

Ю.В. БИБИК
**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НА ФОНДОВЫХ РЫНКАХ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМАЛИЗМА СТАТИСТИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ**

Бибик Ю.В. Прогнозирование на фондовых рынках с использованием формализма статистической механики.

Аннотация. Аналитически исследована возможность и целесообразность прогнозирования на фондовых рынках с помощью методов и подходов статистической механики. Аппарат статистической механики применен для анализа и прогноза одного из важнейших показателей рынка – распределения логарифмической доходности. В качестве исходной модели использована модель Лотки-Вольтерра, применяемая в экологии для описания систем типа «хищник-жертва». Она адекватно аппроксимирует динамику рынка. В статье использована ее гамильтоновость, позволяющая применить аппарат статистической механики. Аппарат статистической механики (с использованием принципа максимальной энтропии) позволяет реализовать вероятностный подход, который адаптирован к условиям неопределенности фондового рынка. Канонические переменные гамильтониана представлены в виде логарифмов цен акций и облигаций, совместная функция распределения вероятности цен акций и облигаций получена в виде распределения Гиббса. Больцмановский фактор, входящий в распределение Гиббса, позволяет оценить вероятность появления тех или иных цен на акции и облигации и получить аналитическое выражение для вычисления логарифмической доходности, дающее более точные результаты, чем широко используемое нормальное (Гауссово) распределение. По своим характеристикам полученное распределение напоминает распределение Лапласа. Вычислены основные характеристики полученного распределения – среднее значение, дисперсия, асимметрия, эксцесс. Математические результаты представлены графически. Дано объяснение причинно-следственного механизма, вызывающего изменение доходности рынка. Для этого развита идея Теодора Модиса о конкуренции между акциями и облигациями за внимание и деньги инвесторов (по аналогии с оборотом биомассы в моделях типа «хищник-жертва» в биологии). Результаты исследования представляют интерес для инвесторов, теоретиков и практиков фондового рынка. Они позволяют принимать продуманные и взвешенные решения по инвестированию за счет более реального представления об ожидаемой доходности и более адекватной оценки инвестиционного риска.

Ключевые слова: динамика фондового рынка, функция распределения доходности, принцип максимальной энтропии, распределение Гиббса, распределение Лапласа.

1. Введение

1.1. Общее состояние вопроса исследования. В работе предлагается метод прогнозирования фондового рынка с использованием формализма статистической механики. Учитывая, что реальность фондовых рынков всегда сложнее и непредсказуемее любых действующих и предлагаемых методов и подходов – предложение нового метода задача крайне непростая. Чтобы разобраться в перипетиях фондового рынка его участникам нужно

постоянно и напряженно следить как минимум за следующими показателями:

- насколько сильное влияние на современный фондовый рынок оказывает политическая нестабильность;

- каковы темпы роста или падения ВВП, в каком состоянии кредитно-денежная политика, инфляция, а также, существует ли опасность сползания в кризис, и есть ли системная программа по выходу из него;

- как поведут себя цены на акции в условиях экономического спада (при таких условиях нужно ждать роста или обвала цен на акции, к какому сроку и за счет чего цены на акции могут начать выравниваться в кризисных ситуациях, существуют ли финансовые и или сырьевые резервы, которые могут стабилизировать скачки цен на фондовых рынках);

- удастся ли удержать внимание инвесторов к наиболее ликвидным, устойчивым и перспективным акциям компаний, занимающим верхние строчки рейтингов фондового рынка или их потеснят акции новых компаний, предложивших новейшие инновационные продукты;

- имеет ли смысл вкладываться в стартапы и/или высокодоходные облигации, учитывая, что по статистике только одна-две из десяти таких компаний показывают устойчивый рост;

- какой в сложившихся условиях будет реальная конкуренция акций за внимание инвесторов (будет ли стоимость акций снижаться в случае избыточного предложения или расти в случае избыточного спроса).

Широкомасштабные и важные последствия воздействия на фондовый рынок каждого из вышеперечисленных пунктов из этого далеко не полного списка, а также их исключительная сложность, требует от аналитиков глубоких знаний, кропотливого труда и обязательного наличия и использования серьезного математического обеспечения. При этом математический аппарат должен постоянно совершенствоваться, учитывать статус рынка, его структуру, улавливать как основные тенденции его развития, так и новые особенности, повышать возможности качественного и количественного анализа на новый уровень. Таким образом, в настоящее время прогнозирование фондового рынка представляет собой постоянно развивающуюся область исследований. Конечной целью этих исследований является желание сделать прогнозирование более обоснованным, а значит более понятным, прозрачным и доступным.

Отличительной особенностью современных научных исследований фондового рынка является широта взглядов, мнений и суждений по всем вопросам его состояния и развития. Поражает количество предлагаемых и используемых теорий, методов и методик, имеющих целью улучшение результативности его деятельности [1, 2]. Результаты исследовательских работ помогают современным инвесторам самостоятельно или через различных посредников и консультантов более глубоко понять тонкости и адекватно оценить возможности безрисковой портфельной теории и практики [3, 4]. Они также используются аналитиками и практиками рынка, вооружая их более продвинутыми инструментами анализа. Уже сегодня обычным для современных аналитиков является использование для анализа состояния рынка серьезного математического аппарата [5], ведущих информационных технологий [6], применение искусственного интеллекта [7 – 9]. При этом широко используются как дающие хорошие результаты методики тридцатилетней давности [10], так и методики искусственного интеллекта, в надежде на то, что несмотря на трудности их настройки и подгонки, они помогут вскрыть до сих пор не разгаданные глубинные факторы воздействия на рынок и сделают его более эффективным. По эффективности старых и новых теорий и методов у участников рынка нет единого мнения.

Результаты современных исследований показывают, что в связи с существенными отличиями в работе развитых, развивающихся и пограничных рынков предложенные исследователями методы, хорошо зарекомендовавшие себя на развитых рынках, не работают или плохо работают на остальных [11 – 14].

Развитые страны отличает сильный и активный рынок, вносящий значительный вклад в развитие экономики этих стран. Экономика стран развивающихся и пограничных рынков очень нуждается в привлечении финансовых средств как собственных, так и иностранных инвесторов. Ситуация осложняется тем, что собственные инвесторы этих рынков малоопытны и малопрофессиональны, экономическая ситуация нестабильна. Не хватает средств для формирования инвестиционных портфелей, мешают элементы тенезации рынка, законодательная и нормативно-правовая база этих рынков нуждается в совершенствовании для повышения доверия инвесторов и эффективности рынка.

На первый взгляд кажется, что в дополнительных научных исследованиях нуждаются именно эти рынки, поскольку они находятся в начале пути и инвестиции в них рассматриваются инвесторами как шаги в неизвестность. Но это ошибочное

представление, поскольку многие масштабные потрясения и потери инвесторов отмечены именно на развитых рынках. Казалось бы, при успешной многолетней разработке и внедрении научных методов и подходов, ставших классическими, при наличии аналитиков высочайшего класса, включая нобелевских лауреатов, получивших премии за научный вклад в развитие экономики, какие могут быть потрясения на развитых рынках? Однако фондовые рынки развитых стран (с начала функционирования и до сегодняшнего времени) изобилуют историями о потерях инвесторов во время характерных для фондовых рынков неожиданных крахов.

Таким образом, на сегодняшнем этапе развития фондового рынка, ни использование самых современных теорий, методов и подходов, ни высокий статус рынка, ни обеспеченность высококлассным персоналом и аналитическими инструментами, не являются гарантией от потерь и не позволяют уверенно спрогнозировать последствия принятых инвестиционных решений. В современных условиях не представляется возможным предложить универсальную формулу, которая бы учитывала все тонкости прогнозирования фондового рынка. Результативными остаются исследования главных показателей рынка (доходности [15, 16], волатильности [17, 18], асимметрии [19 – 21], эксцесса [22], риска хвоста [23]). Именно они являются фундаментом осознанных инвестиций и ожидаемой доходности.

1.2. Цели и ключевые шаги исследования. Цель данного исследования:

– выяснить можно ли с помощью методов и подходов статистической механики получить адекватное аналитическое выражение для распределения доходности, которое можно будет использовать не только для математического прогнозирования изменений доходности рынка, но и для обоснования причинно-следственного механизма, приводящего к изменениям доходности;

– позволяет ли аппарат статистической механики в условиях неопределенности фондового рынка реализовать такой вероятностный подход, с помощью которого можно будет получить более точные результаты распределения доходности по сравнению с эталонным нормальным (Гауссовым) распределением?

– если такое распределение будет получено, то к характеристикам какого из известных распределений оно будет ближе, к нормальному (Гауссовому) или, например, к распределению Лапласа?

Ключевые шаги исследования – построение гамильтониана системы, получение распределения Гиббса для цен акций и облигаций, вывод аналитической формулы для функции распределения логарифмической доходности, визуальный анализ полученных результатов.

Как известно, в настоящее время для оценки динамики рынка широко используется нормальное (Гауссово) распределение. Также известно, что оно не в полной мере отражает реальную динамику фондового рынка. И хотя существует целый ряд альтернативных видов распределений доходности (распределение богатства Парето [24], распределение цен акций Леви [25], распределение Больцмана [26], распределение Лапласа [27],) фондовый рынок пока на них не переходит и ни одно из них не является общепринятым. В тоже время целый ряд исследований подтверждает, что например, распределение Лапласа показывает большую точность при оценке ежедневной доходности рынка. Вопрос перехода на другое распределение остается открытым.

Для реализации поставленных в работе целей в качестве исходной модели использована модель Лотки-Вольтерра, применяемая в экологии для описания систем типа «хищник-жертва». Предлагаемый в работе метод исследования развивает идею, согласно которой в основе динамики фондового рынка лежит конкуренция. Математически эта идея наилучшим образом описывается с помощью модели Лотки-Вольтерра [28 – 31], которая сравнительно недавно стала использоваться для моделирования оборота акций и облигаций на фондовом рынке. Целесообразность использования этих уравнений для оценки оборота акций и облигаций (по аналогии с оборотом биомассы в моделях типа «хищник-жертва» в биологии) подробно обоснована в работе Теодора Модиса (T. Modis) [32]. Как отмечено в этой работе, подход с рассмотрением фондового рынка как экосистемы и использование для анализа и прогноза системы уравнений Лотки-Вольтерра *«обеспечивает новый, уникальный и научно обоснованный способ прогнозирования тенденций и получение понимания на фондовом рынке»*. Эта исследовательская работа была очень успешной и привела к публикации на ее основе широко известной книги Т. Модиса [33]. (С результатами успешного применения в экономике принципов статистической механики можно ознакомиться в работах [34 – 36], с результатами использования системы уравнений Лотки-Вольтерра – в работах [37 – 44]).

Следует отметить определенное отличие модели Лотки-Вольтерра, используемой в настоящей работе от модели Теодора

Модиса [32]. Основным отличием является то, что в данной работе не учитывается влияние на динамику системы конечности размера экологической ниши. В работе используется предположение, что ресурсы экологической ниши не ограничены. Однако, несмотря на это отличие, исследуемая модель также хорошо аппроксимирует динамику фондового рынка. (Подробности и объяснения выбора модели приведены в разделе 2).

Оригинальность и новизна настоящей работы заключается в том, что связь динамического и статистического описания исходной системы осуществляется через ее гамильтониан, использование которого дает возможность описывать не только динамику финансовых показателей, но и их статистические характеристики. Учитывая, что на динамику фондового рынка влияет большое количество факторов, многие из которых неизвестны, для исследования распределения доходности акций используются такие подходы и инструменты статистической механики как вероятностный подход, реализованный в рамках статистической механики с помощью принципа максимальной энтропии, Больцмановский фактор, входящий в распределение Гиббса, производящий функционал, позволяющий определить первые моменты и его предельный случай – статистическую сумму, температура – как макроскопический параметр, релаксация, использованная для определения совместной функции распределения цен акций.

Для исследования функции распределения логарифмической доходности применен метод преобразования Фурье, который позволил получить результаты в компактном и наглядном виде. На заключительных этапах исследования (при вычислении функции распределения логарифмической доходности) в комбинации с преобразованием Фурье применен асимптотический метод перевала, позволивший получить аналитические результаты в явном виде в элементарных функциях.

Настоящая статья организована следующим образом:

– в разделе 2 представлена исходная модель и построен ее гамильтониан;

– в разделе 3 построен вероятностный подход и получено аналитическое выражение совместной функции распределения вероятностей цен акций и облигаций с помощью распределения Гиббса с использованием принципа максимальной энтропии;

– в разделе 4 вычислена функция распределения логарифмической доходности акций на основе полученного в разделе 3 распределения Гиббса;

- в разделе 5 приведены результаты аналитического вычисления эксцесса и других основных характеристик функции распределения логарифмической доходности акций;
- в разделе 6 представлено описание графиков и выполнен визуальный анализ полученных результатов;
- в разделе 7 приведены основные выводы по итогам исследования;
- в приложении А доказана факторизуемость полученного в разделе 3 распределения Гиббса;
- в приложении В дано пояснение и вычислена комбинация параметров α, β , входящих в формулы (4.17)–(4.20) для функции распределения логарифмической доходности;
- в приложении С дано вычисление в явном виде функции распределения логарифмической доходности для конкретного случая, когда интервал $t = \tau$ (τ – время релаксации);
- в приложении Д методом перевала вычислена аналитическая формула (4.18).

2. Исходная модель. Описание исходной модели и построение ее гамильтониана. Подбор модели для обеспечения качественного анализа доходности фондового рынка с помощью формализма статистической механики осуществлялся исходя из следующих критериев:

- исследуемая динамическая модель должна быть гамильтоновой;
- гамильтониан системы должен быть аддитивен;
- используемые канонические переменные должны быть приспособлены для описания логарифмической доходности;
- алгебраическая структура гамильтониана должна быть такой, чтобы полученное вероятностное распределение допускало интегрирование в явном виде;
- исходная динамическая система должна хорошо аппроксимировать динамику фондового рынка.

Кроме того, модель должна раскрывать причинно-следственный механизм, вызывающий изменение направления динамики рынка акций и облигаций. Для этого в работе развита идея Т. Модиса [32]. В ее основу положено предположение о главенствующей роли конкуренции на фондовом рынке между акциями и облигациями за внимание и деньги инвесторов (по аналогии с оборотом биомассы в моделях типа «хищник-жертва»).

Для решения этих вопросов в настоящей работе также использована модель Лотки-Вольтерра типа «хищник-жертва». Основным ее отличием от модели Т. Модиса является то, что в данной работе не учитывается влияние на динамику системы конечности размера экологической ниши. В этой работе используется предположение, что ресурсы экологической ниши не ограничены. Такой выбор продиктован изложенными выше требованиями к модели. Несмотря на определенное упрощение, как будет показано ниже, исследуемая модель хорошо аппроксимирует динамику фондового рынка.

В оригинальной работе Теодора Модиса [32] для описания взаимодействия между акциями и облигациями использована разновидность системы Лотки-Вольтерра с квадратичными членами, учитывающими конечный размер экологической ниши. Она имеет вид:

$$\frac{dX}{dt} = \alpha_x X - b_x X^2 + c_{xy} XY, \quad (2.1)$$

$$\frac{dY}{dt} = \alpha_y Y - b_y Y^2 + c_{yx} YX. \quad (2.2)$$

Здесь параметры α , b и c влияют на скорость роста. Параметры α определяют способность каждого вида размножаться, параметры b связаны с ограничением емкости ниши, параметры c описывают взаимодействие с другими видами.

X – численность акций, Y – численность облигаций.

Данная разновидность системы Лотки-Вольтерра в общем случае не гамильтонова. Она содержит шесть произвольных параметров и требование ее гамильтоновости налагает на них три условия. При выполнении этих условий она гамильтонова. В противном случае – нет. Ее гамильтониан имеет вид:

$$H = aXY - bXY^2 - cX^2Y. \quad (2.3)$$

Уравнение Гамильтона для данного гамильтониана совпадает с уравнениями (2.1), (2.2) при условии:

$$\alpha_x = a; \alpha_y = -a, \quad (2.4)$$

$$b_x = 2c; b_y = -2b, \quad (2.5)$$

$$c_{xy} = -2b; c_{yx} = 2c. \quad (2.6)$$

Каноническими координатами и каноническими импульсами данной системы являются переменные X и Y соответственно. Для приведения системы к гамильтоновому виду не требуется каких-либо их преобразований. Однако применительно к условиям реального фондового рынка эти довольно жесткие условия скорее всего не будут выполняться и в большинстве случаев система не будет гамильтоновой.

Для реализации поставленных в работе целей (прогнозирования фондового рынка с использованием формализма статистической механики) гамильтоновость системы является одним из важнейших основных условий. Поэтому в данной работе используется другая разновидность системы Лотки-Вольтерра, которая позволяет построить удовлетворяющий всем вышеперечисленным требованиям аддитивный гамильтониан. Она также отражает идею Т. Модиса о конкуренции акций и облигаций за внимание инвесторов и имеет следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x - \gamma_1 xy, \quad (2.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha_2 y + \gamma_2 xy, \quad (2.8)$$

где x – средняя цена облигаций, y – средняя цена акций, α_1 – коэффициент, которому в биологии соответствует коэффициент рождаемости жертв, α_2 – коэффициент, которому соответствует коэффициент смертности хищников, γ_1 и γ_2 – коэффициенты, отражающие взаимодействия акций и облигаций, t – время.

Эта система является частным случаем системы (2.1), (2.2) при условии равенства нулю коэффициентов b_x и b_y .

Перейдем далее к построению гамильтониана исходной системы (2.7), (2.8). Необходимо отметить, что не существует единого рецепта приведения системы к гамильтоновому виду. Все зависит от конкретной ситуации. В рассматриваемом в работе случае гамильтоновость обусловлена факторизацией правых частей системы

(2.7), (2.8). Поясним сказанное. Система (2.7), (2.8) может быть представлена в виде с факторизованными правыми частями:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha_1 - \gamma_1 y), \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-\alpha_2 + \gamma_2 x). \quad (2.10)$$

Разделим левую и правую части уравнения (2.9) на x и левую и правую части уравнения (2.10) на y . Получим следующую систему:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \int_1^x \frac{dx}{x} = \alpha_1 - \gamma_1 y, \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \int_1^y \frac{dy}{y} = -\alpha_2 + \gamma_2 x. \quad (2.12)$$

В итоге получена формула, левая часть которой зависит только от x , а правая только от y , и, наоборот, для второго уравнения системы. Такая алгебраическая структура характерна для гамильтоновых систем с аддитивным гамильтонианом. Для приведения системы к гамильтоновому виду теперь достаточно сделать замену переменных.

Вид замены переменных подсказан структурой интегралов в левых частях формул (2.11), (2.12):

$$q(y) = \int_1^y \frac{dy}{y} = \ln y, \quad (2.13)$$

$$p(x) = \int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x. \quad (2.14)$$

Благодаря удачно выполненной замене переменных полученные канонические переменные p и q (представляющие собой логарифм цены облигаций и логарифм цены акций соответственно) намного

упрощают дальнейшее исследование. В этих переменных система (2.11), (2.12) приобретает гамильтонов вид:

$$\frac{dq}{dt} = \gamma_2 e^p - \alpha_2 = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (2.15)$$

$$\frac{dp}{dt} = \alpha_1 - \gamma_1 e^q = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.16)$$

При этом гамильтониан принимает следующую форму:

$$H = \gamma_2 e^p - \alpha_2 p + \gamma_1 e^q - \alpha_1 q = H_1(p) + H_2(q). \quad (2.17)$$

В разделе представлена исходная система (2.7), (2.8) и построен ее гамильтониан (2.17), удовлетворяющие перечисленным в начале раздела требованиям. Гамильтониан аддитивен, канонические переменные p и q представляют собой логарифмы цен акций и облигаций, что значительно упрощает дальнейшее исследование распределения доходности акций. В следующем разделе с помощью заданного гамильтониана перейдем к построению вероятностного подхода, позволяющего в рамках формализма статистической механики получить аналитическое выражение совместной функции распределения вероятностей цен акций и облигаций.

3. Построение вероятностного подхода. Получение аналитического выражения совместной функции распределения вероятностей цен акций и облигаций с помощью распределения Гиббса с использованием принципа максимальной энтропии. Учитывая, что на динамику фондового рынка влияет большое количество факторов, многие из которых неизвестны, совершенно очевидно, что исследование распределения доходности акций требует использования вероятностных подходов. В данной работе вероятностное описание реализуется с помощью инструментов статистической механики. Наличие закона сохранения – гамильтониана исследуемой системы позволяет ввести каноническое распределение Гиббса. Для его построения в данном разделе будут выполнены следующие шаги:

1. Будет использована энтропия – один из основных инструментов статистической механики.

2. Для определения функционала энтропии будет использовано классическое представление энтропии Больцмана или Шеннона.

3. Для получения распределения Гиббса к функционалу энтропии будут добавлены множители Лагранжа, учитывающие сохранение энергии и нормировку функции вероятности.

4. Будет найден максимум построенного функционала, представляющий собой распределение Гиббса.

Скажем несколько слов о природе энтропии. Очень грубо можно сказать, что энтропия является «вероятностью вероятностей». Энтропия является счетчиком числа вариантов, которыми может реализоваться данное распределение вероятностей. Точнее – она является логарифмом этого числа. Поэтому на практике проявляется то распределение, для которого энтропия максимальна. В свете сказанного становится ясным содержание принципа максимальной энтропии – выживает распределение вероятностей, реализующееся максимальным числом способов. На практике часто максимизируется энтропия с учетом ограничений, присущих данной системе. Ниже будет использоваться два таких ограничения – нормировка интеграла от функции распределения вероятностей и сохранение полной энергии системы. Последнее условие непосредственно использует в явном виде полученный в предыдущем разделе гамильтониан.

Перейдем к реализации принципа максимальной энтропии. Формула классической энтропии Больцмана или Шеннона имеет следующий вид:

$$S = - \int \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q) \ln P(p, q) dp dq . \quad (3.1)$$

Здесь $P(p, q)$ – функция распределения вероятности.

Согласно принципу максимальной энтропии распределение вероятностей большого ансамбля переменных (в нашем случае большого количества финансовых инструментов, которые могут принимать разные значения) должно быть таким, чтобы энтропия Больцмана или Шеннона максимизировалась при соответствующих ограничениях, учитывающих необходимость сохранения основных параметров системы. Эти ограничения аналогичны ограничениям, применяемым в статистической физике к идеальному газу.

Первое ограничение состоит в том, что интеграл по всей области интегрирования от входящей в энтропию функции

распределения вероятностей равен единице. Это ограничение соответствует сохранению числа частиц в аналогичной модели для газа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q) dpdq = 1. \quad (3.2)$$

Второе ограничение состоит в необходимости сохранения полученной с помощью имеющегося гамильтониана средней энергии исследуемой системы, что соответствует сохранению энергии в аналогичной модели газа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) P(p, q) dpdq = E. \quad (3.3)$$

Для максимизации энтропии и реализации этих ограничений используем далее множители Лагранжа. Они используются для того, чтобы в процессе поиска максимума энтропии эти ограничения автоматически выполнялись. При поиске максимума энтропии строится функционал, содержащий функционал энтропии и множители Лагранжа:

$$F = S - \beta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(p, q) P(p, q) dpdq - \mu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q) dpdq. \quad (3.4)$$

Здесь S – функционал энтропии, а два идущих за ней выражения – множители Лагранжа, обеспечивающие автоматическое выполнение условий (3.2), (3.3).

Как известно, в точке максимума энтропии вариационная производная этого функционала должна обращаться в ноль. Вначале вычислим вариационную производную от этого функционала:

$$\frac{\delta F}{\delta P(p, q)} = -\ln P(p, q) - 1 - \beta H(p, q) - \mu. \quad (3.5)$$

Далее приравняем левую часть формулы (3.5) к нулю в силу обращения в ноль вариационной производной, получим следующую формулу:

$$\ln P(p, q) = -(1 + \mu) - \beta H(p, q). \quad (3.6)$$

Возьмем в уравнении (3.6) экспоненты от его левой и правой частей, получим совместную функцию распределения вероятностей цен акций и облигаций $P(p, q)$, которая может быть представлена в виде следующего распределения Гиббса:

$$P(p, q) = e^{-(1+\mu)} e^{-\beta H} = C e^{-\beta H(p, q)}. \quad (3.7)$$

Здесь $C = e^{-(1+\mu)}$. Параметр C представляет собой нормировочный множитель, который подбирается из условия, указанного в формуле (3.2). Он нормирует функцию распределения вероятности таким образом, чтобы интеграл от нее был равен единице.

Обычно он записывается в виде $C = \frac{1}{Z}$, где Z называется статистической суммой, $e^{-\beta H(p, q)}$ – представляет собой больцмановский фактор, который будет использован далее для определения вероятности конфигурации исследуемой системы.

Полученное распределение Гиббса будет использовано в следующем разделе для статистического описания цен акций и построения распределения логарифмической доходности акций на фондовом рынке.

4. Вычисление функции распределения логарифмической доходности акций на основе полученного в разделе 3 распределения Гиббса. Основной целью данной работы является получение функции распределения логарифмической доходности акций $W(r, t)$. В основе вычисления этой функции лежат две основные идеи. Первая идея состоит в вычислении функции распределения логарифмической доходности для произвольного интервала времени по функции распределения логарифмической доходности для интервала времени, равного времени релаксации с использованием мультипликативности ее Фурье-образа. Вторая идея состоит в использовании факторизации совместной функции распределения цен акций и облигаций, через которые выражается функция распределения логарифмической доходности для интервала времени, равного времени релаксации. При этом совместная функция распределения цен акций и облигаций выражается через произведение распределений Гиббса, найденных в предыдущем разделе.

Приступим к осуществлению этой программы.

Функция распределения логарифмическая доходности акций зависит от значения интервала t , для которого вычисляется доходность. Функции распределения доходности для разных интервалов связаны следующим соотношением:

$$W(r, t_1 + t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} W(r - r_0, t_1) W(r_0, t_2) dr_0. \quad (4.1)$$

Это соотношение означает, что функции распределения доходности для интервала времени $t = t_1 + t_2$ равна свертке функции распределения доходности для интервалов времени t_1 и t_2 . Соотношение (4.1) особенно просто выглядит для Фурье-образов функций распределения логарифмической доходности:

$$\tilde{W}(k, t_1 + t_2) = \tilde{W}(k, t_1) \tilde{W}(k, t_2). \quad (4.2)$$

Свойство, выражаемое формулой (4.2), можно назвать свойством мультипликативности Фурье-образов функции распределения логарифмической доходности. Здесь Фурье-образ функций распределения логарифмической доходности имеет вид:

$$\tilde{W}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} W(r, t) dr. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.2) следует, что если известна функция распределения доходности и ее Фурье-образ для интервала t_0 , то Фурье-образ функции распределения доходности для произвольного интервала t определяется формулой:

$$\tilde{W}(k, t) = \tilde{W}(k, t_0)^{\frac{t}{t_0}}. \quad (4.4)$$

Из формулы (4.4) следует, что для получения функции распределения логарифмической доходности для произвольного интервала времени t достаточно знать функцию распределения доходности для одного определенного интервала t_0 . Для вычисления функцию распределения доходности для интервала времени t_0 необходимо знать совместную плотность распределения цен акций

$P(q, q_0, t_0)$. (Здесь q_0 – цена акций в момент времени t_0 , q – цена акций в момент времени $t_0 + t$). Функция распределения логарифмической доходности определяется по следующей формуле:

$$W(r, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0 + r, q_0, t_0) dq_0. \quad (4.5)$$

В свою очередь совместная плотность распределения цен акций выражается через совместную плотность распределения цен акций и облигаций по формуле:

$$P(q, q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q, p_0, q_0, t_0) dp dp_0. \quad (4.6)$$

Из формул (4.5), (4.6) вытекает следующая формула для функции распределения логарифмической доходности:

$$W(r, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q_0 + r, p_0, q_0, t_0) dp dp_0 dq_0. \quad (4.7)$$

В качестве интервала времени t_0 выбран интервал, равный времени релаксации τ . (В связи с использованием термина «время релаксации» здесь и далее подразумевается аналогия между случайными блужданиями цены и случайными движениями молекул в газе). Для этого интервала совместная плотность распределения цен акций и облигаций факторизуется и выражается через пару распределений Гиббса:

$$P(p, q, p_0, q_0, \tau) = P(p, q)P(p_0, q_0). \quad (4.8)$$

Поведение совместной функции распределения цен акций и облигаций взято в разные моменты времени для некоторого интервала t . Зависимость поведения функции от интервала t понять достаточно легко. Если интервал времени t мал, то трудно рассчитывать на то, что зависимость от переменных p и q будет сильно отличаться от зависимости от переменных p_0 и q_0 . В пределе $t \rightarrow 0$ должно получиться что-то, похожее на выражение

$\delta(p - p_0)\delta(q - q_0)P(p_0, q_0)$. Нетрудно проверить, что интеграл от этого выражения по переменным p_0 и q_0 даст функцию $P(p, q)$, а интеграл по переменным p и q даст функцию $P(p_0, q_0)$, как это и должно быть по определению совместной функции распределения цен акций и облигаций. С увеличением интервала t начинает проявляться большая независимость в поведении функции для переменных p , q и p_0 , q_0 . Для некоторого, достаточно большого интервала t , поведение функции в зависимости от переменных p , q должно забыть о влиянии зависимости от переменных p_0 и q_0 . Для этого интервала времени совместная функция распределения цен акций и облигаций приближенно факторизуется. Она будет иметь вид, представленный формулой (4.8). Этот интервал времени и есть время релаксации. Это именно тот интервал, для которого совместная функция распределения цен акций и облигаций просто выражается через распределение Гиббса. Взять меньшее время нельзя, потому, что нарушится факторизация, а для большего времени выражение (4.8) перестает согласовываться с мультипликативностью Фурье-образов функции доходности (формула (4.2)). Поэтому, для вычисления функции доходности для производного интервала времени (формула (4.4)), необходимо выбрать в качестве времени t_0 время релаксации, а в качестве Фурье-образа функции доходности $\tilde{W}(k, \tau)$ – Фурье-образ функции, определенный ниже формулой (4.9).

Формулы (4.6), (4.8) определяют функцию распределения логарифмической доходности для интервала времени $t_0 = \tau$:

$$W(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q_0 + r)P(p_0, q_0)dpdq_0 . \quad (4.9)$$

Формула (4.9) может быть значительно упрощена, если воспользоваться формулой (A.7) факторизации распределения Гиббса, подробно описанной **в приложении А:**

$$P(p, q) = P(p)P(q) . \quad (4.10)$$

В итоге функция распределения доходности для интервала τ примет следующий вид:

$$W(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(q_0 + r)P(q_0)dq_0. \quad (4.11)$$

Для того чтобы перейти к другим временным интервалам необходимо вычислить Фурье-образ функции распределение доходности $W(r, \tau)$ и воспользоваться формулой (4.4). Фурье-образ функции распределение логарифмической доходности $W(r, \tau)$ определяется следующей формулой:

$$\tilde{W}(k, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} P(q_0 + r)P(q_0)dq_0dr = \tilde{P}(k)\tilde{P}(-k). \quad (4.12)$$

Здесь $\tilde{P}(k)$ – Фурье-образ входящего в распределение Гиббса сомножителя $P(q)$, определенного формулой (A.7). Этот Фурье-образ имеет вид:

$$\tilde{P}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikq} P(q)dq = \frac{1}{Z_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikq} e^{-\beta\gamma_1 e^q + \beta\alpha_1 q} dq. \quad (4.13)$$

В интеграле (4.13) нетрудно узнать интеграл Эйлера, если сделать следующую замену переменных:

$$\theta = \beta\gamma_1 e^q. \quad (4.14)$$

После этой замены получим выражение для функции $\tilde{P}(k)$ в терминах гамма-функций:

$$\tilde{P}(k) = \frac{1}{Z_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\theta}}{\theta} \frac{\theta^{(\beta\alpha_1 + ik)}}{(\beta\gamma_1)^{(\beta\alpha_1 + ik)}} d\theta = \frac{1}{(\beta\gamma_1)^{ik}} \frac{\Gamma(\beta\alpha_1 + ik)}{\Gamma(\beta\alpha_1)}. \quad (4.15)$$

При выводе этой формулы использована формула (A.5) для статистической суммы Z_1 . Таким образом, получено окончательное аналитическое выражение для Фурье-образа $\tilde{P}(k)$ в явном виде. Для получения окончательного выражения для функции распределения

логарифмической доходности (с использованием формул (4.12) и (4.15)) определим далее выражение $\tilde{P}(k)\tilde{P}(-k)$:

$$\tilde{P}(k)\tilde{P}(-k) = \frac{\Gamma(\beta\alpha_1 - ik) \Gamma(\beta\alpha_1 + ik)}{\Gamma(\beta\alpha_1) \Gamma(\beta\alpha_1)}. \quad (4.16)$$

Подставив полученное выражение в формулу (4.12) и воспользовавшись формулой (4.4), получим окончательное аналитическое выражение для функции распределения логарифмической доходности:

$$W(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} \left[\frac{\Gamma(\beta\alpha_1 - ik)}{\Gamma(\beta\alpha_1)} \frac{\Gamma(\beta\alpha_1 + ik)}{\Gamma(\beta\alpha_1)} \right]^{\frac{t}{\tau}} dk. \quad (4.17)$$

Входящая в формулу (4.17) комбинация параметров $\beta\alpha_1$ вычислена в **приложении В**.

Формула (4.17) является точной. Поскольку при численных расчетах работать с гамма-функциями неудобно, специально для этих целей упростим аналитическую формулу (4.17) с использованием большой величины параметра $\beta\alpha_1$. В отличие от формулы (4.17) упрощенная аналитическая формула будет выражена в терминах элементарных функций. Это делает очевидным ее поведение для аналитиков, позволяет более глубоко понять и оценить основные особенности исследуемой системы, а также значительно упрощает представленную в разделе 6 процедуру визуального анализа результатов исследования. Упрощенная формула имеет следующий вид:

$$W(r, t) = \frac{A}{\left(2 \cosh\left(\frac{r}{2(t/\tau)}\right)\right)^{\frac{(M-1)t}{\tau} + 1}}. \quad (4.18)$$

Отправной точкой получения формул (4.17), (4.18) является функция $W(r, \tau)$, определенная формулой (4.11). Ее Фурье-образ находится в квадратных скобках в подынтегральном выражении в формуле (4.17). При вычислении функции $W(r, \tau)$ с помощью формулы (4.17) можно стартовать не с Фурье-образа функции $W(r, \tau)$,

как это предлагается в формуле (4.17), а непосредственно с функции $W(r, \tau)$, как это сделано ниже, в **приложении D**. При этом будет дважды применяться прямое и обратное преобразование Фурье. Результаты обоих преобразований Фурье будут вычислены методом перевала. Он также будет применен дважды. Ввиду важности функции $W(r, \tau)$ для процесса вычисления функции $W(r, t)$, представленной формулой (4.17), ее вывод приведен в **приложении C**, где она будет получена в терминах элементарных функций. Вывод формулы (4.18) выполнен с использованием метода перевала. Подробности вывода формулы приведены в **приложении D**.

В формулы (4.17) и (4.18) входит комбинация параметров $\beta\alpha_1$. В формулу (4.18) она входит в виде параметра $M = 2\beta\alpha_1$. Эта комбинация представляет собой единственный параметр, полученный путем обработки исторических данных (ежедневные цены закрытия для индекса S&P 500 SPY – источник Yahoo Finance). Остальные данные вычисляются аналитически. В **приложении B** этот параметр выражен через отношение квадрата среднего значения логарифмов цен акций и дисперсии логарифмов цен акций (формула (B.9)).

Таким образом, формулы (4.17) и (4.18) позволяют получить функцию распределения логарифмической доходности акций, используя всего два первых момента для массива логарифмов цен акций вместо использования всего массива, как это обычно делается при построении графика функции распределения доходности с использованием исторических данных.

Численная проверка аналитических формул (4.17), (4.18) показала, что они адекватно описывают только однодневные доходности. Поэтому для улучшения прогностических характеристик формул (4.17), (4.18) выполняется их перенормировка. Она сводится только к мультипликативной перенормировке большого параметра $M = 2\beta\alpha_1$, входящего в эти формулы. При этом $M \rightarrow \lambda M$, где λ – параметр перенормировки. После такой перенормировки и численной проверки ее результатов формулы (4.17), (4.18) описывают весь диапазон доходностей. Это позволит аналитикам адекватно оценивать не только ежедневную доходность, но и доходность за произвольный промежуток времени (неделю, месяц и т.д.). Для случая использования перенормировки в перенормированных формулах (4.17), (4.18) следует заменить параметр $M = 2\beta\alpha_1$ на $\lambda M = 2\lambda\beta\alpha_1$. Универсальные перенормированные формулы (4.17), (4.18) будут иметь следующий вид:

$$W(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr} \left[\frac{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1 - ik)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \frac{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1 + ik)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right]^{\frac{t}{\tau}} dk. \quad (4.19)$$

$$W(r, t) = \frac{A}{\left(2 \cosh\left(\frac{r}{2(t/\tau)}\right)\right)^{((\lambda M - 1)\frac{t}{\tau} + 1)}}. \quad (4.20)$$

Здесь перенормированная нормировочная константа A имеет следующий вид:

$$A = \frac{\Gamma((\lambda M - 1)(t/\tau) + 1)}{\Gamma^2(0.5(\lambda M - 1)(t/\tau) + 1)} \frac{1}{(t/\tau)}. \quad (4.21)$$

После получения аналитического выражения для функции распределения логарифмической доходности акций (4.20) перейдем к определению первых моментов функции – среднего значения доходности, дисперсии, асимметрии и эксцесса.

5. Аналитическое вычисление эксцесса и других основных характеристик для функции распределения логарифмической доходности акций. Функция распределения логарифмической доходности позволяет получить аналитические выражения для четырех первых моментов функции. Этими моментами являются – среднее значение μ , дисперсия σ^2 , асимметрия S и эксцесс K . Асимметрия и эксцесс выражаются через моменты с точностью до множителей $\frac{1}{\sigma^3}$ и $\frac{1}{\sigma^4}$. Хорошо известно, что моменты выражаются через производные в нуле от Фурье-образа функции распределения логарифмической доходности. Поэтому существенным фактором является то, что получено не только аналитическое выражение для функции распределения логарифмической доходности, но также аналитическое выражение для ее Фурье-образа. Это позволяет автоматически получить четыре первых момента и выражающиеся через них характеристики функции распределения логарифмической доходности μ , σ^2 , S и K .

Перейдем к их получению.

Первый и третий моменты не требуют дополнительных вычислений, поскольку в силу симметрии функции распределения доходности относительно замены $r \rightarrow -r$ они равны нулю:

$$\mu(\beta) = \langle r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} rW(r,t)dr = 0, \quad (5.1)$$

$$S(\beta) = \frac{\langle (r - \mu)^3 \rangle}{\langle (r - \mu)^2 \rangle^{3/2}} = \frac{1}{\sigma^3(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} (r - \mu)^3 W(r,t)dr = 0. \quad (5.2)$$

Таким образом, величины полученного среднего значения и асимметрии получены автоматически. Поэтому фактически необходимо вычислить только дисперсию и эксцесс. Выражение для дисперсии имеет следующий вид:

$$\sigma^2 = \langle (r - \mu)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (r - \mu)^2 W(r,t)dr. \quad (5.3)$$

Интеграл (5.3) может быть вычислен аналитически:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 W(r,t)dr &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \frac{e^{-ikr}}{2\pi} \tilde{W}(k,t)dkdr = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial k^2} \tilde{W}(k,t)dkdr = - \frac{d^2}{dk^2} [\tilde{P}(k)\tilde{P}(-k)]^t \Big|_{k=0}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

В формуле (5.4) подразумевалось интегрирование по частям по переменной k для учета множителя r^2 . В итоге из формулы (5.4) следует окончательное выражение для дисперсии:

$$\sigma^2 = - \frac{2t}{\tau} \left[\left(\frac{\Gamma^I(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right)^2 - \left(\frac{\Gamma^{II}(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right) \right]. \quad (5.5)$$

Эксцесс вычисляется по формуле:

$$K(\beta) = \frac{\langle (r - \mu)^4 \rangle}{\langle (r - \mu)^2 \rangle^2} = \frac{1}{\sigma^4(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} (r - \mu)^4 W(r,t)dr. \quad (5.6)$$

Входящий в выражение (5.6) для эксцесса интеграл может быть преобразован к следующему виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^4 W(r, t) dr = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{2\pi} \frac{\partial^4}{\partial k^4} \tilde{W}(k, t) dk dr =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k) \frac{\partial^4}{\partial k^4} \tilde{W}(k, t) dk = \frac{d^4}{dk^4} [\tilde{P}(k) \tilde{P}(-k)]^t \Big|_{k=0} \quad (5.7)$$

В формуле (5.7) подразумевается использование интегрирования по частям по переменной k для учета множителя r^4 . В итоге формула эксцесса принимает следующий вид:

$$K(\beta) = \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{2t}{\tau} \left[\frac{\Gamma^{IV}(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right] - \frac{4\Gamma^{III}(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \frac{\Gamma^I(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} + \right.$$

$$\left. + 3 \left(\frac{\Gamma^{II}(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right)^2 \right] + 12 \frac{t}{\tau} \left(\frac{t}{\tau} - 1 \right) \left[\left(\frac{\Gamma^I(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right)^2 - \frac{\Gamma^{II}(\lambda\beta\alpha_1)}{\Gamma(\lambda\beta\alpha_1)} \right]^2 \quad (5.8)$$

Таким образом, выражения для среднего значения, дисперсии, асимметрии и эксцесса получены в явном виде.

6. Описание графиков и визуальный анализ полученных результатов. Результаты визуального анализа полученных данных представлены на рисунках 1 и 2. Обработка всех данных (включая исходные и полученные в работе) и построение графиков выполнено с использованием программы Matlab. Для построения графиков использованы исторические данные ежедневной доходности за двадцать лет (за период с 05.06.2003 по 05.06.2023) для индекса S&P 500 SPY (источник данных – Yahoo Finance, цены закрытия). В работе используется массив логарифмов цен акций, полученный логарифмированием массива цен акций.

На рисунке 1 совмещены три следующих графика:

- график функции распределения логарифмической доходности, построенный с использованием формулы (4.20), представлен на рисунке сплошной линией. Единственным параметром (входящим в формулы (4.19) и (4.20) и использующим исторические данные, является комбинация параметров $\beta\alpha_1$. Для ее вычисления используются только два первых момента для массива логарифмов цен акций (формула (B.9)) вместо всего массива логарифмов цен акций (как это обычно делается при построении графиков распределения доходности с использованием исторических данных);

- график функции распределения логарифмической доходности S&P 500 SPY, построенный с использованием

исторических данных ежедневной доходности за двадцать лет для цен закрытия, представлен штриховой линией;

– график нормального распределения выполнен с использованием стандартного распределения Гаусса $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ и представлен на рисунке штрихпунктирной линией.

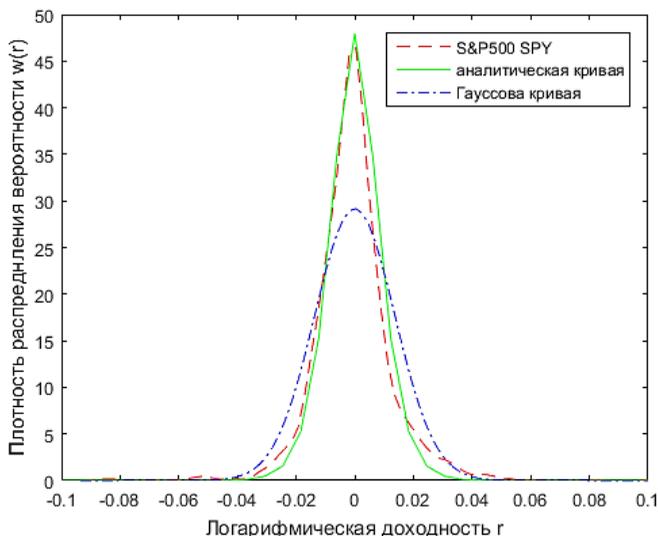


Рис. 1. Графики S&P 500 SPY, аналитической и Гауссовой кривой

Из рисунка 1 видно, что полученная в работе аналитическая кривая с использованием формулы (4.20) намного точнее, чем Гауссова аппроксимирует кривую, описывающую исторические данные.

На рисунке 2 также совмещены три графика.

Первые два графика те же, что и на рисунке 1. Третий график представляет собой график функции распределения логарифмической доходности Лапласа. Он выполнен с использованием формулы

$$P(x) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|}.$$

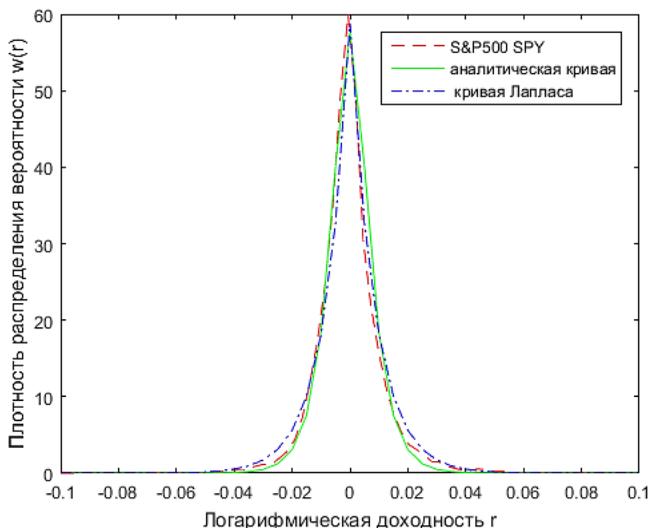


Рис. 2. График S&P 500 SPY, аналитической и кривой Лапласа

Из рисунка 2 видно, что все три графика хорошо согласуются, при этом аналитическая кривая точнее, чем кривая Лапласа аппроксимирует исторические данные. Визуальный анализ обоих рисунков позволяет сделать вывод о том, что по сравнению с нормальным распределением Гаусса, как распределение Лапласа, так и распределение, полученное в данной работе, дают более точную и реалистичную картину ежедневной доходности акций фондового рынка.

В настоящей работе формализм статистической механики применен для прогнозирования распределения логарифмической доходности акций с использованием исторических данных по котировкам одного из основных индикаторов и барометров мирового фондового рынка – индекса S&P 500 SPY, который торгуется как акции.

Однако использованный в работе подход может быть применен для анализа и прогнозирования распределения логарифмической доходности акций конкретных компаний.

В качестве примера выполнен визуальный анализ распределения логарифмической доходности обыкновенных акций ПАО «Сбербанк». График функции распределения логарифмической доходности представлен на рисунке 3.

Для построения графика использованы фактические исторические данные по ежедневным котировкам акций ПАО

«Сбербанк» за десять лет (за период с 05.06.2013 по 05.06.2023, источник данных Investing.com).

На этом же рисунке показан график функции распределения логарифмической доходности, построенный с использованием полученной в работе аналитической формулы (4.20) и график нормального распределения Гаусса.

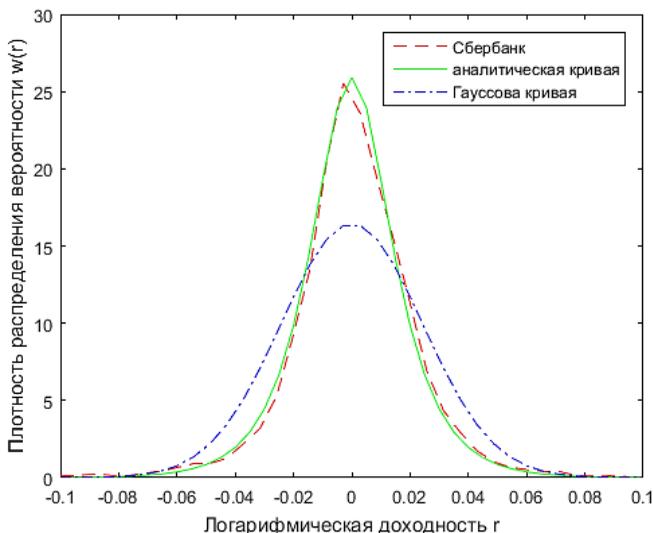


Рис. 3. График кривой Сбербанка, аналитической и Гауссовой кривой

Из рисунка 3 явно видно, что полученная в работе аналитическая кривая с использованием формулы (4.20) намного точнее, чем Гауссова аппроксимирует кривую, описывающую фактические исторические данные, что подтверждает эффективность предложенного метода прогнозирования.

Как известно, акции ПАО «Сбербанк» относятся к «голубым фишкам», что повышает их надежность и привлекательность в глазах инвесторов. Однако, для предложения инвесторам и аналитикам аргументированной дальновидной стратегии, необходим углубленный статистический анализ возможной доходности и риска инвестиций в акции этой компании, который выходит за рамки данного исследования.

Оценка ключевых факторов инвестирования (доходности и риска) только с помощью метода, предложенного в данной работе, равно как и с использованием распределения Гаусса и/или Лапласа, не

будет полностью объективной. Для принятия окончательного решения об инвестировании необходимо учитывать факторы, которые невозможно спрогнозировать с помощью этих инструментов (санкции, уровень инфляции, рост ВВП, стабильность рубля и т.д.).

Для определения средней процентной доходности за n дней необходимо перейти от логарифмической доходности $r(n)$ к однодневной процентной доходности $R(n)$ по формуле $R(n) = e^{r(n)} - 1$. Ожидаемая средняя процентная доходность $\bar{R}(n)$ определяется по формуле:

$$\bar{R}(n) = \int_{-\infty}^{\infty} W(r, n)(e^r - 1)dr = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(e^r - 1)}{(2 \cosh(\frac{r}{\tau}))^{((2M-1)\frac{n}{\tau} + 1)}} dr. \quad (6.1)$$

Обезопасить инвестицию можно, определив по формуле (5.5) степень риска путем вычисления стандартного отклонения от средней доходности акций.

Но любом случае (даже если вероятность результатов инвестирования, определенная с помощью формул и графиков оказывается многообещающей, и/или инвестор, исходя из собственного опыта считает, что будущая доходность акций ПАО «Сбербанк» превысит исторические данные), в обязательном порядке необходимо учитывать степень неопределенности существующей на момент инвестиций экономической ситуации.

7. Заключение. Основные выводы по результатам исследования:

1. Результаты работы подтверждают возможность и целесообразность прогнозирования распределения доходности акций фондового рынка с помощью методов и подходов статистической механики. Полученное аналитическое выражение для функции распределения логарифмической доходности акций дает возможность участникам рынка использовать его для математического прогнозирования изменений доходности рынка. Полученные результаты дают участникам рынка возможность выбора распределения, более глубокого понимания причинно-следственного механизма фондового рынка (если рассматривать его как экосистему), а также позволяют использовать для финансового моделирования хорошо изученный математический аппарат статистической механики.

2. Несмотря на устоявшиеся традиции использования нормального распределения для оценки динамики фондового рынка

(включая удобство его использования, наличие соответствующего программного обеспечения и результативность на больших временных масштабах), для оценки ежедневной доходности акций и своевременного улавливания риска, лучшим выбором являются более точные распределения, включая распределение, полученное в данной работе. Как показывает практика, обвалы рынка происходят гораздо чаще, чем они улавливаются распределениями Гаусса.

3. Краткий сравнительный анализ данной работы с аналогичными работами по этой же тематике дал следующие результаты:

- в работе (27) выполнено моделирование доходности с использованием распределения Лапласа и его сравнение с нормальным распределением Гаусса. Подтверждена большая эффективность распределения Лапласа. В данной работе аналогичные преимущества обнаружены у предлагаемого распределения, близкого к распределению Лапласа;

- в работе (26) функция распределения логарифмической доходности рассматривается как распределение Больцмана и вычислена в терминах специальных функций. В настоящей работе она получена в терминах элементарных функций, что значительно упрощает анализ ее поведения;

- в работе (16) аналитическое выражение для функции распределения логарифмической доходности получено с использованием исчисления Ито. В настоящей работе для этого использован альтернативный подход, основанный на применении формализма статистической механики. Он позволяет рассмотреть проблему с новой стороны, и направлен на поиск не рассмотренных ранее глубинных факторов.

4. Перспективными и важными являются следующие направления дальнейших исследований в области анализа и прогнозирования поведения фондового рынка:

- исследования по совершенствованию прогностических возможностей, обеспечивающие максимальную прозрачность и лучшее понимание всех процессов фондового рынка;

- изучение особенностей хаотического поведения системы, включая выявление и использование в прогностических целях индикаторов раннего предупреждения обвалов рынка;

- работы по тщательному и всестороннему анализу накопленного практического опыта по выходу из кризисных ситуаций и обвалов рынка, результаты которых можно будет использовать для

выработки предложений по своевременной компенсации возможных травмирующих воздействий на рынок.

Приложение А.

Факторизация распределения Гиббса. В приложении А будет доказана факторизуемость полученного в разделе 3 распределения Гиббса. Совместная функция распределения вероятностей цен акций и облигаций (3.7) может быть представлена следующим образом:

$$P(p, q) = \frac{1}{Z} e^{-\beta(\gamma_2 e^p - \alpha_2 p + \gamma_1 e^q - \alpha_1 q)} = \frac{e^{-\beta H}}{Z}. \tag{A.1}$$

Здесь β – обратная температура, Z – нормирующий множитель, называемый статистической суммой.

Покажем далее, что функция $P(p, q)$ факторизуется. Очевидно, что бoльцмановский фактор в формуле (A.1) факторизуется. Осталось показать, что статистическая сумма Z тоже факторизуется. Поскольку интеграл от совместной функции распределения вероятностей цен акций и облигаций равен единице, то из формулы (4.1) следует формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(p, q) dpdq = \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta H} dpdq = 1. \tag{A.2}$$

С использованием формулы (A.2) статистическая сумма определяется следующим образом:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\gamma_2 e^p - \alpha_2 p + \gamma_1 e^q - \alpha_1 q)} dpdq. \tag{A.3}$$

В силу аддитивности гамильтониана (2.17) статистическая сумма Z мультипликативна и распадается на произведение множителей Z_1 и Z_2 :

$$Z = Z_1 Z_2, \tag{A.4}$$

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\gamma_1 e^q + \beta\alpha_1 q} dq = \frac{\Gamma(\alpha_1 \beta)}{(\gamma_1 \beta)^{\alpha_1 \beta}}, \tag{A.5}$$

$$Z_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\gamma_2 e^p + \beta\alpha_2 p} dp = \frac{\Gamma(\alpha_2\beta)}{(\gamma_2\beta)^{\alpha_2\beta}}. \quad (\text{A.6})$$

Из формул (A.1), (A.4) следует факторизация функции $P(p, q)$:

$$P(p, q) = \left(\frac{e^{-\beta H_1(q)}}{Z_1}\right) \left(\frac{e^{-\beta H_2(p)}}{Z_2}\right) = P(q)P(p). \quad (\text{A.7})$$

Здесь $P(q)$ – вероятность распределения логарифма цены акций, $P(p)$ – вероятность распределения логарифма цены облигаций.

Приложение В.

Вычисление комбинации параметров $\alpha_1\beta$, входящих в формулы (4.17)-(4.20) для функции распределения логарифмической доходности. В формулы для функции распределения логарифмической доходности (4.17)-(4.20) в виде комбинации $\alpha_1\beta$ входит параметр β – обратная температура и параметр α_1 , (формулы (2.7), (2.8)). Для вычисления величины $\alpha_1\beta$ будут вычислены первый и второй моменты. Перейдем к их вычислению. Вначале, выполним переход от статистической суммы $Z_1(\beta)$ (формула (A.4) к производящей функции $Z_1(\beta, J)$. Производящая функция зависит от параметра J , называемого в физике источником. Статистическая сумма $Z_1(\beta)$ представляет собой предельный случай производящей функции в пределе $J = 0$. Формула для производящей функции может быть представлена в общем виде:

$$Z_1(\beta, J) = \int e^{-\beta(\gamma_1 e^q - \alpha_1 q) + Jq} dq. \quad (\text{B.1})$$

Легко видеть, что при таком определении производящей функции моменты переменной y (2.7) будут иметь следующий вид:

$$\langle (e^q)^J \rangle = \langle y^J \rangle = \frac{Z_1(\beta, J)}{Z_1(\beta, 0)}. \quad (\text{B.2})$$

Для вычисления производящей функции в явном виде выполним следующую замену переменных:

$$t = \gamma_1 \beta e^q. \tag{B.3}$$

После этой замены переменных формула (B.1) преобразуется в интеграл Эйлера:

$$Z_1(\beta, J) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha_1 \beta + J - 1} e^{-t}}{(\gamma_1 \beta)^{\alpha_1 \beta + J}} dt = \frac{\Gamma(\alpha_1 \beta + J)}{(\gamma_1 \beta)^{\alpha_1 \beta + J}}. \tag{B.4}$$

Из формулы (B.4) очевидно, что удачная структура гамильтониана модели позволяет вычислить производящую функцию в явном виде в терминах гамма-функций. Рекуррентное соотношение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ для гамма-функции позволяет легко находить моменты, используя формулу (B.4). Первый и второй моменты для переменной x будут иметь вид:

$$\langle y \rangle = e^q = \frac{Z_1(\beta, 1)}{Z_1(\beta, 0)} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \tag{B.5}$$

$$\langle y^2 \rangle = e^{2q} = \frac{Z_1(\beta, 2)}{Z_1(\beta, 0)} = \frac{\alpha_1^2}{\gamma_1^2} + \frac{\alpha_1}{\gamma_1 \beta}. \tag{B.6}$$

Комбинируя первый и второй моменты, можно вычислить среднее квадратичное отклонение для функции распределения цен акций:

$$\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \frac{\alpha_1}{\gamma_1^2 \beta} = \left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 \frac{1}{(\alpha_1 \beta)}. \tag{B.7}$$

Используя формулу (B.5) заменим выражение $\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2$ в формуле (B.7) на выражение $\langle y \rangle^2$. После произведенной замены формула (B.7) примет вид:

$$\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle = \frac{\langle y \rangle^2}{\alpha_1 \beta}. \tag{B.8}$$

С использованием формулы (В.8) получим окончательное выражение для комбинации параметров $\alpha_1\beta$:

$$\alpha_1\beta = \frac{\langle y \rangle^2}{\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle}. \quad (\text{В.9})$$

На этом вычисление входящей в формулы (4.17)–(4.20) комбинации параметров $\alpha_1\beta$ завершено.

Приложение С.

Вычисление функции распределения логарифмической доходности для интервала $t = \tau$ в явном виде. В приложении вычисляется функция распределения логарифмической доходности для конкретного случая, когда интервал времени равен времени релаксации.

Эта функция играет важную роль при получении формулы (4.18). Функция распределения логарифмической доходности для интервала $t = \tau$ может быть вычислена в явном виде. В качестве отправной точки используем формулу (4.11):

$$W(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(q)P(q+r)dq. \quad (\text{С.1})$$

Здесь $W(r, \tau)$ – функция распределения логарифмической доходности для интервала $t = \tau$.

Для получения аналитического выражения этой функции подставим в формулу (С.1) распределение вероятностей логарифма цен $P(q)$ и $P(q+r)$ из формулы (А.7):

$$W(r, \tau) = \frac{1}{Z_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\gamma_1 e^q (1+e^r)} e^{2\beta\alpha_1 q} e^{\beta\alpha_1 r} dq. \quad (\text{С.2})$$

Для осуществления интегрирования проведем перегруппировку слагаемых в показателях экспонент и замену дифференциала dq на $d(e^q)$. Получим следующий интеграл:

$$W(r, \tau) = \frac{e^{-\beta\alpha_1 r}}{Z_1^2} \int_0^{\infty} (e^q)^{2\beta\alpha_1 - 1} e^{-2\beta\gamma_1 e^q (1+e^r)} d(e^q). \quad (\text{С.3})$$

Удачный вид интеграла (С.3) позволяет преобразовать его к виду интеграла Эйлера. Как известно, это один из немногих интегралов, допускающих вычисление в аналитическом виде. Выполним далее следующую замену переменных:

$$t = \beta\gamma_1 e^{q(1+e^r)}. \quad (C.4)$$

После проведения этой замены получим интеграл Эйлера:

$$W(r, \tau) = \frac{e^{-\beta\alpha_1 r}}{Z_1^2} \int_0^\infty \frac{t^{2\beta\alpha_1 - 1} e^{-t}}{(\beta\gamma_1(1+e^r))^{2\beta\alpha_1}} dt. \quad (C.5)$$

Вычислим интеграл Эйлера в формуле (С.5) и получим окончательный результат для функции распределения логарифмической доходности акций:

$$W(r, \tau) = \frac{\Gamma(2\beta\alpha_1)}{\Gamma^2(\beta\alpha_1)} \frac{1}{(e^{-\frac{r}{2}} + e^{\frac{r}{2}})^{2\beta\alpha_1}}. \quad (C.6)$$

Формула (С.6) представляет собой частный случай аналитического выражения функции распределения логарифмической доходности акций фондового рынка. Она получена в явном виде, выражена в элементарных функциях. Полученная достаточно простая структура формулы (С.6) используется при выводе формул (4.18)–(4.20).

Приложение D.

Вычисление аналитической формулы (4.18) методом перевала. Для целей визуального анализа результатов исследования преобразуем содержащую гамма-функции точную аналитическую формулу (4.17). Конечная цель преобразования – представить формулу в аналитическом виде в терминах элементарных функций, что даст возможность аналитикам использовать ее для визуального и наглядного анализа поведения системы. В качестве инструмента преобразования используется метод перевала.

Перейдем к преобразованию формулы (4.17). Используем для ее преобразования заданную формулой (С.6) функцию $W(r, \tau)$. На первом этапе преобразуем ее с использованием преобразования Фурье. Она будет следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{W}(k, \tau) &= \frac{\Gamma(\beta\alpha_1 - ik) \Gamma(\beta\alpha_1 + ik)}{\Gamma(\beta\alpha_1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{C}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^M} dx = \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-M\varphi(x, M, k)} dx \end{aligned} \quad (D.1)$$

Здесь:

C – нормировочная константа,

M – большой параметр, равный $2\beta\alpha_1$.

Далее вычислим определенную формулой (D.1) функцию $\tilde{W}(k, \tau)$ с использованием метода перевала. Входящая в формулу (D.1) функция φ , умноженная на большой параметр M в показателе экспоненты, а также ее первая, вторая производные и точка экстремума $x^*(k)$ имеют следующий вид:

$$\varphi(x, M, k) = \ln(2 \cosh(\frac{x}{2})) - i \frac{k}{M} x, \quad (D.2)$$

$$\varphi'(x^*(k)) = \frac{1}{2} \operatorname{th}(\frac{x^*}{2}) - \frac{ik}{M} = 0, \quad (D.3)$$

$$\frac{x^*(k)}{2} = \operatorname{Arth}(\frac{i2k}{M}), \quad (D.4)$$

$$\varphi'' = \frac{1}{2} (1 - \operatorname{th}^2(\frac{x}{2})) = \frac{1}{2} (1 + \frac{4k^2}{M^2}). \quad (D.5)$$

С учетом формул (D.2)-(D.5) получим окончательное выражение для функции $\tilde{W}(k, \tau)$:

$$\tilde{W}(k, \tau) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\varphi''(x^*)}} e^{-M\varphi(x^*)} = (\sqrt{1 + \frac{4k^2}{M^2}})^{M-1} e^{ik2 \operatorname{Arth}(\frac{i2k}{M})}. \quad (D.6)$$

Возведем полученное окончательное выражение (D.6) в степень $\frac{t}{\tau}$ и возьмем обратное преобразование Фурье от полученного выражения:

$$\begin{aligned}
 W(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr} \tilde{W}(k)^{t/\tau} dk \sim \\
 &\sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikr + i(t/\tau)k 2 \operatorname{Arth}(\frac{i2k}{M}) - (M-1)(t/\tau) \ln(2/\sqrt{1+4k^2/M^2})} dk = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(M-1)\psi(k, M, r)} dk
 \end{aligned}
 \tag{D.7}$$

Преобразуем формулу (D.7) методом перевала. Входящая в формулу (D.7) функция ψ , а также ее первая, вторая производные и точка экстремума $k^*(r)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \psi(k, M, r) &= \left(\frac{t}{\tau}\right) \ln\left(\frac{2}{\sqrt{1+4k^2/M^2}}\right) - \\
 &- i\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{k}{M-1} 2 \operatorname{Arth}\left(\frac{i2k}{M}\right) + \frac{ik}{M-1} r
 \end{aligned}
 \tag{D.8}$$

$$\psi'(k^*(r)) = \frac{i(t/\tau)}{M-1} 2 \operatorname{Arth}\left(\frac{i2k}{M}\right) + \frac{ir}{M-1} = 0,
 \tag{D.9}$$

$$\frac{i2k^*}{M} = th\left(\frac{r}{2t/\tau}\right),
 \tag{D.10}$$

$$\psi''(k^*) = \frac{4(t/\tau)}{M^2} \cosh^2\left(\frac{r}{2(t/\tau)}\right).
 \tag{D.11}$$

С учетом формул (D.8)-(D.11) получим окончательное выражение для функции распределения логарифмической доходности, представленной в разделе 4 как формула (4.18):

$$W(r, t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\psi''(k^*)}} e^{-(M-1)\psi(k^*)} = \frac{A}{\left(2 \cosh\left(\frac{r}{2(t/\tau)}\right)\right)^{(M-1)(t/\tau)+1}}. \quad (\text{D.12})$$

Здесь A – нормировочный множитель. Вид нормировочного множителя можно получить, используя формулу (С.6). Поскольку

$\int_{-\infty}^{\infty} W(r, \tau) = 1$, верна формула:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(2 \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\right)^M} dx = \frac{\Gamma^2(0.5M)}{\Gamma(M)}. \quad (\text{D.13})$$

Используя формулу (D.13) получим вид нормировочного множителя A :

$$A = \frac{\Gamma((M-1)(t/\tau)+1)}{\Gamma^2(0.5((M-1)(t/\tau)+1))} \frac{1}{(t/\tau)}. \quad (\text{D.14})$$

На этом вывод упрощенной формулы (4.18) завершен.

Литература

1. Bhowmik R., Wang S. Stock market volatility and return analysis: A systematic literature review // *Entropy*. 2020. vol. 22(5). no. 522. DOI: 10.3390/e22050522.
2. Shah D., Isah H., Zulkernine F. Stock market analysis: A review and taxonomy of prediction techniques // *International Journal of Financial Studies*. 2019. vol. 7(2). no. 26. DOI: 10.3390/ijfs7020026.
3. Mavruk T. Analysis of herding behavior in individual investor portfolios using machine learning algorithms // *Research in International Business and Finance*. 2022. vol. 62. no. 101740. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101740.
4. Lee S.C., Eid Junio W. Portfolio construction and risk management: theory versus practice // *RAUSP Management Journal*. 2018. vol. 53. pp. 345–365. DOI: 10.1108/RAUSP-04-2018-009.
5. Ingber L. Hybrid classical-quantum computing: Applications to statistical mechanics of financial markets // *E3S Web of Conferences*. 2021. vol. 307. no. 04001. DOI: 10.1051/e3sconf/202130704001.
6. Anyiam K., Oluigbo I., Eze U., Ezech G. An empirical investigation of the impact of information technology on global capital markets operation // *International Journal of Research and Development Organisation*. 2015. vol. 1. no. 1.
7. Song Y.-G., Zhou Y.-L., Han R.-J. Neural networks for stock price prediction // *arXiv preprint arXiv:1805.11317v1*. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1805.11317.

8. Lin Y., Liu S., Yang H., Wu H., Jiang B. Improving stock trading decisions based on pattern recognition using machine learning technology // PLOS ONE. 2021. vol. 16. no. 8. DOI: 10.1371/journal.pone.0255558.
9. Nou A., Lapitskaya D., Eratalay M.H., Sharma R. Predicting stock return and volatility with machine learning and econometric models: A comparative case study of the Baltic stock market // Tartu: The University of Tartu FEBA, 2021. 52 p. DOI: 10.2139/ssrn.3974770.
10. Maqsood A., Safdar S., Shafi R., Lelit N.J. Modeling stock market volatility using GARCH models: a case study of Nairobi securities exchange (NSE) // Open Journal of Statistics. 2017. vol. 7. no. 2. pp. 369–381. DOI: 10.4236/ojs.2017.72026.
11. Nazlioglu S., Kucukkaplan I., Kilic E., Altuntas M. Financial market integration of emerging markets: Heavy tails, structural shifts, nonlinearity, and asymmetric persistence // Research in International Business and Finance. 2022. vol. 62. no. 101742. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101742.
12. Camilleri S.J., Vassallo S., Bai Y. Predictability in securities price formation: differences between developed and emerging markets // Journal of Capital Markets Studies. 2020. vol. 4. no. 2. pp. 145–166. DOI: 10.1108/JCMS-07-2020-0025.
13. Mallikarjuna M., Rao R.P. Evaluation of forecasting methods from selected stock market returns // Financial Innovation. 2019. vol. 5(1). no. 40. DOI: 10.1186/s40854-019-0157-x.
14. Al-Thaqeb S.A. Do international markets overreact? Event study: international market reaction to US local news events // Research in International Business and Finance. 2018. vol. 44. pp. 369–385. DOI: 10.1016/j.ribaf.2017.07.106.
15. Shen X., Wang G., Wang Y. The influence of research reports on stock returns: The mediating effect of machine-learning-based investor sentiment // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2021. vol. 2021. no. 5049179. DOI: 10.1155/2021/5049179.
16. Liu Z., Dashti Moghaddam M., Serota R.A. Distributions of historic market data – stock returns // The European Physical Journal B. 2019. vol. 92. no. 60. DOI: 10.1140/epjb/e2019-90218-8.
17. Ozdemir L. Volatility spillover stock prices and trading volume: Evidence from the pre-, in-, and post global financial crisis period // Frontiers in Applied Mathematics and Statistics. 2020. vol. 5. no. 65. DOI: 10.3389/fams.2019.00065.
18. Cheteni P. Stock market volatility using GARCH models: Evidence from South Africa and China stock markets // Journal of Economics and Behavioral Studies. 2016. vol. 8. no. 6. pp. 237–245. DOI: 10.22610/jebis.v8i6(J).1497.
19. Pham D. P. T., Huynh N. Q. A., Duong D. The impact of US presidents on market returns: Evidence from Trump's tweets // Research in International Business and Finance. 2022. vol. 62. no. 101681. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101681.
20. Olbrys J., Majewska E. Asymmetry effects in volatility on major European stock markets: the EGARCH based approach // Quantitative Finance and Economics. 2017. vol. 1. no. 4. pp. 411–427. DOI: 10.3934/QFE.2017.4.411.
21. Kouser R., Saba I., Anjum F. Impact of asymmetric information on the investment sensitivity to stock price and the stock price sensitivity to investment // Journal of Accounting and Finance in Emerging Economies. 2016. vol. 2. no. 1. pp. 1–16. DOI: 10.26710/jafec.v2i1.101.
22. Dhesi G, Shakeel B., Ausloos M. Modeling and forecasting the kurtosis and returns distributions of financial markets: irrational fractional Brownian motion model approach // Annals of Operations Research. 2021. vol. 299. pp. 1397–1410. DOI: 10.1007/s10479-019-03305-z.
23. Chevapatrakul T., Xu Z., Yao K. The impact of tail risk on stock market returns: The role of market sentiment // International Review of Economics and Finance. 2019. vol. 59. pp. 289–301. DOI: 10.1016/j.iref.2018.09.005.

24. Pareto V. Manual of political economy. Translated by: Schiavier A.S., Page A.N. // New-York: A.M. Kelley, 1971. 504 p.
25. Levy M. Market efficiency, the Pareto wealth distribution, and the Levy distribution of stock returns // The economy as an evolving complex system, III: Current perspectives and future directions. 2005. pp. 101–132. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195162592.003.0006.
26. Kleinert H., Chen X.J. Boltzmann Distribution and Market Temperature. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. vol. 383. no. 2. pp. 513–518
27. Toth D., Jones B. Against the norm: modeling daily stock returns with the Laplace distribution. arXiv preprint arXiv:1906.10325. 2019. Available at: https://www.researchgate.net/publication/334027873_Against_the_Norm_Modeling_Daily_Stock_Returns_with_the_Laplace_Distribution.
28. Volterra V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically // *Nature*. 1926. vol. 118. pp. 558–560. DOI: 10.1038/118558a0.
29. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni dei numero d'individui in specie animali conviventi // Società anonima tipografica "Leonardo da Vinci", 1927. 142 p.
30. Volterra V. Lessons on the mathematical theory of struggle for life. Paris, Gauthier-Villars, 1931. 214 p.
31. Lotka A.J. Elements of physical biology // Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. 495 p.
32. Modis T. Technological forecasting at the Stock Market // *Technological Forecasting and Social Change*. 1999. vol. 62. no. 3. pp. 173–202. DOI: 10.1016/S0040-1625(99)00046-3.
33. Modis T. An S-shaped trail to Wall Street: survival of the fittest reigns at the Stock Market // Geneva, Growth Dynamics. 1999. 201 p.
34. Clement E.P., Jim U.S. Statistical mechanics in economics: An application of Brownian motion in modeling prices of assets // *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. 2021. vol. 6. no. 1. pp. 29–34.
35. Yakovenko Victor M. and Rosser J. Barkley Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income // *Reviews of Modern Physics*. 2009. vol. 81. no. 1703. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1703.
36. Chakraborti A., Chakraborti B.K. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution // *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*. 2000. vol. 17. pp. 167–170. DOI: 10.1007/s100510070173.
37. Gatabazi P., Mba J.C., Pindza E. Fractional Gray Lotka-Volterra models with application to cryptocurrencies adoption // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. vol. 29(7). no. 073116. DOI: 10.1063/1.5096836.
38. Zhang G., McAdams D.A., Shankar V., Mohammadi Darani M. Technology evolution prediction using Lotka-Volterra equations // *Journal of Mechanical Design*. 2018. vol. 140(6). no. 061101. DOI: 10.1115/1.4039448.
39. Титов В.А., Вейнберг Р.Р. Анализ существующих динамических моделей на базе системы уравнений Лотки-Вольтерры «хищник-жертва» // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 8–2. С. 409–413.
40. Романов В.П., Ахмадеев Б.А. Моделирование инновационной экосистемы на основе модели «хищник-жертва» // *Бизнес-информатика*. 2015. № 1(31). С. 7–17.
41. Hung H.C., Tsai Y.S., Wu M.C. A modified Lotka-Volterra model for competition forecasting in Taiwan's retail industry // *Computers and Industrial Engineering*. 2014. vol. 77. pp. 70–79. DOI: 10.1016/j.cie.2014.09.010.
42. Sterpu M., Rocsoreanu C., Soava G., and Mehedintu A. A generalization of the Grey Lotka-Volterra model and application to GDP, export, import and investment for the

- European Union // Mathematics. 2023. vol. 11(15). no. 3351. DOI: 10.3390/math11153351.
43. Pan M.X., Wang S.Y., Wu X.L., Zhang M.W. Study on the growth driving model of the enterprise innovation community based on the Lotka–Volterra model: a case study of the Chinese Automobile Manufacturing Enterprise Community // Mathematical Problems in Engineering. 2023. vol. 2023. no. 8743167. DOI: 10.1155/2023/8743167.
44. Bauer R., Schwarzmayr F., Brunner N., Kühleitner M. Dynamics of the Austrian food market: application of Lotka–Volterra differential equations // Open Journal of Modelling and Simulation. 2022. vol. 10. no. 2. pp. 152–164. DOI: 10.4236/ojmsi.2022.102009.

Бибик Юрий Викторович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, отдел №23 (механика сплошных сред), Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук. Область научных интересов: статистическая механика, нелинейная динамика, Гамильтоновы системы, стохастические процессы, фазовые переходы, квантовая теория поля, применение математических моделей и методов для изучения и выявления кризисных ситуаций в природе, экологии, биологии, экономике. Число научных публикаций — 22. yvbibik@ccas.ru; улица Вавилова, 40, 119333, Москва, Россия; р.т.: +7(499)135-6498.

YU. BIBIK

FORECASTING IN STOCK MARKETS USING THE FORMALISM OF STATISTICAL MECHANICS*Bibik Yu. Forecasting in Stock Markets Using the Formalism of Statistical Mechanics.*

Abstract. The possibility and expediency of forecasting in the stock markets are analyzed analytically using the methods and approaches of statistical mechanics. The apparatus of statistical mechanics is used to analyze and forecast one of the most important indicators of the market – the distribution of its logarithmic profitability. The Lotka-Volterra model used in ecology to describe systems of the "predator-prey" type was used as the initial model. It approximates market dynamics adequately. In the article, its Hamiltonian property is used, which makes it possible to apply the apparatus of statistical mechanics. The apparatus of statistical mechanics (using the principle of maximum entropy) makes it possible to implement a probabilistic approach that is adapted to the conditions of stock market uncertainty. The canonical variables of the Hamiltonian are presented as logarithms of stock and bond prices, the joint probability distribution function of stock and bond prices is obtained as a Gibbs distribution. The Boltzmann factor, included in the Gibbs distribution, allows us to estimate the probability of the occurrence of certain stock and bond prices and obtain an analytical expression for calculating the logarithmic return, which gives more accurate results than the widely used normal (Gaussian) distribution. According to its characteristics, the resulting distribution resembles the Laplace distribution. The main characteristics of the resulting distribution are calculated – the mean value, variance, asymmetry, and kurtosis. Mathematical results are presented graphically. An explanation is given of the cause-and-effect mechanism that causes a change in the profitability of the market. For this, the idea of Theodore Modis about the competition between stocks and bonds for the attention and money of investors is developed (by analogy with the turnover of biomass in models of the "predator-prey" type in biology). The results of the study are of interest to investors, theorists, and practitioners of the stock market. They allow us to make thoughtful and balanced investment decisions due to a more realistic idea of the expected return and a more adequate assessment of investment risk.

Keywords: stock market dynamics, return distribution function, maximum entropy principle, Gibbs distribution, Laplace distribution.

References

1. Bhowmik R., Wang S. Stock market volatility and return analysis: A systematic literature review. *Entropy*. 2020. vol. 22(5). no. 522. DOI: 10.3390/e22050522.
2. Shah D., Isah H., Zulkernine F. Stock market analysis: A review and taxonomy of prediction techniques. *International Journal of Financial Studies*. 2019. vol. 7(2). no. 26. DOI: 10.3390/ijfs7020026.
3. Mavruk T. Analysis of herding behavior in individual investor portfolios using machine learning algorithms. *Research in International Business and Finance*. 2022. vol. 62. no. 101740. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101740.
4. Lee S.C., Eid Junio W. Portfolio construction and risk management: theory versus practice. *RAUSP Management Journal*. 2018. vol. 53. pp. 345–365. DOI: 10.1108/RAUSP-04-2018-009.
5. Ingber L. Hybrid classical-quantum computing: Applications to statistical mechanics of financial markets. *E3S Web of Conferences*. 2021. vol. 307. no. 04001. DOI: 10.1051/e3sconf/202130704001.

6. Anyiam K., Oluigbo I., Eze U., Ezeh G. An empirical investigation of the impact of information technology on global capital markets operation. *International Journal of Research and Development Organisation*. 2015. vol. 1. no. 1.
7. Song Y.-G., Zhou Y.-L., Han R.-J. Neural networks for stock price prediction. *arXiv preprint arXiv:1805.11317v1*. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1805.11317.
8. Lin Y., Liu S., Yang H., Wu H., Jiang B. Improving stock trading decisions based on pattern recognition using machine learning technology. *PLOS ONE*. 2021. vol. 16. no. 8. DOI: 10.1371/journal.pone.0255558.
9. Nou A., Lapitskaya D., Eratalay M.H., Sharma R. Predicting stock return and volatility with machine learning and econometric models: A comparative case study of the Baltic stock market. *Tartu: The University of Tartu FEBA*, 2021. 52 p. DOI: 10.2139/ssrn.3974770.
10. Maqsood A., Safdar S., Shafi R., Lelit N.J. Modeling stock market volatility using GARCH models: a case study of Nairobi securities exchange (NSE). *Open Journal of Statistics*. 2017. vol. 7. no. 2. pp. 369–381. DOI: 10.4236/ojs.2017.72026.
11. Nazlioglu S., Kucukkaplan I., Kilic E., Altuntas M. Financial market integration of emerging markets: Heavy tails, structural shifts, nonlinearity, and asymmetric persistence. *Research in International Business and Finance*. 2022. vol. 62. no. 101742. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101742.
12. Camilleri S.J., Vassallo S., Bai Y. Predictability in securities price formation: differences between developed and emerging markets. *Journal of Capital Markets Studies*. 2020. vol. 4. no. 2. pp. 145–166. DOI: 10.1108/JCMS-07-2020-0025.
13. Mallikarjuna M., Rao R.P. Evaluation of forecasting methods from selected stock market returns. *Financial Innovation*. 2019. vol. 5(1). no. 40. DOI: 10.1186/s40854-019-0157-x.
14. Al-Thaqeb S.A. Do international markets overreact? Event study: international market reaction to US local news events. *Research in International Business and Finance*. 2018. vol. 44. pp. 369–385. DOI: 10.1016/j.ribaf.2017.07.106.
15. Shen X., Wang G., Wang Y. The influence of research reports on stock returns: The mediating effect of machine-learning-based investor sentiment. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2021. vol. 2021. no. 5049179. DOI: 10.1155/2021/5049179.
16. Liu Z., Dashti Moghaddam M., Serota R.A. Distributions of historic market data – stock returns. *The European Physical Journal B*. 2019. vol. 92. no. 60. DOI: 10.1140/epjb/e2019-90218-8.
17. Ozdemir L. Volatility spillover stock prices and trading volume: Evidence from the pre-, in-, and post global financial crisis period. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. 2020. vol. 5. no. 65. DOI: 10.3389/fams.2019.00065.
18. Cheteni P. Stock market volatility using GARCH models: Evidence from South Africa and China stock markets. *Journal of Economics and Behavioral Studies*. 2016. vol. 8. no. 6. pp. 237–245. DOI: 10.22610/jebbs.v8i6(J).1497.
19. Pham D. P. T., Huynh N. Q. A., Duong D. The impact of US presidents on market returns: Evidence from Trump's tweets. *Research in International Business and Finance*. 2022. vol. 62. no. 101681. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101681.
20. Olbrys J., Majewska E. Asymmetry effects in volatility on major European stock markets: the EGARCH based approach. *Quantitative Finance and Economics*. 2017. vol. 1. no. 4. pp. 411–427. DOI: 10.3934/QFE.2017.4.411.
21. Kouser R., Saba I., Anjum F. Impact of asymmetric information on the investment sensitivity to stock price and the stock price sensitivity to investment. *Journal of Accounting and Finance in Emerging Economies*. 2016. vol. 2. no. 1. pp. 1–16. DOI: 10.26710/jafee.v2i1.101.
22. Dhesi G., Shakeel B., Ausloos M. Modeling and forecasting the kurtosis and returns distributions of financial markets: irrational fractional Brownian motion model

- approach. *Annals of Operations Research*. 2021. vol. 299. pp. 1397–1410. DOI: 10.1007/s10479-019-03305-z.
23. Chevapatrakul T., Xu Z., Yao K. The impact of tail risk on stock market returns: The role of market sentiment. *International Review of Economics and Finance*. 2019. vol. 59. pp. 289–301. DOI: 10.1016/j.iref.2018.09.005.
 24. Pareto V. *Manual of political economy*. Translated by: Schiwer A.S., Page A.N. New-York: A.M. Kelley, 1971. 504 p.
 25. Levy M. Market efficiency, the Pareto wealth distribution, and the Levy distribution of stock returns. *The economy as an evolving complex system, III: Current perspectives and future directions*. 2005. pp. 101–132. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780195162592.003.0006.
 26. Kleinert H., Chen X.J. Boltzmann Distribution and Market Temperature. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2007. vol. 383. no. 2. pp. 513–518
 27. Toth D., Jones B. Against the norm: modeling daily stock returns with the Laplace distribution. arXiv preprint arXiv:1906.10325. 2019. Available at: https://www.researchgate.net/publication/334027873_Against_the_Norm_Modeling_Daily_Stock_Returns_with_the_Laplace_Distribution.
 28. Volterra V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. *Nature*. 1926. vol. 118. pp. 558–560. DOI: 10.1038/118558a0.
 29. Volterra V. *Variazioni e fluttuazioni dei numero d'individui in specie animali conviventi // Società anonima tipografica "Leonardo da Vinci", 1927. 142 p.*
 30. Volterra V. *Lessons on the mathematical theory of struggle for life*. Paris, Gauthier-Villars, 1931. 214 p.
 31. Lotka A.J. *Elements of physical biology*. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. 495 p.
 32. Modis T. Technological forecasting at the Stock Market. *Technological Forecasting and Social Change*. 1999. vol. 62. no. 3. pp. 173–202. DOI: 10.1016/S0040-1625(99)00046-3.
 33. Modis T. An S-shaped trail to Wall Street: survival of the fittest reigns at the Stock Market. Geneva, Growth Dynamics. 1999. 201 p.
 34. Clement E.P., Jim U.S. Statistical mechanics in economics: An application of Brownian motion in modeling prices of assets. *International Journal of Statistics and Applied Mathematics*. 2021. vol. 6. no. 1. pp. 29–34.
 35. Yakovenko Victor M. and Rosser J. Barkley Jr. Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income. *Reviews of Modern Physics*. 2009. vol. 81. no. 1703. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.1703.
 36. Chakraborti A., Chakraborti B.K. Statistical mechanics of money: How saving propensity affects its distribution. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*. 2000. vol. 17. pp. 167–170. DOI: 10.1007/s100510070173.
 37. Gatabazi P., Mba J.C., Pindza E. Fractional Gray Lotka-Volterra models with application to cryptocurrencies adoption. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019. vol. 29(7). no. 073116. DOI: 10.1063/1.5096836.
 38. Zhang G., McAdams D.A., Shankar V., Mohammadi Darani M. Technology evolution prediction using Lotka-Volterra equations. *Journal of Mechanical Design*. 2018. vol. 140(6). no. 061101. DOI: 10.1115/1.4039448.
 39. Titov V.A., Vejnbeg R.R. [Analysis of existing dynamic models based on the system of Lotka-Volterra equations “predator-prey”]. *Fundamental'nye issledovaniya – Basic Research*. 2016. no. 8–2. pp. 409–413. (In Russ.).
 40. Romanov V.P., Ahmadeev B.A [Innovation ecosystem modeling based on ‘predator-prey’ model]. *Biznes-informatika – Business Informatics*. 2015. no. 1(31). pp. 7–17. (In Russ.).

41. Hung H.C., Tsai Y.S., Wu M.C. A modified Lotka-Volterra model for competition forecasting in Taiwan's retail industry. *Computers and Industrial Engineering*. 2014. vol. 77. pp. 70–79. DOI: 10.1016/j.cie.2014.09.010.
42. Sterpu M., Rocsoreanu C., Soava G., and Mehedintu A. A generalization of the Grey Lotka–Volterra model and application to GDP, export, import and investment for the European Union. *Mathematics*. 2023. vol. 11(15). no. 3351. DOI: 10.3390/math11153351.
43. Pan M.X., Wang S.Y., Wu X.L., Zhang M.W. Study on the growth driving model of the enterprise innovation community based on the Lotka–Volterra model: a case study of the Chinese Automobile Manufacturing Enterprise Community. *Mathematical Problems in Engineering*. 2023. vol. 2023. no. 8743167. DOI: 10.1155/2023/8743167.
44. Bauer R., Schwarzmayr F., Brunner N., Kühleitner M. Dynamics of the Austrian food market: application of Lotka-Volterra differential equations. *Open Journal of Modelling and Simulation*. 2022. vol. 10. no. 2. pp. 152–164. DOI: 10.4236/ojmsi.2022.102009.

Bibik Yuriy — Ph.D., Senior researcher, Department no. 23 (continuum mechanics), Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences. Research interests: statistical mechanics, nonlinear dynamics, Hamiltonian systems, stochastic processes, phase transitions, quantum field theory, application of mathematical models and methods for studying and identifying crisis situations in nature, ecology, biology, economics. The number of publications — 22. yvbibik@ccas.ru; 40, Vavilov St., 119333, Moscow, Russia; office phone: +7(499)135-6498.