ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 27–36
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-27-36

УДК 517.958, 517.968.23

О РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННОГО С ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ ЗАДАЧЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. **М. Т. КОСМАКОВА, А. Н. ХАМЗЕЕВА**

Аннотация. В работе исследуется одномерная краевая задача для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной. Задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра с ядром, содержащим функцию типа Райта, для которого получены условия разрешимости.

Ключевые слова: нагруженное уравнение теплопроводности, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра, функция типа Райта.

ON THE SOLVABILITY OF AN INTEGRAL EQUATION ASSOCIATED WITH THE FRACTIONAL LOADED HEAT CONDUCTION PROBLEM

© 2024 **M. T. KOSMAKOVA, A. N. KHAMZEYEVA**

Abstract. In this paper, we examine a one-dimensional boundary-value problem for the heat equation with a loaded term in the form of the Caputo fractional derivative with respect to a spatial variable. The problem is reduced to the Volterra integral equation with a kernel containing a Wright-type function, for which solvability conditions are obtained.

Keywords and phrases: loaded heat equation, fractional derivative, Volterra integral equation, Wright-type function.

AMS Subject Classification: 45D05, 35K20, 26A33

1. Введение. Важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения, в котором нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях размерности, меньшей размерности области определения искомой функции. На сегодняшний день нагруженные уравнения теплопроводности имеют широкое практическое применение. Кроме того, нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со специфическими задачами. Необходимость изучения нагруженных уравнений возникает также при исследовании некоторых обратных задач, в линеаризация нелинейных уравнений, при исследовании некоторых задач оптимального управления и др. Известно [6], что математические модели нелокальных физических и биологических фрактальных процессов, как правило, строятся на основе нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка. В монографии [5] приведена подробная библиография по нагруженным уравнениям, в том числе по различным применениям нагруженных уравнений как метода исследования задач математической биологии, математической физики, математического моделирования нелокальных процессов и явлений, механики сплошных сред с памятью.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты № AP19677684, 2023-2025, № AP09259780, 2021-2023).

В монографии [2] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений в зависимости от порядка производной, входящей в нагруженное слагаемое. Если порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения (авторы называют такие уравнения «существенно» нагруженными), нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части. Отметим, что в [2] нагруженное слагаемое является производной целого порядка от искомой функции.

В [3] нагруженное слагаемое является следом производной нецелого, т.е. дробного порядка на многообразии $x = t$, а именно, оно представлено в виде дробной производной Римана—Лиувилля. Полученное сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при некоторых значениях порядка дробной производной.

В [22, 23] нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной и нагрузка движется вдоль линии $x = t^{\omega}$, $\omega > 0$. Показано, что существование и единственность решений полученного интегрального уравнения зависит как от порядка дробной производной в нагруженном члене начально-краевой задачи, так и от характера поведения нагрузки. Получены условия, при которых ядро интегрального уравнения имеет слабую особенность. Эти условия зависят от типа производной в нагруженном слагаемом граничной задачи и от факта, по какой переменной берется производная. В [20–23] рассмотрены предельные случаи порядка дробной производной. Полученные результаты для предельных случаев совпадают с результатами монографии [2]. Подобного рода интегральные уравнения Вольтерра с сингулярностями в ядре также возникают при исследовании граничных задач в вырождающихся областях [16–21]. В силу свойства несжимаемости интегрального оператора [12, 13] возникают ненулевые решения однородного уравнения [17].

В [15, 16] краевые задачи теплопроводности рассматриваются в конусе с вершиной в начале координат, но уравнение не содержит нагрузки. Из-за вырождаемости области определения функции в точку в начальный момент времени полученное интегральное уравнение имеет особенности, и классические методы решения не применимы. В [16] задача исследуется в пространстве существенной ограниченных функций. Решение исследуемой задачи представлено в виде суммы построенных потенциалов, и задача сведена к сингулярному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, а именно, к вырождающемуся уравнению Абеля, которое можно рассматривать как интегральное уравнение третьего рода. Для редуцированного интегрального уравнения построена резольвента. В [15] задача исследуется в соболевских пространствах, применяется метод априорных оценок, и показывается существование и единственность слабого решения поставленной задачи.

Следует отметить, что в [3–21] рассматривается первая краевая задача. В [19] исследована вторая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности, нагруженное слагаемое содержит дробную производную порядка больше, чем порядок уравнения. Показано, что решение соответствующей однородной краевой задачи неединственно, т.е. нагрузка выступает как сильное возмущение краевой задачи.

Отметим, что интерес к нагруженным уравнениям возник давно. В сельскохозяйственном секторе экономики любой страны проблемой является заболачивание и засоление поливных земель в связи с подъемом грунтовых вод при орошении. Известно, что задачи регулирования уровня грунтовых вод при орошении (см. [4]) приводят к необходимости исследования краевых задач для нагруженных параболических уравнений. Неустановившееся плоскопараллельное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с непроницаемым горизонтальным водоупором описывается уравнением Буссинеска, которое линеаризацией тоже сводится к нагруженному параболическому уравнению (см. [7]).

Структура статьи следующая. В разделе 2 вводятся некоторые необходимые определения и предварительные сведения из теорий дробного исчисления, специальных функций и краевых задач, которые потребуются в следующем разделе. В разделе 3 дается постановка дробно-нагруженной граничной задачи теплопроводности. Нагруженное слагаемое в уравнении представлено в виде дробной производной Капуто по пространственной переменной. Задача сводится сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода с ядром, содержащим функцию типа Райта.

Поскольку непосредственное решение такого рода интегральных уравнений затруднительно, мы далее исследуем полученное интегральное уравнение на разрешимость, проводя оценку ядра. Наконец, в разделе 4 представлены основные результаты статьи, а именно, теоремы о разрешимости интегрального уравнения и краевой задачи, поставленной в разделе 3.

2. Вводные сведения. Приведем некоторые известные понятия и результаты.

2.1. Дробный интеграл и производная. Первое из необходимых определений – это определение дробного интеграла Римана– Лиувилля (см. [10]).

Определение 1. Пусть $f(t) \in L_1[a,b]$. Выражение вида

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

называется дробным интегралом Римана—Лиувилля порядка α с началом в точке a и с концом в точке x.

Дробная производная Римана—Лиувилля является одним из способов обобщения понятия производной на функции, определенные на интервале вещественных чисел. Она позволяет рассматривать производные нецелого порядка, т.е. дробные производные.

Определение 2. Пусть $f(t) \in L_1[a,b]$. Производная Римана—Лиувилля порядка β определяется следующим равенством при $n-1 < \beta \leqslant n$:

$$_{RL}D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad \beta, a \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что

$$_{RL}D_{a,t}^{0} f(t) = f(t), \quad _{RL}D_{a,t}^{n} f(t) = f^{(n)}(t), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Производную Римана—Лиувилля (2) можно переписать, используя определение дробного интеграла Римана—Лиувилля (1):

$$_{RL}D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} D_{a,t}^{\beta-n} f(t), \quad \beta \in (n-1; n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение дробной производной Капуто получается переменой операций дифференцирования и интегрирования в (2). Производная Капуто также является способом обобщения понятия производной на дробные порядки. Она была предложена математиком Марио Ди Капуто и широко используется в теории дробных уравнений и физических моделях. Важность производной Капуто заключается в том, что она позволяет учитывать начальные условия при решении дробных дифференциальных уравнений.

Определение 3 (см. [14])**.** Пусть $f(t) \in \mathrm{AC}^n[a,b]$ (т.е. $f^{(n-1)}(t)$ — абсолютно непрерывная функция). Тогда производная Капуто порядка β определяется следующим равенством при $n-1 < \beta \leqslant n$:

$$\partial_{at}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int\limits_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \quad \beta,\, a \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Производную Капуто (4) можно переписать, используя определение дробного интеграла Римана—Лиувилля (1):

$$\partial_{at}^{\beta} f(t) = D_{a,t}^{\beta-n} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \beta \in (n-1; n], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Оператор (5) также известен под названием оператора Герасимова—Капуто.

Производные, определенные формулами (2) и (4), связаны соотношением

$$\partial_{at}^{\beta} f(t) = {}_{RL}D_{a,t}^{\beta}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]. \tag{6}$$

Дробное исчисление можно рассматривать как «лабораторию» для специальных функций.

2.2. Некоторые специальные функции. Приведем определения и некоторые свойства специальных функций, которые нам понадобятся на протяжении всей работы.

Интеграл ошибок и дополнительный интеграл ошибок имеют вид:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-\zeta^2\right)\, d\zeta, \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} \exp\left(-\zeta^2\right)\, d\zeta = 1 - \operatorname{erf}(z).$$

Определение 4 (см. [9])**.** Целая функция вида

$$\phi\,(a,b;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\,\Gamma(ak+b)}, \quad a>-1, \quad b\in\mathbb{C}, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{7}$$

называется функцией Райта.

Также будем использовать функцию типа Райта в виде ряда

$$e_{a,b}^{\nu,\delta}\,(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(ak+\nu)\,\Gamma(\delta-bk)}, \quad \nu,\delta\in\mathbb{C}, \quad a>b, \quad a>0, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{8}$$

При $\nu = a = 1$ она совпадает с функцией Райта (7):

$$e_{1,b}^{1,\delta}\,(z) = \phi\,(-b,\delta;z)\,.$$

Для функции типа Райта справедлива формула автотрансформации

$$e_{a,b}^{\nu-a,\delta+b}\,(z) = z\, e_{a,b}^{\nu,\delta} + \frac{1}{\Gamma(\nu-a)\,\Gamma(\delta+b)}, \quad \nu,\delta\in\mathbb{C}, \quad a>b, \quad a>0, \quad z\in\mathbb{C}. \tag{9}$$

Имеет место оценка:

$$\left|x^{\nu-1}y^{\delta-1}e_{a,b}^{\nu,\delta}\left(-\frac{x^a}{y^b}\right)\right| \leqslant Cx^{\nu-a,\theta-1}y^{\delta+b,\theta-1}; \quad \theta\in[0;1]. \tag{10}$$

Справедлива формула дробного интегрирования и дифференцирования функции типа Райта:

$$D_{0,x}^{\beta}\left\{x^{\nu-1}\, e_{a,b}^{\nu,\delta}\,(c\,x^a)\right\} = x^{\nu-\beta-1}\, e_{a,b}^{\nu-\beta,\delta}\,(c\,x^a)\,; \quad c\in\mathbb{C}, \quad \nu>0. \tag{11}$$

2.3. Решение краевой задачи теплопроводности. Исследуемая краевая задача находится на стыке теорий дробного исчисления и теории нагруженных уравнений. На первом этапе исследования мы применяем метод интегральных уравнений, который позволяет свести краевую задачу к решению соответствующего интегрального уравнения путем преобразования или оценки ядра этого уравнения. Такие методы позволяют более компактно исследовать краевые задачи, учитывая все условия задачи.

В данном случае рассматриваемая задача сводится к интегральному уравнению путем обращения дифференциальной части уравнения.

Известно (см. [8, с. 57]) что в области $Q = \left\{(x,t)\mid x>0,\ t>0\right\}$ решение краевой задачи теплопроводности

$$u_t = a^2u_{xx} + F(x,t), \quad u\big|_{t=0} = f(x), \quad u\big|_{x=0} = g(x),$$

описывается формулой

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} G(x,\xi,t)\, f(\xi)\, d\xi + \int_0^t H\left(x,t-\tau\right)\, g(\tau)\, d\tau + \int_0^t\int_0^{\infty} G\left(x,\xi,t-\tau\right) F\left(\xi,\tau\right) d\xi d\tau, \tag{12}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi at}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\,a\,t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right)\right\},\quad H(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}\,t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right).$$

Функция Грина $G\left(x,\xi,t-\tau\right)$ удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_0^\infty G\left(x,\xi,t-\tau\right)d\xi=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).\tag{13}$$

3. Дробно-нагруженная краевая задача теплопроводности.

3.1. Некоторые предположения. Следуя [11], везде ниже будем считать, что правая часть $f(x,t)$ уравнения обращается в нуль при $t<0$ и

$$f(x,t)\in L_\infty(A)\cap C(B),\tag{14}$$

где $A=\big\{(x,t)\mid x>0,\ t\in[0,T]\big\}$, $B=\big\{(x,t)\mid x>0,\ t\geqslant 0\big\}$, $T=\mathrm{const}>0$. Тогда, учитывая свойство (13) для функции $G(x,\xi,t)$, можно показать, что

$$f_1(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau\in L_\infty(A)\cap C(B),\tag{15}$$

причем

$$\lim_{t\to 0+0}f_1(x,t)=0.\tag{16}$$

Тогда решение $u(x,t)\in L_\infty(A)\cap C(B)$ краевой задачи

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad ub\big|_{t=0}=0,\quad u\big|_{x=0}=0,$$

существует, единственно и, согласно (12), имеет вид:

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau.$$

Из определений 2 и 3 следует, что для существования производной в смысле Римана—Лиувилля (2) достаточно, чтобы $f(t)\in L_1[a,b]$, для существования производной в смысле Капуто (4) достаточно, чтобы $f(t)\in\mathrm{AC}^n[a,b]$, причем имеет место формула их связи (6). В исследуемой задаче нагруженное слагаемое представлено в виде дробной производной порядка β, $0<\beta<1$, по пространственной переменной x. Поэтому для простоты будем считать, что

$$u(x,t)\in\mathrm{AC}\left(x\geqslant 0\right),\tag{17}$$

так как $n=1$ и по условию краевой задачи $u\big|_{x=0}=0$. Также будем предполагать, что

$$f_1(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G\left(x,\xi,t-\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi d\tau\in\mathrm{AC}\left(x\geqslant 0\right).\tag{18}$$

3.2. Постановка задачи. В области $Q=\big\{(x,t)\,:\,x>0,\ t>0\big\}$ рассмотрим граничную задачу для уравнения теплопроводности с нагруженным слагаемым в виде дробной производной Капуто (4) порядка β, $0<\beta<1$:

$$u_t-u_{xx}+\lambda\partial_{0x}^{\beta}u(x,t)\big|_{x=\gamma(t)}=f(x,t),\tag{19}$$

$$u\left(x,0\right)=0,\quad u\left(0,t\right)=0,\tag{20}$$

где λ — комплексный параметр, $\gamma(t)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma(0)=0$, правая часть $f(x,t)$ уравнения обращается в нуль при $t<0$ и принадлежит классу (14). Решение $u(x,t)$ принадлежит классу (17) в силу предположений выше.

3.3. Сведение задачи к интегральному уравнению. Введем обозначение

$$\mu(t)=\partial_{0x}^{\beta}u(x,t)\big|_{x=\gamma(t)}=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_0^x\frac{u_\xi(\xi,t)}{(x-\xi)^{\beta}}d\xi\Bigg|_{x=\gamma(t)}. \tag{21}$$

Обратим дифференциальную часть задачи (19)–(20) по формуле (12):

$$u(x,t)=-\lambda\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)\mu(\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{22}$$

Учитывая соотношение (13) и вводя обозначение (15), перепишем представление (22) в виде

$$u(x,t)=-\lambda\int\limits_0^x\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\xi d\tau+f_1(x,t). \tag{23}$$

Следуя процедуре из [22], от (23) придем к представлению

$$u(x,t)=-\lambda\int\limits_0^t K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\,d\tau+f_1(x,t), \tag{24}$$

где

$$K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=1-\phi\left(-\frac{1}{2},1;-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right), \tag{25}$$

$\phi(a,b;z)$ — функция Райта (7).

К (24) применим операцию дробного дифференцирования (4) порядка β, $0<\beta<1$, в смысле Капуто, что является правомерным в силу предположений (17) и (18). Затем подставим $x=\gamma(t)$. Слева получим функцию $\mu(t)$ в силу обозначения (21). Учитывая связь с производной в смысле Римана—Лиувилля по формуле (6), имеем

$$\partial_{0x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)={}_rD_{0x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)-K(0)\right).$$

В силу (25) имеем $K(0)=0$. Тогда

$$\partial_{0x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)={}_{RL}D_{0x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)={}_rD_{0x}^{\beta}\left(1-\Phi\left(-\frac{1}{2},1;-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=$$
$$=x^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}-e_{1,1/2}^{1-\beta,1}\left(\frac{-x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=\frac{x^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2}\left(\frac{-x}{\sqrt{t-\tau}}\right).$$

При вычислении последовательно использовали формулу дифференцирования функции типа Райта (11) и формулу автотрансформации (9). Получили интегральное уравнение:

$$\mu(t)+\lambda\int\limits_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t), \tag{26}$$

где

$$f_2(t)=\partial_{0x}^{\beta}(f_1(x,t))\Big|_{x=\gamma(t)}, \tag{27}$$

$$K_\beta(t,\tau)=\frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,1/2}^{2-\beta,1/2}\left(-\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}}\right). \tag{28}$$

Лемма 1. *Краевая задача* (19)–(20) *сводится к интегральному уравнению Вольтерра* (26) *с правой частью и ядром, определяемыми формулами* (27) *и* (28) *соответственно.*

3.4. Оценка ядра интегрального уравнения. Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$, $\omega > 0$. Тогда

(a) $|z| = t^{\omega}/\sqrt{t-\tau} \to +\infty$ при $t \to 0$ и $\omega < 1/2$, так как $0 < \tau < t \Rightarrow t - \tau \to 0$;

(b) $|z| = t^{\omega}/\sqrt{t-\tau} \to 0+0$ при $t \to 0$ и $\omega > 1/2$.

Рассмотрим поведение ядра (28) в этих случаях.

(a) Пусть $0 < \omega < 1/2$, $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$ и $0 < \beta < 1$. Тогда $|z| = \gamma(t)/\sqrt{t-\tau} \to +\infty$ при $t \to 0$. Поскольку $\sqrt{t-\tau} = -\gamma(t)/z$, то из (28) имеем

$$K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta} z e^{2-\beta,1/2}_{1,1/2}(z). \tag{29}$$

Известно (см. [9]), что

$$\lim_{|z|\to\infty}\left(-ze^{\nu,\delta}_{a,b}(z)\right) = \frac{1}{\Gamma(\nu-a)\Gamma(\delta+b)}.$$

Тогда при $\nu = 2-\beta$, $\delta = 1/2$, $a = 1$, $b = 1/2$ из (29) имеем

$$\lim_{|z|\to+\infty} K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)t^{\beta\omega}}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$ и $0 < \omega < 1/2$, $0 < \beta < 1$. Тогда ядро* (28) *интегрального уравнения* (26) *является неограниченной функцией при $t \to 0$ и $0 < \tau < t$.*

(b) Пусть $\omega > 1/2$, $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$ и $0 < \beta < 1$. Тогда $|z| = \gamma(t)/\sqrt{t-\tau} \to 0$ при $t \to 0$,

$$K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta} z e^{2-\beta,1/2}_{1,1/2}(z).$$

Используя формулу автотрансформации (9), получим

$$K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(\gamma(t)/z)^2} = -(\gamma(t))^{-\beta}\left(e^{1-\beta,1}_{1,1/2}(z) - \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\right).$$

Полагая $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$, имеем неопределенность при $\omega > 1/2$ и $0 < \beta < 1$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ z\to 0}} K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(t^{\omega}/z)^2} = \left(\frac{0}{0}\right),$$

так как по определению $e^{\nu,\delta}_{a,b}(0) = 1/(\Gamma(\nu)\Gamma(\delta))$. Применив правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ z\to 0}} K_{\beta}(t,\tau)\big|_{\tau=t-(t^{\omega}/z)^2} = \lim_{\substack{t\to 0\\ z\to 0}} -\frac{e^{-\beta,1/2}_{1,1/2}(z)}{\beta\omega t^{\beta\omega-1}} = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{\beta\omega\Gamma(-\beta)\Gamma(1/2)\, t^{\beta\omega-1}}.$$

Тогда для ограниченности функции $K_{\beta}(t,\tau)$ необходимо выполнение условия $\beta\omega - 1 \leqslant 0$. Итак, доказано следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$, $\omega > 1/2$, $0 < \beta < 1$. Тогда ядро* (28) *интегрального уравнения* (26) *является ограниченной функцией при выполнении условия $\beta\omega - 1 \geqslant 0$.*

(c) Пусть $\omega = 1/2$. Тогда $|z| = \sqrt{t}/\sqrt{t-\tau} \to 1$ при $t \to 0$. Тогда функция Райта как ряд сходится абсолютно. Поэтому в случае $\omega = 1/2$ при $t \to 0$ функция типа Райта в ядре (28) ограничена, но само ядро будет неограничено, так как при $0 < \beta < 1$ имеем $0 < (1-\beta)/2 < 1/2$. Поэтому при $0 < \tau < t$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^{(1-\beta)/2}}{\sqrt{t-\tau}} = +\infty.$$

Итак, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0$, $\omega = 12$, $0 < \beta < 1$. Тогда ядро* (28) *интегрального уравнения* (26) *является неограниченной функцией при $t \to 0$ и $0 < \tau < t$.*

4. Основные результаты. В силу оценки (10) для функции типа Райта при

$$x = \gamma(t), \quad y = t - \tau, \quad \nu = 2 - \beta, \quad \delta = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad b = \frac{1}{2}$$

имеем

$$|K_\beta(t,\tau)| \leqslant C(\gamma(t))^{1-\beta-\theta}(t-\tau)^{(\theta-1)/2}, \quad \theta \in [0;1].$$

Пусть $\mu(t), f_2(t) \in C[0,T]$ в уравнении (26), где T — положительная константа. Тогда

$$\left|\int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right| \leqslant \|\mu(t)\|_{C[0,T]} \int_0^t |K_\beta(t,\tau)|d\tau \leqslant C\|\mu(t)\|_{C[0,T]} t^{\omega(1-\beta-\theta)} \int_0^t (t-\tau)^{(\theta-1)/2} d\tau =$$

$$= C\|\mu(t)\|_{C[0,T]} t^{\omega(1-\beta-\theta)} \frac{2}{\theta+1} t^{(\theta+1)/2} = C_1 t^{\omega(1-\beta-\theta)+(\theta+1)/2} \|\mu(t)\|_{C[0,T]}$$

при $\theta \in [0;1]$ и $t \in [0,T]$. Итак,

$$\left|\int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right| \leqslant C_1 \|\mu(t)\|_{C[0,T]} t^r,$$

где

$$r = \omega(1-\beta-\theta) + \frac{\theta+1}{2}, \quad \theta \in [0;1], \quad \omega \geqslant 0, \quad 0 < \beta < 1.$$

Для ограниченности интегрального оператора в уравнении (26) потребуем выполнение условия $r \geqslant 0$. Имеем

$$r(\omega;\beta;\theta) = \omega(1-\beta) + \frac{1}{2} + \theta\left(\frac{1}{2} - \omega\right).$$

I. Рассмотрим $0 \leqslant \omega \leqslant 1/2$. Тогда при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ получим

$$\frac{1}{2} \leqslant \omega(1-\beta) + \frac{1}{2} \leqslant r(\omega;\beta;\theta) \leqslant 1 - \omega\beta,$$

т.е. $r \geqslant 1/2 > 0$ при $0 \leqslant \omega \leqslant 1/2$ и $0 < \beta < 1$.

II. Пусть $\omega > 1/2$. Тогда при $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ имеем

$$1 - \omega\beta \leqslant r(\omega;\beta;\theta) \leqslant \omega(1-\beta) + \frac{1}{2}.$$

Тогда при $1 - \omega\beta \geqslant 0$, $\omega > 1/2$ получим ограниченность интегрального оператора. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Интегральное уравнение* (26) *с ядром* (28), $0 < \beta < 1$, *при* $\gamma(t) \sim t^\omega$, $t \to 0$, *однозначно разрешимо в классе функций* $C[0,T]$ *для любой правой части* $f_2(t) \in C[0,T]$, *если* $\omega \leqslant 1/\beta$.

Далее, решение задачи (19)–(20) имеет вид

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau)\, d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \tag{30}$$

где $f(x,t)$ принадлежит классу (14), и решение интегрального уравнения (26) $\mu(t)$ — непрерывная и ограниченная функция в условиях теоремы 1. Учитывая неотрицательность функций $G(x,\xi,t-\tau)$ и $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$, принимая во внимание равенство (его можно получить после введения замены $\xi = \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}$ интегрированием по частям и применением [1, с. 351, формула 3.461(5)])

$$\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\tau = t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) - \frac{x^2}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

непосредственно из (30) получаем следующую оценку:

$$|u(x,t)| \leqslant C(\lambda)\, x\, \sqrt{t}, \tag{31}$$

где $C(\lambda) = C_1|\lambda| + C_2$.

Для производных решения $u(x,t)$ (см. (30)) справедливо включение

$$u_t - u_{xx} = -\lambda\mu(t) + f(x,t) \in L_\infty(A) \cap C(B), \quad T = \mathrm{const} > 0, \tag{32}$$

где $A = \{(x,t) \mid x > 0,\ t \in [0,T]\}$, $B = \{(x,t) \mid x > 0,\ t \geqslant 0\}$, $T = \mathrm{const} > 0$ (следует из уравнения (19) и обозначения (21)).

Итак, функция (30) удовлетворяет уравнению (19) в смысле соотношения (32). Очевидно, что решение (30) удовлетворяет начальному и граничному условиям (20). Таким образом, функция (30) согласно (31) и (32) удовлетворяет граничной задаче (19) – (20) и принадлежит классу

$$\mathfrak{U} = \Bigg\{ u \ \Bigg| \ (x\sqrt{t})^{-1} u \in L_\infty(A) \cap C(B);\ u_t - u_{xx} \in L_\infty(A) \cap C(B);$$
$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int\limits_0^x \frac{u_\xi(\xi,t)}{(x-\xi)^\beta} d\xi \, \Bigg|_{x=\gamma(t)} \in C([0;T]),\ T = \mathrm{const} > 0,\ 0 < \beta < 1 \Bigg\}, \tag{33}$$

где $A = \{(x,t) \mid x > 0,\ t \in [0,T]\}$, $B = \{(x,t) \mid x > 0,\ t \geqslant 0\}$, $T = \mathrm{const} > 0$.

Теорема 2. *Пусть для функции* $f(x,t)$ *выполняются условия* (14) *и* (18), *функция* $\mu(t) \in C([0;T])$ *— решение интегрального уравнения* (26) *при правой части* $f_2(t) \in C([0;T])$, *определяемой формулой* (27). *Тогда граничная задача* (19)–(20) *с законом движения нагрузки* $\gamma(t) \sim t^\omega$ (*в окрестности точки* $t = 0$) *имеет единственное решение* (30) *в классе* (33), *если* $0 < \omega \leqslant 1/\beta$ *при* $0 < \beta < 1$.

5. Заключение. В условиях теоремы 1 ядро (28) интегрального уравнения (26) обладает слабой особенностью. Следовательно, можно применить метод последовательных приближений для нахождения единственного решения уравнения (26). Тогда соответствующие краевые задачи корректны в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое поставленной граничной задачи является слабым возмущением дифференциального уравнения.

В остальных случаях значений параметров β и ω интегральное уравнение (26) не решается методом последовательных приближений. Можно показать, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения, т.е. возникает спектр задачи. Если нарушена единственность решения первой краевой задачи, то в этом случае нагрузку можно интерпретировать как сильное возмущение. Итак, существование и единственность решений интегрального уравнения зависит от порядка дробной производной в нагруженном слагаемом уравнения в поставленной граничной задаче.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.
2. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. — Алматы: Гылым, 2010.
3. *Искаков С. А., Рамазанов М. И., Иванов И. А.* Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка// Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Мат. — 2015. — № 2 (78). — С. 25–30.
4. *Кочина Н. Н.* Вопросы регулирования уровня грунтовых вод при поливах// Докл. АН СССР. — 1973. — *213*, № 1. — С. 51–54.
5. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
6. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их приложения. — Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000.
7. *Нахушев А. М., Борисов В. Н.* Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, № 1. — С. 105–110.

8. *Полянин А. Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001.
9. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005.
10. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
12. *Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.* On the spectrum of Volterra integral equation with the incompressible kernel// AIP Conf. Proc. — 2014. — *1611*, № 1. — P. 127–132.
13. *Amangaliyeva M. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.* Uniqueness and non-uniqueness of solutions of the boundary value problems of the heat equation// AIP Conf. Proc. — 2015. — *1676*, № 1. — 020028.
14. *Caputo M.* Lineal model of dissipation whose Q is almost frequancy independent, II// Geophys. J. Astron. Soc. — 1967. — *13*. — P. 529–539.
15. *Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Tuleutaeva Zh. M.* On the Solvability of Heat Boundary Value Problems in Sobolev Spaces// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 8. — P. 2133–2144.
16. *Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I., Kosmakova M. T., Tuleutaeva Z. M.* On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain// Eurasian Math. J. — 2020. — *11 (3)*. — P. 89–94.
17. *Kosmakova M. T.* On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2016. — *81 (1)*. — P. 62–67.
18. *Kosmakova M. T., Iskakov S. A., Kasymova L. Zh.* To solving the fractionally loaded heat equation// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2021. — *101 (1)*. — P. 65–77.
19. *Kosmakova M. T., Izhanova K. A., Khamzeyeva A. N.* On the non-uniqueness of the solution to a boundary value problem of heat conduction with a load in the form of a fractional derivative// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2022. — *108 (4)*. — P. 98–106.
20. *Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Kasymova L. Zh.* To Solving the heat equation with fractional load// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 12. — P. 2854–2866.
21. *Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Tokesheva A. S., Khairkulova A. A.* On the non-uniqueness of solution to the homogeneous boundary-value problem for the heat conduction equation in an angular domain// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2016. — *84 (4)*. — P. 80–87.
22. *Pskhu A. V., Kosmakova M. T., Akhmanova D. M., Kassymova L. Zh., Assetov A. A.* Boundary-value problem for the heat equation with a load as the Riemann–Liouville fractional derivative// Bull. Karagand. Univ. Math. — 2022. — *105 (1)*. — P. 74–87.
23. *Ramazanov M. I., Kosmakova M. T., Kasymova L. Zh.* Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 9. — P. 1873–1885.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проекты № AP19677684, 2023-2025, № AP09259780, 2021-2023).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Космакова Минзиля Тимербаевна
Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: `svetlanamir578@gmail.com`

Хамзеева Айым Нурлановна
Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: `aiymkhamzeyeva@gmail.com`