УДК 62-50 **DOI** 10.15622/ia.22.6.7

В.И. Воротников

О ЧАСТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Воротников В.И. **О частичной устойчивости нелинейных дискретных систем с запаздыванием.**

Аннотация. Рассматривается система нелинейных дискретных (конечно-разностных) уравнений общего вида с ограниченным запаздыванием. Интерес к задачам устойчивости таких систем в последние годы значительно возрос; в частности, это связано с актуальными проблемами управления через сеть. В основном анализируется задача устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия, поскольку заменой переменных к такой задаче сводится задача устойчивости по всем переменным любого решения рассматриваемой системы. Одним из основных методов исследования является дискретно-функциональный вариант прямого метода Ляпунова, получивший существенное развитие в теоретическом и прикладном аспектах. В данной статье предполагается, что рассматриваемая система уравнений допускает «частичное» (нулевое) положение равновесия, и ставится задача устойчивости по отношению к части определяющих это положение равновесия переменных. Такая задача относится к более общим задачам частичной устойчивости, которые исследуются для нелинейных динамических систем различной формы математического описания. Предложенная постановка задачи частичной устойчивости дополняет круг указанных исследований применительно к классу рассматриваемых систем. Для решения поставленной задачи применяется метод функционалов Ляпунова – Красовского в пространстве дискретных функций при соответствующей конкретизации требований к функционалам. Ослабления таких требований можно добиться введением дополнительных дискретных функций, посредством которых: 1) проводится корректировка области функционального пространства, где строятся функционалы Ляпунова – Красовского; 2) находятся оценки функционалов и их разностей (приращений) в силу рассматриваемой системы. В результате используемые функционалы и их разности (приращения) могут быть знакопеременными в области функционального пространства, обычно рассматриваемой при анализе частичной устойчивости. На основе предложенного подхода получены достаточные условия частичной устойчивости (асимптотической устойчивости) указанного вида. Особенности подхода показаны на примере двух классов нелинейных систем заданной структуры, для которых частичная устойчивости анализируется в пространстве параметров. При этом обращается внимание на целесообразность использования семейства функционалов.

Ключевые слова: система нелинейных дискретных уравнений с запаздыванием, частичная устойчивость, метод функционалов Ляпунова – Красовского в пространстве дискретных функций, однопараметрическое семейство функционалов.

1. Введение. Нелинейные системы дискретных (конечно-разностных) уравнений широко используются в современной теории управления, математическом моделировании в различных областях, а также в вычислительной математике и ее приложениях.

Теории и методам качественного исследования таких систем к настоящему времени посвящена обширная литература, в которой значительное внимание уделяется важным в прикладном смысле задачам устойчивости; укажем монографии [1 – 4], наиболее близкие по тематике к данной статье. Наряду с наиболее часто изучаемой задачей устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия также рассматриваются естественным образом возникающие в приложениях более общие задачи *частичной устойчивости* [5, 6]: устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, а также устойчивости по всем и по части переменных «частичного» (нулевого) положения равновесия. Применительно к нелинейным стандартным одношаговым системам дискретных уравнений:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k,\, \mathbf{x}(k))\,, \tag{1}$$

указанные задачи частичной устойчивости изучались в контексте прямого метода Ляпунова [2, 4, 6, 7 – 11].

В последние 30 лет стали интенсивно разрабатываться подходы к качественному анализу (включая анализ устойчивости) более общих систем *дискретных уравнений с запаздыванием* [12 – 14]. В случае *постоянного* запаздывания такие системы являются системами обычных дискретных уравнений порядка выше первого $(m \ge 1)$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k,\, \mathbf{x}(k),\, \mathbf{x}(k-1),\, \dots,\, \mathbf{x}(k-m)), \tag{2}$$

которые можно свести к стандартным дискретным системам вида (1) введением новых переменных и расширением пространства состояний.

Системы дискретных уравнений с *переменным* запаздыванием:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k,\, \mathbf{x}(k),\, \mathbf{x}(k-\tau_1(k)),\, \dots,\mathbf{x}(k-\tau_m(k))), \tag{3}$$

где функции $\tau_i(k)$ принимают одно из целочисленных значений из промежутка $0 < \tau_i(k) \le m$, возникают в задачах управления через сеть (networked control). Системы уравнений (3) можно рассматривать [15] как системы с переключениями (switched systems) между набором систем вида (2), соответствующих всем допустимым значениям запаздываний $\tau_i(k)$ и их комбинациям в системе (3).

Возможности анализа устойчивости систем вида (2) и (3) можно расширить, используя дискретно-функциональную трактовку этих систем и соответствующий аппарат прямого метода Ляпунова. К настоящему времени в данном направлении получен ряд теорем для общего класса систем нелинейных функционально-разностных уравнений с запаздыванием [16 – 24], а также найдены конструктивно проверяемые условия устойчивости линейных дискретных систем с переменным запаздыванием на основе дискретных аналогов функционалов Ляпунова – Красовского и матричных неравенств [15, 16, 25 – 30].

Имеются также другие эффективные подходы к этим задачам, рассмотрение которых выходит за рамки данной статьи; укажем, например, работы [31, 32], где можно найти библиографию.

Круг указанных исследований небезынтересно дополнить за счет постановки задачи *частичной* устойчивости для общего класса нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием. А именно, далее предполагается, что система допускает «частичное» (по части переменных) нулевое положение равновесия и устойчивость рассматривается также только по части определяющих это положение равновесия переменных. Анализируется возможность решения поставленной задачи на основе вспомогательных функционалов, являющихся дискретными аналогами функционалов Ляпунова – Красовского, которые эффективно используются при анализе функционально-дифференциальных уравнений. Для расширения возможностей построения функционалов предлагается проводить корректировку области пространства дискретных функций, в которой функционалы строятся, а также оценивать функционалы и их разности (приращения) в силу рассматриваемой системы, используя подходящие дополнительные вспомогательные функции.

2. Постановка задачи. Пусть $\mathbb{R}^n$ – линейное n-мерное пространство векторов $\mathbf{x}$ с евклидовой нормой $|\mathbf{x}|$; $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ – множество целых неотрицательных чисел; $\mathbb{Z}_0 = \{-m, -m+1, \dots, 0\}$, m – заданное целое положительное число.

Будем рассматривать общий класс систем нелинейных дискретных уравнений с ограниченным запаздыванием, определяемый системой функционально-разностных уравнений вида [17 – 24]:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(k, \mathbf{x}_k), \tag{4}$$

состояние системы (4) на каждом шаге (в каждый дискретный момент времени $k \in \mathbb{Z}_+$) определяется дискретной вектор-функцией $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k+j)$, $j \in \mathbb{Z}_0$, а начальное состояние $\mathbf{x}_0$ – дискретным набором значений $\mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x}(k_0), \mathbf{x}(k_0 - 1), \ldots, \mathbf{x}(k_0 - m)\}$, образующих матрицу размера $n \times (m+1)$.

Пусть оператор $\mathbf{F}(k, \boldsymbol{\psi})$: $\mathbb{Z}_+ \times \mathscr{H} \to \mathbb{R}^n$, определяющий правую часть системы (4) в пространстве $\mathscr{H}$ дискретных (сеточных) вектор-функций $\boldsymbol{\psi}$: $\mathbb{Z}_0 \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\| \boldsymbol{\psi} \| = max\{| \boldsymbol{\psi}(0)|, |\boldsymbol{\psi}(-1)|, \ldots, |\boldsymbol{\psi}(-m)|\}$, при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ *непрерывен* по $\boldsymbol{\psi}$ в области $\| \boldsymbol{\psi} \| < \infty$. Тогда для любых $k_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0$ существует единственный дискретный процесс $\mathbf{x}(k_0, \mathbf{x}_0)$, при всех $k \geq k_0$ определяющий решение этой системы с начальным состоянием $\mathbf{x}_0$. Обозначим $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ значения вектор-функции $\mathbf{x}(k_0, \mathbf{x}_0)$ на k-ом шаге процесса.

Проводя разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ фазового вектора системы (4) на две группы переменных, представим систему (4) в виде:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{F}_\mathbf{y}(k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k), \;\; \mathbf{z}(k+1) = \mathbf{F}_\mathbf{z}(k, \mathbf{y}_k, \mathbf{z}_k).$$

Если выполнено условие $\mathbf{F}_\mathbf{y}(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}_k) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x}(k) : \mathbf{y}_k = \mathbf{0}\}$ определяет «частичное» положение равновесия системы (4), являющееся инвариантным множеством этой системы. Предположения о существования «полного» положения равновесия $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ системы (4) не требуется.

Имея в виду анализ устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) не по всем определяющим его переменным, а только по отношению к их некоторой заданной части [6], предположим, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1{}^T, \mathbf{y}_2{}^T)^T$ и устойчивость рассматривается по переменным, входящим в вектор $\mathbf{y}_1$. Для расширения круга понятий $\mathbf{y}_1$-устойчивости введем также произвольным образом разбиение $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1{}^T, \mathbf{z}_2{}^T)^T$ вектора $\mathbf{z}$ на две группы переменных.

Обозначим через D_δ область значений $\mathbf{x}_0$ таких, что $\| \mathbf{y}_0 \| < \delta$, $\| \mathbf{z}_{10} \| \leq L, \| \mathbf{z}_{20} \| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ. Здесь $\| \mathbf{y}_0 \| = max\,| \mathbf{y}(k_0 + j)|$, $\| \mathbf{z}_{0i} \| = max\,| \mathbf{z}_i(k_0 + j)|$ $(i = 1, 2)$ при $j \in \mathbb{Z}_0$.

Определения. «Частичное» положение равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) *при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$:

1) $\mathbf{y}_1$-*устойчиво*, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$, а также для произвольного числа $\varepsilon > 0$, как бы мало оно не было, и для любого

наперед заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) *равномерно асимптотически* $\mathbf{y}_1$-*устойчиво*, если оно равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво и существует $\Delta(L) > 0$ такое, что для произвольного решения системы (4), для которого $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$, предельное соотношение $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| = 0, \quad k \to \infty$ выполняется равномерно по k_0, $\mathbf{x}_0$ из области $k_0 \geq 0$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$.

Задача. Найти условия $\mathbf{y}_1$-устойчивости и равномерной асимптотической $\mathbf{y}_1$-устойчивости при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) в контексте дискретного варианта метода функционалов Ляпунова – Красовского.

Данную задачу можно рассматривать и как вспомогательную при анализе устойчивости по *всем* переменным «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4), конкретизируя при этом использующуюся в нелинейной теории управления концепцию детектируемости динамических систем [33]. Если систему (4) рассматривать как замкнутую систему управления, то возникает соответствующая задача частичной стабилизации для рассматриваемого в статье класса систем посредством управлений вида $\mathbf{u} = \mathbf{u}(k, \mathbf{x}_k)$.

Замечание 1. Наиболее близкими к введенным являются понятия устойчивости по всем [4] и по части переменных [11, 34, 35] «частичного» положения равновесия систем дискретных, а также функционально-дифференциальных уравнений [36, 37]. Сделанное разбиение $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)^T$ можно конкретизировать с целью минимизации требований к используемым для решения поставленной задачи дискретным аналогам функционалов Ляпунова – Красовского.

3. Условия частичной устойчивости. В пространстве $\mathscr{H}$ дискретных вектор-функций $\boldsymbol{\psi}$: $\mathbb{Z}_0 \to \mathbb{R}^n$ будем рассматривать однозначные, непрерывные по $\boldsymbol{\psi}$ при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ скалярные функционалы $V = V(k, \boldsymbol{\psi})$, $V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области:

$$k \geq 0,\ \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}\| < h,\ \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}\| + \|\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}\| < \infty\,. \tag{5}$$

Разбиение $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}{}^T, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2}{}^T, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}{}^T)^T$ соответствует сделанному разбиению $\mathbf{x} = (\mathbf{y}_1{}^T, \mathbf{y}_2{}^T, \mathbf{z}^T)^T$ фазового вектора $\mathbf{x}$ системы (4); $\| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}i} \| = max \, | \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}i}(\theta) |$ $(I=1, 2)$, $\| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}} \| = max \, | \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}}(\theta) |$ при $\theta \in \mathbb{Z}_0$.

Аналогом производной рассматриваемых функционалов в силу системы (4) являются их *разности* (приращения) в силу этой системы $\Delta V(k, \boldsymbol{\psi}) = V(k+1, \mathbf{X}(k, \boldsymbol{\psi}))] - V(k, \boldsymbol{\psi})$. Имеет место соотношение:

$$V(k, \boldsymbol{\psi}) = V(k_0, \mathbf{x}_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Delta V(j, \boldsymbol{\psi}). \tag{6}$$

Для анализа $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функционалы и функции.

1) Скалярные непрерывные в области (5) функционалы $V^*(k, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, $V^*(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$ для указания *оценки сверху* для основного V-функционала, необходимость которой обусловлена спецификой постановленной задачи частичной устойчивости. Вектор-функция $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}$ определяется разбиением $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}} = (\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}{}^T, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}2}{}^T)^T$, соответствующим разбиению $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1{}^T, \mathbf{z}_2{}^T)^T$.

2) Непрерывная в области (5) вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой корректируется область, где строится V-функционал. Определим $\|\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})\| = \sup |\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi}(\theta))|$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, $\theta \in \mathbb{Z}_0$.

3) Непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции $a_i(r)$, $a_i(0) = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$ функции типа Хана, позволяющие указать для основного V-функционала необходимую *оценку снизу*.

Введение вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(t, \boldsymbol{\psi})$-функции связано с тем, что анализ $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) в обычно рассматриваемой области:

$$k \geq 0, \; \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1} \| < h_1 < h, \; \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2} \| + \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}} \| < \infty, \tag{7}$$

пространства $\mathscr{H}$ не всегда позволяет выявить желаемые свойства используемого V-функционала или наделить его этими свойствами.

Поэтому целесообразно перейти к рассмотрению V-функционала в более узкой области:

$$k \geq 0,\ \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1} \| + \| \boldsymbol{\mu}(k,\ \boldsymbol{\psi}) \| < h_1 < h,\ \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2} \| + \| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}} \| < \infty\ , \tag{8}$$

учитывая, что фактически $\mathbf{y}_1$-устойчивость «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) означает выполнение соответствующих оценок не только для компонент вектора $\mathbf{y}_1$, но и для компонент некоторой векторной, вообще говоря, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$ - функции фазовых переменных системы (4).

Однако указанную $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})$ - функцию не всегда возможно указать заранее и соответствующую ей $\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})$ - функцию в рассматриваемом пространстве $\mathscr{H}$ дискретных вектор-функций естественно трактовать как дополнительную вектор-функцию, которая (как и сам подходящий V-функционал) определяется в процессе решения исходной задачи $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4).

Указанные обстоятельства приводят к целесообразности корректировки области (7) функционального пространства $\mathscr{H}$, в которой происходит построение V-функционалов (являющихся дискретными аналогами функционалов Ляпунова – Красовского), посредством *дополнительной* вспомогательной $\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})$ - функции.

Теорема 1. Пусть для системы (4) найдется V-функционал, а также вектор-функция $\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\mu}(k,\ \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (8) выполняются условия:

$$V(k, \boldsymbol{\psi}) \geq a_1(| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}(0) | + | \boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi}(0)) |), \tag{9}$$

$$V(k, \boldsymbol{\psi}) \leq V^*(k,\ \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}),\ \ V^*(k, \mathbf{0}, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0, \tag{10}$$

$$V(k, \boldsymbol{\psi}) \leq 0. \tag{11}$$

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) $\mathbf{y}_1$-устойчиво при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Для любых $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого заданного числа $L > 0$ в силу непрерывности функционалов $V(k,\ \boldsymbol{\psi})$ и $V^*(k,\ \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}},\ \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, условия $V(k,\ \mathbf{0}) \equiv 0$ и условий (10) можно найти $\delta(\varepsilon,\ k_0,\ L) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ следует $V(k_0,\ \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$.

Принимая во внимание соотношение (6), при выполнении условия (11) имеем $V(k,\ \mathbf{x}_k) \leq V(k_0,\ \mathbf{x}_0)$. Поэтому, учитывая неравенство

(9), для произвольного решения $\mathbf{x}(k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (4) с $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ при всех $k \geq k_0$ справедливы неравенства:

$$a_1(|\,\mathbf{y}_1(k;k_0,\mathbf{x}_0)\,|+|\,\boldsymbol{\mu}(k,\mathbf{x}(k;k_0,\mathbf{x}_0)\,|) \leq V(k,\mathbf{x}_k) < a_1(\varepsilon). \tag{12}$$

В силу свойств функции Хана $a_1(r)$, на основании полученных неравенств (12) заключаем, что $|\mathbf{y}_1(k;\, k_0,\, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k \geq k_0$ для произвольного решения системы (4), если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Теорема доказана.

Следствие. Если условия (10) теоремы 1 заменить условиями:

$$V(k,\boldsymbol{\psi}) \leq V^*(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}},\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}),\ \ V^*(\mathbf{0},\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0, \tag{13}$$

то «частичное» положение равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. При выполнении условия (13) для любых $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

Тогда из соотношений (12) следует, что $|\mathbf{y}_1(k;\, k_0,\, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

Замечание 2. Особенность условий теоремы 1 и следствия из нее в том, что рассматриваемый V-функционал и его разность (приращение) ΔV в силу системы (4), вообще говоря, *знакопеременны* в области (7). При этом наряду с V-функционалом дополнительная вспомогательная $\boldsymbol{\mu}$-функция подбирается с целью наиболее рациональной замены области (7) областью (8). Условия (10), (13) выделяют *допустимую структуру* V-функционала, которая определяется спецификой поставленной задачи частичной устойчивости; допускается *произвольный* непрерывный V^*-функционал, для которого $V^*(t,\, \mathbf{0},\, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0$ или $V^*(\mathbf{0},\, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv 0$, и ограничивающий V-функционал сверху.

Замечание 3. В качестве допустимых V-функционалов можно использовать знакоопределенные (по всем переменным) *квадратичные* функционалы $V(k,\, \boldsymbol{\psi}) \equiv V^*(k,\, \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1},\, \boldsymbol{\mu}(k,\, \boldsymbol{\psi}))$, если выбор $\boldsymbol{\mu}$-функций согласовать с условиями (10), (13): возможны, например, $\boldsymbol{\mu}$-функции вида $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}2},\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1})$, $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{0},\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{z}1}) \equiv \mathbf{0}$. Также допускается использование соответствующих знакоопределенных по всем переменным функционалов более высокого порядка.

Замечание 4. Пусть система (4) допускает «полное» положение равновесия $\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Если $\boldsymbol{\mu}(k,\boldsymbol{\psi}) \equiv 0$ (область (7) не корректируется), а требование $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ заменяется требованием $\| \mathbf{x}_0 \| < \delta$, то при выполнении условий (9), (11) имеем дискретно-функциональный вариант теоремы В.В. Румянцева [5] об устойчивости по отношению к части переменных ($\mathbf{y}_1$-устойчивости). В данном случае выполнения условий (8) или (13) не требуется.

4. Условия частичной асимптотической устойчивости. Для анализа асимптотической $\mathbf{y}_1$-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) дополнительно будут использоваться:

1) в пространстве $\mathscr{H}$ дискретных вектор-функций $\boldsymbol{\psi}$ норма:

$$\| \boldsymbol{\psi} \|_m = \sum_{j=-m}^{0} | \psi(j) |^2;$$

2) непрерывная в области (5) вектор-функция $\mathbf{w}(\boldsymbol{\psi})$, $\mathbf{w}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, посредством которой задаются необходимые оценки V-функционала и его разности (приращения) в систему системы (4).

Теорема 2. Пусть для системы (4) найдется V-функционал, а также непрерывные вектор-функции $\boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{w}(\boldsymbol{\psi}), \mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ такие, что в области (8) наряду с условиями (13) выполнены условия:

$$a_1(| \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{y}1}(0) | + | \boldsymbol{\mu}(k, \boldsymbol{\psi}(0)) |) \le V(k, \boldsymbol{\psi}) \le a_3(| \mathbf{u}(0) |) + a_3(\| \mathbf{u} \|_m), \tag{14}$$

$$V(k, \boldsymbol{\psi}) \le -a_4(| \mathbf{u}(0) |), \tag{15}$$

$$\mathbf{u} = [\boldsymbol{\psi}_\mathbf{y}, \mathbf{w}(\boldsymbol{\psi})], \ \mathbf{u}(0) = [\boldsymbol{\psi}_\mathbf{y}(0), \mathbf{w}(\boldsymbol{\psi}(0))].$$

Тогда «частичное» положение равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Равномерная $\mathbf{y}_1$-устойчивость при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) имеет место на основании следствия из теоремы 1.

Равномерная асимптотическая $\mathbf{y}_1$-устойчивость будет иметь место, если для любых $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ найдется целое число $N = N(\varepsilon, L) > 0$ такое, что $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $k > k_0 + N(\varepsilon, L)$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$; здесь $\delta(\varepsilon, L)$ находится в силу равномерной $\mathbf{y}$-устойчивости.

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Обозначим:

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{y}_k(k_0, \mathbf{x}_0)), \mathbf{w}(\mathbf{x}_k(k_0, \mathbf{x}_0))],$$
$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{w}(\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))].$$

Выберем $\varepsilon_1 < \varepsilon$ так, что $a_2(\varepsilon_1) < ½a_1(\varepsilon)$. Поскольку при $\| \mathbf{u}_k \|_m < \varepsilon_2$ справедливо неравенство $a_3(\|\mathbf{u}_k\|_m) \le a_3(\varepsilon_2(m+1))$, то также выберем такое $\varepsilon_2 < \varepsilon$, что $a_3(\|\mathbf{u}_k\|_m) < ½a_1(\varepsilon)$.

Положим $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Покажем, что существует целое число $N_1(\varepsilon, L) > m$ такое, что неравенство $|\mathbf{u}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| \ge \varepsilon_3$, где $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$, нарушается для некоторого значения k в каждом интервале длины N_1. Действительно, при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ значение $V(k_0, \mathbf{x}_0)$ в силу условий (13) ограничено числом $r(\delta, L) > 0$. Поэтому, если $|\mathbf{u}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| \ge \varepsilon_3$ на всем указанном интервале, то на этом интервале в силу условия (15) будут выполнены соотношения:

$$V(k+1, \mathbf{x}_k) = V(k_0, \mathbf{x}_0) + \sum_{j=k_0}^{k} \Delta V(j, \mathbf{x}_j) \le r - N_1 a_4(\varepsilon_3),$$

и $V(k+1, \mathbf{x}_{k+1}) < 0$ при $N_1 > r/a_4(\varepsilon_3)$, что противоречит условию (14).

В результате можно указать монотонную последовательность значений $\{k_i\} \to \infty$ такую, что $|\mathbf{u}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon_3$. Выберем из этой последовательности подпоследовательность значений $\{k_i\}$ так, чтобы $k_{i+1} - k_i > m$. Таким образом, если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$, то найдется целое число $N_1(\varepsilon, L) > m$ такое, что $|\mathbf{u}(k_i; k_0, \mathbf{x}_0))| < \varepsilon_3$ при $k_i \in [k_0 + iN_1, k_0 + (i+1)N_1]$.

Рассмотрим последовательность функций $\{\mathbf{u}_k\}$, соответствующую выбранной подпоследовательности $\{k_i\}$. Покажем, что найдется целое число $p > 0$ такое, что $a_3(\|\mathbf{u}_k\|_m) < ½a_1(\varepsilon)$ при $k = k_i (1 \le i \le p)$.

Предполагая противное, при любом $p > 0$ рассмотрим те значения $k = k_i$, для которых $a_3(\|\mathbf{u}_k\|_m) \ge ½a_1(\varepsilon)$ и можно подобрать такое число $\gamma > 0$, что $a_4(|\mathbf{u}(k_i)|) \ge \gamma$.

В данном случае в силу условия (15) при $k \ge k_i$ имеем:

$$V(k+1, \mathbf{x}_k) = V(k_0, \mathbf{x}_0) + \sum_{j=k_0}^{k} \Delta V(j, \mathbf{x}_j) \le r - (k_i - k_0)\gamma,$$

и при $k = k_i > k_0 + r/\gamma$ получаем $V(k + 1, \mathbf{x}_{k+1}) < 0$, что противоречит условию (14).

Таким образом, найдется целое число $p > 0$ такое, что:

$$a_1(|\,\mathbf{y}_1(k;k_0,\mathbf{x}_0)\,| + |\,\boldsymbol{\mu}(k,\mathbf{x}(k;k_0,\mathbf{x}_0))\,|) \le V(k,\mathbf{x}_k) \le V(k_i,\mathbf{x}_k) \le a_1(\varepsilon),$$

при $k \ge k_p$ и, следовательно, $|\mathbf{y}_1(k;\, k_0,\, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ для всех $k \ge k_p$.

Учитывая, что $k_p < k_0 + 2N_1p$, положим $N = 2N_1p$. Тогда при всех значениях $k > k_0 + N$ справедливо неравенство $|\mathbf{y}_1(k;\, k_0,\, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ для произвольного решения системы (4), если $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

Таким образом, «частичное» положение равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4) равномерно асимптотически $\mathbf{y}_1$-устойчиво при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$. Теорема доказана.

Замечание 5. Вспомогательный V-функционал и его разность (приращение) в силу системы (4) в теореме 2, вообще говоря, *знакопеременны* в области (7). Выбор дополнительных $\mathbf{w}$-функций (как и дополнительных $\boldsymbol{\mu}$-функций) должен быть согласован с условиями (13). Условия теоремы 2 являются дискретно-функциональным вариантом ранее полученных условий [6, 36] для систем обыкновенных дифференциальных, а также функционально-дифференциальных уравнений с последействием (запаздыванием).

Замечание 6. Наличие не только $\mathbf{y}_1$-устойчивости, но и «расширенной» ($\mathbf{y}_1$, $\boldsymbol{\mu}$)-устойчивости «частичного» положения равновесия $\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ системы (4), фактически имеющей место при выполнении условий теорем 1 и 2, обеспечивает правомерность применяемого перехода от области (7) к области (8).

5. Примеры. Покажем особенности предложенного подхода к анализу частичной устойчивости системы (4), а также целесообразность использования однопараметрического семейства функционалов для расширения возможностей такого анализа.

Пример 1. Пусть система (4) состоит из уравнений:

$$\begin{gathered} y_1(k+1) = ay_1(k) + a^* y_1(k-1) + ly_2(k-1)z_1(k-1), \\ y_2(k+1) = [b + dy_1(k-1)]y_2(k), \\ z_1(k+1) = [c + ey_1(k-1)]z_1(k),\;\; z_2(k+1) = Z_2(k,\, \mathbf{x}_k), \end{gathered} \tag{16}$$

в которых a, a^*, b, c, d, e, l – постоянные параметры; оператор Z_2 удовлетворяет только общим требованиям к системе (4).

Система (16) допускает «частичное» положение равновесия:

$$y_{1k} = y_{2k} = 0. \tag{17}$$

Для анализа задачи y_1-устойчивости данного положения равновесия в пространстве $\mathscr{H}$ дискретных вектор-функций $\boldsymbol{\psi}$ рассмотрим функционал вида (M, β_1, β_2 = const > 0):

$$V(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y1}^2(0) + M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) + \beta_1\psi_{y1}^2(\theta) + \beta_2\psi_{y2}^2(\theta)\psi_{z1}^2(\theta), \tag{18}$$

являющийся дискретным аналогом функционала Ляпунова – Красовского, а также две вспомогательные скалярные дискретные функции:

$$\mu_1(\boldsymbol{\psi}) = w_1(\boldsymbol{\psi}) = \psi_{y2}(\theta)\psi_{z1}(\theta),\ \mathbb{Z}_0 = \{k = -1,\ 0\}. \tag{19}$$

Имеют место соотношения:

$$\psi_{y1}^2(0) + M\mu_1^2(0) \le V(\boldsymbol{\psi}) \le \psi_{y1}^2(0) + M\mu_1^2(0) + \beta \,\|\, \mathbf{u} \,\|_1,$$
$$V(\boldsymbol{\psi}) = V^*(\psi_{y1},\ \psi_{y2},\ \psi_{z1}),\ \ V^*(0,\ 0,\ \psi_{z1}) \equiv 0,$$
$$\mathbf{u} = [\psi_{y1}, w_1(\boldsymbol{\psi})],\ \ \beta = \max(\beta_1,\ \beta_2),$$

и, следовательно, V-функционал (18) удовлетворяет условиям (13) и (14), а его разность (приращение) ΔV в силу системы (16) при всех $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_0$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}
\Delta V = \{[a\psi_{y1}(0) + a^*\psi_{y1}(-1) + l\psi_{y2}(-1)\psi_{z1}(-1)]^2 + \\
+ M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0)[b + d\psi_{y1}(-1)]^2[c + e\psi_{y1}(-1)]^2\} - \\
- \psi_{y1}^2(0) - M\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) + \\
+ \beta_1[\psi_{y1}^2(0) - \psi_{y1}^2(-1)] + \beta_2[\psi_{y2}^2(0)\psi_{z1}^2(0) - \psi_{y2}^2(-1)\psi_{z1}^2(-1)] = \\
= (a^2 - 1 + \beta_1)\psi_{y1}^2(0) + 2aa^*\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-1) + (a^{*2} - \beta_1)\psi_{y1}^2(-1) + \\
+ 2a^*l\psi_{y1}(-1)\mu_1(-1) + 2al\psi_{y1}(0)\mu_1(-1) + \\
+ (Mb^2c^2 - M + \beta_2)\mu_1^2(0) + (l^2 - \beta_2)\mu_1^2(-1) + r_1\psi_{y1}(-1)\mu_1^2(0) + \\
+ r_2\psi_{y1}^2(-1)\mu_1^2(0) + r_3\psi_{y1}^3(-1)\mu_1^2(0) + Md^2e^2\psi_{y1}^4(-1)\mu_1^2(0), \\
\mu_1(0) = \psi_{y2}(0)\psi_{z1}(0),\ \ \mu_1(-1) = \psi_{y2}(-1)\psi_{z1}(-1),
\end{gathered}$$

где r_i ($i = 1, 2, 3$) – постоянные, зависящие от значения M и параметров b, c, d, e системы (16).

Используя для упрощения последующего анализа y_1-устойчивости «частичного» положения равновесия (17) неравенства:

$$2aa^*\psi_{y1}(0)\psi_{y1}(-1) \le |aa^*|\cdot[\psi_{y1}^2(0)+\psi_{y1}^2(-1)],$$
$$2a^*l\psi_{y1}(-1)\mu_1(-1) \le |a^*l|\cdot[\psi_{y1}^2(-1)+\mu_1^2(-1)],$$

для квадратичной части $(\Delta V)_2$ полученного выражения для ΔV можно получить следующую оценку:

$$(\Delta V)_2 \le (a^2+|aa^*|-1+\beta_1)\psi_{y1}^2(0)+$$
$$+2al\psi_{y1}(0)\mu_1(-1)+(l^2+|a^*l|-\beta_2)\mu_1^2(-1)+$$
$$+(a^{*2}+|aa^*|+|a^*l|-\beta_1)\psi_{y1}^2(-1)+(Mb^2c^2-M+\beta_2)\mu_1^2(0).$$

При выполнении условий:

$$a^2+|aa^*|-1+\beta_1 < 0,$$
$$(a^2+|aa^*|-1+\beta_1)\cdot(l^2+|a^*l|-\beta_2) > a^2l^2,$$
$$a^{*2}+|aa^*|+|a^*l|-\beta_1 < 0,\ \ Mb^2c^2-M+\beta_2 < 0.$$

$(\Delta V)_2$ является определенно отрицательной функцией переменных $\psi_{y1}(0)$, $\psi_{y1}(-1)$, $\mu_1(0)$, $\mu_1(-1)$ на основании критерия Сильвестра.

Поэтому в данном случае при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (8) для разности (приращения) ΔV функционала (18) будет иметь место следующая оценка:

$$\Delta V \le -\alpha[\psi_{y1}^2(0)+\psi_{y1}^2(-1)+\mu_1^2(0)+\mu_1^2(-1)] \le$$
$$\le -\alpha[\psi_{y1}^2(0)+\mu_1^2(0)]\ \ (\alpha = \mathrm{const} > 0).$$

Пусть параметры системы (16) удовлетворяют условиям:

$$(|a|+|a^*|)^2+|a^*l| < 1,$$
$$[(|a|+|a^*|)^2+|a^*l|-1]\cdot[l^2+|a^*l|+M(b^2c^2-1)] > a^2l^2, \tag{20}$$

а параметры β_1, β_2 в функционале (18) выберем следующим образом:

$$\beta_1 = a^{*2} + |aa^*| + |a^* l| + \varepsilon_1,\ \beta_2 = M(1 - b^2 c^2) - \varepsilon_2$$
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \text{const} > 0).$$

Учитывая, что $\mu_1(\boldsymbol{\psi}) = w_1(\boldsymbol{\psi})$, заключаем, что при достаточно малых значениях ε_1, ε_2 и $h_1 > 0$ для разности (приращения) ΔV функционала в области (8) при любых значениях параметров d, e имеет место оценка (α = const > 0):

$$\Delta V \le -\alpha(|\mathbf{u}(0)|),\ \mathbf{u}(0) = [\psi_{y1}(0), w_1(0)]. \tag{21}$$

Значит для V-функционала (18) в области (8), помимо условий (13) и (14), также выполняется условие (15).

На основании теоремы 2 заключаем, что при выполнении условий (20) и при любых значениях параметров d, e «частичное» положение равновесия (17) системы (16) равномерно асимптотически y_1-устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20}. Отметим, что поскольку условие (21) выполняется в области (8), но не в области (7), то разность (приращение) ΔV рассматриваемого функционала (18) в силу системы (16) *знакопеременна* в области (7).

Равенство (18) определяет *семейство функционалов*, зависящее от параметра $M > 0$, что, в свою очередь, приводит к зависимости от параметра M и найденной области устойчивости (20). В результате, за счет выбора подходящего значения M, в область устойчивости можно включить (или исключить) некоторые заданные комбинации параметров системы (4). Так, например, если $l^2 + |a^* l| = 1$, то для казалось бы «естественного» выбора значения $M = 1$ в функционале (18), при любых значениях параметров a, b, c, d, e область устойчивости (20) оказывается пустым множеством, поскольку в данном случае условия (20) предполагают требование $b^2 c^2 < 0$. Однако можно избежать указанной ситуации, полагая $M = 2$.

Пусть $a^* = 0$. Покажем, что при $M = 1$ область равномерной асимптотической y_1-устойчивости (20) можно изменить за счет изменения оценки ΔV. Действительно, при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (8) неравенство (21) также будет справедливо, если выполнены условия $a^2 + |al| - 1 < 0$, $l^2 - \beta_2 + |al| < 0$, $b^2 c^2 - 1 < 0$. Поэтому область (20) можно заменить областью:

$$(|a| + |l|)^2 + b^2 c^2 < 2,\ b^2 c^2 < 1. \tag{22}$$

В отличие от области (20), при $M = l^2 = 1$ область (22) не является пустым множеством. Например, при $M = 1$, $b^2c^2 = 0$ области устойчивости (20) и (22) имеют соответственно вид $a^2 + l^2 < 1$ и $|a| + |l| < \sqrt{2}$, причем область (22) охватывает случай $l^2 = 1$.

Отметим, что при $a^* = 0$ аналогичная задача y_1-устойчивости анализировалась [35] для системы (16) при отсутствии эффекта запаздывания посредством функции Ляпунова, имеющей вид (18) при $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $M = 2$. Сравнение показывает, что полученная область y_1-устойчивости совпадает с областью (20) при $a^* = 0$, $M = 2$.

Для численной характеристики результатов в таблице 1 приводятся результаты вычислений по рекуррентным соотношениям (16) на отрезке $k \in [0, 30]$ при начальных данных $y_i(-1) = y_i(0) = 0{,}1$ ($i = 1, 2$) и $z_1(-1) = z_1(0) = 1$, и при значениях параметров $a = {}^1/_2$, $a^* = 0$, $b = {}^3/_2$, $c = {}^1/_3$, $d = e = l = 1$.

Таблица 1. Результаты вычислений

k	$y_1(k)$	$y_2(k)$	$z_1(k)$
–1	0,1	0.1	1
0	0,1	0,1	1
1	0,15	0,16	0,4333
2	0,1750	0,2560	0,1877
3	0,1568	0,4224	0,2094
4	0,1264	0,4288	0,0954
5	0,1517	0,7104	0,0468
6	0,1168	1,1554	0,0215
7	0,0916	1,9084	0,0104
8	0,0706	3,0854	0,0060
9	0,0551	4,9107	0,0025
10	0,0461	7,7127	0,0004
…	…	…	…
15	0,0050	65,557	$5{,}5\times10^{-6}$
…	…	…	…
20	0,00039	504,13	$2{,}4\times10^{-8}$
…	…	…	…
30	$1{,}9\times10^{-5}$	3832,1	$4{,}7\times10^{-10}$

Пример 2. Рассмотрим систему дискретных уравнений:

$$\begin{gathered}y_1(k+1)=[a+ly_2(k-1)z_1(k-1)]y_1(k),\\ y_2(k+1)=[b+dy_1(k-1)]y_2(k),\\ z_1(k+1)=[c+ey_1(k-1)]z_1(k),\ z_2(k+1)=Z_2(k,\mathbf{x}_k),\end{gathered} \tag{23}$$

которые представляют структурно измененный вариант системы (16).

Для анализа асимптотической y_1-устойчивости «частичного» положения равновесия (17) системы (23) используем V-функционал (18), в котором $\beta_1 = 0$, и две вспомогательные функции (19).

Квадратичная часть $(\Delta V)_2$ разности (приращения) ΔV выбранного функционала в силу системы (23) имеет вид:

$$(\Delta V)_2=(a^2-1)\psi_{y1}^2(0)+(Mb^2c^2-M+\beta_2)\mu_1^2\left(0\right)-\beta_2\mu_1^2(-1),$$

а члены более высокого порядка в выражении ΔV являются формами переменных $\psi_{y1}(0)$, $\mu_1(0)$, $\mu_1(-1)$.

Пусть выполняются условия $a^2<1$, $M(b^2c^2-1)+\beta_2<0$. Тогда при достаточно малом $h_1>0$ в области (8) при любых значениях параметров l, d, e для разности (приращения) ΔV функционала (18), в котором $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = M(1-b^2c^2)-\varepsilon_2$ (где $\varepsilon_2 = const > 0$ – достаточно малое число) в силу системы (23) имеет место оценка вида (21).

В результате, при выполнении условий $a^2<1,\quad b^2c^2<1$ «частичное» положение равновесия (17) системы (23) равномерно асимптотически y_1-устойчиво при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} на основании теоремы 2. Разность (приращение) ΔV рассматриваемого функционала (18) в силу системы (23) *знакопеременна* в области (7).

При отсутствии эффекта запаздывания в системе (23) аналогичная задача y_1-устойчивости анализировалась [11] посредством функции Ляпунова, имеющей вид (18) при $\beta_1=\beta_2=0,\quad M=2$. Полученная область y_1-устойчивости совпадает с областью $a^2<1$, $b^2c^2<1$.

6. Заключение. Для системы нелинейных дискретных (конечно-разностных) уравнений общего вида с ограниченным запаздыванием дана постановка задачи частичной устойчивости: устойчивости «частичного» (нулевого) положения равновесия по отношению к части определяющих его переменных.

Найдены достаточные условия частичной устойчивости (асимптотической устойчивости) указанного вида, основанные на выборе подходящего V-функционала, являющегося дискретным аналогом функционала Ляпунова – Красовского, в сочетании с двумя дополнительными (векторными, вообще говоря) функциями. Эти функции вводятся для корректировки области пространства дискретных функций, в которой строится V-функционал, а также для нахождения требуемых оценок самого функционала и его разности (приращения) в силу изучаемой системы. В результате как сам V-функционал, так и его разность (приращение) могут быть знакопеременными в области пространства дискретных функций, которая обычно рассматривается при анализе частичной устойчивости.

Результаты статьи являются развитием идей и результатов $[6, 11, 34 - 36, 38]$ по решению задач частичной устойчивости применительно к рассматриваемому в статье классу дискретных систем с запаздыванием. Найденные условия частичной устойчивости могут использоваться при анализе как собственно систем дискретных уравнений высокого порядка, так и более общих систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием.

Литература

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
2. Фурасов В.Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982. 192 с.
3. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations, 3-ed. N.Y.: Springer, 2005. 540 p. DOI: 10.1007/0-387-27602-5.
4. Александров А.Ю., Жабко А.П., Платонов А.В. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Изд. Дом Федоровой Г.В., 2015. 154 с.
5. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Матем., Механика, Физика, Астрономия, Химия. 1957. № 4. С. 9–16.
6. Воротников В.И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3−59.
7. Haddad W.M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 976 p.
8. Ramírez-Llanos E., Martínez S. Distributed Discrete-Time Optimization Algorithms with Applications to Resource Allocation in Epidemics Control // Optimal Control Appl. Meth. 2018. vol. 39. no. 1. pp. 160−180.
9. Shafiei M.H., Vazirpour N. The Approach of Partial Stabilization in Design of Discrete-Time Robust Guidance Laws against Maneuvering Targets // Aeronautical J. 2020. vol. 124. no. 1277. pp. 1114−1127.
10. Игнатьев А.О. Метод функций Ляпунова в системах разностных уравнений: устойчивость относительно части переменных // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 3. С. 407–415.
11. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. Об одном подходе к анализу устойчивости «частичных» положений равновесия нелинейных дискретных систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. Т. 63. № 3. С. 57–68.
12. Shaikhet L. Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations. N.Y.: Springer, 2011. 370 p.
13. Astrom K.J., Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. N.Y.: Dover Publ, Inc., 2013. 576 p.

14. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Boston: Birkhauser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
15. Hetel L., Daafouz J., Iung C. Equivalence between the Lyapunov–Krasovskii Functionals Approach for Discrete Delay Systems and that of the Stability Conditions for Switched Systems // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2008. vol. 2. no. 3. pp. 697–705.
16. Родионов А.М. Некоторые модификации теорем второго метода Ляпунова для дискретных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 86–93.
17. Elaydi S., Zhang S. Stability and Periodicity of Difference Equations with Finite Delay // Funkcialaj Ekvacioj. 1994. vol. 37. no. 3. pp. 401–413.
18. Анашкин О.В. Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 7. С. 976–978.
19. Pepe P., Pola G., Di Benedetto M.D. On Lyapunov–Krasovskii Characterizations of Stability Notions for Discrete-Time Systems with Uncertain Time-Varying Time Delays // IEEE Trans. Automatic Control. 2017. vol. 63. no. 6. pp. 1603–1617.
20. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B. Delay-Independent Stability Conditions for a Class of Nonlinear Difference Systems // J. of the Franklin Institute. 2018. vol. 355. no. 7. pp. 3367–3380.
21. Zhou B. Improved Razumikhin and Krasovskii Approaches for Discrete-Time Time-Varying Time-Delay Systems // Automatica. 2018. vol. 91. pp. 256–269.
22. Li X., Wang R., Du S., Li T. An Improved Exponential Stability Analysis Method for Discrete-Time Systems with a Time-Varying Delay // Intern. J. Robust Nonlin. Control. 2022. vol. 32. no. 2. pp. 669–681.
23. Guo Y., Xu X., Liu L., Wang Y., Feng G. New Results on Stability of Discrete-Time Systems with Infinite Delays // Automatica. 2022. vol. 136. no. 110043.
24. Zhang K., Braverman E., Gharesifard B. Event-Triggered Control for Discrete-Time Delay Systems // Automatica. 2023. vol. 147. no. 110688.
25. Seuret A., Gouaisbaut F., Fridman E. Stability of Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via a Novel Summation Inequality // IEEE Trans. Automatic Control. 2015. vol. 60. no. 10. pp. 2740–2745.
26. Lin H., Zeng H., Wang W. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay // J. Systems Science and Complexity. 2021. vol. 34. no. 2. pp. 632–641.
27. Zhu L., Zhu C. Enhanced Stability Criteria for Discrete-Time Systems with Time-Varying Delay // Intern. J. Control, Autom. Systems. 2021. vol. 19. no. 7. pp. 2385–2394.
28. Demidenko G.V., Matveeva I.I. The Second Lyapunov Method for Time-Delay Systems // International workshop on Functional Differential Equations and Applications: FDEA-2019. Singapore: Springer, 2022. pp. 145–167.
29. Zhang X.M., Han Q.L., Ge X., Peng C. Stability Analysis of Delayed Discrete-Time Systems based on a Delay-Square-Dependent Lyapunov Functional // Automatica. 2023. vol. 147. no. 110592.
30. Diblík J. Exponential Stability of Linear Discrete Systems with Multiple Delays by Degenerated Lyapunov–Krasovskii Functionals // Applied Mathematics Letters. 2023. vol. 142. no. 110592.
31. Liz E. Stability of Non-Autonomous Difference Equations: Simple Ideas Leading to Useful Results // J. Difference Equat. 2011. vol. 17. no. 2. pp. 203–220.
32. Малыгина В.В. Асимптотические свойства решений линейных дифференциальных и разностных уравнений с последействием. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. Пермь: Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2021. 279 с.

33. Дашковский С.Н., Ефимов Д.В., Сонтаг Э.Д. Устойчивость от входа к состоянию и смежные свойства систем // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 3–40.
34. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371–375.
35. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2021. № 9. С. 116–132.
36. Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г. Об устойчивости по части переменных «частичных» положений равновесия систем с последействием // Матем. заметки. 2014. Т. 96. № 4. С. 496–503.
37. Воротников В.И. К частичной устойчивости и детектируемости функционально-дифференциальных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 3–17.
38. Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.

Воротников Владимир Ильич — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры, кафедра математики и информационных технологий, Сочинский институт Российского университета дружбы народов. Область научных интересов: устойчивость динамических систем, частичная устойчивость и стабилизация, теория управления, динамика управляемого твердого тела (космического аппарата). Число научных публикаций — 210. vorotnikov-vi@rambler.ru; улица Куйбышева, 32, 354340, Сочи, Россия; р.т.: +7(862)241-1270.

DOI 10.15622/ia.22.6.7

V. VOROTNIKOV

ON THE PARTIAL STABILITY OF NONLINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAY

Vorotnikov V. **On the Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems with Delay.**

Abstract. A system of nonlinear discrete (finite-difference) of a general form with a bounded delay is considered. Interest in the tasks of qualitative analysis of such systems has increased significantly in recent years. At the same time, the problem of stability with respect to all variables of the zero equilibrium position, which has a great generality, is mainly analyzed in domestic and foreign literature. The main research method is a discrete-functional analogue of the direct Lyapunov method. In this article, it is assumed that the system under consideration admits a “partial” (in some part of the state variables) zero equilibrium position. The problem of stability of a given equilibrium position is posed, and stability is considered not in all, but only in relation to a part of the variables that determine this equilibrium position. Such a problem belongs to the class of problems of partial stability, which are actively studied for systems of various forms of mathematical description. The proposed statement of the problem complements the scope of the indicated studies in relation to the system under consideration. To solve this problem, a discrete version of the Lyapunov– Krasovskii functionals method is used in the space of discrete functions with appropriate specification of the functional requirements. To expand the capabilities of this method, it is proposed to use two types of additional auxiliary (vector, generally speaking) discrete functions in order to: 1) adjustments of the phase space region of the system in which the Lyapunov–Krasovskii functional is constructed; 2) finding the necessary estimates of the functionals and their differences (increment) due to the system under consideration, on the basis of which conclusions about partial stability are made. The expediency of this approach lies in the fact that as a result, the Lyapunov-Krasovskii functional, as well as its difference due to the system under consideration, can be alternating in the domain that is usually considered when analyzing partial stability. Sufficient conditions of partial stability, partial uniform stability, and partial uniform asymptotic stability of the specified type are obtained. The features of the proposed approach are shown on the example of two classes of nonlinear systems of a given structure, for which partial stability is analyzed in parameter space. Attention is drawn to the expediency of using a one-parameter family of functionals.

Keywords: nonlinear delay discrete-time system, partial stability, Lyapunov-Krasovskii functional, one-parameter family of functionals.

References

1. Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest: Ed. Acad. RPR, 1968. 312 p.
2. Furasov V.D. Ustojchivost' i stabilizaciya diskretnyh processov [Stability and stabilization of discrete processes]. Moscow: Nauka, 1982. 192 p. (In Russ.).
3. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations, 3-ed. N.Y.: Springer, 2005. 540 p. DOI: 10.1007/0-387-27602-5.
4. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P., Platonov A.V. Ustojchivost' dvizhenij diskretnyh dinamicheskih sistem [Stability of motions of discrete dynamic systems]. SPb.: Izd. Dom Fedorovoj G.V., 2015. 154 p. (In Russ.).
5. Rumyantsev V.V. [On Stability of Motion with Respect to a Part of the Variables]. Vestn. MGU. Ser. Matematiki, mekhaniki, fiziki, astronomii, himii – Gerald of

Moscow State University. Ser. Math., Mech., Phis., Astron., Chem. 1957. no. 4. pp. 9–16. (In Russ.).
6. Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects. Autom. Remote Control. 2005. vol. 66. no. 4. pp. 511–561.
7. Haddad W.M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. 976 p.
8. Ramírez-Llanos E., Martínez S. Distributed Discrete-Time Optimization Algorithms with Applications to Resource Allocation in Epidemics Control. Optimal Control Appl. Meth. 2018. vol. 39. no. 1. pp. 160−180.
9. Shafiei M.H., Vazirpour N. The Approach of Partial Stabilization in Design of Discrete-Time Robust Guidance Laws against Maneuvering Targets. Aeronautical J. 2020. vol. 124. no. 1277. pp. 1114−1127.
10. Ignatyev A.O. Lyapunov Function Method for Systems of Difference Equations: Stability with Respect to Part of the Variables. Differential Equations. 2022. vol. 58. no. pp. 405–414.
11. Vorotnikov V.I., Martyshenko Y.G. Approach to the Stability Analysis of Partial Equilibrium States of Nonlinear Discrete Systems. Journal of Computer and Systems Sciences International. Theory and control systems. 2022. vol. 61. no. 3. pp. 348–359.
12. Shaikhet L. Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations. N.Y.: Springer, 2011. 370 p.
13. Astrom K.J., Wittenmark B. Computer Controlled Systems: Theory and Design. N.Y.: Dover Publ, Inc., 2013. 576 p.
14. Fridman E. Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. Boston: Birkhauser, 2014. 362 p. DOI: 10.1007/978-3-319-09393-2.
15. Hetel L., Daafouz J., Iung C. Equivalence between the Lyapunov–Krasovskii Functionals Approach for Discrete Delay Systems and that of the Stability Conditions for Switched Systems. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2008. vol. 2. no. 3. pp. 697–705.
16. Rodionov A.M. Certain Modifications of Theorems of the Second Lyapunov Method for Discrete Equations. Autom. Remote Control. 1992. vol. 53. no. 9. pp. 1381–1386.
17. Elaydi S., Zhang S. Stability and Periodicity of Difference Equations with Finite Delay. Funkcialaj Ekvacioj. 1994. vol. 37. no. 3. pp. 401–413.
18. Anashkin O.V. Lyapunov Functions in Stability Theory of Nonlinear Difference Delay Equations. Differential Equations. 2002. vol. 38. no. 7. pp. 1038–1041.
19. Pepe P., Pola G., Di Benedetto M.D. On Lyapunov–Krasovskii Characterizations of Stability Notions for Discrete-Time Systems with Uncertain Time-Varying Time Delays. IEEE Trans. Automatic Control. 2017. vol. 63. no. 6. pp. 1603–1617.
20. Aleksandrov A.Y., Aleksandrova E.B. Delay-Independent Stability Conditions for a Class of Nonlinear Difference Systems. J. of the Franklin Institute. 2018. vol. 355. no. 7. pp. 3367–3380.
21. Zhou B. Improved Razumikhin and Krasovskii Approaches for Discrete-Time Time-Varying Time-Delay Systems. Automatica. 2018. vol. 91. pp. 256–269.
22. Li X., Wang R., Du S., Li T. An Improved Exponential Stability Analysis Method for Discrete-Time Systems with a Time-Varying Delay. Intern. J. Robust Nonlin. Control. 2022. vol. 32. no. 2. pp. 669–681.
23. Guo Y., Xu X., Liu L., Wang Y., Feng G. New Results on Stability of Discrete-Time Systems with Infinite Delays. Automatica. 2022. vol. 136. no. 110043.
24. Zhang K., Braverman E., Gharesifard B. Event-Triggered Control for Discrete-Time Delay Systems. Automatica. 2023. vol. 147. no. 110688.
25. Seuret A., Gouaisbaut F., Fridman E. Stability of Discrete-Time Systems with Time-Varying Delays via a Novel Summation Inequality. IEEE Trans. Automatic Control. 2015. vol. 60. no. 10. pp. 2740–2745.

26. Lin H., Zeng H., Wang W. New Lyapunov-Krasovskii Functional for Stability Analysis of Linear Systems with Time-Varying Delay. J. Systems Science and Complexity. 2021. vol. 34. no. 2. pp. 632–641.
27. Zhu L., Zhu C. Enhanced Stability Criteria for Discrete-Time Systems with Time-Varying Delay. Intern. J. Control, Autom. Systems. 2021. vol. 19. no. 7. pp. 2385–2394.
28. Demidenko G.V., Matveeva I.I. The Second Lyapunov Method for Time-Delay Systems. International workshop on Functional Differential Equations and Applications: FDEA-2019. Singapore: Springer, 2022. pp. 145–167.
29. Zhang X.M., Han Q.L., Ge X., Peng C. Stability Analysis of Delayed Discrete-Time Systems based on a Delay-Square-Dependent Lyapunov Functional. Automatica. 2023. vol. 147. no. 110592.
30. Diblík J. Exponential Stability of Linear Discrete Systems with Multiple Delays by Degenerated Lyapunov–Krasovskii Functionals. Applied Mathematics Letters. 2023. vol. 142. no. 110592.
31. Liz E. Stability of Non-Autonomous Difference Equations: Simple Ideas Leading to Useful Results. J. Difference Equat. 2011. vol. 17. no. 2. pp. 203–220.
32. Malygina V.V. Asimptoticheskie svoistva reshenii lineinykh differentsialnykh i raznostnykh uravnenii s posledeistviem [Asymptotic Properties of Solutions of Linear Differential and Difference Equations with Aftereffect]. Dr. Sci. Thesis. Perm: Perm Univ., 2021. 279 p. (In Russ.).
33. Dashkovskiy S.N., Efimov D.V., Sontag E.D. Input to State Stability and Allied System Properties. Autom. Remote Control. 2011. vol. 72. no. 8. pp. 1579–1614.
34. Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. [To Problem of Partial Stability for Nonlinear Discrete-Time Systems]. Mekhatronika. Avtomatizaciya. Upravlenie – Mechatronics. Automation and Control. 2017. vol. 18. no. 6. pp. 371–375. (In Russ.).
35. Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. On the Partial Stability Problem for Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems. Autom. Remote Control. 2021. vol. 82. no. 9. pp. 1554−1567.
36. Vorotnikov V.I., Martyshenko Yu.G. Stability in a Part of Variables of “Partial” Equilibria of Systems with Aftereffect. Math. Notes. 2014. vol. 96. no. 4. pp. 477–483.
37. Vorotnikov V.I. On Partial Stability and Detectability of Functional Differential Systems with Aftereffect. Autom. Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 199–211.
38. Vorotnikov V.I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.

Vorotnikov Vladimir — Ph.D., Dr.Sci., Professor of the department, Mathematics and information technology department, Sochi Institute of the Peoples’ Friendship University of Russia. Research interests: stability of dynamical systems, partial stability and stabilization, control theory, dynamics of controlled solid (spacecraft). The number of publications — 210. vorotnikov-vi@rambler.ru; 32, Kuibysheva St., 354340, Sochi, Russia; office phone: +7(862)241-1270.