ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 3–13
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-3-13

УДК 517.968

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

© 2023 г. **С. Н. АСХАБОВ**

Аннотация. Методом весовых метрик в конусе пространства непрерывных функций доказана глобальная теорема о существовании и единственности неотрицательного решения начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения с разностными ядрами, степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. Показано, что решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и получена оценка скорости их сходимости.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, разностное ядро, степенная нелинейность.

INITIAL-VALUE PROBLEM FOR AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH DIFFERENCE KERNELS AND AN INHOMOGENEITY IN THE LINEAR PART

© 2023 **S. N. ASKHABOV**

Abstract. A global theorem on the existence and uniqueness of a nonnegative solution of the initial-value problem for an integro-differential equation with difference kernels, power nonlinearity, and inhomogeneity in the linear part is proved by the method of weight metrics in the cone of the space of continuous functions. It is shown that the solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type. An estimate of the rate of their convergence is obtained.

Keywords and phrases: integro-differential equation, difference kernel, power nonlinearity.

AMS Subject Classification: 47G20, 47J05, 45D05

1. Введение. Решение многих задач гидроаэродинамики, теории упругости, популяционной генетики и других приводит к нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям вольтерровского типа с разностными ядрами. При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные решения таких уравнений (см., например, [1, 4]). В отличие от соответствующих линейных однородных уравнений нелинейные уравнения кроме тривиального решения могут иметь и нетривиальные решения, и в этом состоит принципиальное отличие нелинейных однородных уравнений от соответствующих линейных уравнений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2020-0001).

В данной работе рассматривается начальная задача вида

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x h(x-t)u(t)\,dt + \int_0^x k(x-t)u'(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

где ядра $h(x)$, $k(x)$ и неоднородность $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$h \in C[0,\infty), \quad h(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad h(0) = 0, \tag{3}$$

$$k \in C^1[0,\infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad k(0) = 0, \quad k'(0) > 0, \tag{4}$$

$$f \in C^1[0,\infty), \quad f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad f(0) = 0. \tag{5}$$

Решения начальной задачи (1)–(2) разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \Big\{u(x): \ u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty), \ u(0) = 0, \ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\Big\}.$$

Наряду с задачей (1)–(2) рассматривается тесно связанное с ней интегральное уравнение типа свертки

$$u^{\alpha}(x) = \int_0^x H(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad \alpha > 1, \tag{6}$$

где $H(x) = h(x) + k'(x)$.

Из условий (3) и (4) вытекает, что ядро $H(x)$ уравнения (6) удовлетворяет условию

$$H \in C[0,\infty), \quad H(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad H(0) > 0. \tag{7}$$

Решения уравнения (6) разыскиваются в классе

$$Q_0 = \Big\{u(x): \ u \in C[0,\infty), \ u(0) = 0, \ u(x) > 0 \text{ при } x > 0\Big\}.$$

Уравнения вида (6) возникают в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду (см. [9]), при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом (см. [7, 11]), при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе, в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [1, 6, 10]). В частности, к уравнению вида (6) при $\alpha = 2$ сводится известное уравнение Буссинеска. Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения интегрального уравнения (6), т.е. решения принадлежащие классу Q_0.

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (6) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого (см., например, [5, гл. 3, п. 3.1.3], доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (6) как в пространстве P_b, так и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций. Показано, что решение уравнения (6) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. Установлено, что любое решение интегрального уравнения (6) из конуса Q_0 является решением задачи (1)–(2) в конусе Q_0^1 и обратно, любое решение задачи (1)–(2) является решением интегрального уравнения (6). Тем самым доказана глобальная теорема о существовании, единственности и способе нахождения решения задачи (1)–(2) как в пространстве P_b, так и во всем классе непрерывных положительных при $x > 0$ функций. Приведены также простые примеры, иллюстрирующие основные результаты.

2. Свойства неотрицательных решений.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (7). *Если* $u \in Q_0$ *является решением интегрального уравнения* (6), *то функция* $u(x)$ *не убывает и непрерывно дифференцируема на* $(0,\infty)$, *т.е.* $u \in C^1(0,\infty)$.

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6) и $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ — любые числа, $x_1 < x_2$. Так как $H(x)$ и $f(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int\limits_0^{x_1} \big[H(x_2-t) - H(x_1-t)\big]u(t)dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} H(x_2-t)u(t)dt + f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0.$$

Значит, $u(x_2) \geqslant u(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т.е. $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$.

Докажем теперь, что решение $u(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на $(0,\infty)$ функция. Так как по условию $H(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то по теореме Лебега (см., например, [1, теорема 17.7]) почти всюду на $[0,\infty)$ существует производная $H'(x)$, которая, по теореме об интегрировании производной (см. [1, теорема 17.8]), локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (6) дифференцируема, причем в силу свойства коммутативности свертки (см. [1, §17])

$$\left(\int\limits_0^x H(x-t)u(t)dt + f(x)\right)' = \int\limits_0^x H'(x-t)u(t)dt + H(0)u(x) + f'(x) =$$
$$= \int\limits_0^x H'(t)u(x-t)dt + H(0)u(x) + f'(x). \quad (8)$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, функция $f'(x)$ непрерывна, а функция $H'(x)$ локально суммируема на $[0,\infty)$ то, в силу леммы о непрерывности свертки (см. [3, лемма 1], [8, лемма 1]), производная (8) правой части тождества (6) непрерывна на $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (6), что влечет за собой существование и непрерывность первой производной $u'(x)$ при $x > 0$, так как

$$u'(x) = \alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\left[\int\limits_0^x H'(t)u(x-t)dt + H(0)u(x) + f'(x)\right]. \qquad \square$$

Следующая лемма устанавливает связь между задачей (1)–(2) и интегральным уравнением (6).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3), (4) *и* (5). *Если функция* $u \in Q_0^1$ *является решением задачи* (1)–(2), *то* $u \in Q_0$ *и* u *является решением интегрального уравнения* (6). *Обратно, если уравнение* (6) *имеет решение* $u \in Q_0$, *то* $u \in Q_0^1$ *и* u *является решением задачи* (1)–(2).

Доказательство. Пусть $u \in Q_0^1$ — решение задачи (1)–(2). Тогда $u \in Q_0$. Так как $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, интегрируя по частям тождество (1) и учитывая, что $H(x) = h(x) + k'(x)$, имеем

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x h(x-t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x k(x-t)du(t) + f(x) =$$
$$= \int\limits_0^x h(x-t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x u(t)k'(x-t)dt + f(x) = \int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt + f(x), \quad (9)$$

т.е. $u(x)$ является решением уравнения (6) в конусе Q_0.

Обратно, пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (6). Тогда, согласно лемме 1, $u \in C^1(0,\infty)$ и, следовательно, $u \in Q_0^1$. Поэтому, используя свойство коммутативности свертки, формулу интегрирования по частям и равенства $k(0) = u(0) = 0$, $H(x) = h(x) + k'(x)$, из тождества (6) имеем

$$u^\alpha(x)=\int\limits_0^x H(t)u(x-t)\,dt+f(x)=\int\limits_0^x h(t)u(x-t)\,dt+\int\limits_0^x k(t)u'(x-t)\,dt+f(x)=$$

$$=\int\limits_0^x h(x-t)u(t)\,dt+\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt+f(x),$$

т.е. $u(x)$ является решением задачи (1)–(2) в конусе Q_0^1. □

Из леммы 2 вытекает, что для доказательства существования и единственности в классе Q_0^1 решения задачи (1)–(2) достаточно доказать существование и единственность в классе Q_0 решения интегрального уравнения (6).

Доказательства основных результатов данной статьи основаны на априорных оценках снизу и сверху решений уравнения (6). При доказательстве верхней априорной оценки решения уравнения (6) нам понадобится следующее интегральное неравенство Чебышева (см., например, [1, лемма 17.1]):

$$\int\limits_0^x v(x-t)\,w(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^x v(t)\,w(t)dt,\quad x>0, \tag{10}$$

справедливое для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (7). *Если $u\in Q_0$ является решением интегрального уравнения* (6), *то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}H(0)\cdot x\right]^{1/(\alpha-1)}\leqslant u(x)\leqslant\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x H(t)\,dt+f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $u\in Q_0$ — решение уравнения (6). Так как при $x=0$ неравенства (11) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x>0$.

Докажем сначала первое неравенство из (11). Так как $f(x)\geqslant 0$ и $H(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то из тождества (6), имеем

$$u^\alpha(x)\geqslant\int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt\geqslant H(0)\cdot\int\limits_0^x u(t)\,dt\quad\forall x>0,$$

или

$$u(x)\geqslant\left[H(0)\int\limits_0^x u(t)\,dt\right]^{1/\alpha}\qquad\forall x>0, \tag{12}$$

или, что то же самое,

$$\left[H(0)\int\limits_0^t u(s)\,ds\right]^{-1/\alpha}H(0)u(t)\geqslant H(0)\quad\forall t>0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получим

$$\left[H(0)\int\limits_0^x u(t)\,dt\right]^{(\alpha-1)/\alpha}\geqslant\frac{\alpha-1}{\alpha}H(0)\cdot x\quad\forall x>0,$$

откуда

$$\left[H(0)\int\limits_0^x u(t)\,dt\right]^{1/\alpha}\geqslant\left[\frac{\alpha-1}{\alpha}H(0)\cdot x\right]^{1/(\alpha-1)},\quad\forall x>0. \tag{13}$$

Таким образом, первое неравенство из (11) непосредственно вытекает из неравенств (12) и (13).

Докажем теперь второе неравенство из (11). Так как, в силу условия (7) и леммы 1, функции $H(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то, используя неравенство Чебышева (10), из тождества (6) получаем

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt + f(x) \leqslant \int\limits_0^x H(t)u(t)\,dt + f(x) \quad \forall x>0,$$

или

$$u(x) \leqslant \left[\int\limits_0^x H(t)u(t)\,dt + f(x)\right]^{1/\alpha} \quad \forall x>0, \tag{14}$$

или

$$H(t)u(t) + f'(t) \leqslant H(t)\left[\int\limits_0^t H(s)u(s)\,ds + f(t)\right]^{1/\alpha} + f'(t), \quad \forall t>0,$$

откуда

$$\left[\int\limits_0^t H(s)u(s)\,ds + f(t)\right]^{-1/\alpha} \big[H(t)u(t)+f'(t)\big] \leqslant$$

$$\leqslant H(t) + f'(t)\left[\int\limits_0^t H(s)u(s)\,ds + f(t)\right]^{-1/\alpha} = H(t)+I(t), \quad \forall t>0, \tag{15}$$

где

$$I(t) \equiv f'(t)\left[\int\limits_0^t H(s)u(s)\,ds + f(t)\right]^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \quad \text{для любого } x>0. \tag{16}$$

В силу условия (5) возможны только три случая: либо $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\infty)$, либо существует такое число $x_0>0$, что $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,x_0]$ и $f(x)>0$ при $x>x_0$, либо $f(x)>0$ при всех $x>0$.

Если $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\infty)$, то неравенство (16) очевидно и обращается в тождество, так как при $x>0$ выполняются соотношения $H(x)>0$, $u(x)>0$ и $f'(x)\equiv 0$.

Если же существует такое $x_0>0$, что $f(x)\equiv 0$ при $x\in[0,x_0]$ и $f(x)>0$ при $x>x_0$, то

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt = 0 \quad \text{при любом } x\in[0,x_0]$$

и, значит, неравенство (16) выполняется при $x\in[0,x_0]$, обращаясь в тождество, а при $x>x_0$, с учетом того, что $f(x_0)=f(0)=0$ и что функция $f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$ не убывает, имеем

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^x I(t)\,dt \leqslant \int\limits_{x_0}^x f'(t)f^{-1/\alpha}(t)\,dt = \frac{\alpha}{\alpha-1}\int\limits_{x_0}^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]'\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)$$

в силу [1, теорема 17.8], т.е. неравенство (16) выполняется и при любом $x>x_0$.

Если, наконец, $f(x) > 0$ при всех $x > 0$, то аналогично получаем

$$\int\limits_0^x I(t)\,dt \leqslant \int\limits_0^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t)\,dt = \frac{\alpha}{\alpha-1}\int\limits_0^x [f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)]'\,dt \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x).$$

Итак, неравенство (16) доказано во всех трёх случаях.

Интегрируя неравенство (15) в пределах от 0 до x, с учётом неравенства (16) имеем

$$\left[\int\limits_0^x H(s)u(s)\,ds + f(x)\right]^{(\alpha-1)/\alpha} \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\left[\int\limits_0^x H(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right] \quad \forall x > 0,$$

откуда

$$\left[\int\limits_0^x H(t)u(t)\,dt + f(x)\right]^{1/\alpha} \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x H(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1} \qquad \forall x > 0. \tag{17}$$

Итак, второе неравенство из (11) непосредственно вытекает из неравенств (14) и (17). □

Из леммы 3 следует, что решения интегрального уравнения (6) естественно разыскивать в классе

$$P = \Big\{u(x):\ u \in C[0,\infty),\ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\Big\},$$

где

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\, H(0)\cdot x\right]^{1/(\alpha-1)}, \quad G(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot \int\limits_0^x H(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)}, \tag{18}$$

а функции $H(x)$, $f(x)$ удовлетворяют условиям (7) и (5), соответственно.

В силу леммы 2, утверждения леммы 3 справедливы и для задачи (1)–(6).

Пример 1. При $\alpha = 2$, $h(x) = 0$, $k(x) = 3x$, $f(x) = x^2$ задача (1)–(6) и уравнение (6) имеют одно и то же решение $u(x) = 2x$, при этом априорные оценки (11) принимают вид: $1{,}5x \leqslant 2x \leqslant 2{,}5x$.

3. Теоремы существования и единственности.

Рассмотрим нелинейный интегральный оператор свертки T:

$$(Tu)(x) = \left(\int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt + f(x)\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и* (7). *Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T, т.е. $T : P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$, т.е. $Tu \in C[0,\infty)$ и $F(x) \leqslant (Tu)(x) \leqslant G(x)$.

1. Так как $H, u, f \in C[0,\infty)$ и $\alpha > 1$, то очевидно, что $Tu \in C[0,\infty)$.

2. Покажем, что $(Tu)(x) \geqslant F(x)$. Так как $u(x) \geqslant F(x)$, то

$$\big[(Tu)(x)\big]^{\alpha} \geqslant \int\limits_0^x H(x-t)u(t)\,dt \geqslant \int\limits_0^x H(x-t)F(t)\,dt \geqslant H(0)\int\limits_0^x F(t)\,dt = [F(x)]^{\alpha},$$

т.е. $(Tu)(x) \geqslant F(x)$.

3. Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leqslant G(x)$. Так как $u(x) \leqslant G(x)$ и функции $H(x)$, $G(x)$ не убывают на $[0, \infty)$, то в силу неравенства Чебышева (10) получаем

$$\big[(Tu)(x)\big]^{\alpha} = \int\limits_0^x H(x-t)\,u(t)\,dt + f(x) \leqslant \int\limits_0^x H(x-t)\,G(t)\,dt + f(x) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^x H(t)\,G(t)\,dt + \int\limits_0^x f'(t)dt = \int\limits_0^x G(t)\left[H(t) + \frac{f'(t)}{G(t)}\right]dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^t H(s)\,ds + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right]^{1/(\alpha-1)} \Big[H(t) + f^{-1/\alpha}(t) f'(t)\Big]\,dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left[\int\limits_0^x H(t)\,dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{\alpha/(\alpha-1)} = [G(x)]^{\alpha},$$

т.е. $(Tu)(x) \leqslant G_(x)$, что и требовалось доказать. □

Исследование интегрального уравнения (6) будет основано на методе весовых метрик, и для его применения нам нужно будет построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \Big\{u(x):\ u \in C[0,b],\ F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\Big\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в (18), а $b > 0$ — произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполнены условия* (5) *и* (7)*, то класс* P_b *инвариантен относительно интегрального оператора* T.

Далее будем предполагать, что неоднородность $f(x)$ наряду с условием (5) удовлетворяет дополнительному условию:

$$C = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x} < \infty. \tag{19}$$

Заметим, что функция $f(x) = x^2$, рассмотренная в примере 1, в котором $\alpha = 2$, удовлетворяет условию (19) и при этом $C = 1$.

Введем во множестве функций P_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u_1, u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}}, \quad \beta > 0. \tag{20}$$

Поскольку $e^{\beta x} \geqslant 1$ и $|u_1(x) - u_2(x)| \leqslant G(x) - F(x)$ для любых $u_1, u_2 \in P_b$, то с учетом неравенства

$$k(x) = \int\limits_0^x H(t)dt \leqslant H(x)\cdot x \quad \forall x \in (0,b]$$

получим:

$$\frac{|u_1(x) - u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leqslant \frac{G(x) - F(x)}{x^{1/(\alpha-1)}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot H(b) + \frac{f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)}{x}\right]^{1/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot H(0)\right]^{1/(\alpha-1)}.$$

Следовательно, в силу условия (19), для всех $u_1, u_2 \in P_b$

$$\rho_b(u_1, u_2) \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot H(b)+C\right]^{1/(\alpha-1)} - \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot H(0)\right]^{1/(\alpha-1)} < \infty,$$

т.е. расстояние $\rho_b(u_1, u_2)$ определено корректно.

Лемма 4. *Множество P_b с метрикой ρ_b образует полное метрическое пространство.*

Доказательство. Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту метрического пространства P_b. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из P_b. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что при всех $m, n \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}} < \varepsilon \quad \forall m,n \geqslant N, q \quad \forall x \in (0,b]. \tag{21}$$

Так как $x^{1/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta x} \leqslant b^{1/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta b} \equiv M$, то

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}} \geqslant \frac{1}{M}\cdot|u_m(x)-u_n(x)|.$$

Поэтому из (21), имеем

$$|u_m(x)-u_n(x)| \leqslant M\cdot\varepsilon, \quad \forall m,n \geqslant N, \quad \forall x \in [0,b]$$

(здесь учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$, поскольку $F(0) = G(0) = 0$), т.е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0,b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0,b]$ существует такая функция $u \in C[0,b]$, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{22}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \in P_b$, то для любых n и $x \in [0,b]$ имеем

$$F(x) \equiv \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}H(0)\,x\right]^{1/(\alpha-1)} \leqslant u_n(x) \leqslant \left[\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x H(t)\,dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right]^{1/(\alpha-1)} \equiv G(x).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, с учетом равенства (22) получаем $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, т.е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ по метрике ρ_b. Переходя в неравенстве (21) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\frac{|u(x)-u_n(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}e^{\beta x}} < \varepsilon \quad \forall n \geqslant N, \quad x \in (0,b],$$

т.е. $\rho_b(u_n, u) < \varepsilon$ для любого $n \geqslant N$, что и требовалось. $\square$

Итак, выше мы доказали, что если во множестве функций P_b ввести метрику (20), то класс P_b превращается полное метрическое пространство. Кроме того, мы показали (см. следствие 1), что нелинейный оператор свертки T действует из P_b в P_b.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0,b)$ такое, что выполняется неравенство

$$H(c) < \alpha\cdot H(0). \tag{23}$$

Очевидно, что такое число c всегда существует, так как $H(0) > 0$, $H(x)$ непрерывна и $\alpha > 1$. Положим

$$\beta = \frac{1}{H(0)}\sup_{c\leqslant x\leqslant b}\frac{H(x)-H(0)}{x}. \tag{24}$$

Справедлива следующая лемма (ср. [8]).

Лемма 5. *Пусть ядро $H(x)$ удовлетворяет условию (7). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство*

$$H(x)\cdot e^{-\beta x} \leqslant H(c), \tag{25}$$

где числа c и β определяются из условия (23) и формулы (24) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $0 \leqslant x \leqslant c$. Учитывая, что $H(x)$ не убывает и $\beta > 0$, имеем $H(x)e^{-\beta x} \leqslant H(x) \leqslant H(c)$, что и требовалось.

2. В случае $c \leqslant x \leqslant b$ имеем

$$H(x) = H(0) + H(0) \cdot x \cdot \frac{1}{H(0)} \cdot \frac{H(x) - H(0)}{x} \leqslant H(0) \cdot \bigl[1 + x \cdot \beta\bigr] \leqslant H(0) \cdot e^{\beta\, x}.$$

Следовательно, $H(x) \leqslant H(0)e^{\beta x} \leqslant H(c)e^{\beta x}$, откуда получаем, что $H(x)e^{-\beta x} \leqslant H(c)$ и для любого $x \in [c, b]$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (5), (7) *и* (19). *Тогда оператор* $T : P_b \to P_b$ *является сжимающим, при этом неравенство*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{H(c)}{\alpha \cdot H(0)} \rho_b(u_2, u_1), \tag{26}$$

выполняется для всех $u_1, u_2 \in P_b$, *где число* c *определяется из условия* (23).

Доказательство. Тот факт, что оператор T действует из P_b в P_b, вытекает из следствия 1. Докажем неравенство (26), т.е. факт, что оператор T, в силу неравенства (23), является сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0, b]$. По теореме Лагранжа, для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Theta^{1/\alpha - 1}(z_1 - z_2),$$

где Θ лежит между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 \geqslant 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит,

$$\Bigl| z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} \Bigr| \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|z_1 - z_2|}{\bigl\{z_0\bigr\}^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Используя это неравенство и неравенства

$$(Tu_1)(x) \geqslant F(x), \quad (Tu_2)(x) \geqslant F(x) \quad \forall x \in (0, b],$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\Bigl|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\Bigr| = \\
&\quad = \left| \left(\int\limits_0^x H(x-t)u_2(t)\, dt + f(x) \right)^{1/\alpha} - \left(\int\limits_0^x H(x-t)u_1(t)\, dt + f(x) \right)^{1/\alpha} \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\Bigl\{\bigl[F^\alpha(x)\bigr]\Bigr\}^{(\alpha-1)/\alpha}} \left| \int\limits_0^x H(x-t)u_2(t)\, dt - \int\limits_0^x H(x-t)u_1(t)\, dt \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot H(0) \cdot x} \int\limits_0^x H(x-t) \cdot |u_2(t) - u_1(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Итак,

$$\bigl|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)\bigr| \leqslant \frac{1}{(\alpha - 1)H(0) \cdot x} \int\limits_0^x H(x-t) \cdot \bigl|u_2(t) - u_1(t)\bigr|\, dt. \tag{27}$$

Так как

$$\bigl|u_2(x) - u_1(x)\bigr| = x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \frac{|u_2(x) - u_1(x)|}{x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}} \leqslant x^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \cdot \rho_b(u_2, u_1),$$

то из (27), с учетом леммы 2, получим

$$\big|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)\big| \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)H(0)\cdot x}\cdot\rho_b(u_2,u_1)\int\limits_0^x H(x-t)t^{1/(\alpha-1)}e^{\beta t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)\,H(0)\cdot x}\cdot\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}\int\limits_0^x H(x-t)e^{-\beta(x-t)}t^{1/(\alpha-1)}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{H(c)}{(\alpha-1)\cdot H(0)\cdot x}\cdot e^{\beta x}\cdot\rho_b(u_2,u_1)\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}\cdot x^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\big|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)\big|}{x^{1/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta x}} \leqslant \frac{H(c)}{\alpha\cdot H(0)}\cdot\rho_b(u_2,u_1)\quad \forall x\in(0,b],$$

что равносильно неравенству (26). Поскольку, в силу неравенства (23), коэффицент в неравенстве (26) удовлетворяет условию $H(c)/\big[\alpha\,H(0)\big]<1$, то оператор T является сжимающим. $\square$

Теорема 3. *Если выполнены условия* (5), (7) *и* (19), *то интегральное уравнение* (6) *имеет в* Q_0 (*и в* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике* (20) *при любом* $b<\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (6) в операторном виде: $u=Tu$. Из леммы 1 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (6) имеет единственное решение в пространстве P_b при любом $b>0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (20) при любом $b<\infty$.

Осталось показать, что уравнение (6) имеет единственное решение во всем классе Q_0 (ср. [2]). Положим $P_\infty=\bigcup\limits_{b>0}P_b$, т.е. P_∞ есть множество функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$, сужения которых на отрезок $[0,b]$ принадлежат P_b. Так как уравнение (6) имеет единственное решение в P_b при любом $b>0$ и коэффициент сжатия в (26) не зависит от b, то уравнение (6) имеет единственное решение $u^*(x)$ в P_∞. Поскольку всякое решение уравнения (6) из Q_0 удовлетворяет оценкам (11), то это решение $u^*(x)$ будет единственным решением уравнения (6) и в Q_0. $\square$

Таким образом, на основании теоремы **??**, используя связь между решениями уравнения (6) и задачи (1)–(6), установленную в лемме 2, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (3), (4), (5) *и* (19), *то начальная задача* (1)–(2) *имеет в* Q_0^1 (*и в* P_b *при любом* $b>0$) *единственное решение* $u^*(x)$. *Это решение удовлетворяет неравенствам* (11), *и его можно найти в полном метрическом пространстве* P_b *методом последовательных приближений по формуле* $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, *со сходимостью по метрике*

$$\rho_b(u_1,u_2)=\sup_{0<x\leqslant b}\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{x^{1/(\alpha-1)}\cdot e^{\beta x}},\quad \textit{где}\quad \beta=\frac{1}{H(0)}\cdot\sup_{c\leqslant x\leqslant b}\frac{H(x)-H(0)}{x},$$

а число c *определяется из условия* (23). *При этом справедлива следующая оценка погрешности*:

$$\rho_b(u_n,u^*)\leqslant\frac{q^n}{1-q}\cdot\rho_b(Tu_0,u_0),\quad n\in\mathbb{N},$$

где $q=H(c)/\big(\alpha\cdot H(0)\big)<1$, *а* $u_0(x)\in P_b$ — *начальное приближение* (*произвольная функция*).

Пример 2. Начальная задача

$$u^\alpha(x)=p\int\limits_0^x(x-t)\,u'(t)\,dt,\quad \alpha>1,\ p>0,\ x\in[0,\infty),\qquad u(0)=0,$$

имеет в классе Q_0^1 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot p \cdot x\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

В данном случае ядро $k(x) = p \cdot x$, $p > 0$, удовлетворяет всем требованиям условия (4).

Пример 2 показывет, что нелинейные однородные уравнения вольтерровского типа, в отличие от линейных уравнений, кроме тривиального решения могут иметь и не тривиальные решения.

В тех случаях, когда условия теоремы 4 не выполняются, интегро-дифференциальное уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ может либо не иметь нетривиальных решений, либо иметь континуум нетривиальных решений. Например, если $\alpha = 1$, $h(x) = 0$ и $k(x) = x$, то уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ не имеет в классе Q_0^1 решений, а если $\alpha = 1$, $h(x) = 0$ и $k(x) = 1$, то уравнение (1) при $f(x) \equiv 0$ имеет в классе Q_0^1 континуум решений $u(x) = A \cdot x^q$, где A и q — любые положительные числа.

В заключение отметим, что, следуя работе [12], можно рассмотреть также вопрос о численном решении начальной задачи (1)–(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
2. *Асхабов С. Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части// Диффер. уравн. — 2020. — *56*, № 6. — С. 786–795.
3. *Асхабов С. Н.* Система интегро-дифференциальных уравнений типа свёртки со степенной нелинейностью// Сиб. ж. индустр. мат. — 2021. — *24*, № 3. — С. 5–18.
4. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.
5. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969.
6. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017.
7. *Keller J. J.* Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction// Z. Angew. Math. Phys. — 1981. — *32*, № 2. — P. 170–181.
8. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation// Ann. Polon. Math. — 1979. — *36*, № 1. — P. 61–72.
9. *Okrasinski W.* On a non-linear convolution equation occurring in the theory of water percolation// Ann. Polon. Math. — 1980. — *37*, № 3. — P. 223–229.
10. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications// Extracta Math. — 1989. — *4*, № 2. — P. 51–74.
11. *Schneider W. R.* The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type// Z. Angew. Math. Phys. — 1982. — *33*, № 1. — P. 140–142.
12. *Vabishchevich P. N.* Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integro-differential equations with difference kernels// Appl. Numer. Math. — 2022. — *174*, № 4. — P. 177–190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEGS-2020-0001).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет, Грозный;
Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный
E-mail: askhabov@yandex.ru