряд упомянутых положений распространяется на более общий случай T_2-отделимости исходного ТП, где, однако, свойство регулярности, не оговариваемое заранее, проявляется в некотором подпространстве данного ТП.

1. Общие сведения, обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки), $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество, def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами; принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначаем неупорядоченную пару этих объектов, т. е. единственное множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов (итак, при $z \in \{x;y\}$ непременно $(z = x) \vee (z = y)$). Если u — объект, то $\{u\} \triangleq \{u;u\}$ — синглетон, содержащий $u: u \in \{u\}$. Множество рассматриваем как вариант объекта, а тогда (см. [8, с. 67]) для любых двух объектов α и β в виде $(\alpha, \beta) \triangleq \{\{\alpha\};\{\alpha;\beta\}\}$ имеем упорядоченную пару (УП) с первым элементом α и вторым элементом β; если же h — какая-либо УП, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы УП h, однозначно определяемые равенством $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$. Всякому множеству S сопоставляем непустое семейство $\mathcal{P}(S)$ всех подмножеств (п/м) S, $\mathcal{P}'(S) \triangleq \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$, а $\mathrm{Fin}(S)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(S)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м S. В качестве S может, конечно, использоваться семейство. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B :\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \tag{1.1}$$

семейства $\mathcal{A}$ на множестве B; (1.1) будет часто использоваться при введении подпространства (п/п) ТП, а точнее, при введении топологии, индуцированной из упомянутого ТП. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ (т. е. $\mathcal{M}$ — непустое семейство п/м $\mathbb{M}$), то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M :\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})) \tag{1.2}$$

есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\mathbb{M})$, двойственное к $\mathcal{M}$. В частности, полагая, что $\mathcal{M}$ — топология на $\mathbb{M}$, в виде (1.2) мы получаем семейство всех п/м $\mathbb{M}$, замкнутых в соответствующем ТП. Если A и B множества, то [8, гл. II,§9] через B^A обозначаем множество всех функций из A в B; при $f \in B^A$ используем также традиционную запись

$$f : A \longrightarrow B$$

(при $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем, как обычно, значение f в точке a). Если X и Y — множества, $g \in Y^X$ и $Z \in \mathcal{P}(X)$, то

$$g^1(Z) \triangleq \{g(x) : x \in Z\} \in \mathcal{P}(Y)$$

есть образ Z при действии g; через $g^{-1}(H)$ обозначаем при $H \in \mathcal{P}(Y)$ прообраз H, т. е. $g^{-1}(H) \triangleq \{x \in X \mid g(x) \in H\} \in \mathcal{P}(X)$.

Специальные семейства.

До конца настоящего пункта фиксируем множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I})\} \tag{1.3}$$

имеем семейство всех π-систем [9, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ (с «нулем» и «единицей»), а в виде

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \;\; \forall A \in \mathcal{I} \;\; \forall B \in \mathcal{I}\}$$

аналогичное семейство решеток на множестве $\mathbf{I}$. При этом

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \;\; \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; кроме того,

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] : \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$$

есть семейство всех замкнутых топологий П. С. Александрова (см. [10, с. 98]).

Каждому непустому семейству $\mathcal{T}$ сопоставляем семейство

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{T}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \;\; \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{T}$. Если $\mathbb{H}$ — множество и $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$, то в виде

$$(\mathrm{COV})[\mathbb{H} \mid \mathcal{H}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}) \mid \mathbb{H} = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z\}$$

имеем семейство всех непустых покрытий $\mathbb{H}$ множествами из $\mathcal{H}$. Наконец, произвольным семейству $\mathcal{S}$ и множеству T сопоставляем следующее семейство:

$$[\mathcal{S}](T) \triangleq \{S \in \mathcal{S} \mid T \subset S\} \in \mathcal{P}(\mathcal{S}). \tag{1.4}$$

Элементы топологии, 1.

В пределах настоящего пункта фиксируем множество $\mathbf{I}$; если при этом $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ имеем ТП с «единицей» $\mathbf{I}$. Через $(\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в компактное ТП:

$$\begin{aligned}(\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] &\triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall \xi \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \tau] \ \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\xi) : \mathbf{I} = \bigcup_{G \in \mathcal{K}} G\} \\ &= \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{F} \in (\mathrm{Cen})[\mathbf{C_I}[\tau]]\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$, то $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$ и определено семейство

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\}$$

всех окрестностей x в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, понимаемых в смысле [6, гл. I]. Кроме того, при $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ полагаем, что

$$\mathbf{N}_\tau^0[M] \triangleq \{G \in \tau \mid M \subset G\}$$

и $\mathbf{N}_\tau[M] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in \mathbf{N}_\tau^0[M] : G \subset H\}$, получая окрестности множества M в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; кроме того,

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}(M, \tau) &\triangleq \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap H \neq \varnothing \ \ \forall H \in N_\tau(x)\} \\ &= \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap G \neq \varnothing \ \ \forall G \in N_\tau^0(x)\} = \bigcap_{F \in [\mathbf{C_I}[\tau]](M)} F, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $[\mathbf{C_I}[\tau]](M) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C_I}[\tau])$, т. к. $\mathbf{I} \in [\mathbf{C_I}[\tau]](M)$; в (1.6) определено замыкание множества в ТП. Через $(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_2-пространство (см. [11, гл. I]):

$$\begin{aligned}(\mathrm{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall x \in \mathbf{I} \ \ \forall y \in \mathbf{I} \setminus \{x\} \\ \exists G_1 \in N_\tau^0(x) \ \ \exists G_2 \in N_\tau^0(y) : G_1 \cap G_2 = \varnothing\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Кроме того, $(\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq (\mathbf{c} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$; при $\tau \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$ ТП $(\mathbf{I}, \tau)$ называют компактом. Заметим, что

$$(\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \ \forall x \in \mathbf{I} \ \ \forall y \in \mathbf{I} \setminus \{x\} \ \ \exists G \in N_\tau^0(x) : y \notin G\} \tag{1.8}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_1-пространство. С использованием (1.8) вводятся регулярные [11, гл. I] пространства:

$$\begin{aligned}(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\mathcal{D} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \ \forall F \in \mathbf{C_I}[\tau] \ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus F \ \ \exists G_1 \in N_\tau^0(x) \\ \exists G_2 \in \mathbf{N}_\tau^0[F] : G_1 \cap G_2 = \varnothing\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

есть семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в регулярное пространство; легко видеть, что $(\mathrm{reg} - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \subset (\mathrm{top})_0[\mathbf{I}]$.

Элементы топологии, 2.

Отметим некоторые конструкции, связывающие различные, вообще говоря, ТП. Ясно, что для любого ТП (M,τ) и множества $N \in \mathcal{P}(M)$ $\tau|_N \in (\mathrm{top})[N]$; ТП $(N,\tau|_N)$ называют п/п (M,τ). Отметим простые следствия известных положений [11, гл. I], использующих очевидные свойства п/п: если (X,τ) есть ТП, $X \neq \varnothing$, $H \in \mathcal{P}'(X)$, то

$$(N^0_{\tau|_H}(h) = N^0_\tau(h)|_H \;\; \forall\, h \in H)\&(\mathbf{N}^0_{\tau|_H}[A] = \mathbf{N}^0_\tau[A]|_H \;\; \forall\, A \in \mathcal{P}(H)) \tag{1.10}$$

(подчеркнем, что $X \in N^0_\tau(h)$ при $h \in H$ и $X \in N^0_\tau[A]$ при $A \in \mathcal{P}(H)$). С учетом (1.10) устанавливается, что для всякого непустого множества X и $M \in \mathcal{P}'(X)$

$$\begin{aligned}(\tau|_M \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[M] \;\; \forall\, \tau \in (\mathcal{D}-\mathrm{top})[X])\&(\tilde\tau|_M \in (\mathrm{top})_0[M] \;\; \forall\, \tilde\tau \in (\mathrm{top})_0[X])\\ \&(\hat\tau|_M \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[M] \;\; \forall\, \hat\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]).\end{aligned} \tag{1.11}$$

Свойства (1.11) хорошо известны (см. [11, теорема 2.1.6]). Далее, учитывая (1.5), заметим, что для всякого ТП $(\mathbb{H},\tau)$, $\mathbb{H} \neq \varnothing$,

$$(\tau - \mathrm{comp})[\mathbb{H}] \triangleq \{\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})|\; \tau|_{\mathbf{K}} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{K}]\} \tag{1.12}$$

есть семейство всех п/м $\mathbb{H}$, компактных в $(\mathbb{H},\tau)$,

$$(\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbb{H}] \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \exists\, K \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbb{H}] : H \subset K\}; \tag{1.13}$$

поскольку при $\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{H}]$ имеет место $(\tau - \mathrm{comp})[\mathbb{H}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{H}}[\tau]$ (см. [11, теорема 3.1.8]), в силу (1.13) истинна импликация

$$(\tau \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{H}]) \Rightarrow ((\tau - \mathrm{comp})^0[\mathbb{H}] = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{H}) \mid \mathrm{cl}(H,\tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[\mathbb{H}]\}). \tag{1.14}$$

Если (U,τ_1), $U \neq \varnothing$, и (V,τ_2), $V \neq \varnothing$, — два ТП, то

$$C(U,\tau_1,V,\tau_2) \triangleq \{\, f \in V^U|\; f^{-1}(G) \in \tau_1 \;\; \forall G \in \tau_2\}, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned}C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2) &\triangleq \{f \in C(U,\tau_1,V,\tau_2) \mid \;\; f^1(F) \in \mathbf{C}_V[\tau_2] \;\; \forall F \in \mathbf{C}_U[\tau_1]\}\\ &= \{f \in V^U | f^1(\mathrm{cl}(A,\tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(A),\tau_2) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(U)\};\end{aligned} \tag{1.16}$$

при этом истинна следующая импликация

$$((\tau_1 \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[U])\&(\tau_2 \in (\mathrm{top})_0[V])) \Rightarrow (C(U,\tau_1,V,\tau_2) = C_{\mathrm{cl}}(U,\tau_1,V,\tau_2)). \tag{1.17}$$

В (1.15) определены непрерывные, а в (1.16) — замкнутые функции; (1.17) выделяет важный частный случай непрерывных функций из компактного ТП в хаусдорфово.

Добавление.

В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; при $n \in \mathbb{N}$ в виде $\overline{1,n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$ имеем дискретный интервал $\mathbb{N}$ с левым концом 1 и правым — в виде n. Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами; с учетом этого для каждого множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение H^n для множества всех функций (кортежей) из $\overline{1,n}$ в H. Будем использовать индексную форму записи функций (семейства с индексом; см. [4, с. 11]) и, в частности, кортежей.

2. Фильтры и базы фильтров, направленные семейства

В настоящем разделе фиксируем непустое множество T. Будем рассматривать здесь фильтры семейства $\mathcal{P}(T)$ всех п/м T; условимся называть их стоун-чеховскими, имея в виду замечание в [12, с. 167] о реализации компактификации Стоуна–Чеха в классе максимальных фильтров, т. е. ультрафильтров (у/ф), упомянутого типа. В виде

$$\mathfrak{F}[T] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T)) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \; \forall A \in \mathcal{F} \; \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&([\mathcal{P}(T)](F) \subset \mathcal{F} \; \forall F \in \mathcal{F})\} \tag{2.1}$$

имеем непустое (ясно, что $\{T\} \in \mathfrak{F}[T]$) семейство всех фильтров на T. При этом, кстати,

$$N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[T] \;\; \forall \tau \in (\mathrm{top})[T] \;\; \forall x \in T. \tag{2.2}$$

Итак, в (2.2) определены фильтры окрестностей точек в произвольном ТП с «единицей» T. Пусть

$$\beta[T] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T)) \mid \; \forall B_1 \in \mathcal{B} \; \forall B_2 \in \mathcal{B} \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : \; B_3 \subset B_1 \cap B_2\}, \tag{2.3}$$

$$\beta_0[T] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{B} \in \beta[T] | \varnothing \notin \mathcal{B}\} \\ = \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(T)) | \; \forall B_1 \in \mathcal{B} \; \forall B_2 \in \mathcal{B} \; \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2\}. \tag{2.4}$$

В (2.3) введено семейство всех направленных семейств (НС) п/м T; среди всех таких НС естественно выделить базы фильтров (БФ), что и делается в (2.4). При этом

$$(T - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \stackrel{\triangle}{=} \{F \in \mathcal{P}(T) | \; \exists B \in \mathcal{B} : \; B \subset F\} \in \mathfrak{F}[T] \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_0[T] \tag{2.5}$$

определяет простое правило построения фильтров посредством баз (кстати, при $\tau \in (\mathrm{top})[T]$ и $x \in T$ фильтр $N_\tau(x) \in \mathfrak{F}[T]$ реализуется посредством базы $N^0_\tau(x) \in \beta_0[T]$: $N_\tau(x) = (T - \mathbf{fi})[N^0_\tau(x)]$). Итак БФ — суть НС непустых п/м T. Напомним определение сходимости БФ: как обычно [6, гл. I], имеем при $\tau \in (\mathrm{top})[T]$, $\mathcal{B} \in \beta_0[T]$ и $x \in T$, что

$$(\mathcal{B} \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x) \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (N_\tau(x) \subset (T - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]). \tag{2.6}$$

Отметим, что $\mathfrak{F}[T] \in \mathcal{P}'(\beta_0[T])$ и $(T - \mathbf{fi})[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$ при $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T]$. С учетом этого реализуется понятное следствие (2.6) в части сходимости фильтров. Заметим, что из (2.1) рассуждением по индукции получается свойство

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \in \mathcal{F} \;\; \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T] \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall (F_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{F}^m. \tag{2.7}$$

Далее, введем в рассмотрение непустое семейство всех у/ф на T :

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \stackrel{\triangle}{=} \{ \mathcal{U} \in \mathfrak{F}[T] \mid \forall \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[T] \; (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathcal{F}[T] \mid \forall A \in \mathcal{P}(T) \;\; (A \in \mathcal{U}) \vee (T \setminus A \in \mathcal{U})\} \tag{2.8}$$

(в связи с (2.8) см. [5, предложение 6.4.1, (1.5.1), (1.5.8)]). При $x \in T$ в виде

$$(T - \mathrm{ult})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{M \in \mathcal{P}(T) \mid x \in M\} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \tag{2.9}$$

имеем тривиальный у/ф, отвечающий точке x. В связи с (2.3) заметим, что $\forall \mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T))$

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{I}) \triangleq \{\bigcap_{H \in \mathcal{K}} H : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{I})\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\bigcap_{i=1}^{m} T_i : (T_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{I}^m\} \in \beta[T]; \tag{2.10}$$

как видно из (2.10), любое непустое подсемейство $\mathcal{P}(T)$ легко превращается в направленное.

Введем в рассмотрение $\mathbf{S}[T] \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T])^{\mathcal{P}(T)}$, полагая, что

$$\mathbf{S}[T](A) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] \mid A \in \mathcal{U}\} \;\; \forall A \in \mathcal{P}(T). \tag{2.11}$$

Тогда $(\mathbf{UF})[T] \triangleq \mathbf{S}[T]^1(\mathcal{P}(T)) = \{\mathbf{S}[T](A) : A \in \mathcal{P}(T)\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]))$ есть (открытая) база топологии

$$\tau_{\mathbf{fi}}[T] \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \;\; \exists U \in \mathcal{U} : \mathbf{S}[T](U) \subset G\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]], \tag{2.12}$$

превращающей множество $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]$ в непустой нульмерный [11, с. 529] компакт

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T], \tau_{\mathbf{fi}}[T]). \tag{2.13}$$

В связи с (2.12), (2.13) напомним [5, (9.7.18)]: имеем равенство

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T] = \mathrm{cl}(\{(T - \mathrm{ult})[x] : x \in T\}, \tau_{\mathbf{fi}}[T]). \tag{2.14}$$

Итак, посредством отображения $x \mapsto (T - \mathrm{ult})[x] : T \to \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[T]$ реализуется погружение T в компакт (2.13) в виде всюду плотного множества.

3. Множества притяжения: краткие сведения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E, точки которого будем называть обычными решениями (возможно, обычными управлениями), полагая их доступными для реализации. Кроме того, фиксируем далее непустое множество X и топологию $\tau \in (\mathrm{top})[X]$ (итак, в дальнейшем, если не оговорено противное, обозначение τ понимается только в этом смысле); следовательно, всюду в дальнейшем (X, τ), $X \neq \varnothing$, есть фиксированное ТП, называемое целевым. Отображения (функции) из E в X также будем называть целевыми. Если $h \in X^E$ — произвольное целевое отображение (ЦО) и $\mathcal{E} \in \beta[E]$, то

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{E}] \triangleq \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(h^1(\Sigma), \tau) \in \mathbf{C}_X[\tau] \tag{3.1}$$

рассматриваем как множество притяжения (МП) в ТП (X, τ) на значениях h. В то же время с учетом (2.10) определение МП можно распространить на более общий случай, полагая при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и $h \in X^E$, что

$$(\mathbf{as})[E; X; \tau; h; \mathcal{H}] \triangleq (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \{\cap\}_\sharp(\mathcal{H})]. \tag{3.2}$$

Отметим в связи с (3.2) представления МП в [5, (8.3.10), (8.3.11)], реализуемые с применением направленностей и у/ф; сейчас ограничимся последним вариантом, учитывая [5, предложение 8.2.1]:

$$h^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[X] \;\; \forall h \in X^E \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]; \tag{3.3}$$

свойство (3.3) позволяет применить (2.6) для использования сходимости в ТП (X,τ). Итак, (см. [5, предложение 8.3.1]), с учетом (2.6) и (3.2), при $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ имеем равенство

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = \{x \in X \mid \exists\,\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{E}) : h^1[\mathcal{U}] \xRightarrow{\tau} x\} \tag{3.4}$$

((3.4) есть представление МП в терминах стоун-чеховских у/ф на множестве E). В связи с (3.1), (3.2) заметим также, что (см. [5, предложение 8.4.1])

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] \ \ \forall\, h \in X^E \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{3.5}$$

Свойство (3.5) дополняется простым следствием, использующим (2.5): при $h \in X^E$ и $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{B}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;(E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}]]. \tag{3.6}$$

Напомним сейчас также известное [6, гл. I] положение о сохранении свойства максимальности фильтров при функциональных преобразованиях: итак (см. [5, предложение 8.2.1]) при $\mathcal{B} \in \beta_0[E]$ и $f \in X^E$ для БФ $f^1[\mathcal{B}] \in \beta_0[X]$ имеем, что

$$((E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Longrightarrow ((X-\mathbf{fi})[f^1[\mathcal{B}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]). \tag{3.7}$$

Полезно иметь в виду цепочку вложений

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \subset \mathfrak{F}[E] \subset \beta_0[E] \subset \beta[E] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)), \tag{3.8}$$

позволяющую применять (3.1) в случаях, когда $\mathcal{E}$ является БФ, фильтром или у/ф. В связи с (3.8) заметим также (см. (3.1), (3.2), (3.6)), что с учетом (2.3), (2.4) и (2.10) при $h \in X^E$ и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$((\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = \varnothing) \vee (\exists\,\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] : (\mathbf{as})[E;X;\tau;h;\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\mathcal{F}]). \tag{3.9}$$

С практической точки зрения, согласно (3.9) именно случай, когда ОАХ порождаются фильтром, для нас представляет основной интерес. Отметим, что при $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$ имеем $\{\Sigma\} \in \beta[E]$ и согласно (3.1)

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;h;\{\Sigma\}] = \mathrm{cl}(h^1(\Sigma),\tau) \ \ \forall\, h \in X^E; \tag{3.10}$$

в качестве Σ можно использовать $\varnothing$, получаем при этом в виде (3.10) также $\varnothing$.

4. Предкомпактные варианты задач о достижимости

Заметим, что в (3.1), (3.2) вместо (X,τ) могут использоваться любые непустые ТП. В этой связи мы напомним понятия, связанные с применением компактификатора. Однако, сначала введем в рассмотрение предкомпактные ЦО, используя ТП (X,τ) предыдущего раздела. Итак, пусть (см. (1.13))

$$\mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E;X;\tau] \triangleq \{f \in X^E \mid f^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X]\}; \tag{4.1}$$

функции из (4.1) будем называть предкомпактными ЦО. В связи с (4.1) заметим, что для произвольных непустого множества $\mathbf{K}$, $\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathbf{K}]$, $m \in \mathbf{K}^E$ и $g \in C(\mathbf{K},\mathbf{t},X,\tau)$

$$(\tau \in (\mathrm{top})_0[X]) \Longrightarrow (g \circ m \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E;X;\tau]),$$

где символ $\circ$ используется при обозначении композиции функций; см. [11, с. 18]. Более того, при вышеупомянутых условиях на $(\mathbf{K}, \mathbf{t})$, m и g имеем при условии $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ следующее положение:

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; g \circ m; \mathcal{E}] = g^1((\mathrm{AS})[E; K; \mathbf{t}; m; \mathcal{E}]) \;\; \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{4.2}$$

Свойство (4.2) допускает целый ряд обобщений (см. [13, предложения 3.4.10, 3.4.11], [14]), но мы ограничимся данным положением (см. (4.2)) в связи с понятием компактификатора (см. [5, с. 325–326]). Вернемся к (4.1); отметим весьма очевидные следствия, фиксируя в дальнейшем предкомпактное ЦО

$$\mathbf{h} \in \mathbb{F}^0_{\mathbf{C}}[E; X; \tau]. \tag{4.3}$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$; итак, мы рассматриваем задачу о достижимости в T_2-пространстве (X, τ) на значениях предкомпактного ЦО $\mathbf{h}$ (4.3). Тогда, как легко видеть (см. (4.1)),

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{B}] \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\} \;\; \forall \mathcal{B} \in \beta_0[E]; \tag{4.4}$$

в связи с проверкой (4.4) см. построения [7, раздел 3]. Как следствие, у нас реализуется отображение

$$\mathcal{F} \mapsto (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : \mathfrak{F}[E] \to (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.5}$$

В силу (3.9) имеем, что в практически интересных случаях задач о достижимости с ОАХ именно значения отображения (4.5) представляют для нас основной интерес.

5. Представления множеств притяжения в терминах ультрафильтров

Напомним естественное оснащение множества $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ топологией

$$\tau_{\mathbf{fi}}[E] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]],$$

реализующее нульмерный компакт

$$(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E]); \tag{5.1}$$

см. (2.12), (2.13). Важную роль в построении этого оснащения играет отображение

$$\mathbf{S}[E] : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]), \tag{5.2}$$

определяемое подобно (2.11). Заметим, что множество $\mathbf{S}[E](U) \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E])$ определено при $U \in \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$. Тогда (см. (2.11), (2.12))

$$\tau_{\mathbf{fi}}[E] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \mid \forall \mathcal{U} \in G \;\; \exists U \in \mathcal{U} : \mathbf{S}[E](U) \subset G\}. \tag{5.3}$$

Напомним также важное свойство (2.14), касающееся погружения E в компакт (5.1) в виде всюду плотного п/м:

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] = \mathrm{cl}(\{(E - \mathrm{ult})[x] : x \in E\}, \tau_{\mathbf{fi}}[E]). \tag{5.4}$$

Поскольку $\mathcal{P}(E) \in (\mathrm{LAT})_0[E]$, имеем (см. [5, предложение 9.4.3], [7, (4.4)]), что $\forall \mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]\ \forall \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U}) \Longleftrightarrow ((\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{U}) \vee (\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{U})). \tag{5.5}$$

При этом, как легко видеть (см. [7, (4.5)]) в случае $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\mathrm{pr}_1(z) \cup \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2\} \in \mathfrak{F}[E]. \tag{5.6}$$

В свою очередь, из (5.5), (5.6) вытекает, что (см. (1.4), [7, предложение 3])

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) = [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_1) \cup [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_2). \tag{5.7}$$

Разумеется, (5.6), (5.7) позволяют рассуждением по индукции получить, что при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i = \{\bigcup_{i=1}^{m} F_i : (F_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i\} \in \mathfrak{F}[E] : [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\bigcap_{i=1}^{m} \mathcal{F}_i) = \bigcup_{i=1}^{m} [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i). \tag{5.8}$$

Напомним также некоторые положения [7, раздел 5]). Так, при $\mathcal{F}_1 \in \mathfrak{F}[E]$ и $\mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}[E]$ фильтр (5.6) обладает свойством

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} F = (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_1} F) \cup (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_2} F),$$

которое в силу индукции приводит к [7, следствие 2]). Более того, если T — непустое множество и $(\mathcal{F}_t)_{t \in T} \in \mathfrak{F}[E]^T$, то (см. [7, предложение 10])

$$\bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t = \{\bigcup_{t \in T} F_t : (F_t)_{t \in T} \in \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t\} \in \mathfrak{F}[E] : \bigcap_{F \in \bigcap\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t} F = \bigcup_{t \in T} (\bigcap_{F \in \mathcal{F}_t} \mathcal{F}).$$

Заметим, что (см. (3.7), (3.8)) при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ имеем, в частности, $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[X]$ и, кроме того,

$$(X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$$

(в самом деле, $\mathcal{U} \in \beta_0[E]$ в силу (3.8) и при этом $(E - \mathbf{fi})[\mathcal{U}] = \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$; теперь учитываем (3.7)). Напомним (3.4). В этой связи заметим, что (см. (4.3), [15, (3.8)])

$$(\mathbf{as})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{5.9}$$

В качестве семейства, порождающего ОАХ, может использоваться у/ф; при этом (см. (4.5))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \{x \in X \mid (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]] \overset{\tau}{\Rightarrow} x\} \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall \mathfrak{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Более того (см. [7, предложение 2]), справедливо свойство

$$\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \ \exists!\, \mathbf{x} \in X : (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathfrak{U}] = \{\mathbf{x}\}. \tag{5.10}$$

С учетом (5.10) полагаем, следуя [7, (4.15)], что отображение $\Psi \in X^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]}$ таково, что (см. (5.9))

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = (\mathbf{as})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.11}$$

Итак, МП в случае ОАХ, порождаемых у/ф, суть синглетоны, соответствующие элементам притяжения (ЭП) в виде значений оператора Ψ, именуемого далее оператором притяжения (см. (5.11)). С учетом (3.4) и (5.11) имеем в силу [7, теорема 1]), что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] = \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]. \tag{5.12}$$

С учетом (3.9), (4.4) и (5.9) получаем, что (5.12) характеризует все практически интересные варианты МП (случай пустого МП малоинтересен). Напомним (2.9), получая, что при $u \in E$ определено значение $\Psi((E-\mathrm{ult})[u]) \in X$. При этом (см. [7, (4.21)])

$$\Psi((E-\mathrm{ult})[u]) = \mathbf{h}(u) \ \ \forall\, u \in E. \tag{5.13}$$

Введем в рассмотрение $(E-\mathrm{ult})[\cdot] \triangleq ((E-\mathrm{ult})[e])_{e \in E} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^E$ (оператор погружения E в компакт (5.1)). Тогда из (5.13) имеем равенство

$$\mathbf{h} = \Psi \circ (E-\mathrm{ult})[\cdot], \tag{5.14}$$

здесь $\circ$ используется при обозначении композиции функций (см. [11, с. 18]). Отметим здесь же, что

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \overset{\tau}{\Rightarrow} \Psi(\mathcal{U}) \ \ \forall\, \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{5.15}$$

В связи с (5.15) представляется естественная связь с построениями [5, раздел 2.4], где рассматривались фильтры и у/ф широко понимаемых измеримых пространств: для наших целей важно простое следствие [5, предложение 2.4.2]

$$(\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]) \Longrightarrow (\Psi \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau)); \tag{5.16}$$

в этой связи см. (1.9) и обсуждение в [5, раздел 4]) в связи с [5, предложение 2.4.2] (напомним, кстати, что $(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X] \subset (\mathrm{top})_0[X]$). Возвращаясь к общему случаю $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$, заметим, что (см. (2.7), (5.8)) при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathcal{F}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathfrak{F}[E]^m$ в силу (5.12)

$$\begin{aligned}(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i] &= \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i)) = \Psi^1(\bigcup_{i=1}^m [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i)) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}_i)) = \bigcup_{i=1}^m (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}_i];\end{aligned} \tag{5.17}$$

см. [7, теорема 2]. Из (3.6) и (5.17) вытекает, что при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathcal{B}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \beta_0[E]^m$

$$\bigcup_{i=1}^m (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{B}_i] = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \bigcap_{i=1}^m (E-\mathbf{fi})[\mathcal{B}_i]].$$

До конца настоящего раздела полагаем, что $\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]$ (это означает, что (X,τ) есть регулярное ТП). Учитывая (1.17), (2.12) и (5.16), получаем свойство

$$\Psi \in C_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau),$$

откуда легко следует, что (см. [7, (4.23)])

$$\Psi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau); \tag{5.18}$$

в этой связи см. также (1.16), (5.13) и (5.4). В виде очевидного следствия имеем легкопроверяемое положение.

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $(y_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)^n$, *то*

$$\exists\,(\mathcal{U}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n : \{y_i : i \in \overline{1,n}\} = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i]. \tag{5.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $(y_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)^n$. Тогда в силу (5.18) имеем, что

$$\mathfrak{V}_j \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid y_j = \Psi(\mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.20}$$

Поэтому имеем очевидное свойство:

$$\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{V}_i = \{(\mathfrak{U}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n \mid \mathfrak{U}_j \in \mathfrak{V}_j \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}\} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n).$$

В частности, $\prod\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{V}_i \neq \varnothing$. С учетом этого выберем $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \prod\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{V}_i$. Тогда

$$(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]^n : \mathcal{V}_j \in \mathfrak{V}_j \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.21}$$

В силу (5.20) имеем, что $y_j = \Psi(\mathcal{V}_j)$ при $j \in \overline{1,n}$. С другой стороны, $(\mathcal{V}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathfrak{F}[E]^n$, а потому (см. (2.7), (5.17)) для фильтра

$$\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{V}_i \in \mathfrak{F}[E] \tag{5.22}$$

имеем следующее равенство (см. (5.11), (5.17), (5.22))

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}\mathcal{V}_i] = \bigcup_{i=1}^{n}(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{V}_i] = \bigcup_{i=1}^{n}\{\Psi(\mathcal{V}_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n}\{y_i\} = \{y_i : i \in \overline{1,n}\}.$$

С учетом (5.21) получаем теперь (5.19). □

Следствие 5.1. *Непустые конечные п/м* $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ *являются МП, порождаемыми фильтрами множества* E :

$$\forall\,\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)) \ \ \exists\,\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E] : \mathbb{K} = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}].$$

Доказательство очевидно (см.предложение 5.1)

Следствие 5.2. *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $(e_i)_{i\in\overline{1,n}} \in E^n$, *то*

$$\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i] \in \mathfrak{F}[E] : \{\mathbf{h}(e_i) : i \in \overline{1,n}\} = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $(e_i)_{i\in\overline{1,n}} \in E^n$. Тогда согласно (2.9)

$$(E-\mathrm{ult})[e_j] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \ \ \forall\, j \in \overline{1,n}. \tag{5.24}$$

Поэтому в силу (5.13) имеем при $j \in \overline{1,n}$, что

$$\mathbf{h}(e_j) = \Psi((E-\mathrm{ult})[e_j]) \in X,$$

где $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_j]] = \{\Psi((E-\mathrm{ult})[e_j])\}$; в итоге

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_j]] = \{\mathbf{h}(e_j)\}.$$

Тогда, как следствие, получаем, что

$$\{\mathbf{h}(e_i): i \in \overline{1,n}\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\mathbf{h}(e_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.25}$$

При этом согласно (5.8) и (5.24) реализуется фильтр

$$\bigcap_{i=1}^{n} (E-\mathrm{ult})[e_i] \in \mathfrak{F}[E], \tag{5.26}$$

для которого (см. (5.17), (5.25))

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]] = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};(E-\mathrm{ult})[e_i]].$$

С учетом (5.25) получаем в результате равенство

$$\{\mathbf{h}(e_i): i \in \overline{1,n}\} = (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\bigcap_{i=1}^{n}(E-\mathrm{ult})[e_i]]. \tag{5.27}$$

Из (5.26) и (5.27) вытекает (5.23). □

6. Унификация множеств притяжения в классе ультрафильтров

Возвращаясь к (5.1)–(5.3), напомним, что (см. [5, (8.2.6)] при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$)

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathbf{S}[E](\Sigma) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]]. \tag{6.1}$$

В качестве семейства $\mathcal{E}$ может, в частности, использоваться фильтр. С учетом этого фиксируем в настоящем разделе фильтр $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, получая (см. (6.1), [5, (1.5.1), предложение 1.4.1]), что

$$[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathbf{S}[E](F) \in (\tau_{\mathfrak{fi}}[E] - \mathrm{comp})[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]] \setminus \{\varnothing\}. \tag{6.2}$$

Из (6.1), (6.2) вытекает, что реализуется топология

$$\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E] \triangleq \tau_{\mathfrak{fi}}[E]|_{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})], \tag{6.3}$$

превращающая множество (6.2) в непустой компакт

$$([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]); \tag{6.4}$$

компакт (6.4) является замкнутым п/п компакта (5.1). Напомним, что при $\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ определен ЭП $\Psi(\mathcal{U}) \in X$.

В дальнейших построениях настоящего раздела полагаем, что $\tau \in (\mathrm{reg}-\mathrm{top})[X]$, получая при этом (см. (5.16), (6.2), (6.3)), что

$$\Psi^0_{\mathcal{F}} \triangleq (\Psi \mid [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) = (\Psi(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}\in[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], X, \tau). \tag{6.5}$$

Согласно (5.12) $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] = \Psi^1([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))$, откуда легко следует, что

$$\Psi^0_{\mathcal{F}} = (\Psi \mid [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})) \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}) \tag{6.6}$$

есть (непрерывная) сюръекция компакта (6.4) на регулярное ТП

$$((\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}) \tag{6.7}$$

(см. [11, теорема 2.1.6]). Более того, имеем, что и само ТП (6.7) — непустой компакт:

$$\tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]]. \tag{6.8}$$

Легко видеть, что на $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ в терминах (6.5) определено отношение эквивалентности $\sim$ соотношением: $\forall \mathcal{U}_1 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ $\forall \mathcal{U}_2 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$

$$(\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_1) = \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}_2)). \tag{6.9}$$

Тогда при $\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ в виде

$$[\mathcal{U}]_\sim \triangleq \{\mathfrak{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) \mid \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathfrak{U})\} \in \mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))$$

имеем класс эквивалентности, соответствующий у/ф $\mathcal{U}$ в условиях, определяемых в (6.9); легко видеть, что

$$[\mathcal{U}]_\sim = (\Psi^0_{\mathcal{F}})^{-1}(\{\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\}). \tag{6.10}$$

Как следствие (см.(6.10)) получаем, что в виде

$$\begin{aligned}(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] &\triangleq \{[\mathcal{U}]_\sim : \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\} \\ &= \{(\Psi^0_{\mathcal{F}})^{-1}(\{\Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\}) : \mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})))\end{aligned} \tag{6.11}$$

реализуется (непустое) фактор-пространство, соответствующее оснащению компакта (6.4) эквивалентностью (6.9). Заметим, что из (6.5) и (6.9) следует, что

$$\forall \mathcal{U}_1 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) \ \forall \mathcal{U}_2 \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) \ \ (\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2) \Longleftrightarrow (\Psi(\mathcal{U}_1) = \Psi(\mathcal{U}_2)). \tag{6.12}$$

Определено также следующее отображение

$$\pi^{(e)}_*[\mathcal{F}] \triangleq ([\mathcal{U}]_\sim)_{\mathcal{U}\in[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}. \tag{6.13}$$

В терминах (6.13) обычным образом (см. [11, с. 147]) вводим на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$ фактор-топологию:

$$\hat{\mathcal{T}}_\sim[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]] \triangleq \{G \in \mathcal{P}((\mathbf{FS})[\mathcal{F}]) \mid \pi^{(e)}_*[\mathcal{F}]^{-1}(G) \in \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]\} \in (\mathrm{top})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]], \tag{6.14}$$

получая [11, с. 147] слабейшую топологию на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$, относительно которой отображение (6.13) непрерывно. В частности,

$$\pi^{(e)}_*[\mathcal{F}] \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E], (\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_\sim[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]]). \tag{6.15}$$

Итак, мы получили (см. (6.11), (6.14)) фактор-пространство

$$((\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]]). \tag{6.16}$$

Заметим, кстати, что в силу (6.11) и сюръективности $\Psi^0_{\mathcal{F}}$ справедливо равенство

$$(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] = \{(\Psi^0_{\mathcal{F}})^{-1}(\{y\}) : y \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]\}. \tag{6.17}$$

В дальнейших построениях мы широко используем конструкции [11, 2.4]. Пусть

$$\mathfrak{D}[\mathcal{F}] \overset{\triangle}{=} \{\mathfrak{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}))) \mid ([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}) = \bigcup_{\Sigma \in \mathfrak{E}} \Sigma)$$
$$\&(\forall\, \Sigma_1 \in \mathfrak{E}\ \ \forall\, \Sigma_2 \in \mathfrak{E}\ \ (\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing) \Longrightarrow (\Sigma_1 = \Sigma_2))\};$$

введено семейство всех невырожденных разбиений $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$. Ясно, что

$$(\mathbf{FS})[\mathcal{F}] \in \mathfrak{D}[\mathcal{F}]. \tag{6.18}$$

С учетом (6.11) и (6.18) легко проверяется, что

$$\forall\, H \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]\ \ \exists!\, y \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : y = \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U})\ \ \forall \mathcal{U} \in H.$$

С учетом данного свойства полагаем, что

$$\sigma^0_{\mathcal{F}} \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]^{(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]} \tag{6.19}$$

определяется следующим естественным условием: $\forall\, H \in (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$

$$\sigma^0_{\mathcal{F}}(H) \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] : \Psi^0_{\mathcal{F}}(\mathcal{U}) = \sigma^0_{\mathcal{F}}(H)\ \ \forall \mathcal{U} \in H. \tag{6.20}$$

Заметим, что (см. (6.13), (6.28)) определена композиция

$$\sigma^0_{\mathcal{F}}\ \circ\ \pi^{(e)}_*[\mathcal{F}] = (\sigma^0_{\mathcal{F}}([\mathcal{U}]_{\sim}))_{\mathcal{U} \in [\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})} \in (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}]^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}. \tag{6.21}$$

Из (6.11), (6.13), (6.20) и (6.21) вытекает следующее важное равенство:

$$\Psi^0_{\mathcal{F}} = \sigma^0_{\mathcal{F}}\ \circ\ \pi^{(e)}_*[\mathcal{F}]. \tag{6.22}$$

Отметим, далее что из (6.19) следует, конечно, включение

$$\sigma^0_{\mathcal{F}} \in Y^{(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]}.$$

С другой стороны (см. (6.22)), как нетрудно проверить, имеет место свойство непрерывности

$$\sigma^0_{\mathcal{F}} \in C((\mathbf{FS})[\mathcal{F}], \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]], (\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}), \tag{6.23}$$

причем $\sigma^0_{\mathcal{F}}$ является сюръекцией. Дополняя (6.15), отметим, что $\pi^{(e)}_*[\mathcal{F}]$ — сюръекция $[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})$ на $(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]$. Кроме того, из (6.3), (6.17) вытекает, что

$$\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau^{(*)}_{\mathcal{F}}[E]] \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]. \tag{6.24}$$

Заметим, что в силу (6.11), (6.13) и (6.15) $\pi_*^{(e)}[\mathcal{F}]$ есть непрерывная сюръекция компакта (6.4) на ТП (6.16), а потому (6.24) вытекает из [11, теорема 3.1.10].

Условимся о следующих обозначениях. Если V и W — два непустых множества, то $W_{(*)}^V \triangleq \{h \in W^V \mid h^1(V) = W\}$ и

$$(\mathrm{bi})[V;W] \triangleq \{g \in W_{(*)}^V \mid \forall\, v_1 \in V \;\; \forall\, v_2 \in V \;\; (g(v_1) = g(v_2)) \Longrightarrow (v_1 = v_2)\}$$

(множество всех биекций V на W); если к тому же $\tau_1 \in (\mathrm{top})[V]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[W]$, то

$$(\mathrm{Hom})[V;\tau_1;W;\tau_2] \triangleq C_{\mathrm{cl}}(V,\tau_1,W,\tau_2) \cap (\mathrm{bi})[V;W] \tag{6.25}$$

есть множество всех гомеоморфизмов ТП (V,τ_1) на (W,τ_2). В случае $(\mathrm{Hom})[V;\tau_1;W;\tau_2] \neq \varnothing$ упомянутые ТП (V,τ_1) и (W,τ_2) называем гомеоморфами.

Теорема 6.1. *Отображение* $\sigma_{\mathcal{F}}^0$ (6.23) *является гомеоморфизмом ТП*

$$((\mathbf{FS})[\mathcal{F}],\; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]])$$

на

$$((\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}), \tag{6.26}$$

т. е. $\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{Hom})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним (6.6), тогда

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathcal{F}}^0 \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E], (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}], \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]})\\ \cap (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]_{(*)}^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Более того, из (6.20) и (6.27) легко следует, что

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{bi})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]] \tag{6.28}$$

(здесь существенно используется (6.9)). В силу (6.11), (6.13) и (6.15) имеем, как уже фактически отмечалось, что

$$\pi_*^{(e)}[\mathcal{F}] \in C([\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F}), \tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E], (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]) \cap (\mathbf{FS})[\mathcal{F}]_{(*)}^{[\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]](\mathcal{F})},$$

а потому (см. (6.3)) справедливо (6.24). Далее, отметим, что (6.26) есть T_2-пространство (см. (6.8)). Поэтому (см. (1.17), (6.23), (6.24)) имеем, что

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in C_{\mathrm{cl}}((\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}). \tag{6.29}$$

Из (6.25), (6.28) и (6.29) вытекает требуемое свойство гомеоморфности отображения (6.28):

$$\sigma_{\mathcal{F}}^0 \in (\mathrm{Hom})[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]; \hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]]; (\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]; \tau|_{(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{F}]}].$$

□

Итак, в виде (6.16) и (6.26) имеем гомеоморфы. В связи с весьма специальной теоремой 6.1 отметим общие построения [11, раздел 2.4] (см. в частности, [11, предложение 2.4.3]), касающиеся фактор-пространств. Мы отметим важное следствие: в терминах пространства стоун-чеховских у/ф получена по сути дела своеобразная унификация непустых МП на значениях предкомпактного ЦО (имеется в виду возможность топологического отождествления упомянутых МП с фактор-пространствами вида (6.16)); здесь полезно учитывать (6.5), (6.12).

З а м е ч а н и е 6.1. Возвращаясь к случаю фиксированного $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E]$, напомним, что в силу (6.8) ТП (6.26) есть непустой компакт и, в частности, T_2-пространство. Поэтому в силу теоремы 6.1 ТП (6.16) также является T_2-пространством, т. е.

$$\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]] \in (\mathrm{top})_0[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]$$

и, как следствие (см. (6.24)), $\hat{\mathcal{T}}_{\sim}[\tau_{\mathcal{F}}^{(*)}[E]] \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[(\mathbf{FS})[\mathcal{F}]]$, т. е. ТП (6.16) является непустым компактом.

7. Добавление, 1

Отметим, что (5.16) допускает естественное обобщение: для непрерывности Ψ достаточна T_2-отделимость ТП (X,τ). Мы проверим данное положение, получая при этом некоторые полезные представления.

Итак, всюду в дальнейшем полагаем, что $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ и, стало быть, (X,τ) есть T_2-пространство. В этом случае

$$\mathbf{t} \stackrel{\triangle}{=} \tau|_{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)} \in (\mathrm{top})_0[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]. \tag{7.1}$$

С другой стороны, в силу предкомпактности $\mathbf{h}^1(E)$ имеем согласно (1.14), (4.1) и (4.3), что $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau) \in (\tau-\mathrm{comp})[X]$, а потому $\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]$ и, в итоге (см. (7.1)),

$$\mathbf{t} \in (\mathbf{c}-\mathrm{top})_0[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]; \tag{7.2}$$

поэтому в виде $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t})$ имеем непустой компакт.

Напомним некоторые полезные положения [5, раздел 8.3]. Так, для произвольных ТП (Y,θ), $Y \neq \varnothing$, и фильтра $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}[Y]$ множества

$$((\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] \stackrel{\triangle}{=} \{y \in Y \mid \tilde{\mathcal{F}} \stackrel{\theta}{\Longrightarrow} y\} \in \mathcal{P}(Y))\&((\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}] \stackrel{\triangle}{=} \bigcap_{F\in\tilde{\mathcal{F}}} \mathrm{cl}(F,\theta) \in \mathcal{P}(Y)) \tag{7.3}$$

таковы, что $(\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] \subset (\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}]$ (см. [5, (8.3.37)]), причем

$$(\tilde{\mathcal{F}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) \Longrightarrow ((\theta-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{F}}] = (\theta-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{F}}]);$$

см. [5, предложение 8.3.2]. Возвращаясь к T_2-пространству (X,τ), получаем, в частности, что

$$(\tau-\mathrm{LIM})[\tilde{\mathcal{U}}] = (\tau-\mathrm{CL})[\tilde{\mathcal{U}}] \;\; \forall \tilde{\mathcal{U}} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]. \tag{7.4}$$

Отметим, что при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ для БФ $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \in \beta_0[X]$ имеем в силу (3.7) свойство

$$(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X],$$

а потому с учетом (7.4)

$$(\tau - \mathrm{LIM})[(X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]] = (\tau - \mathrm{CL})[(X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]] = \bigcap_{F \in (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]} \mathrm{cl}(F, \tau)$$

$$= \bigcap_{F \in \mathbf{h}^1[\mathcal{U}]} \mathrm{cl}(F, \tau) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) = (\mathrm{AS})[E; X; \tau; h; \mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\};$$

мы учитываем здесь (2.5), (3.1) и (5.11). С учетом (7.3) получаем, что при $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$

$$\{x \in X \mid (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\} = \{\Psi(\mathcal{U})\};$$

в силу (2.6) имеем, однако, очевидное равенство

$$\{x \in X \mid (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\} = \{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\}.$$

В итоге получаем следующее положение:

$$\{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\} = \{\Psi(\mathcal{U})\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \tag{7.5}$$

(в этой связи см. (5.15)). Заметим, что в нашем общем случае T_2-пространства (X, τ) непременно

$$\{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\} \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.6}$$

З а м е ч а н и е 7.1. В интересах полноты изложения проверим (7.6), фиксируя $\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и $x_* \in X$ со свойством

$$\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x_*. \tag{7.7}$$

В силу (2.6) это означает, что фильтр $\mathcal{V} \triangleq (X - \mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathcal{U}]]$ реализует вложение

$$N_\tau(x_*) \subset \mathcal{V}, \tag{7.8}$$

где $\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{P}(X) \mid \exists\, B \in \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] : B \subset F\}$ и при этом $\mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \subset \mathcal{V}$. С учетом (7.8) имеем теперь по свойствам фильтра (см. (2.1))

$$\mathbf{h}^1(U) \cap H \neq \varnothing \;\; \forall\, U \in \mathcal{U} \;\; \forall\, H \in N_\tau(x_*). \tag{7.9}$$

Поскольку $\mathcal{U} \neq \varnothing$ и $\mathbf{h}^1(U) \subset \mathbf{h}^1(E)$ при $U \in \mathcal{U}$, (7.9) означает, что

$$\mathbf{h}^1(E) \cap H \neq \varnothing \;\; \forall\, H \in N_\tau(x_*),$$

а потому $x_* \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)$ в силу (1.6). Поскольку x_* со свойством (7.7) выбиралось произвольно, установлено (7.6).

Комбинируя (7.5) и (7.6), получаем, что (и при $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$)

$$\Psi(\mathcal{U}) \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E].$$

Иными словами, получаем теперь, что

$$\Psi \in \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E], \tau)^{\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]} : \{x \in X \mid \mathbf{h}^1[\mathcal{U}] \stackrel{\tau}{\Longrightarrow} x\} = \{\Psi(\mathcal{U})\} \;\; \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{7.10}$$

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Оператор притяжения непрерывен в смысле ТП* (5.1) *и* $(\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t})$:

$$\Psi\in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E],\tau_{\mathbf{fi}}[E],\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau),\mathbf{t}). \tag{7.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно $\mathfrak{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$, получая при этом

$$\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]=\{\mathbf{h}^1(U):U\in\mathfrak{U}\}\in\beta_0[X]$$

в силу (3.2), причем $\mathfrak{V}\overset{\triangle}{=}(X-\mathbf{fi})[\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]]\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[X]$ согласно (3.7). Отметим, что $\Psi(\mathfrak{U})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ в силу (7.10) и при этом

$$\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}\Psi(\mathfrak{U}). \tag{7.12}$$

Более того, из (7.5) имеем очевидное следствие: $\forall\,x\in X$

$$(\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]\overset{\tau}{\Longrightarrow}x)\Longrightarrow(x=\Psi(\mathfrak{U})). \tag{7.13}$$

Итак, (7.12), (7.13) непосредственно извлекаются из (7.5). Выберем произвольно $\mathbf{H}\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))$. При этом из (7.2) вытекает, что

$$\mathbf{t}\in(\mathrm{reg}-\mathrm{top})[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)]; \tag{7.14}$$

см. [11, теорема 3.1.6]. Из (7.14) получаем теперь, что для некоторой окрестности $\mathbf{F}\in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))\cap\mathbf{C}_{\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E],\tau)}[\mathbf{t}]$

$$\mathbf{F}\subset\mathbf{H}; \tag{7.15}$$

см. [16, гл. III, теорема 1.9]. Поскольку $\mathbf{F}$ есть окрестность $\Psi(\mathfrak{U})$ в п/п (X,τ), найдется окрестность

$$\tilde{\mathbf{F}}\in N_\tau(\Psi(\mathfrak{U})) \tag{7.16}$$

со свойством $\mathbf{F}=\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)\cap\tilde{\mathbf{F}}$. С учетом (7.12) и (7.16) имеем, что для некоторого множества $\mathbf{B}\in\mathbf{h}^1[\mathfrak{U}]$ реализуется (см. (2.6)) вложение $\mathbf{B}\subset\tilde{\mathbf{F}}$. Как следствие имеем для некоторого $\Phi\in\mathfrak{U}$ равенство $\mathbf{B}=\mathbf{h}^1(\Phi)$, а потому

$$\mathbf{h}^1(\Phi)\subset\tilde{\mathbf{F}},$$

где $\mathbf{S}[E](\Phi)\in(\mathbf{UF})[E]$; тогда (см. (2.12)) имеем, в частности, что

$$\mathbf{S}[E](\Phi)=\{\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]\mid\Phi\in\mathcal{U}\}\in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathfrak{U}). \tag{7.17}$$

Выберем произвольно $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathbf{S}[E](\Phi)$. Тогда $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ и при этом $\Phi\in\tilde{\mathcal{U}}$, а потому $\mathbf{B}=\mathbf{h}^1(\Phi)\in\mathbf{h}^1[\tilde{\mathcal{U}}]$. Заметим, что $\mathbf{B}\subset\mathbf{h}^1(E)\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$. При этом согласно (3.1) и (5.11) $\Psi(\mathcal{U})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(U),\tau)$ $\forall\,\mathcal{U}\in\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ $\forall\,U\in\mathcal{U}$. В частности, $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Phi),\tau)$, т. е. $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)$, где

$$\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)=\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t}) \tag{7.18}$$

(в самом деле, $\mathrm{cl}(\mathbf{B},\mathbf{t})=\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)\cap\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$ по определению $\mathbf{t}$; но, как уже отмечалось $\mathbf{B}\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$, а тогда $\mathrm{cl}(\mathbf{B},\tau)\subset\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E),\tau)$). С учетом (7.18) получаем, что $\Psi(\tilde{\mathcal{U}})\in$

$\mathrm{cl}(\mathbf{B}, \mathbf{t})$. Однако, по выбору $\mathbf{B}$ имеем теперь, что $\mathbf{B} \subset \tilde{\mathbf{F}} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)$. В силу замкнутости $\mathbf{F}$ в п/п с «единицей» $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)$ имеем тогда вложение $\mathrm{cl}(\mathbf{B}, \mathbf{t}) \subset \mathbf{F}$ и, как следствие, $\Psi(\tilde{\mathcal{U}}) \in \mathbf{F}$. Поскольку выбор $\tilde{\mathcal{U}}$ был произвольным, установлено, что (см. (7.15))

$$\Psi^1(\mathbf{S}[E](\Phi)) \subset \mathbf{H}.$$

Учитывая (7.17) и то, что выбор $\mathbf{H}$ также был произвольным, получаем, что $\forall\, H_1 \in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathfrak{U}))$ $\exists\, H_2 \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathfrak{U})$:

$$\Psi^1(H_2) \subset H_1.$$

Поскольку и выбор $\mathfrak{U}$ был произвольным, установлено, что $\forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]$ $\forall\, H' \in N_{\mathbf{t}}(\Psi(\mathcal{U}))$ $\exists\, H'' \in N_{\tau_{\mathbf{fi}}[E]}(\mathcal{U})$:

$$\Psi^1(H'') \subset H'. \tag{7.19}$$

Из (7.19) вытекает (см. [11, гл. I, определение 3.1, предложение 3.1]) требуемое свойство (7.11). □

Следствие 7.1. *В общем случае* $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ *оператор притяжения непрерывен в смысле ТП* (5.1) *и* (X, τ) :

$$\Psi \in C(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau). \tag{7.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из предложения 7.1 вытекает, что (см. (1.15))

$$\Psi^{-1}(G) \in \tau_{\mathbf{fi}}[E] \;\; \forall\, G \in \mathbf{t}. \tag{7.21}$$

Выберем произвольно $\mathbf{G} \in \tau$. Тогда в силу (7.1) $\mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \in \mathbf{t}$, а потому (см. (7.21))

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)) = \{\mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E] \mid \Psi(\mathcal{U}) \in \mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E], \tau)\} \in \tau_{\mathbf{fi}}[E]. \tag{7.22}$$

Учтем (7.10). Тогда при $\mathcal{U} \in \Psi^{-1}(\mathbf{G})$ имеем, что $\Psi(\mathcal{U}) \in \mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)$ и, как следствие (см. (7.22)), $\mathcal{U} \in \Psi^{-1}(\mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau))$. Итак,

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G}) \subset \Psi^{-1}(\mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)).$$

Противоположное вложение очевидно, а тогда

$$\Psi^{-1}(\mathbf{G}) = \Psi^{-1}(\mathbf{G} \cap \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau)) \in \tau_{\mathbf{fi}}[E]$$

в силу (7.22). Поскольку выбор $\mathbf{G}$ был произвольным, установлено (см. (1.15)) требуемое свойство (7.20). □

Отметим, что в рассматриваемом здесь случае $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ сохраняет силу (5.18).

З а м е ч а н и е 7.2. В самом деле, в силу (1.17), следствия 7.1 и компактности ТП (5.1) в нашем (более общем в сравнении с разделом 5) случае

$$\Psi \in C_{\mathrm{cl}}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E], \tau_{\mathbf{fi}}[E], X, \tau), \tag{7.23}$$

а потому (см. (1.16), (7.23)) имеем, что

$$\Psi^1(\mathrm{cl}(A, \tau_{\mathbf{fi}}[E])) = \mathrm{cl}(\Psi^1(A), \tau) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]).$$

Используя (5.4) и (5.14) имеем теперь, в частности, что

$$\Psi^1(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]) = \Psi^1(\mathrm{cl}((E - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E), \tau_{\mathbf{fi}}[E])) = \mathrm{cl}(\Psi^1((E - \mathrm{ult})[\cdot]^1(E), \tau) \\ = \mathrm{cl}((\Psi \circ (E - \mathrm{ult})[\cdot])^1(E), \tau) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1[E], \tau). \tag{7.24}$$

С учетом (7.24) легко проверяется справедливость предложения 5.1 и следствий 5.1 и 5.2 при $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$; для этого существенна лишь непрерывность Ψ в смысле (7.20), приводящая к (7.24).

Отметим в заключении раздела важную роль свойства регулярности ТП, либо соответствующего его п/п (см. (5.16), (7.14)), в вопросе, связанном с непрерывностью оператора притяжения.

8. Добавление, 2

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с поведением МП при ослаблении топологии на множестве X. Однако, предварительно напомним известный факт [11, следствие 3.1.14]: если M — непустое множество, $\tau_1 \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[M]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})_0[M]$, то

$$(\tau_2 \subset \tau_1) \Longrightarrow (\tau_1 = \tau_2). \tag{8.1}$$

Вернемся к задаче о достижимости при ОАХ. Наряду с топологией $\tau \in (\mathrm{top})_0[X]$ фиксируем $\vartheta \in (\mathrm{top})_0[X]$, для которой

$$\vartheta \subset \tau. \tag{8.2}$$

С учетом (8.1), (8.2) получаем тогда, что

$$\tau|_K = \vartheta|_K \ \ \forall K \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}. \tag{8.3}$$

Далее мы будем сравнивать МП в (E, τ) и в (E, ϑ), учитывая (8.3). При этом для МП на значениях $\mathbf{h}$ в (E, ϑ) используем определение (3.1), заменяя в нем τ на ϑ и получая равенства

$$(\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \in \mathbf{C}_X[\vartheta] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E]. \tag{8.4}$$

П р е д л о ж е н и е 8.1. *Если* $\mathcal{E} \in \beta[E]$, *то*

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{E}]. \tag{8.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (4.1), (4.3) имеем включение $\mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X]$ (в силу (1.14)) и

$$\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(E), \tau) \in (\tau - \mathrm{comp})[X] \setminus \{\varnothing\}, \tag{8.6}$$

В частности, $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau] \setminus \{\varnothing\}$. Если $\Sigma \in \mathcal{E}$, то $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \subset \mathbb{K}$, т. к. $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathbf{h}^1(E) \subset \mathbb{K}$, а потому (см. (8.3), (8.6))

$$\tau|_{\mathbb{K}} = \vartheta|_{\mathbb{K}}; \tag{8.7}$$

как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$, где

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \cap \mathbb{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau). \tag{8.8}$$

Вместе с тем, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \cap \mathbb{K}$, где $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \in \mathbf{C}_X[\vartheta]$. Кроме того, из (8.7), (8.8) следует, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \cap \mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\tau], \tag{8.9}$$

причем $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$. В итоге

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) \in [\mathbf{C}_X[\tau]](\mathbf{h}^1(\Sigma)), \tag{8.10}$$

и согласно (8.8), (8.9) $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau)$. Действительно из (8.8) с учетом (8.10)

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) \subset \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$$

и, как следствие, $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}})$, где учитывается (8.7). Согласно (8.3) и (8.6)

$$\vartheta|_{\mathbb{K}} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})[X],$$

а потому (см. (1.12)) $\mathbb{K} \in (\vartheta - \mathrm{comp})[X]$. Учитывая то, что $\vartheta \in (\mathrm{top})_0[X]$, получаем (см. [11, теорема 3.1.8]), что $\mathbb{K} \in \mathbf{C}_X[\vartheta]$, причем $\mathbf{h}^1(\Sigma) \subset \mathbb{K}$ и, как следствие, $\mathbb{K} \in [\mathbf{C}_X[\vartheta]](\mathbf{h}^1(\Sigma))$. С учетом (1.6) имеем, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) \subset \mathbb{K}$$

и согласно (8.9)

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}). \tag{8.11}$$

С учетом (8.7), (8.8) и (8.11) имеем в итоге, что

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \tau|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta|_{\mathbb{K}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\Sigma), \vartheta).$$

Поскольку выбор $\Sigma \in \mathcal{E}$ был произвольным, имеем из (3.1) и (8.4) требуемое равенство (8.5). □

Мы можем использовать (8.5) в случаях, когда $\mathcal{E}$ является фильтром и, в частности, у/ф. Итак,

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = (\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{U}] \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{8.12}$$

Учтем (5.11). Тогда из (8.12) получаем, что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \vartheta; \mathbf{h}; \mathcal{U}] = \{\Psi(\mathcal{U})\} \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[E]. \tag{8.13}$$

Свойство (8.13) показывает по сути дела то, что Ψ является оператором притяжения и по отношению к ТП (X, ϑ). Отметим, возвращаясь к предложению 8.1, что при $\theta \in (\mathrm{top})[X]$ со свойством $\theta \subset \tau$ имеет место оценочное свойство

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \subset (\mathrm{AS})[E; X; \theta; \mathbf{h}; \mathcal{E}] \ \ \forall \mathcal{E} \in \beta[E].$$

Сравнивая данное общее свойство с упомянутым предложением 8.1, имеем, что реально получить МП, отличное от $(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{E}]$, посредством ослабления топологии множества X можно только при нарушении свойства T_2-отделимости получающегося ТП.

9. Добавление, 3

В настоящем разделе рассмотрим один вариант применения предложения 8.1, имея в виду задачу управления нелинейной системой. Будем при этом предполагать, что данная система удовлетворяет условиям, подобным [17], которые не включали традиционное условие (локальной) липшицевости функции в правой части управляемого дифференциального уравнения (в [17] использовались более общие условия обобщенной единственности и равномерной ограниченности программных движений). В этой связи напомним о фундаментальной теореме об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина в теории дифференциальных игр (см. [18,19]); данная теорема позволила установить существование седловой точки в классе позиционных стратегий для типичных вариантов функционалов платы и, по сути, определила современное состояние теории дифференциальных игр. В [18,19] исследовались конфликтно-управляемые системы, удовлетворяющие упомянутому условию липшицевости; Н. Н. Красовский поставил вопрос о возможности отказа от данного условия с сохранением альтернативы в игре сближения-уклонения. Ответ на данный вопрос был дан А. В. Кряжимским в [17, 20]. При этом была отмечена важная роль обобщенных управлений (ОУ). Все это мотивирует специальное исследование задач управления с нелипшицевой, вообще говоря, правой частью дифференциального уравнения; см. в этой связи [21].

Фиксируем $n\in\mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \tag{9.1}$$

где P — непустое ограниченное и замкнутое множество в $\mathbb{R}^p$, а $p \in \mathbb{N}$ — размерность управляющего вектора u. Полагаем, что система (9.1) функционирует на промежутке $T \triangleq [t_0, \vartheta_0]$, где $t_0 \in \mathbb{R}$, $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ и $t_0 < \vartheta_0$. В отношении функции

$$f : T \times \mathbb{R}^n \times P \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{9.2}$$

постулируем сейчас только свойство непрерывности по совокупности переменных. Далее будет введено (непустое) множество $\mathbb{U}$ управляющих функций, определенных на T и принимающих значения в P, т. е. $\mathbb{U} \in \mathcal{P}'(P^T)$. Будем исследовать возможности управляющей стороны в части формирования пучка траекторий на T при тех или иных ОАХ, что можно рассматривать как задачу о достижимости в функциональном пространстве. При этом будут рассматриваться два варианта оснащения этого пространства сравнимыми топологиями.

В дальнейшем используем следующие обозначения: $\tau_{\mathbb{R}} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}]$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$ и для всякого ТП (H, ζ), $H \neq \varnothing$,

$$C(H, \zeta) \triangleq C(H, \zeta, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}}).$$

Итак, ориентируясь на [17,20,21], введем в рассмотрение ОУ, для чего, в свою очередь, потребуется ввести специальные измеримые пространства.

Если E — множество, то через $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$ обозначаем семейство всех σ-алгебр п/м E и при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ полагаем (см. (1.4)), что

$$(\sigma - \mathrm{alg})[E \mid \mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{S} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E] \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{S}\} = [(\sigma - \mathrm{alg})[E]](\mathcal{E}),$$

получая непустое подсемейство $(\sigma - \mathrm{alg})[E]$, для которого

$$\sigma_E^0(\mathcal{E}) \triangleq \bigcap_{\mathcal{S} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E|\mathcal{E}]} \mathcal{S} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E \mid \mathcal{E}]$$

(введена σ-алгебра п/м E, порожденная семейством $\mathcal{E}$). Полагая, как уже отмечалось, что $\tau_{\mathbb{R}} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}]$ есть обычная $|\cdot|$-топология вещественной прямой $\mathbb{R}$, введем в рассмотрение $\mathbf{t} \triangleq \tau_{\mathbb{R}}|_T \in (\mathrm{top})_0[T]$ и σ-алгебру

$$\mathcal{T} \triangleq \sigma_T^0(\mathbf{t}) \in (\sigma - \mathrm{alg})[T]$$

борелевских п/м T. Кроме того, при $k \in \mathbb{N}$ через $\tau_{\mathbb{R}}^{(k)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^k]$ обозначаем (метризуемую) топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^k$. Тогда, в частности, $\tau_{\mathbb{R}}^{(p)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^p]$, $\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[P]$ и

$$\mathbf{t}\{\times\}\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbf{t} \times \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T \times P)) \tag{9.3}$$

есть семейство всех открытых прямоугольников в $T \times P$, являющееся базой топологии

$$\begin{aligned}\mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P \triangleq \{G \in \mathcal{P}(T \times P) \mid \forall\, m \in G\ \ \exists\, B \in \mathbf{t}\{\times\}\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P : (m \in B)& \\ \&(B \subset G)\} \in (\mathbf{c} - \mathrm{top})_0[T \times P].&\end{aligned} \tag{9.4}$$

С учетом (9.4) вводим σ-алгебру борелевских п/м $T \times P$:

$$\mathcal{K} \triangleq \sigma_{T\times P}^0(\mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \in (\sigma - \mathrm{alg})[T \times P].$$

Наряду с (9.3), введем в рассмотрение полуалгебру [22, гл. I] измеримых прямоугольников:

$$\mathcal{T}\{\times\}\mathfrak{B} \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathcal{T} \times \mathfrak{B}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T \times P)),$$

где $\mathfrak{B} \triangleq \sigma_P^0(\tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. С учетом положений [23, с. 308] и компактности множеств T и P

$$\mathcal{K} = \sigma_{T\times P}^0(\mathcal{T}\{\times\}\mathfrak{B}),$$

откуда, в частности, следует свойство

$$\Gamma \times P \in \mathcal{K}\ \ \forall\, \Gamma \in \mathcal{T}. \tag{9.5}$$

Если E — множество и $\mathcal{E} \in (\sigma - \mathrm{alg})[E]$, то при $A \in \mathcal{P}(E)$

$$\Delta_\infty[A; \mathcal{E}] \triangleq \{(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \mid (A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)\&(A_k \cap A_l = \varnothing\ \ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \forall\, l \in \mathbb{N} \setminus \{k\})\}$$

есть множество всех счетных разбиений A множествами из $\mathcal{E}$; в этих терминах полагаем, что

$$(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{E}] \triangleq \{\mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \mid (\sum_{i=1}^{n} \mu(L_i))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mu(L)\ \ \forall\, L \in \mathcal{E}\ \ \forall\, (L_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Delta_\infty[L; \mathcal{E}]\},$$

получая множество всех счетно-аддитивных вещественнозначных (в/з) мер на σ-алгебре $\mathcal{E}$;

$$(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}] \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{E}] \mid 0 \leqslant \mu(\Sigma) \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\}$$

(все меры из $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{E}]$ регулярны; см. [23, гл. I]);

В дальнейшем $\lambda \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{T}]$ есть мера Лебега–Бореля на $\mathcal{T}$ (т. е., по сути, «длина») и с учетом (9.5)

$$\mathcal{R} \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}] \mid \mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma) \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}\} \tag{9.6}$$

есть множество всех обобщенных управлений (ОУ) на промежутке T. В терминах

$$C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) = C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P, \mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$$

определяется нужный вариант банахова пространства (БП) с нормой равномерной сходимости. Если $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, то

$$g \mapsto \int_{T \times P} g \, d\,\mu : C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9.7}$$

есть линейный ограниченный функционал на упомянутом БП (интегрирование в (9.7) может определяться, в частности, по простейшей схеме [24, гл. 3]). Мы используем с учетом положений [23, гл. 1] теорему Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов (см. [25, гл. IV]). Нам потребуется в этой связи $*$-слабая топология на пространстве $(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, изометрически изоморфном (см. (9.7)) пространству, топологически сопряженному к $C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. В этой связи при $\mu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]$, $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P))$ и $\varepsilon \in]\,0\,\infty\,[$ полагаем, что

$$\mathcal{N}^*(\mu, \mathbb{K}, \varepsilon) \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}] \mid \int_{T \times P} g \, d\,\mu - \int_{T \times P} g \, d\,\nu \,|< \varepsilon \ \ \forall g \in \mathbb{K}\}.$$

Данные множества образуют в своей совокупности базу $*$-слабой топологии

$$\tau^*[\mathcal{K}] \triangleq \{G \in \mathcal{P}((\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]) \mid \forall \mu \in G \ \ \exists \mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P))$$
$$\exists \varepsilon \in]\,0\,\infty\,[: \mathcal{N}^*(\mu, \mathbb{K}, \varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]].$$

При этом $\mathcal{R}$ (9.6) сильно ограничено и $*$-слабо замкнуто (см. [21]), а потому

$$\mathcal{R} \in (\tau^*[\mathcal{K}] - \mathrm{comp})[(\sigma - \mathrm{add})[\mathcal{K}]] \setminus \{\varnothing\}$$

и, как следствие, в виде

$$(\mathcal{R}, \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}) \tag{9.8}$$

имеем непустой компакт. Через $C_n(T)$ обозначаем множество всех непрерывных отображений из T в $\mathbb{R}^n$ с естественными топологиями:

$$C_n(T) \triangleq C(T, \mathbf{t}, \mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}),$$

где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)} \in (\mathrm{top})_0[\mathbb{R}^n]$ — топология покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^n$.

Возвращаясь к (9.2), заметим, что при $i \in \overline{1,n}$ в виде

$$(t,x,u) \mapsto f(t,x,u)(i) : T \times \mathbb{R}^n \times P \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9.9}$$

имеем i-ю компоненту f, обозначаемую ниже через f_i; ясно, что f_i (9.9) — в/з функция, непрерывная по совокупности переменных. Если же $\mathbf{x} \in C_n(T)$ и $i \in \overline{1,n}$, то функция

$$(t,u) \mapsto f_i(t,\mathbf{x}(t),u) : T \times P \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрерывна, т. е. содержится в $\mathbf{C}(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$; при $\mu \in \mathcal{R}$ и $t \in T$ определен интеграл

$$\int_{[t_0,t]\times P} f_i(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \in \mathbb{R}$$

(используем простейшую схему интегрирования [24, гл. 3]). Далее, как обычно, при $\mu \in \mathcal{R}$, $\mathbf{x} \in C_n(T)$ и $t \in T$ получаем, что

$$\int_{[t_0,t]\times P} f(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \triangleq \Big(\int_{[t_0,t]\times P} f_i(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u))\Big)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n,$$

реализуя таким образом интегрирование вектор-функции, связанной с (9.2), покомпонентно (см. (9.9)). С учетом этого, фиксируя $x_0 \in \mathbb{R}^n$, вводим при $\mu \in \mathcal{R}$ интегральную воронку

$$\Phi[\mu] \triangleq \{\mathbf{x} \in C_n(T) \mid \mathbf{x}(t) = x_0 + \int_{[t_0,t]\times P} f(\xi,\mathbf{x}(\xi),u)\mu(d(\xi,u)) \;\; \forall\, t \in T\}. \tag{9.10}$$

Полагаем в дальнейшем выполненным следующее

Условие обобщенной единственности:

Если $\mu \in \mathcal{R}$, то множество $\Phi[\mu]$ (9.10) одноэлементно.

Тогда (при данном условии) полагаем при $\mu \in \mathcal{R}$, что

$$\varphi(\cdot,\mu) \triangleq (\varphi(t,\mu))_{t\in T} \in C_n(T) \tag{9.11}$$

реализует интегральную воронку $\Phi[\mu]$ в виде синглетона:

$$\Phi[\mu] = \{\varphi(\cdot,\mu)\}. \tag{9.12}$$

Вектор-функцию (9.11), (9.12) (а это скользящий режим) рассматриваем как траекторию, порожденную ОУ μ.

Далее, через $\|\cdot\|_n \triangleq (\|x\|_n)_{x\in\mathbb{R}^n}$ обозначаем евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Полагаем далее выполненным следующее

Условие равномерной ограниченности.

Для некоторого $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+$

$$\|\varphi(t,\mu)\|_n \leqslant \mathbf{b} \;\; \forall\, \mu \in \mathcal{R} \;\; \forall\, t \in T.$$

З а м е ч а н и е 9.1. Отметим простой пример непрерывной системы (9.1), не удовлетворяющей, вообще говоря, условию Липшица по фазовой переменной, но удовлетворяющей условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности.

Итак, пусть (в данном примере) $n = 2$, $g \in C(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ и $h \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$. Тогда, как легко видеть, система

$$\dot{x}_1 = g(x_2), \quad \dot{x}_2 = h(t, u), \quad u \in P,$$

где P — непустой компакт в $(\mathbb{R}^p, \tau_{\mathbb{R}}^{(p)})$, удовлетворяет обоим вышеупомянутым условиям, но не удовлетворяет, вообще говоря, условию локальной липшицевости по фазовой переменной; последнее обстоятельство имеет место, например, в случае, когда g есть функция

$$\xi \mapsto \sqrt{|\xi|} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$.

Возвращаясь к общей постановке, условимся, что в качестве обычных управлений будут использоваться кусочно-постоянные (к.-п.), непрерывные справа (н.спр.) на $[t_0, \vartheta_0[$ и непрерывные слева (н.сл.) в точке ϑ_0 функции из множества P^T. Итак, пусть $\mathbb{U}$ есть далее множество всех так определенных обычных управлений на T, т. е. множество всех к.-п., н.спр. на $[t_0, \vartheta_0[$ и н.сл. в точке ϑ_0 функций из P^T. Ясно, что при $u(\cdot) = (u(t))_{t \in T} \in \mathbb{U}$ в виде

$$\mathbf{g} \mapsto \int_{t_0}^{\vartheta_0} \mathbf{g}(t, u(t))\, dt : C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P) \longrightarrow \mathbb{R}$$

реализуется линейный ограниченный функционал на БП $C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P)$ в оснащении нормой равномерной сходимости. С учетом теоремы Рисса имеем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что $\exists!\, \mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}]$:

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} \mathbf{g}(t, u(t))\, dt = \int_{T \times P} \mathbf{g}\, d\mu \ \ \forall\, \mathbf{g} \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P).$$

С учетом этого полагаем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что мера $\mathbf{m}[u(\cdot)] \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}]$ такова, что

$$\int_{t_0}^{\vartheta_0} g(t, u(t))\, dt = \int_{T \times P} g\, d\mathbf{m}[u(\cdot)] \ \ \forall\, g \in C(T \times P, \mathbf{t} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(p)}|_P). \tag{9.13}$$

Более того (см. [21]), из (9.13) легко следует, что $\mathbf{m}[u(\cdot)] \in \mathcal{R} \ \ \forall\, u(\cdot) \in \mathbb{U}$. Таким образом,

$$\mathfrak{M} \triangleq (\mathbf{m}[u(\cdot)])_{u(\cdot) \in \mathbb{U}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{U}}, \tag{9.14}$$

причем $\mathrm{cl}(\mathfrak{M}^1(\mathbb{U}), \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}) = \mathrm{cl}(\mathfrak{M}^1(U), \tau^*[\mathcal{K}]) = \mathcal{R}$. Итак, посредством $\mathfrak{M}$ реализуется погружение $\mathbb{U}$ в компакт (9.8) в виде всюду плотного п/м, что вполне аналогично общим положениям [4, гл. IV]. С учетом (9.14) для непрерывной системы (9.1) логично определить обычные траектории как частный случай обобщенных: полагаем при $u(\cdot) \in \mathbb{U}$, что

$$\mathbf{x}(\cdot, u(\cdot)) = (\mathbf{x}(t, u(\cdot)))_{t \in T} \triangleq \varphi(\cdot, \mathbf{m}[u(\cdot)]) = \varphi(\cdot, \mathfrak{M}(u(\cdot))), \tag{9.15}$$

получая, конечно, в силу (9.13), что

$$\mathbf{x}(t, u(\cdot)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, \mathbf{x}(\xi, u(\cdot)), u(\xi)) d\xi \ \ \forall\, t \in T$$

(римановский интеграл определяется покомпонентно).

Мы напомним, что $\mathbb{R}_+ = \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$ и $C_+(T, \mathbf{t}) \triangleq \mathbf{C}(T, \mathbf{t}) \cap (\mathbb{R}_+)^T$; ясно, что

$$(\|h(t)\|_n)_{t \in T} \in C_+(T, \mathbf{t}) \ \ \forall\, h \in C_n(T).$$

С учетом этого получаем при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, что $|||g|||_{C_n(T)} \triangleq \max\limits_{t \in T} \|g(t)\|_n \in \mathbb{R}_+$; тем самым для линейного пространства $C_n(T)$ определена норма равномерной сходимости

$$|||\cdot|||_{C_n(T)} \triangleq (|||h|||_{C_n(T)})_{h \in C_n(T)}$$

и, как следствие, топология $\tau \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)]$, порожденная данной нормой. Всюду в дальнейшем τ понимается только в этом смысле. При $\mathbf{g} \in C_n(T)$ и $\varepsilon \in]\,0, \infty\,[$ полагаем, что $N_{\sup}(g, \varepsilon) \triangleq \{h \in C_n(T) \mid |||g - h|||_{C_n(T)} < \varepsilon\}$. Тогда

$$\tau = \{G \in \mathcal{P}(C_n(T)) \mid \forall\, g \in G \ \ \exists\, \varepsilon \in]\,0, \infty\,[: N_{\sup}(g, \varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)]. \tag{9.16}$$

Мы полагаем, кроме того, что всюду в дальнейшем

$$X \triangleq C_n(T), \tag{9.17}$$

получая вариант T_2-пространства (X, τ). Напомним, что (см. [21])

$$\tilde{\varphi} \triangleq (\varphi(\cdot, \mu))_{\mu \in \mathcal{R}} \in C(\mathcal{R}, \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}, X, \tau), \tag{9.18}$$

а потому (см. (1.17)) имеем, как следствие, свойство замкнутости $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} \in C_{\mathrm{cl}}(\mathcal{R}, \tau^*[\mathcal{K}]|_{\mathcal{R}}, X, \tau).$$

При этом, конечно, $\tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}) \in \mathbf{C}_X[\tau]$. Более того, из (9.18) и компактности ТП (9.8) вытекает, что (см. [11, теорема 3.1.10])

$$\tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}) \in (\tau - \mathrm{comp})[X]. \tag{9.19}$$

Полагаем в дальнейшем, что $E \triangleq \mathbb{U}$ и

$$\mathbf{h} \triangleq (\mathbf{x}(\cdot, u(\cdot)))_{u(\cdot) \in \mathbb{U}}. \tag{9.20}$$

Тогда в силу (9.14) и (9.15) имеем равенство $\mathbf{h} = \tilde{\varphi} \circ \mathfrak{M}$, а потому

$$\mathbf{h}^1(\mathbb{U}) = \mathbf{h}^1(E) = \tilde{\varphi}^1(\mathfrak{M}^1(E)) = \tilde{\varphi}^1(\mathfrak{M}^1(\mathbb{U})) \subset \tilde{\varphi}^1(\mathcal{R}).$$

С учетом (1.13) и (9.19) получаем теперь, что

$$\mathbf{h}^1(\mathbb{U}) = \mathbf{h}^1(E) \in (\tau - \mathrm{comp})^0[X],$$

что доставляет (см. (4.1)) следующее положение: в рассматриваемом случае выполняется (4.3), т. е. $\mathbf{h}$ (9.20) есть предкомпактное ЦО. Как следствие получаем (4.4). Кроме того, в силу (4.5) имеем в рассматриваемом случае, что

$$(\mathrm{AS})[E; X; \tau; \mathbf{h}; \mathcal{F}] \in (\tau - \mathrm{comp})[E] \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall\, \mathcal{F} \in \mathfrak{F}[E].$$

Разумеется, при нашей конкретизации E, (X,τ) и $\mathbf{h}$ определено МП $(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] \in \mathcal{P}(X)$ и в более общем случае $\mathcal{E} \in \beta[E]$, для которого справедливо (3.9).

Рассмотрим теперь другое топологическое оснащение множества X (9.17). Итак, при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, $K \in \mathrm{Fin}(T)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$ полагаем, что

$$N(g,K,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \{h \in C_n(T) \mid \|g(t)-h(t)\|_n < \varepsilon \ \ \forall\, t \in K\},$$

получая непустое п/м X (9.17). При этом, как легко видеть,

$$\theta \overset{\triangle}{=} \{G \in \mathcal{P}(C_n(T)) \mid \forall\, g \in G \ \ \exists\, K \in \mathrm{Fin}(T) \ \ \exists\, \varepsilon \in]0,\infty[: N(g,K,\varepsilon) \subset G\} \in (\mathrm{top})_0[C_n(T)], \tag{9.21}$$

а потому $(X,\theta) = (C_n(T),\theta)$ есть T_2-пространство, а точнее, пространство $C_n(T)$ с топологией поточечной сходимости. Ясно, что при $\mathbf{g} \in C_n(T)$, $K \in \mathrm{Fin}(T)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$

$$N_{\sup}(g,\varepsilon) \subset N(g,K,\varepsilon).$$

Тогда (см. (9.16), (9.21)) $\theta \subset \tau$. Возвращаясь к (8.2) и предложению 8.1, получаем следующее положение.

Теорема 9.1. *Пространства $(X,\tau) = (C_n(T),\tau)$ и $(X,\theta) = (C_n(T),\theta)$ эквивалентны в смысле совпадения МП, порождаемых НС:*

$$(\mathrm{AS})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathrm{AS})[E;X;\theta;\mathbf{h};\mathcal{E}] \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \beta[E].$$

С учетом (2.10) и (3.2) получаем, как следствие, что при условиях теоремы 9.1

$$(\mathbf{as})[E;X;\tau;\mathbf{h};\mathcal{E}] = (\mathbf{as})[E;X;\theta;\mathbf{h};\mathcal{E}] \ \ \forall\, \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \tag{9.22}$$

В связи с (9.22) и теоремой 9.1 отметим общие положения [11, 2.6], касающиеся соотношений между топологиями поточечной и равномерной сходимости.

References

[1] Н. Н. Красовский, *Игровые задачи о встрече движений*, Наука, М., 1970. [N. N. Krasovsky, *Game Problems About Meeting of Movements*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[2] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968. [N. N. Krasovsky, *Motion Control Theory*, Nauka Publ., M., 1986 (In Russian)].

[3] А. И. Панасюк, В. И. Панасюк, *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем*, Наука и техника, Минск, 1986. [A. I. Panasyuk, V. I. Panasyuk, *Asymptotic Turnpike Optimization of Control Systems*, Science and Technology Publ., Minsk, 1986 (In Russian)].

[4] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[5] А. Г. Ченцов, *Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств*, ЛЕНАНД, М., 2024, 416 с. [A. G. Chentsov, *Ultrafilters and Maximal Linked Set Systems*, LENAND Publ., Moscow, 2024 (In Russian), 416 pp.]

[6] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 279 с. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 279 pp.]

[7] А. Г. Ченцов, “Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости”, Тр. ИММ УрО РАН, **31**, 2025, 294–315. [A. G. Chentsov, “Attraction sets in abstract reachability problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **31**, 2025, 294–315 (In Russian)].

[8] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].

[9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[10] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Едиториал, М., 2004, 368 с. [P. S. Aleksandrov, *Introduction to Set Theory and General Topology*, Editorial Publ., Moscow, 2004 (In Russian), 368 pp.]

[11] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].

[12] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969. [R. Edwards, *Functional Analysis. Theory and Applications*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[13] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Mathematics and Its Applications, **542**, Springer Dordrecht, Boston; London, 2002, 408 pp.

[14] А. Г. Ченцов, “Замкнутые отображения и построение моделей расширения”, Тр. ИММ УрО РАН, **29**, 2023, 274–295; англ. пер.:A. G. Chentsov, “Closed mappings and construction of extension models”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **323**:suppl. 1 (2023), 56–77.

[15] А. Г. Ченцов, “Множества притяжения в абстрактной задаче о достижимости в топологическом пространстве”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **65** (2025), 85–108. [A. G. Chentsov, “Attraction sets in the abstract problem of reachability in topological space”, *Izv. IMI UdGU*, **65** (2025), 85–108 (In Russian)].

[16] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, Higher School Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

[17] А. В. Кряжимский, “К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения”, *Докл. АН СССР*, **239**:4 (1978), 779–782. [A. V. Kryazhimskiy, “On the theory of positional differential games of convergence-evasion”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**:4 (1978), 779–782 (In Russian)].

[18] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, “Альтернатива для игровой задачи сближения”, *Прикладная математика и механика*, **34**:6 (1970), 1005–1022; англ. пер.:N. N. Krasovskii, A. I. Subbotin, “An alternative for the game problem of convergence”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **34**:6 (1970), 948–965.

[19] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974. [N. N. Krasovsky, A. I. Subbotin, *Positional Differential Games*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russian)].

[20] А. В. Кряжимский, *Дифференциальные игры для нелипшицевых систем*, дисс. ... докт. физ.-матем. наук, АН СССР УНЦ Институт математики и механики, Свердловск, 1980.

[21] А. Г. Ченцов, Д. А. Серков, “Непрерывная зависимость множеств в пространстве мер и задача на программный минимакс”, Тр. ИММ УрО РАН, **30**, 2024, 277–299; англ. пер.:A. G. Chentsov, D. A. Serkov, “Continuous dependence of sets in a space of measures and a program minimax problem”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **325**:suppl. 1 (2024), S76–S98.

[22] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[23] П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер*, Наука, М., 1977. [P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Science Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[24] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры. I*, УГТУ-УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory. I*, USTU-UPI, Ekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]

[25] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория*, Физматлит, М., 1962. [N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. General Theory*, Fizmatlit Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 20.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 19.11.2025 г.
Принята к публикации 21.11.2025 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6568-0703

There is no conflict of interests.

Received 20.10.2025
Reviewed 19.11.2025
Accepted for press 21.11.2025