



Из опыта преподавания. XIV. О разнообразии тетраэдров

Ю. Л. Войтеховский

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург
Российское минералогическое общество, Санкт-Петербург
vojtehovskij@herzen.spb.ru

В статье предложен вывод 25 комбинаторно-геометрических видов тетраэдров, относящихся к 8 точечным группам симметрии. Среди них 3 простые формы: кубический ($-43m$), тетрагональный ($-42m$) и ромбический (222) тетраэдры — и 5 комбинаций: тригональная пирамида и моноэдр ($3m$), 2 планальных диэдра ($mm2$, 2 вида), 2 аксиальных диэдра (2, 3 вида), планальный диэдр и 2 моноэдра (m , 5 видов), 4 моноэдра (1, 11 видов). Показано, что невозможны тетраэдры с симметрией 23 , -4 и 3 — подгруппами точечной группы симметрии кубического тетраэдра. Пример рекомендован к рассмотрению в курсе кристаллографии по теме «Простые формы и их комбинации».

Ключевые слова: тетраэдр, комбинаторно-геометрический вид, простая форма, комбинация простых форм, точечная группа симметрии

From teaching experience. XIV. On the variety of tetrahedrons

Yu. L. Voytekhovsky

A. I. Herzen Russian State Pedagogical University, Saint Petersburg
Russian Mineralogical Society, Saint Petersburg

The paper proposes the derivation of 25 combinatorial-geometric kinds of tetrahedrons belonging to 8 point symmetry groups. Among them are 3 simple forms: cubic ($-43m$), tetragonal ($-42m$) and rhombic (222) tetrahedrons; and 5 combinations: trigonal pyramid and monohedron ($3m$), 2 planar dihedrons ($mm2$, 2 kinds), 2 axial dihedrons (2, 3 kinds), planar dihedron and 2 monohedrons (m , 5 kinds), 4 monohedrons (1, 11 kinds). It is shown that tetrahedrons with symmetry 23 , -4 and 3 — subgroups of the point symmetry group of the cubic tetrahedron — are impossible. The example is recommended for consideration in the course of crystallography on «simple forms and their combinations».

Keywords: tetrahedron, simple form, combinatorial geometric kind, combination of simple forms, symmetry point group

Введение

Подоплека этой статьи такова. Как-то после лекции о простых формах и их комбинациях к нам подошел студент-геолог и заявил: вы-де сказали, что есть только три тетраэдра (кубический, тетрагональный и ромбический), а я вот нарисовал четвертый, и, кажется, возможны другие. В конспекте лекций был изображен тетраэдр с разными гранями (длины ребер были помечены разными штрихами). Пришлось предложить студенту обдумать определение простой формы еще раз и пообещать вернуться к вопросу о разнообразии тетраэдров в начале следующей лекции. Тема действительно обойдена в учебниках кристаллографии (Попов, Шафрановский, 1964; Чупрунов и др., 2004). Справедливости ради — при изложении теории простых форм и комбинаций она с необходимостью не возникает. Но отдадим должное любопытному студенту за неожиданный вопрос.

Как выпуклый многогранник (комбинаторно) тетраэдр уникален. Из его имени строго выводимо, что все 4 грани — треугольники, сходящиеся по 3 в каждой из 4 вершин. Но метрическое разнообразие тетраэдров бесконечно. Форму каждого можно зафиксировать

(с точностью до энантиоморфизма) величинами трех ребер, исходящих из одной вершины, и углов между ними. Длины ребер положительны, непрерывны, неограничены и независимы. Углы положительны, непрерывны, ограничены ($< 180^\circ$) и зависимы в сумме ($< 360^\circ$). Итак, форма тетраэдра задана координатной точкой в 6-мерном континууме, равномоном 1-мерному (Кантор, 1985). А все же натуральных чисел (счетной бесконечности) не хватит, чтобы их пронумеровать.

Перечисление

Перечисление тетраэдров по точечным группам симметрии (т. г. с.) интересно уже тем, что позволяет построить их систему в промежутке между «одним» и «бесконечно многим». Здесь видна философская подоплека кристаллографии, на которую тоже следует обращать внимание студентов. Но сосредоточимся на вопросе. Алгоритм перечисления состоит в следующем. Всякая т. г. с. подразумевает автоморфизмы, отображающие однородные элементы тетраэдра друг в друга, при этом грани могут быть 3 типов: равносто-

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XIV. О разнообразии тетраэдров // Вестник геонаук. 2024. 4(352). С. 34–37.
DOI: 10.19110/geov.2024.4.4

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XIV. On the variety of tetrahedrons. Vestnik of Geosciences, 2024, 4(352), pp. 34–37, doi: 10.19110/geov.2024.4.4



ронные, равнобедренные и разносторонние. Их набор кодируется тремя числами. Так, кубический тетраэдр получает код [400], тетрагональный — [040], ромбический — [004]. Всего можно составить 15 таких (комбинаторных) кодов: [400], [310], [301], [220], [211], [202], [130], [121], [112], [103], [040], [031], [022], [013], [004]. Четыре из них (зачеркнуты) противоречивы: 3 равно-сторонние грани требуют такой же четвертой — полу-чаем тетраэдр [400]; 2 равно-сторонние требуют две равнобедренные — получаем тетраэдр [220].

Перебор остальных вариантов удобно вести в по-рядке «убывания»: с равно-сторонними гранями, потом без них, но с равнобедренными, наконец, только с раз-носторонними. Восстановим ли тетраэдр по коду? Не всегда: [400] — заведомо кубический, но [040] — не обя-зательно тетрагональный. В одном типе следует раз-личать (совместимо или зеркально) равные и разные грани. Так, в форме [0.2 + 2.0] есть 2 пары равнобедрен-ных граней, в [0.2 + 1 + 1.0] — пара и 2 уникальные. Всего таких (комбинаторно-геометрических) символов мож-но составить 51. На рис. 1 даны только геометрически

реализуемые варианты. Ребра равной (разной) длины отмечены одинаковыми (разными) буквами.

Характеристика

Тетраэдры охарактеризованы комбинаторно-ге-ометрическими кодами и т. г. с. в таблице 1. Их вза-имно-однозначное соответствие имеет место лишь для самых симметричных форм: кубического, тетра-гонального, ромбического тетраэдров и комбинации тригональной пирамиды с моноэдром. Для них коды могут служить именами. В других случаях код харак-теризует тетраэдр точнее, чем т. г. с. Лишь для кода [0.2 + 2.0] возможны два тетраэдра с т. г. с. $mm2$ (№ 16) и 2 (№ 11) (выделены в табл.). Итого тетраэдров с т. г. с. $mm2$ — 2, т. г. с. 2 — 3, т. г. с. m — 5, т. г. с. 1 — 11. При этом 8 т. г. с. относятся к 6 из 7 (без гексагональной) сингониям с ростом числа форм к низкосимметрич-ным: кубической, тетрагональной и тригональной — по 1, ромбической — 3, моноклинной — 8, триклин-ной — 11 (табл. 1).

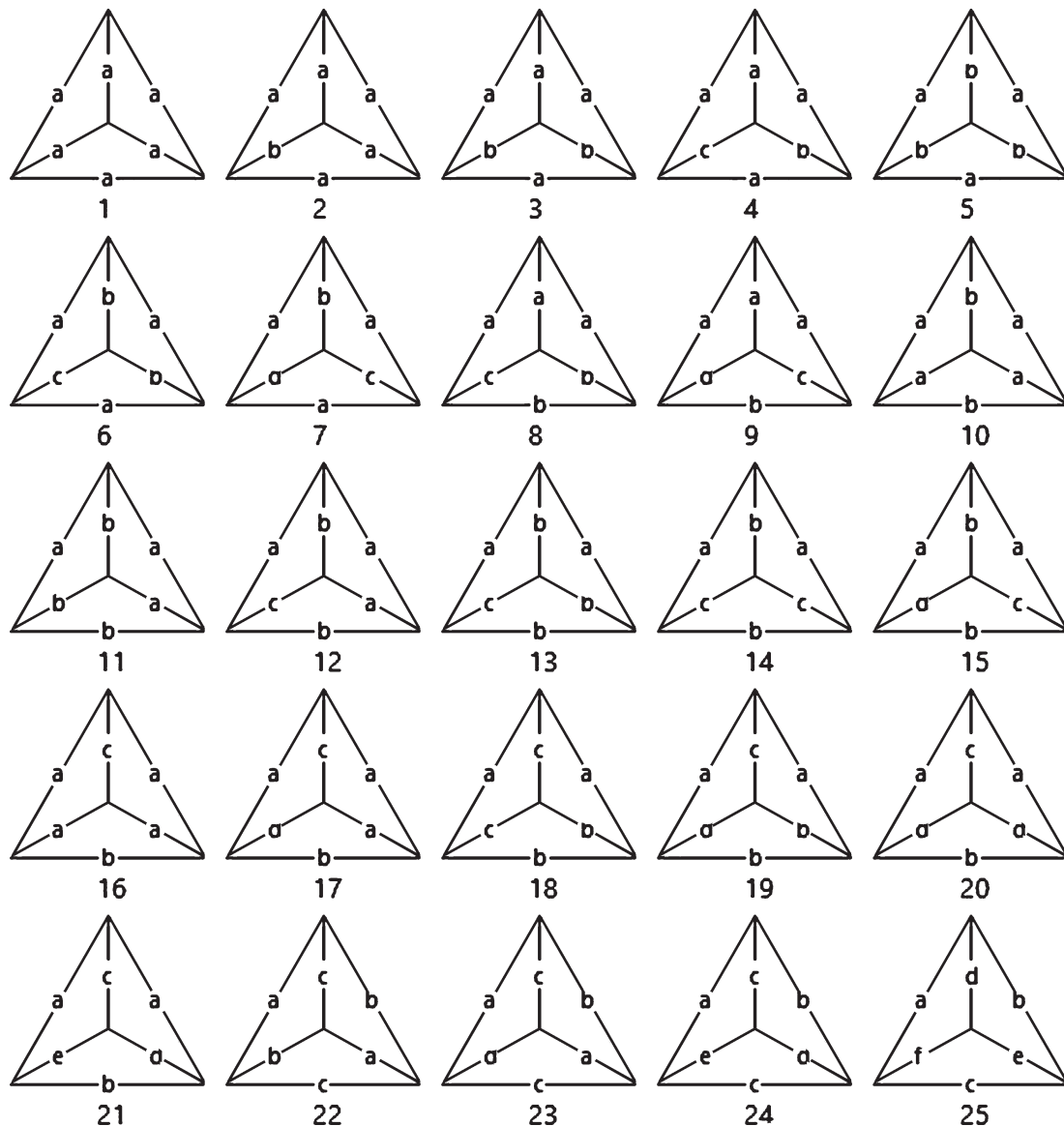


Рис. 1. Комбинаторно-геометрические типы тетраэдров. Пояснения в тексте

Fig. 1. Combinatorial-geometric types of tetrahedrons. See text

Таблица 1. Характеристики тетраэдров

Table 1. Characteristics of tetrahedrons

№ на рис. 1 и код No. in Fig.1 and index	Т. г. с. PSG	Интерпретация Interpretation	Сингония Syngony
1 [400]	$-43m$	кубический тетраэдр cubic tetrahedron	кубическая cubic
10 [040]	$-42m$	тетрагональный тетраэдр tetragonal tetrahedron	тетрагональная tetragonal
5 [130]	$3m$	тригональная пирамида + моноэдр trigonal pyramid + monohedron	тригональная trigonal
22 [004]	222	ромбический тетраэдр rhombic tetrahedron	ромбическая rhombic
2 [220]; 16 [0,2+2,0]	$mm2$	2 планальных диэдра 2 planal dihedrals	
11 [0,2+2,0]; 12 [022]; 23 [0,0,2+2]	2	2 аксиальных диэдра 2 axial dihedrals	моноклинная monoclinic
3 [1,2+1,0]; 6 [112]; 8 [0,2+1+1,0]; 14, 20 [0,1+1,2]	m	планальный диэдр + 2 моноэдра planal dihedron + 2 monohedra	
4 [1,1+1,1]; 7 [1,0,1+1+1]; 9, 13, 18 [0,1+1+1,1]; 15, 21 [0,1,1+1+1]; 17, 19 [0,1+1,1+1]; 24, 25 [0,0,1+1+1+1]	1	4 моноэдра 4 monohedra	триклинная triclinic

Исключения

Нетрудно заметить, что все т. г. с. в таблице — это подгруппы т. г. с. $-43m$ кубического тетраэдра (Вайнштейн, 1979). Но почему среди них нет т. г. с. 3, 23 и -4 (рис. 2)? Понять это несложно. В случае т. г. с. 3

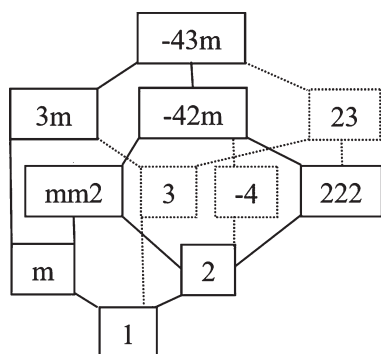


Рис. 2. Подгруппы точечной группы симметрии $-43m$.
Пояснения в тексте

Fig. 2. Subgroups of the symmetry point group $-43m$. See text

ось симметрии L_3 тетраэдра должна проходить через вершину и центр противоположной грани. Но тогда она равносторонняя, а боковые грани равнобедренные — получаем тетраэдр [130] ($3m$). В случае т. г. с. 23 ($3L_24L_3$) повторим рассуждение для $4L_3$ и получим тетраэдр [400] ($-43m$). В случае т. г. с. -4 инверсионная ось L_{i4} проходит через середины двух ребер, которые отождествляет. Она же уравнивает 4 других ребра — получаем тетраэдр [040] ($-42m$).

По сути, построить тетраэдры с т. г. с. 3, 23 и -4 не позволяет малое число граней, к тому же все треугольные. Ранее на многообразиях выпуклых 4-...12-эдров и простых 13-...16-эдров показано, что при большем числе граней разные соединения даже одного набора могут давать огромное число комбинаторно различных полиэдрических форм (Войтеховский, Степенщиков, 2008).

Заключение

Рассмотренная задача о тетраэдрах хороша уже тем, что на простом примере показывает студентам стиль решения перечислительных задач, приведших к фундаментальным константам: 14 решеток О. Браве (ранее их нашел М. Франкенгейм, но — увы — 15, а не 14), 32 т. г. с. — А. В. Гадолина (ранее их нашел И. Гессель, но результат был надолго забыт), 47 простых форм и 230 пространственных групп симметрии Е. С. Федорова — А. Шенфлиса (оба поначалу ошиблись на 2—3 группы, но указали друг другу на это в переписке) и многие другие в высших разделах кристаллографии (многомерной и цветной). Одним словом, на этом примере всякий студент может проверить, годится ли он для работы в этой области.



Рис. 3. Рождественская поздравительная открытка из архива Д. П. Григорьева: «Die Kristallographie im „Hortus Sanctus“ des Jacob Meydenbach zu Mainz 1491». («Кристаллография в „Священном саду“ Якоба Мейденбаха, Майнц, 1491». — Пер. Ю. В.)

Fig. 3. X-mas greeting card from the archive of D. P. Grigoriev: «Crystallography in Jacob Meidenbach's „Hortus Sanctus“ in Mainz in 1491»



Казалось бы, что может быть проще тетраэдра? Но напомним, что именно на нем О. Браве увидел инверсионную ось симметрии (L_{i4}), о которой до того геометры не знали более 2000 лет. В кристаллографии и кристаллохимии тетраэдр — незаменимая фигура. Задолго до их становления тетраэдр можно видеть в первых средневековых энциклопедиях по естественным наукам (рис. 3). А он все продолжает ставить перед нами вопросы. Представляется, что вывод комбинаторно-геометрических видов тетраэдров поможет студентам прочно усвоить концепцию простых форм и их комбинаций.

Автор благодарит рецензента за тщательное рассмотрение рукописи и весьма квалифицированные замечания.

Литература / References

- Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Т. 1. Симметрия кристаллов, методы структурной кристаллографии. М.: Наука, 1979. 384 с.
Weinstein B. K. Modern crystallography. V. 1. Symmetry of crystals, methods of structural crystallography. Moscow: Nauka, 1979, 384 p. (in Russian)
- Войтеховский Ю. Л., Степеничиков Д. Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV. Выпуклые полиэдры. Т. 1. 4-...12-эдры; т. 2. Простые 13-...16-эдры. Апатиты: КНЦ РАН, 2008. Т. 1 — 833 с., т. 2 — 828 с.
Voytekhsy Yu. L., Stepenshikov D. G. Combinatorial crystal morphology. Book IV: convex polyhedra. V. 1: 4-...12-hedra, vol. 2: simple 13-...16-hedra. Apatity: Kola SC RAS, 2008, V. 1, 833 p., V. 2, 828 p. (in Russian)
- Кантор Г. Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 430 с.
Cantor G. Works on set theory. Moscow: Nauka, 1985, 430 p. (in Russian)
- Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1964. 370 с.
Popov G. M., Shafranovsky I. I. Crystallography. Moscow: Vysshaya shkola, 1964, 370 p. (in Russian)
- Чупрунов Е. В., Хохлов А. Ф., Фаддеев М. А. Основы кристаллографии. М.: Физматлит, 2004. 500 с.
Chuprunov E. V., Khokhlov A. F., Faddeev M. A. Fundamentals of Crystallography. Moscow: Fizmatlit, 2004, 500 p. (in Russian)

Поступила в редакцию / Received 20.03.2024