ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 37–45
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-37-45

УДК 517.927.4; 517.988.63

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2024 г. **А. Н. НАИМОВ, М. В. БЫСТРЕЦКИЙ**

Аннотация. Исследована разрешимость периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся квазиоднородным отображением. Доказано, что если невозмущенная система уравнений с квазиоднородной нелинейностью не имеет ненулевых ограниченных решений, то периодическая задача допускает априорную оценку. Полученные результаты представляют интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Ключевые слова: периодическая задача, квазиоднородная нелинейность, априорная оценка, векторное поле, вращение векторного поля, гомотопные векторные поля.

ON THE SOLVABILITY OF A PERIODIC PROBLEM FOR A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH QUASI-HOMOGENEOUS NONLINEARITY

© 2024 **A. N. NAIMOV, M. V. BYSTRETSKII**

Abstract. In this paper, we examine the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations whose principal nonlinear part is a quasi-homogeneous mapping. We prove that if an unperturbed system with quasi-homogeneous nonlinearity has no nonzero bounded solutions, then the periodic problem admits an a priori estimate. The results obtained are of interest from the point of view of the application and development of methods of nonlinear analysis in the theory of differential and integral equations.

Keywords and phrases: periodic problem, quasi-homogeneous nonlinearity, a priori estimate, vector field, rotation of a vector field, homotopic vector fields.

AMS Subject Classification: 34C25, 47H11, 55M25

1. Введение.

Статья посвящена исследованию периодической задачи вида

$$x'(t) = P(x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, \omega), \tag{1}$$

$$x(0) = x(\omega). \tag{2}$$

Здесь $n \geqslant 2$, $\omega > 0$, $P = (P_1, \ldots, P_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности

$$P_i(\lambda^{\alpha_1} y_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} y_n) \equiv \lambda^{\alpha_i + \nu} P_i(y_1, \ldots, y_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

где числа $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, и $\nu > 0$ фиксированы. Отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, ω-периодично по t и удовлетворяет условию

$$\lim_{\rho \to +\infty} \rho^{-(\alpha_i+\nu)} \max_{\substack{0 \leqslant t \leqslant \omega, \\ |y| \leqslant 1}} \bigl| f_i(t, \rho^{\alpha_1} y_1, \dots, \rho^{\alpha_n} y_n) \bigr| = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Множество таких отображений f обозначим через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Отображение P называем главной квазиоднородной нелинейностью, а f называем возмущением.

Решением периодической задачи (1), (2) называем вектор-функцию $x \in C^1([0,\omega]; \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет системе уравнений (1) и условию периодичности (2). Такое решение ω-периодично и гладко продолжимо на $\mathbb{R}^1 = (-\infty, +\infty)$.

Разрешимость задачи (1), (2) исследована в следующей постановке: каким условиям должно удовлетворять отображение P, чтобы при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ существовало хотя бы одно решение задачи (1), (2).

В [5, 6] задача (1), (2) исследована в случае положительно однородного отображения P, т.е. $\alpha_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, с использованием методов априорной оценки и методов вычисления вращения векторных полей. Суть метода априорной оценки состоит в доказательстве ограниченности множества решений задачи (1), (2) по норме пространства $C([0,\omega]; \mathbb{R}^n)$ при предположении, что невозмущенная система уравнений

$$z'(t) = P(z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

не имеет ненулевых ограниченных решений. В этом случае вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int\limits_0^t \bigl(P(x(s)) + f(s, x(s))\bigr) ds, \quad x \in C([0,\omega]; \mathbb{R}^n), \tag{6}$$

не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathbb{R}^n)$. Поэтому, согласно теории векторных полей (см. [3, с. 135]), определена целочисленная характеристика $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение векторного поля Φ на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega]; \mathbb{R}^n)$. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения (см. [3, с. 141]) имеет место равенство $\Phi(x_0) = 0$ при некоторой вектор-функции $x_0 \in C([0,\omega]; \mathbb{R}^n)$; этим доказывается разрешимость периодической задачи. В [5] вычислено $\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n \gamma(P)$, где $\gamma(P)$ — вращение (степень отображения) конечномерного векторного поля P на единичной сфере $|x| = 1$ пространства $\mathbb{R}^n$. Отсюда следует достаточность условия $\gamma(P) \neq 0$ для разрешимости периодической задачи (1), (2) при любом возмущении f, если отображение P положительно однородно (порядка больше 1) и невозмущенная система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. В [6] с использованием теоремы Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля (см. [3, с. 24, теорема 5.2]) доказана необходимость условия $\gamma(P) \neq 0$ для разрешимости периодической задачи при любом возмущении f. В настоящей работе доказан аналогичный результат в предположении, что отображение P квазиоднородно с показателями α, ν и $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$.

Рассмотрение квазиоднородного отображения P позволяет не только обобщить результаты работ [5, 6], но и уточнить их следующим образом. Именно, если для положительно однородного отображения P ни при всех возмущениях f имеет место априорная оценка решений задачи (1), (2), то класс возмущений можно сужать так, что главная нелинейная часть системы уравнений (1) окажется квазиоднородным отображением. Например, система двух скалярных уравнений

$$x_1'(t) = |x_1(t)|^{m-1} x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \quad x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)),$$

где $m > 1$, ни при всех возмущениях $f(t, y_1, y_2) = (f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2))$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|y_1|+|y_2| \to \infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |f(t, y_1, y_2)| = 0,$$

допускает априорную оценку ω-периодических решений. Если сужать класс возмущений с дополнительным условием

$$f_2(t,y_1,y_2) = |y_2|^{q-1}y_2 + \tilde{f}_2(t,y_1,y_2), \quad 1<q<m,$$
$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^{-q(m-1)/(q-1)} \max_{\substack{0\leqslant t\leqslant\omega,\\ |y_1|+|y_2|\leqslant 1}} \bigl|\tilde{f}_2(t,\rho y_1,\rho^{(m-1)/(q-1)}y_2)\bigr| = 0,$$

то в результате получаем систему уравнений вида (1) с квазиоднородным отображением $P(y_1,y_2) = (|y_1|^{m-1}y_1, |y_2|^{q-1}y_2)$, где $\alpha = (1,(m-1)/(q-1))$, $\nu = m-1$.

Кроме того, к системе уравнений вида (1) с квазиоднородной нелинейностью P приводятся многие системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными высоких порядков. Такие системы уравнений представляют интерес при исследовании нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением схемы Фаэдо—Галеркина (см. [4, с. 118-132]).

2. Основные результаты. Сначала исследуем априорную оценку решений задачи (1), (2). Априорной оценкой называем ограниченность множества решений задачи (1), (2) по норме пространства $C([0,\omega];\mathbb{R}^n)$, т.е. либо множество решений задачи (1), (2) пусто, либо существует такое $M>0$, зависящее лишь от P, f, что для любого решения $x(t)$ задачи (1), (2) имеет место неравенство

$$\|x\| := \max_{0\leqslant t\leqslant\omega} |x(t)| < M. \tag{7}$$

Аналогично [5], априорная оценка решений задачи (1), (2) связана с невозмущенной системой уравнений (5). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть непрерывное отображение $P = (P_1,\dots,P_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию квазиоднородности* (3) *и пусть невозмущенная система уравнений* (5) *не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда при любом отображении $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ имеет место априорная оценка решений задачи* (1), (2).

Выясним, при каких условиях на P система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Применяя метод направляющей функции (см. [3, с. 87]), получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *l Система уравнений* (5) *не имеет ненулевых ограниченных решений, если непрерывное отображение $P = (P_1,\dots,P_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ квазиоднородно и выполнено условие*

$$\bigl\langle P(y), \nabla V(y)\bigr\rangle > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{8}$$

где $\langle u,v\rangle = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $\nabla V(y) = (\partial V/\partial y_1,\dots,\partial V/\partial y_n)$ — градиент функции $V \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^1)$.

Условие (8) является лишь достаточным для отсутствия ненулевых ограниченных решений у системы уравнений (5). При $n=2$ можно привести необходимые и достаточные условия. Пусть непрерывное отображение $P = (P_1,P_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ квазиоднородно с показателями $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2)$, ν и пусть $P(y) \neq 0$ при всех $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Тогда определена угловая функция $\theta_P(s)$, $s\in[0,2\pi]$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} P_1(\cos s,\sin s) &= |P(\cos s,\sin s)|\cos(\theta_P(s)),\\ P_2(\cos s,\sin s) &= |P(\cos s,\sin s)|\sin(\theta_P(s)),\end{aligned} \qquad s\in[0,2\pi], \quad \theta_P(0)\in[0,2\pi).$$

Наряду с $\theta_P(s)$ определим другую угловую функцию $\theta_\alpha(s)$ из условий

$$\cos(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_1\cos s}{A_\alpha(s)}, \quad \sin(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_2\sin s}{A_\alpha(s)}, \quad s\in[0,2\pi], \quad \theta_\alpha(0)\in[0,2\pi),$$

где $A_\alpha(s) = \bigl((\alpha_1\cos s)^2 + (\alpha_2\sin s)^2)\bigr)^{1/2}$.

Теорема 2. *Система уравнений (5) при $n = 2$ не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда $P(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и либо выполнены условия*

$$\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)) \neq 0 \quad \forall s \in [0, 2\pi], \tag{9}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} g_{P,\alpha}(s)ds \neq 0, \tag{10}$$

где

$$g_{P,\alpha}(s) = \frac{\cos(\theta_P(s) - s)}{A_\alpha(s)\sin(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s))},$$

либо выполнено условие

$$\text{если } \theta_P(s_0) - \theta_\alpha(s_0) = \pi j_0 \text{ при некоторых } s_0 \in [0, 2\pi) \text{ и целом } j_0, \\ \text{то } \theta_P(s) - \theta_\alpha(s) < \pi(j_0 + 1) \text{ при всех } s \in (s_0, 2\pi]. \tag{11}$$

Теорема 2 в случае положительно однородного отображения P доказана в [1].

Разрешимость периодической задачи (1), (2) устанавливается следующей теоремой, обобщающей результат работы [6].

Теорема 3. *Пусть для заданного непрерывного и квазиоднородного (с показателями α и ν) отображения $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда для разрешимости задачи (1), (2) при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ необходимо и достаточно, чтобы не обращалось в ноль вращение $\gamma(P)$ векторного поля $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ на единичной сфере $|y| = 1$.*

В доказательстве теоремы 3 применяются определения и свойства вращения конечномерных и бесконечномерных векторных полей из монографии [3]. Необходимость условия $\gamma(P) \neq 0$ можно доказать следующим образом: предполагая $\gamma(P) = 0$ и используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля (см. [3, с. 24, теорема 5.2]), построим отображение $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ при котором задача (1), (2) неразрешима. Достаточность условия $\gamma(P) \neq 0$ доказана на основе принципа ненулевого вращения (см. [3, с. 141]) посредством установления равенства $\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n\gamma(P)$, где $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение вполне непрерывного векторного поля Φ, определяемого формулой (6), на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0, \omega]; \mathbb{R}^n)$. В [7] выведена формула эффективного вычисления $\gamma(P)$ для одного класса градиентных векторных полей.

Полученные результаты представляют интерес с точки зрения применения и развития методов нелинейного анализа в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Можно отметить работы [2, 8], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в [8] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом ω-периодическом её возмущении она имела ω-периодическое решение.

3. Априорная оценка.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что оценка (7) не верна. Тогда заведомо существует неограниченная последовательность ω-периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, системы уравнений (1). Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = (y_{k1}(t), \ldots, y_{kn}(t))$, $k = 1, 2, \ldots$, где

$$y_{ki}(t) := r_k^{-\alpha_i} x_{ki}(t_k + tr_k^{-\nu}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbb{R}^1,$$

$$r_k := \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha, \quad |u|_\alpha := \Big((u_1^2)^{1/\alpha_1} + \ldots + (u_n^2)^{1/\alpha_n}\Big)^{1/2}.$$

Для вектор-функций $y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ имеем:

$$y_k'(t) = P(y_k(t)) + h_k(t), \quad |y_k(t)|_\alpha \leqslant |y_k(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

где
$$h_{ki}(t) \equiv r_k^{-(\alpha_i+\nu)} f_i\Big(t_k + tr_k^{-\nu}, r_k^{\alpha_1} y_{k1}(t), \ldots, r_k^{\alpha_n} y_{kn}(t)\Big), \quad i = 1, \ldots, n.$$
Отсюда, переходя к пределу вдоль некоторой подпоследовательности $y_{k_j}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$, на расширяющихся отрезках числовой прямой и учитывая условие (4), получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (5):
$$y_0'(t) = P(y_0(t)), \quad |y_0(t)|_\alpha \leqslant |y_0(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$
Полученное противоречит условию теоремы 1. □

Доказательство леммы 1. Пусть $z(t)$ — произвольное ненулевое решение системы уравнений (5), определенное при $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Проверим, что
$$z(t) \neq 0 \quad \forall t \in (\tau_1, \tau_2). \tag{12}$$
Для функции $z(t)$ как решения системы уравнений (5) имеет место равенство
$$\left(|z(t)|_\alpha^2\right)' = \sum_{i=1}^n 2\alpha_i^{-1} \left(z_i^2(t)\right)^{1/\alpha_i - 1} z_i(t) P_i(z(t)),$$
где $|u|_\alpha^2 := (u_1^2)^{1/\alpha_1} + \ldots + (u_n^2)^{1/\alpha_n}$. Отсюда, учитывая неравенства
$$|z_i(t)| \leqslant |z(t)|_\alpha^{\alpha_i}, \quad |P_i(z(t))| \leqslant |z(t)|_\alpha^{\alpha_i+\nu} \max_{|u|_\alpha \leqslant 1} |P_i(u)|,$$
выводим оценку
$$\left(|z(t)|_\alpha^2\right)' \leqslant C_0 \left(|z(t)|_\alpha^2\right)^{1+\nu/2},$$
где положительное число C_0 зависит лишь от отображения P. Из полученной оценки вытекает, что (12) верно.

Предположим, что ненулевое решение $z(t)$ системы уравнений (5) определено и ограничено на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Тогда функция $\varphi(t) := V(z(t))$, $t \in (-\infty, +\infty)$ ограничена; в силу (12) и условия (8) имеем:
$$\varphi'(t) = \langle \nabla V(z(t)), z'(t)\rangle = \langle \nabla V(z(t)), P(z(t))\rangle > 0, \ quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{13}$$
Следовательно, существуют конечные пределы $\varphi_{\pm\infty}$ функции $\varphi(t)$ при $t \to \pm\infty$ и $\varphi_{-\infty} < \varphi_{+\infty}$. Кроме того, вдоль некоторых последовательностей $t_k^\pm \to \pm\infty$ имеем $\varphi'(t_k^\pm) \to 0$. В силу (8) и (13) отсюда вытекает, что $z(t_k^\pm) \to 0$, $k \to \infty$. Тогда $\varphi_{\pm\infty} = 0$; противоречие. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $P(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ и $z(t) = (z_1(t), z_2(t))$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$, — произвольное ненулевое решение системы уравнений (5) при $n = 2$. Произведем замену
$$z_1(t) = r^{\alpha_1}(t) \cos\psi(t), \quad z_2(t) = r^{\alpha_2}(t) \sin\psi(t).$$
Тогда относительно $r(t)$ и $\psi(t)$ получаем систему уравнений
$$\begin{cases} \big(\alpha_1 \cos^2\psi(t) + \alpha_2 \sin^2\psi(t)\big) r'(t) = r^{1+\nu}(t) \big|P(\cos\psi(t), \sin\psi(t))\big| \cos\big(\theta_P(\psi(t)) - \psi(t)\big), \\ \big(\alpha_1 \cos^2\psi(t) + \alpha_2 \sin^2\psi(t)\big) \psi'(t) = r^\nu(t) \big|P(\cos\psi(t), \sin\psi(t))\big| A_\alpha(\psi(t)) \sin\big(\theta_P(\psi(t)) - \theta_\alpha(\psi(t))\big). \end{cases}$$
Отсюда, в частности следует, что $r(t) > 0$ при всех $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Произведем замену $\rho(t) = r(\xi(t))$, $\varphi(t) = \psi(\xi(t))$, где
$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\alpha_1 \cos^2\psi(s) + \alpha_2 \sin^2\psi(s)}{r^\nu(s) |P(\cos\psi(s), \sin\psi(s))|} ds.$$
В результате получаем систему уравнений
$$\begin{cases} \rho'(t) = \rho(t) \cos\left(\theta_P(\varphi(t)) - \varphi(t)\right), \\ \varphi'(t) = A_\alpha(\varphi(t)) \sin\big(\theta_P(\varphi(t)) - \theta_\alpha(\varphi(t))\big). \end{cases} \tag{14}$$
Таким образом, установлено, что система уравнений (5) при $n = 2$ не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда таких решений не имеет система уравнений (14).

Если выполнено условие (9), то в системе уравнений (14) функция $\varphi(t)$ строго монотонна и для любого целого l существует такое t_l, что $\varphi(t_l) = \varphi(0) + 2\pi l$. Отсюда, в силу первого уравнения системы (14), выводим:

$$\rho(t_l) = \rho(0) \exp\left(l \int\limits_0^{2\pi} g_{P,\alpha}(s)ds \right).$$

Следовательно, при выполнении условия (9) система уравнений (14) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь при дополнительном условии (10).

Пусть условие (9) не выполнено. Тогда система уравнений (14) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда на любом интервале (s_1, s_2), где

$$\sin\left(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)\right) \neq 0, \quad s \in (s_1, s_2), \qquad \sin\left(\theta_P(s_j) - \theta_\alpha(s_j)\right) = 0, \quad j = 1, 2,$$

выполняется одно из трех условий: либо

$$\cos\left(\theta_P(s_1) - s_1\right) \cos\left(\theta_P(s_2) - s_2\right) > 0,$$

либо

$$\sin\left(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)\right) > 0, \quad s \in (s_1, s_2), \qquad \cos\left(\theta_P(s_1) - s_1\right) < 0, \quad \cos\left(\theta_P(s_2) - s_2\right) > 0,$$

либо

$$\sin\left(\theta_P(s) - \theta_\alpha(s)\right) < 0, \quad s \in (s_1, s_2), \qquad \cos\left(\theta_P(s_1) - s_1\right) > 0, \quad \cos\left(\theta_P(s_2) - s_2\right) < 0.$$

Можно непосредственно проверить, что одно их этих условий выполняется, если выполнено условие (11), и обратно. Теорема 2 доказана. □

4. Доказательство теоремы 3.

Необходимость. Пусть $\gamma(P) = 0$. Используя теорему Хопфа о невырожденном продолжении непрерывного конечномерного векторного поля см [3, с. 24, теорема 5.2]), построим $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ при котором задача (1), (2) неразрешима.

Согласно теореме Хопфа из равенства $\gamma(P) = 0$ вытекает, что векторное поле $P(y)$ можно непрерывно продолжить без нулей внутри шара $|y| < 1$ некоторой формулой $Q(y)$: $P(y) = Q(y)$ при $|y| = 1$ и $Q(y) \neq 0$ при $|y| < 1$. Рассмотрим систему уравнений

$$x'(t) = P(x(t)) + g(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где отображение g определено формулой

$$g(y) = \begin{cases} 0, & |y| \geqslant 1, \\ Q(y) - P(y), & |y| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ и

$$P(y) + g(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Лемма 2. *Система уравнений* (15) *при некотором* $\omega_0 > 0$ *не имеет* ω_0*-периодических решений.*

Доказательство. Предположим, что такого $\omega_0 > 0$ не существует. Тогда существует последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, системы уравнений (15) с периодами $\omega_k = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$. В силу периодичности решений имеем:

$$\frac{1}{\omega_k} \int\limits_0^{\omega_k} \left\langle P(x_k(t)) + g(x_k(t)), y \right\rangle dt = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Если вектор-функции $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены,

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \max_{t \in \mathbb{R}^1} |x_k(t)| < \infty, \tag{18}$$

то они как решения системы уравнений (15) равностепенно непрерывны. Без ограничения общности можно считать, что последовательность функций $x_k(t)$ равномерно сходится к функции $x_0(t)$ на отрезке $[0,1]$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (17), получим

$$\big\langle P(x_0(0))+g(x_0(0)),y\big\rangle=0\quad\forall y\in\mathbb{R}^n,$$

что противоречит (16). Таким образом, для завершения доказательства леммы остается показать оценку (18).

Оценку (18) докажем аналогично теореме 1. Предположим, что неравенство (18) не верно и

$$r_k:=\max_{0\leqslant t\leqslant\omega}|x_k(t)|_\alpha=|x_k(t_k)|_\alpha\to\infty\quad\text{при } k\to\infty.$$

Рассмотрим вектор-функции $z_k(t)=(z_{k1}(t),\ldots,z_{kn}(t))$, $k=1,2,\ldots$, где

$$z_{ki}(t):=r_k^{-\alpha_i}x_{ki}(t_k+tr_k^{-\nu}),\quad i=1,\ldots,n,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

Для вектор-функций $z_k(t)$, $k=1,2,\ldots$ имеем:

$$z_k'(t)=P(z_k(t))+h_k(t),\qquad |z_k(t)|_\alpha\leqslant|z_k(0)|_\alpha=1,\quad t\in\mathbb{R}^1,\quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$h_{ki}(t)\equiv r_k^{-(\alpha_i+\nu)}g_i\big(r_k^{\alpha_1}z_{k1}(t),\ldots,r_k^{\alpha_n}z_{kn}(t)\big),\quad i=1,\ldots,n.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$z_0'(t)=P(z_0(t)),\quad |z_0(t)|\leqslant|z_0(0)|=1,\quad t\in\mathbb{R}^1.$$

Это противоречит тому, что система уравнений (5) не имеет ненулевых ограниченных решений. Следовательно, оценка (18) верна. Лемма 2 доказана. □

В системе уравнений (15) произведем замену $z_i(t)=\lambda_0^{\alpha_i}x_i(\lambda_0^\nu t)$, $i=1,\ldots,n$, где $\lambda_0=(\omega_0/\omega)^{1/\nu}$. Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$z'(t)=P(z(t))+\big(\lambda_0^{\alpha_1+\nu}g_1(\lambda_0^{-\alpha_1}z_1(t)),\ldots,\lambda_0^{\alpha_n+\nu}g_n(\lambda_0^{-\alpha_n}z_n(t))\big),\quad z(t)\in\mathbb{R}^n.\tag{19}$$

Очевидно, всякому ω-периодическому решению системы уравнений (19) соответствует ω_0-периодическое решение системы уравнений (15). Поэтому в силу леммы 2 система уравнений (19) не имеет ω-периодических решений. Таким образом, при

$$f(y)=\big(\lambda_0^{\alpha_1+\nu}g_1(\lambda_0^{-\alpha_1}y_1),\ldots,\lambda_0^{\alpha_n+\nu}g_n(\lambda_0^{-\alpha_n}y_n)\big)$$

задача (1), (2) неразрешима.

Достаточность. Пусть $\gamma(P)\neq0$ и $f\in\mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Покажем разрешимость задачи (1), (2), применяя схему доказательства из [3, с. 331-338]. Разрешимость задачи (1), (2) равносильна существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x)\equiv x(t)-x(\omega)-\int_0^t\big(P(x(s))+f(s,x(s))\big)ds,$$

действующего в пространстве $C([0,\omega];\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\tilde\Phi_\lambda(x)\equiv x(t)-x(\omega)-\int_0^t\big(P(x(s))+\lambda f(s,x(s))\big)ds,\quad \lambda\in[0,1].$$

В силу априорной оценки (7) имеем $\tilde\Phi_\lambda(x)\neq0$ для всех $\lambda\in[0,1]$ на сфере $\|x\|=r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega];\mathbb{R}^n)$. Отсюда следует, что вращения вполне непрерывных векторных полей Φ и $\tilde\Phi_0$ на бесконечности определены и равны

$$\gamma_\infty(\Phi)=\gamma_\infty(\tilde\Phi_0).\tag{20}$$

Вычислим $\gamma_\infty(\tilde{\Phi}_0)$, гомотопируя векторное поле $\tilde{\Phi}_0$ к другому векторному полю посредством следующего семейства вполне непрерывных векторных полей:

$$\Psi_\lambda(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int\limits_0^t P(x(s))ds - \lambda \int\limits_t^\omega P(x(s))ds, \quad \lambda \in [0,1].$$

Проверим, что

$$\Psi_\lambda(x) \neq 0 \quad \forall x \in C([0,\omega];\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{21}$$

Предположим, что $\Psi_{\lambda_*}(x_0) = 0$ при некоторых $x_* \in C([0,\omega];\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $\lambda_* \in [0,1]$. Если $\lambda_* = 1$, имеем:

$$x_*(t) \equiv x_*(\omega), \qquad \int\limits_0^\omega P(x_*(s))ds = 0.$$

Эти равенства противоречат предположению $x_*(t) \not\equiv 0$. Если $\lambda_* < 1$, то имеем

$$x_*'(t) = (1-\lambda_*)P(x_*(t)), \quad t \in (0,\omega), \qquad x_*(0) = x_*(\omega), \quad x_*(t) \not\equiv 0.$$

Тогда $y_*(t) = x_*(t/(1-\lambda_*))$ является ненулевым ограниченным решением системы уравнений (5), приходим к противоречию. Таким образом, (21) верно.

Из (21) следует, что

$$\gamma_\infty(\tilde{\Phi}_0) = \gamma_\infty(\Psi_1). \tag{22}$$

Вполне непрерывное векторное поле Ψ_1 представляет собой разность единичного и конечномерного операторов. Поэтому, согласно определению вращения вполне непрерывного векторного поля [3, с. 135], имеем:

$$\gamma_\infty(\Psi_1) = \gamma_\infty(F_1), \tag{23}$$

где $F_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — конечномерное векторное поле, которое получается из вполне непрерывного векторного поля Ψ_1 заменой функции $x(t)$ вектором $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$F_1(\xi) = -\omega P(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Учитывая, что для векторного поля $-\omega P$ вращение на бесконечности $\gamma_\infty(-\omega P)$ равно вращению на единичной сфере $\gamma(-\omega P)$, а также используя формулу произведения вращений (см. [3, с. 32]), находим

$$\gamma_\infty(F_1) = \gamma(-\omega P) = (-1)^n \gamma(P). \tag{24}$$

Таким образом, из (20)–(24) выводим:

$$\gamma_\infty(\Phi) = (-1)^n \gamma(P).$$

Отсюда, в силу условия $\gamma(P) \neq 0$ и согласно принципу ненулевого вращения (см. [3, с. 138]), существует решение уравнения $\Phi(x) = 0$, которое будет решением задачи (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев Н. А.* О построении правильных направляющих функций// Докл. АН СССР. — 1968. — *183*, № 2. — С. 265–266.
2. *Звягин В. Г., Корнев С. В.* Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений// Совр. мат. Фундам. напр. — 2015. — *58*, № 1. — С. 59–81.
3. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
4. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
5. *Мухамадиев Э.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1970. — *194*, № 3. — С. 510–513.
6. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью// Диффер. уравн. — 2023. — *59*, № 2. — С. 280–282.

7. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н.* Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 4. — С. 37–48.
8. *Перов А. И., Каверина В. К.* Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 2. — С. 269–272.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Наимов Алижон Набиджанович
Вологодский государственный университет
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Быстрецкий Михаил Васильевич
Вологодский государственный университет
E-mail: pmbmv@bk.ru