ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 3–19
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-3-19

УДК 517.51

О ПОРЯДКАХ n-ЧЛЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

© 2023 г. **Г. АКИШЕВ**

Аннотация. В статье рассматриваются анизотропное пространство Лоренца 2π-периодических функций многих переменных и класс Никольского—Бесова в этом пространстве. Получены оценки наилучших приближений по гиперболическому кресту и наилучших M-членных приближений функций класса Никольского—Бесова по норме анизотропного пространства Лоренца при различных соотношениях между параметрами данного класса и этого пространства.

Ключевые слова: пространство Лоренца, тригонометрический полином, наилучшее M-членное приближение.

ON ORDERS OF n-TERM APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES IN THE LORENTZ SPACE

© 2023 **G. AKISHEV**

Abstract. In this paper, we consider the anisotropic Lorentz space of 2π-periodic functions of many variables and the Nikolsky–Besov class in this space. We obtain estimates for the best approximations along the hyperbolic cross and the best M-term approximations of functions of the Nikolsky—Besov class with respect to the norm of the anisotropic Lorentz space for various relations between the parameters of the class and the space.

Keywords and phrases: Lorentz space, trigonometric polynomial, best M-term approximation.

AMS Subject Classification: 41A10

1. Введение. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, где $\theta_j, p_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \dots, m$. Через $L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\boldsymbol{x})$, имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}} = \left[\int\limits_0^{2\pi} t_m^{\tau_m/p_m - 1}\left[\cdots\left[\int\limits_0^{2\pi}\Big(f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)\Big)^{\tau_1} t_1^{\tau_1/p_1-1}dt_1\right]^{\tau_2/\tau_1}\cdots\right]^{\tau_m/\tau_{m-1}} dt_m\right]^{1/\tau_m}$$

конечна, где $f^{*_1,\dots,*_m}(t_1,\dots,t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\boldsymbol{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных (см. [23, 35]).

В случае $p_1 = \dots = p_m = \tau_1 = \dots = \tau_m = p$ пространство $L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(I^m)$ с нормой (см. [20, гл. 1, п. 1.1])

$$\|f\|_p = \left[\int\limits_0^{2\pi}\cdots\int\limits_0^{2\pi}|f(x_1,\dots,x_m)|^p dx_1\dots dx_m\right]^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Обозначим через $\mathring{L}^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ множество всех функций $f \in L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0 \quad \forall j = 1,\dots,m,$$

через $a_{\boldsymbol{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in \mathring{L}_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$ и через $\mathbb{Z}^m$ — пространство точек из $\mathbb{R}^m$ с целочисленными координатами. Положим

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\rho(\boldsymbol{s})} a_{\boldsymbol{n}}(f)e^{i\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle},$$

где

$$\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\rangle = \sum_{j=1}^m y_jx_j, \quad s_j = 1,2,\dots,$$

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \Big\{\boldsymbol{k} = (k_1,\dots,k_m) \in \mathbb{Z}^m : \ 2^{s_j-1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, \ j = 1,\dots,m\Big\}.$$

Будем говорить, что числовая последовательность $\{a_{\boldsymbol{n}}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^m}$ принадлежит классу $l_{\boldsymbol{p}}$ если

$$\big\|\{a_{\boldsymbol{n}}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^m}\big\|_{l_{\boldsymbol{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\dots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\boldsymbol{n}}|^{p_1}\right]^{p_2/p_1}\dots\right]^{p_m/p_{m-1}}\right\}^{1/p_m} < +\infty$$

при $1 \leqslant p_j < +\infty$, $j = 1,2,\dots,m$, $\boldsymbol{p} = (p_1,\dots,p_m)$ и

$$\big\|\{a_{\boldsymbol{n}}\}_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^m}\big\|_{l_\infty} = \sup_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^m}|a_{\boldsymbol{n}}|$$

для $p_j = \infty$, $j = 1,2,\dots,m$.

Через $C(p,q,y,\dots)$ обозначим положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют такие положительные постоянные C_1, C_2, что $C_1 \cdot A(y) \leqslant B(y) \leqslant C_2 \cdot A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \geqslant C_1A$ или $B \leqslant C_2A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Через $S^{\boldsymbol{r}}_pH$, $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ обозначим пространства функций с доминирующей смешанной производной, введенные соответственно С. М. Никольским (см. [21]) и Т. И. Амановым (см. [6]).

П. И. Лизоркин и С. М. Никольский (см. [17, с. 157]) исследовали декомпозиционное разложение элементов пространства $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$. Приведем его определение.

Пусть $\boldsymbol{r} = (r_1,\dots,r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1,\dots,m$, $1 \leqslant p,\theta \leqslant +\infty$. Пространство $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ состоит из всех функций $f \in \mathring{L}^*_p(I^m)$, для которых

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} = \left[\int\limits_0^{2\pi}\dots\int\limits_0^{2\pi}\|\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}f(\cdot)\|_p^\theta\prod_{j=1}^m\frac{dt_j}{t_j^{1+\theta r_j}}\right]^{1/\theta} < +\infty,$$

где $\Delta^{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{t}}f(\boldsymbol{x}) = \Delta^{k_m}_{t_m}(\dots\Delta^{k_1}_{t_1}f(\boldsymbol{x}))$ — смешанная разность порядка $\boldsymbol{k}$ с шагом $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_m)$ и $k_j > r_j$, $j = 1,\dots,m$.

В [17, с. 159], отмечено, что функция $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^m,\ \prod\limits_{j=1}^m n_j\neq 0} a_{\boldsymbol{n}}(f)e^{i\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle}.$$

Также известно (см. [17, с. 158]), что $\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B}$ является нормой и

$$\|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}B} \asymp \left\{\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+}2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta}\,\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta\right\}^{1/\theta}$$

при $1 < p < +\infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$. Поэтому в анизотропном пространстве Лоренца $\mathring{L}^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ рассмотрим аналогичный класс:

$$S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta}}B = \left\{ f \in \mathring{L}^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m) : \|f\|_{S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta}}B} = \left\| \left\{ 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \leqslant 1 \right\},$$

где $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $1 < p_j, \tau_j < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant +\infty$, $j = 1, \ldots, m$.

Пусть дан вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_j > 0$, $j = 1, \ldots, m$. Положим

$$Y^m(\boldsymbol{\gamma}, n) = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \sum_{j=1}^m s_j\gamma_j \geqslant n \right\}.$$

Назовем ступенчатым гиперболическим крестом (см., например, [29, с. 7]) множество

$$Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n = \bigcup_{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle < n} \rho(\boldsymbol{s})$$

и рассмотрим множество тригонометрических полиномов (см., например, [29, с. 8])

$$T(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n) = \left\{ t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} b_{\boldsymbol{k}} e^{i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle} \right\}.$$

Также введем обозначения $E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$ для наилучшего приближения функции $f \in L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n)$ и

$$S^{\boldsymbol{\gamma}}_n(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}$$

для частичной суммы ряда Фурье функции f.

Для данного вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ положим

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{r}}{r_1}, \quad r_j > 0, \qquad \Gamma^{\boldsymbol{\gamma}}_n = \left\{ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \prod_{j=1}^m \left(\max(1, |k_j|) \right)^{\gamma_j} < n \right\}.$$

Множество $\Gamma^{\boldsymbol{\gamma}}_n$ называется гиперболическим крестом. Рассмотрим множество тригонометрических полиномов

$$T(\Gamma^{(\boldsymbol{\gamma})}_n) = \left\{ T_{n,\gamma}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma^{(\boldsymbol{\gamma})}_n} b_{\boldsymbol{k}} e^{i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle} \right\}.$$

Величина

$$E^{(\boldsymbol{\gamma})}_n(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}} = \inf_{T_{n,\gamma}\in T(\Gamma^{\boldsymbol{\gamma}}_n)} \|f - T_{n,\gamma}\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$$

называется наилучшим приближением функции $f \in L_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ тригонометрическими полиномами по гиперболическому кресту $\Gamma^{\boldsymbol{\gamma}}_n$ (см. например, [7, 29]).

Отметим, что при $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m) = r_1\boldsymbol{\gamma}$ справедливы включения

$$T(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n) \subset T(\Gamma^{(\boldsymbol{\gamma})}_{2^n}) \subset T(Q^{\boldsymbol{\gamma}}_{n+\gamma(m)}),$$

поэтому для оценки $E^{(\boldsymbol{\gamma})}_n(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$ достаточно оценить $E_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$ (см. [29, с. 9]), где $\gamma(m) = \sum\limits_{j=1}^m \gamma_j$.

Наилучшее приближение функций многих переменных $f \in L_2(I^m)$ тригонометрическими полиномами с гармониками из гиперболических крестов впервые определил К. И. Бабенко (см. [7]). Оценки наилучших приближений различных классов гладких функций в пространстве $f \in L_p(I^m)$, $1 \leqslant p < \infty$, этим методом исследовали С. А. Теляковский [28], Б. С. Митягин [19], Я. С. Бугров [14], Н. С. Никольская [22], Э. М. Галеев [15], В. Н. Темляков [29, 41], А. С. Романюк [24], Б. Базарханов [8], Д. Б. Базарханов [9], Х.-Ю. Шмайссер, У. Зикель [40] и др. (см. библиографию в обзорных статьях [31, 37] и в монографии [41]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения

$$L^*_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{\tau}}(I^m) \subset L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m) \qquad \text{в случае } p_j < q_j,\ j = 1,\dots,m,$$
$$L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}}(I^m) \subset L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)}}(I^m) \quad \text{в случае } 1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty,\ j = 1,\dots,m,$$

где $\boldsymbol{\tau}^{(1)} = (\tau_1^{(1)},\dots,\tau_m^{(1)})$ и $\boldsymbol{\tau}^{(2)} = (\tau_1^{(2)},\dots,\tau_m^{(2)})$. Точные оценки порядка приближения классов Никольского—Бесова в пространствах Лоренца с анизотропной метрикой для случая $p_j < q_j$, $j = 1,\dots,m$, установлены в [1, 2, 11].

Одной из задач, рассматриваемых в данной статье, является оценка величины

$$E_n^{\gamma}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\big)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} = \sup_{f\in S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B} E_n^{\gamma}(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}}$$

в случае $1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, 2,\dots,m$. Вторая задача — оценка наилучшего M-членного приближения функции $f \in L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$. Величина

$$e_M(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}} = \inf_{\boldsymbol{k}^{(j)},b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{\langle i\boldsymbol{k}^{(j)},\boldsymbol{x}\rangle} \right\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$$

называется наилучшим M-членным тригонометрическим приближением функции $f \in L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$, $M \in \mathbb{N}$ (см. [41, с. 388]).

Пусть $F \subset L^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}(I^m)$ — некоторый функциональный класс. Положим

$$e_M(F)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}} = \sup_{f\in F} e_M(f)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}.$$

В случае $\tau_j = p_j = p$ вместо $e_M(F)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}}$ будем писать $e_M(F)_p$.

Наилучшее M-членное приближение функции $f \in L_2[0, 1]$ полиномами по ортонормированной системе впервые определил С. Б. Стечкин (см. [27]) и установил критерий абсолютной сходимости ряда Фурье по этой системе. В дальнейшем важные результаты оценки n-членных приближений функций из различных классов Соболева, Никольского—Бесова, Лизоркина—Трибеля получили Р. С. Исмагилов [16], Ю. Маковоз [39], В. Е. Майоров [18], Э. С. Белинский [12, 13], Р. Де Воре [36], В. Н. Темляков [29, 30, 34, 41, 42], А. С. Романюк [25, 26], М. Хансен и У. Зикель [38], Д. Б. Базарханов и В. Н. Темляков [34] и др. (см. библиографию в обзорных статьях [31, 37]). Оценки n-членных приближений функций класса Никольского—Бесова в пространстве Лоренца исследованы в [3, 4, 32].

Вторая задача: оценить величину $e_M(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}}$ в случае $1 < \tau_j^{(2)} < \tau_j^{(1)} < \infty$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, 2,\dots,m$.

Статья состоит из введения и трех разделов. В разделе 2 приведены вспомогательные утверждения, некоторые с доказательством, необходимые для доказательства основных результатов. В разделе 3 установлены оценки величины $E_n^{\gamma}(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}}$. В разделе 4 получена оценка сверху $e_M(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}}$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 2.1. *Пусть $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_m)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\dots,\theta_m)$, $1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leqslant \dots \leqslant \gamma_m$ и $\alpha \in (0, +\infty)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $\beta_j \geqslant 0$, $j = 1,\dots,m$. Тогда справедливо соотношение*

$$\left\| \left\{ 2^{-\alpha\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\beta_j} \right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma},n)} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum_{j=2}^{m} 1/\theta_j + \sum_{j=1}^{m}\beta_j}.$$

Замечание 2.1. Отметим, что лемма 2.1 в случае $\beta_j = 0$, $j = 1,\dots,m$, ранее доказана в [1], а если, кроме этого, $\theta_1 = \dots = \theta_m$, — В. Н. Темляковым (см. [29]).

В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\chi_{\varkappa(n)}(\boldsymbol{s})$ для характеристической функции множества $\varkappa(n) = \{\boldsymbol{s} = (s_1,\dots,s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle = n\}$.

Лемма 2.2 (см. [1, лемма 2]). *Пусть* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $1 \leqslant \tau_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left\| \left\{ \chi_{\varkappa(n)}(\boldsymbol{s}) \right\}_{\boldsymbol{s} \in \varkappa(n)} \right\|_{l_{\boldsymbol{\tau}}} \asymp n^{\sum\limits_{j=2}^{m} 1/\tau_j}.$$

Теорема 2.1. *Пусть* $1 < \tau_2 < p \leqslant 2$ *или* $2 < \tau_2 < p < \infty$ *или* $1 < \tau_2 \leqslant 2 < p < \infty$, $1 < p < +\infty$. *Если* $f \in L_p(I^m)$ *и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\tau_2(1/\beta - 1/p)} \Big(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p \Big)^{\tau_2} < +\infty,$$

то $f \in L^*_{p,\tau_2}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|^*_{p,\tau_2} \ll \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_1=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\tau_2(1/\beta - 1/p)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2},$$

где $\beta = \min\{2, \tau_2\}$.

Доказательство. В случаях $1 < \tau_2 < p \leqslant 2$ и $1 < \tau_2 \leqslant 2 < p < \infty$ теорема ранее доказана в [2]. Докажем теорему в случае $2 < \tau_2 < p < \infty$. В [2] доказано, что (см. [2, теорема 1, формула (2.17)])

$$\|f\|^*_{p,\tau_2} \leqslant C \left(\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(1/\theta - 1/p)} \left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2}. \tag{2.1}$$

Так как $2 < p < \infty$, известно, что (см., например, [29])

$$\left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p \leqslant C \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^2 \right\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

Выберем число $\varepsilon > 0$. Так как $2 < \tau_2 < \infty$, то при $\eta = \tau_2/2$, $1/\eta + 1/\eta' = 1$, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^2 \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{-\varepsilon\tau_2} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2} \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{\varepsilon 2\eta'} \right\}^{1/(2\eta')} \leqslant$$

$$\leqslant C \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j(\varepsilon + 1/2 - 1/\tau_2)} \left\{ \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{-\varepsilon\tau_2} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \right\}^{1/\tau_2}. \tag{2.3}$$

Теперь из неравенств (2.2) и (2.3) следует, что

$$\sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \theta(1/\theta - 1p)} \left\| \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j \tau_2(1/\tau_2 - 1/p)} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j(\varepsilon + 1/2 - 1/\tau_2)\tau_2} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{-\varepsilon\tau_2} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k_m=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} 2^{k_j(\varepsilon + 1/2 - 1p)\tau_2} \sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}} \cdots \sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{-\varepsilon\tau_2} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_p^{\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{k_m=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{s_m=2^{k_m}+1}^{2^{k_m+1}}\cdots\sum_{s_1=2^{k_1}+1}^{2^{k_1+1}}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(\varepsilon+1/2-1/p)\tau_2}\prod_{j=1}^{m}s_j^{-\varepsilon\tau_2}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_p^{\tau_2}\leqslant$$

$$=C\sum_{s_m=2}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(1/2-1/p)\tau_2}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_p^{\tau_2}. \quad (2.4)$$

Из неравенств (2.1) и (2.4) следует утверждение теоремы в случае $2<\tau_2<\infty$. □

Следствие 2.1. *Пусть $1<\tau_2<p\leqslant 2$, или $1<\tau_2\leqslant 2<p<\infty$, или $2<\tau_2\leqslant p<\infty$, $p<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\dots,m$. Если $f\in L^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}(I^m)$ и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\tau_2(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\Big)^{\tau_2}<\infty, \quad (2.5)$$

то $f\in L^*_{p,\tau_2}(I^m)$ и

$$\|f\|^*_{p,\tau_2}\ll\left(\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\tau_2(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\Big)^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}.$$

Доказательство. Пусть $2<\tau_2<p<\tau_j^{(1)}$, $j=1,\dots,m$. Тогда согласно неравенству разных метрик в анизотропном пространстве Лоренца (см. [23]) имеем

$$\sum_{s_m=2}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(1/2-1/p)\tau_2}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_p^{\tau_2}\leqslant C\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\tau_2(1/2-1/\tau_j^{(1)})}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\Big)^{\tau_2}.$$

Поэтому следствие 2.1 вытекает из теоремы 2.1 при $2<\tau_2<p<\tau_j^{(1)}<\infty$, $j=1,\dots,m$. Для случаев $1<\tau_2<p\leqslant 2$ и $1<\tau_2\leqslant 2<p<\infty$ следствие было доказано в [2]. □

Теорема 2.2. *Пусть $1<p<\tau_j^{(1)}<\infty$ для $j=1,\dots,m$, $\beta=\min\{2,p\}$. Если $f\in L^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}(I^m)$ и*

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(1/p-1/\tau_j^{(1)})\beta}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\Big)^{\beta}<\infty, \quad (2.6)$$

то $f\in L_p(I^m)$ и

$$\|f\|_p\ll\left(\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{\beta(1/p-1/\tau_j^{(1)})}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\Big)^{\beta}\right)^{1/\beta}.$$

Доказательство. Согласно неравенству разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [23] имеем

$$\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\beta}\ll\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(1/p-1/\tau_j^{(1)})\beta}\big(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\big)^{\beta}, \quad (2.7)$$

для функции $f\in L^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}(I^m)$. Теперь в силу условия (2.6) и известного неравенства (см., например, [24, с. 1401], [42])

$$\|f\|_p\ll\left(\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

для функции $f\in L_p(I^m)$, $1<p<\tau_j^{(1)}<\infty$, из (2.7) получим утверждения теоремы. □

Лемма 2.3. *Пусть* $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_m')$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ *и* $0 < \gamma_j' \leqslant \gamma_j$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, *и* $\alpha \in (0, \infty)$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sup_{\boldsymbol{s} \in Y^m(n, \boldsymbol{\gamma}')} 2^{-\alpha \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{m} (s_j + 1)^{\lambda_j} \asymp 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum\limits_{j \in A} \lambda_j},$$

где $\delta = \min\{\gamma_j . \gamma_j' : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j : \gamma_j . \gamma_j' = \delta,\ j = 1, \dots, m\}$.

Доказательство. Оценка сверху следует из [4, лемма 2.1]. Докажем оценку снизу. Пусть $m = 2$. Тогда по определению множества $Y^2(n, \boldsymbol{\gamma}')$ имеем

$$I_n := \sup_{\boldsymbol{s} \in Y^2(n, \boldsymbol{\gamma}')} 2^{-\alpha \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{2} (s_j + 1)^{\lambda_j} \geqslant \sup_{\substack{s_1 \geqslant (n - s_2\gamma_2')/\gamma_1', \\ 0 < s_2 < n/\gamma_2'}} 2^{-\alpha \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{2} (s_j + 1)^{\lambda_j} =$$

$$= \sup_{0 < s_2 < n/\gamma_2'} 2^{-(n - s_2\gamma_2')\gamma_1\alpha/\gamma_1'} \left(\frac{n - s_2\gamma_2'}{\gamma_1'} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} 2^{-s_2\gamma_2\alpha} (s_2 + 1)^{\lambda_2} =$$

$$= 2^{-n(\gamma_1/\gamma_1')\alpha} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma_2'} 2^{s_2\gamma_2'(\gamma_1/\gamma_1' - \gamma_2/\gamma_2')\alpha} (s_2 + 1)^{\lambda_2} \left(\frac{n - s_2\gamma_2'}{\gamma_1'} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg$$

$$\gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma_1')\alpha} 2^{n(\gamma_1/\gamma_1' - \gamma_2/\gamma_2')\alpha} \left(\frac{n}{\gamma_1'} + 1 \right)^{\lambda_2} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma_2'} \left(\frac{n - s_2\gamma_2'}{\gamma_1'} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg$$

$$\gg 2^{-n(\gamma_2/\gamma_2')\alpha} (n + 1)^{\lambda_2}, \quad (2.8)$$

в случае $\gamma_1/\gamma_1' - \gamma_2/\gamma_2' > 0$. Если $\gamma_1/\gamma_1' - \gamma_2/\gamma_2' < 0$, то, рассуждая аналогично, получим

$$I_n \geqslant \sup_{\substack{s_2 \geqslant (n - s_1\gamma_1')/\gamma_2', \\ 0 < s_1 < n/\gamma_1'}} 2^{-\alpha \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^{2} (s_j + 1)^{\lambda_j} \gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma_1')\alpha} (n + 1)^{\lambda_1}.$$

Пусть $\gamma_1/\gamma_1' - \gamma_2/\gamma_2' = 0$. Тогда (см. формулу (2.8))

$$I_n \geqslant 2^{-n(\gamma_1/\gamma_1')\alpha} \sup_{0 < s_2 < n/\gamma_2'} (s_2 + 1)^{\lambda_2} \left(\frac{n - s_2\gamma_2'}{\gamma_1'} \gamma_1 + 1 \right)^{\lambda_1} \gg 2^{-n(\gamma_1/\gamma_1')\alpha} (n + 1)^{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Лемма доказана для $m = 2$. Далее методом математической индукции лемму можно доказать для $m \geqslant 3$. □

3. Оценки наилучшего приближения функции в пространстве Лоренца.

3.1. Оценки сверху наилучшего приближения.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p \leqslant \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $1 < \tau_2 < p \leqslant 2$ *или* $2 < \tau_2 < p < \infty$ *или* $1 < \tau_2 \leqslant 2 < p < \infty$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$ *и* $\gamma_j = r_j/r_1$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1, 2, \dots, m$.

1. *Если* $\tau_2 < \theta_j \leqslant \infty$, *для* $j = 1, 2, \dots, m$, *то*

$$E_M^{(\boldsymbol{\gamma}')} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}} B \big)_{p, \tau_2} \leqslant C M^{-r_1} \big(\log_2(M + 1) \big)^{(\nu - 1)r_1 + \sum\limits_{j=2}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\theta_j)} \big(\log_2(M + 1) \big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})},$$

где $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_m')$, $\gamma_j' = \gamma_j$, *для* $j = 1, \dots, \nu$ *и* $1 < \gamma_j' < \gamma_j$, *для* $j = \nu + 1, \dots, m$.

2. *Если* $1 \leqslant \theta_j \leqslant \tau_2 < \infty$, *для* $j = 1, 2, \dots, m$, *то*

$$E_M^{(\boldsymbol{\gamma}')} \big(S^{\boldsymbol{r}}_{p, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}} B \big)_{p, \tau_2} \leqslant C M^{-r_1} \big(\log_2(M + 1) \big)^{(\nu - 1)r_1} \big(\log_2(M + 1) \big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu} (1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})}. \quad (3.1)$$

Доказательство. Сначала докажем вложение $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B \subset L^*_{p,\tau_2}(I^m)$. Пусть $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$. Если $1 < \tau_2 < \theta_j < \infty$, $j = 1,\ldots,m$, то пользуясь следствием 2.1 и неравенством Гельдера, при $\eta_j = \theta_j/\tau_2$, $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$, $j = 1,\ldots,m$, получим

$$\|f\|^*_{p,\tau_2} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\boldsymbol{\epsilon}}}, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m)$, $\epsilon_j = \tau_2\eta'_j$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Если $\theta_j = \infty$ для $j = 1,2,\ldots,m$, то по следствию 2.1 будем иметь

$$\|f\|^*_{p,\tau_2} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\tau_2}} \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}. \tag{3.3}$$

Пусть $1 \leqslant \theta_j \leqslant \tau_2 < \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$. Применяя неравенство Йенсена (см. [20, гл. 3, лемма 3.3]) получим

$$\|f\|^*_{p,\tau_2} \ll \left\| \left\{ 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\tau_2}}. \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.2)–(3.4) следует, что $S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B \subset L^*_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Пусть $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$, $1 \leqslant \tau_2 < p \leqslant 2$. Для числа $M \in \mathbb{N}$ выберем такое натуральное число n, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S^{\boldsymbol{\gamma}'}_n(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}$$

ряда Фурье функции f. Применяя (3.2) к функции $f - S^{\boldsymbol{\gamma}'}_n(f) \in L^*_{p,\tau_2}(I^m)$, получим

$$\left\| f - S^{\boldsymbol{\gamma}'}_n(f) \right\|^*_{p,\tau_2} \ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)} \right\|_{l_{\tau_2}}. \tag{3.5}$$

Пусть $1 < \tau_2 < \theta_j < \infty$, $j = 1,\ldots,m$. Тогда применяя неравенство Гельдера, при $\eta_j = \theta_j/\tau_2$, $1/\eta_j + 1/\eta'_j = 1$, $j = 1,\ldots,m$, и [33, лемма 3], при $\lambda_j = 1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}$, $j = 1,\ldots,m$, имеем

$$\begin{aligned}
\left\| \left\{ \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)} \right\|_{l_{\tau_2}} &\leqslant \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \times \\
\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)} \right\|_{l_{\boldsymbol{\epsilon}}} &\ll \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \times \\
&\times 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)}) + \sum\limits_{j=2}^{\nu} 1/\epsilon_j},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\epsilon_j = \tau_2\eta'_j$,

$$\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{\tau_2\eta'_j} = \frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\theta_j}, \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Если $\theta_j = \infty$, для $j = 1,2,\ldots,m$, то, пользуясь леммой 2.1,

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} s_j^{1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)}}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\right\|_{l_{\tau_2}} \leqslant \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)}}\right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\right\|_{l_{\tau_2}} \times$$

$$\times \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})+\nu-1/\tau_2} \tag{3.7}$$

для функции $f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B$.

Теперь из (3.5), (3.6) и (3.7) следует, что

$$\left\|f-S_n^{(\boldsymbol{\gamma}')}(f)\right\|_{p,\tau_2}^{*} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1/\tau_2-1/\theta_j)}$$

в случае $\tau_2<\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,2,\dots,m$ для функции $f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B$. Отсюда получается оценка

$$E_n^{(\boldsymbol{\gamma}')}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\big)_{p,\tau_2} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1/\tau_2-1/\theta_j)} \tag{3.8}$$

в случае $\tau_2<\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,2,\dots,m$.

Пусть $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_2<\infty$, $j=1,2,\dots,m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена (см. например [20, гл. 3, лемма 3.3]) и леммой 3 из [33], получим

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} s_j^{1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)}}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\right\|_{l_{\tau_2}} \leqslant \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} s_j^{1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)}}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \sup_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} s_j^{1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)}} \ll$$

$$\ll \left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})}.$$

Поэтому из неравенства (3.5) следует

$$E_n^{(\boldsymbol{\gamma}')}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\big)_{p,\tau_2} \ll 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})} \tag{3.9}$$

в случае $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_2<\infty$, $j=1,2,\dots,m$.

Далее, учитывая, что $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, из неравенств (3.8) и (3.9) получим утверждения теоремы в случае $1\leqslant\tau_2<p\leqslant 2$.

Пусть $2<\tau_2<p<\infty$ или $1<\tau_2\leqslant 2<p<\infty$. Тогда $\beta=2$ и, применяя следствие 2.1 к функции $f-S_n^{\boldsymbol{\gamma}'}(f)\in L^{*}_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ получим

$$\left\|f-S_n^{\boldsymbol{\gamma}'}(f)\right\|_{p,\tau_2}^{*} \ll \left(\sum_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n}\prod_{j=1}^{m} s_j^{(1/2-1/\tau_j^{(1)})\tau_2}\left(\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\right)^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}. \tag{3.10}$$

Если $\tau_2<\theta_j<\infty$, $j=1,\dots,m$, то, применяя неравенство Гельдера при

$$\eta_j=\frac{\theta_j}{\tau_2},\quad \frac{1}{\eta_j}+\frac{1}{\eta_j'}=1,\quad j=1,\dots,m,$$

и лемму 2.1, при $\lambda_j=1\tau_2-1/\tau_j^{(1)}$, $j=1,\dots,m$, имеем

$$\left\|f-S_n^{\gamma'}(f)\right\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^*\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{-s_jr_j}s_j^{1/2-1/\tau_j^{(1)}}\right\}_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\right\|_{l_{\boldsymbol{\epsilon}}} \ll$$

$$\ll \left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^*\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \times 2^{-nr_1}n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/2-1/\tau_j^{(1)})+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1/\tau_2-1/\theta_j)}, \quad (3.11)$$

где $\epsilon_j=\tau_2\eta_j'$, $j=1,2,\ldots,m$.

Если $\theta_j=\infty$ для $j=1,2,\ldots,m$, то, пользуясь [33, лемма 3], из (3.10) получим для функции $f\in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B$

$$\left\|f-S_n^{\gamma'}(f)\right\|_{p,\tau_2}^* \ll \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^* 2^{-nr_1}n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/2-1/\tau_j^{(1)})+\nu-1/\tau_2}. \quad (3.12)$$

Пусть $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_2<\infty$, $j=1,2,\ldots,m$. Тогда, пользуясь неравенством Йенсена и [33, лемма 3], из (3.10) выводим

$$\left\|f-S_n^{\gamma'}(f)\right\|_{p,\tau_2}^* \ll \left\|\left\{\prod_{j=1}^m 2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^*\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} 2^{-nr_1}n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/2-1/\tau_j^{(1)})}. \quad (3.13)$$

Теперь учитывая, что $M\asymp 2^nn^{\nu-1}$, из неравенств (3.11)–(3.13) нетрудно получить утверждения теоремы в случае $2<\tau_2<p<\infty$ или $1<\tau_2\leqslant 2<p<\infty$. $\square$

Замечание 3.1. В случае $\theta_1=\cdots=\theta_m=\theta$ и $\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\gamma}$ теорема 3.1 доказана в [22].

3.2. Оценки снизу наилучшего приближения. Докажем оценку снизу во втором утверждении теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $1<p_j<\infty$, $1<\tau_j^{(2)}<\tau_j^{(1)}<+\infty$, $j=1,2,\ldots,m$, $0<r_1=r_2=\cdots=r_\nu<r_{\nu+1}\leqslant\ldots\leqslant r_m$ *и* $\gamma_j=r_j/r_1$, $1\leqslant\theta_j\leqslant\infty$, $j=1,2,\ldots,m$. *Если* $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_j^{(2)}<\infty$ *для* $j=1,2,\ldots,m$, *то*

$$E_M^{(\gamma')}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\big)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} \gg M^{-r_1}\Big(\log_2(M+1)\Big)^{(\nu-1)r_1}\big(\log_2(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2-1/\tau_j^{(1)})}.$$

Доказательство. Выберем такое $n\in\mathbb{N}$, что $M\asymp 2^nn^{\nu-1}$. Пусть $1\leqslant\theta_j\leqslant\tau_2<\infty$, $j=1,2,\ldots,m$, и вектор $\tilde{\boldsymbol{s}}$ удовлетворяет условию $\langle\tilde{\boldsymbol{s}},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n$. Рассмотрим функцию

$$f_1(\boldsymbol{x})=\prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_jr_j}\tilde{s}_j^{-1/\tau_j^{(1)}}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\tilde{\boldsymbol{s}})}\prod_{j=1}^m\big(n_j-2^{\tilde{s}_j-1}+1\big)^{1/p_j-1}e^{i\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}.$$

Тогда в силу соотношения

$$\left\|\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})}\prod_{j=1}^m\big(k_j-2^{s_j-1}+1\big)^{1/p_j-1}e^{i\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}\right\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^* \asymp \prod_{j=1}^m s_j^{1/\tau_j^{(1)}} \quad (3.14)$$

при $1<p_j<+\infty$, $1<\tau_j^{(1)}<+\infty$, $j=1,\ldots,m$ (см. [2]), имеем

$$\left\|\delta_{\tilde{\boldsymbol{s}}}(f_1)\right\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^* \asymp \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_jr_j}.$$

Если $\boldsymbol{s} \neq \tilde{\boldsymbol{s}}$, то $\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f_1)\right\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)}} = 0$. Поэтому

$$\left\|\left\{2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}\left(f_1\right)\right\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \leqslant C_1.$$

Следовательно, функция $C_1^{-1}f_1 \in S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B$. Так как $\langle \tilde{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{\gamma}'\rangle \geqslant n$, то, учитывая определение наилучшего приближения и соотношение (3.11), имеем

$$E_{Q_n^{\gamma'}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\right)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} \geqslant E_{Q_n^{\gamma'}}(f_1)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} = C^{-1}\|f_1\|^*_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} \gg \prod_{j=1}^m 2^{-\tilde{s}_j r_j}\tilde{s}_j^{\,1/\tau_j^{(2)}-1/\tau_j^{(1)}}.$$

Значит,

$$E_{Q_n^{\gamma'}}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\right)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} \geqslant C \sup_{\boldsymbol{s}\in Y^m(\boldsymbol{\gamma}',n)}\prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j}s_j^{\,1/\tau_j^{(2)}-1/\tau_j^{(1)}}.$$

Теперь, пользуясь леммой 2.3 и учитывая, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда получим

$$E_M^{(\gamma')}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\right)_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{\tau}^{(2)}} \gg M^{-r_1}\left(\log_2(M+1)\right)^{(\nu-1)r_1}\left(\log_2(M+1)\right)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_j^{(2)}-1/\tau_j^{(1)})},$$

в случае $1 \leqslant \theta_j \leqslant \tau_2 < \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$. □

Замечание 3.2. В случае $p_j = p$, $\tau_j^{(2)} = \tau_2$, $\theta_j = \theta$, $j = 1,2,\ldots,m$, из теоремы 3.2 следует точность оценки второго утверждения в теореме 3.1. Оценка снизу величины $E_M^{(\gamma')}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}\right)_{p,\tau_2}$ при $1 < p < \tau_j^{(1)} < \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$, $\max\{2,p\} < \tau_2 < \infty$ следует из [2, теорема 4].

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p < \tau_j^{(1)} < +\infty$, $1 \leqslant \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$, *и* $\beta = \min\{2,p\}$, $0 < r_1 = r_2 = \cdots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$. *Тогда*

$$M^{-r_1}\left(\log_2(M+1)\right)^{(\nu-1)r_1+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1/\mu-1/\theta_j)_+}\left(\log_2(M+1)\right)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/p-1/\tau_j^{(1)})} \ll E_M^{(\gamma')}\left(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\right)_p \ll$$
$$\ll M^{-r_1}\left(\log_2(M+1)\right)^{(\nu-1)r_1+\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1/\beta-1/\theta_j)_+}\left(\log_2(M+1)\right)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/p-1/\tau_j^{(1)})},$$

где $a_+ = \max\{0,a\}$.

Доказательство. Для доказательства правого неравенства в этой теореме, как и в теореме 3.1 рассматриваются случаи $1 \leqslant \theta_j \leqslant \beta < \infty$ и $1 < \beta < \theta_j \leqslant \infty$, $j = 1,2,\ldots,m$, и применяется теорема 2.2.

Для доказательства левого неравенства рассмотрим функцию

$$f_2(\boldsymbol{x}) = n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1\theta_j}\sum_{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle=n}\prod_{j=1}^m 2^{-s_j r_j}s_j^{-1/\tau_j^{(1)}}\sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})}\prod_{j=1}^m\left(k_j-2^{s_j-1}+1\right)^{1/p-1}e^{i\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{x}\rangle}.$$

В силу непрерывности $f_2 \in L^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}(I^m)$. Далее, в силу соотношения (3.14) и леммы 2.2 получим

$$\left\|\left\{2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f_2)\right\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\right\}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \ll n^{-\sum\limits_{j=2}^{m}1/\theta_j}\left\|\{1\}_{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle=n}\right\|_{l_{\boldsymbol{\theta}}} \ll C_2.$$

Таким образом, функция $F_2 = C_2^{-1}f_2 \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B$. Известно, что

$$\left(\sum_{s_m=1}^{\infty}\cdots\sum_{s_1=1}^{\infty}\left\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_p^{\mu}\right)^{1/\mu} \ll \|f\|_p$$

для функции $f \in L_p(I^m)$, $1 < p < \infty$, $\mu = \max\{2, p\}$. Пользуясь этим неравенством, определением наилучшего приближения функции, леммой 2.2 и соотношением (3.11) при $\tau_j^{(1)} = p_j = p$, $j = 1, \dots, m$, получим

$$E_{Q_n^{\gamma}}\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\boldsymbol{\theta}}B\big)_p \geqslant E_{Q_n^{\gamma}}(F_2)_p = \|F_2\|_p \gg n^{-\sum\limits_{j=2}^{m} 1/\theta_j} \left(\sum_{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}\rangle = n} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j r_j} s_j^{(1/p - 1/\tau_j^{(1)})\mu}\right)^{1/\mu} \gg$$
$$\gg n^{-\sum\limits_{j=2}^{m} 1\theta_j} 2^{-nr_1} n^{\sum\limits_{j=1}^{m}(1/p-1/\tau_j^{(1)}) + m - 1/\mu}.$$

Выбирая натуральное число n так, чтобы $M \asymp 2^n n^{m-1}$ и учитывая, что $1 \leqslant \nu \leqslant m$, отсюда получим справедливость левого неравенства в утверждении теоремы. $\square$

Замечание 3.3. В случае $p = 2 < \tau_j^{(1)} < \infty$, $\theta_j = \theta$, для $j = 1, 2, \dots, m$, из теоремы 3.3 следует точность оценки в первом утверждении теоремы 3.1.

4. Оценки наилучших M-членных приближений в пространстве Лоренца.

Теорема 4.1. *Пусть* $1 < p \leqslant \tau_j^{(1)} < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $1 < \tau_2 < p \leqslant 2$, *или* $2 < \tau_2 < p < \infty$, *или* $1 < \tau_2 \leqslant 2 < p < \infty$, $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant r_m$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $\beta = \min\{2, \tau_2\}$.

1. *Если* $1 < \tau_2 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *и* $r_1 > 0$ *или* $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$ *и* $r_1 > 1/\theta - 1/\tau_2$, *то*

$$e_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B\big)_{p,\tau_2} \ll M^{-r_1}\big(\log_2(M+1)\big)^{(\nu-1)(r_1+1/\beta-1/\theta)}\big(\log_2(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})}.$$

2. *Если* $1 \leqslant \theta \leqslant \tau_2 < \infty$ *и* $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$, *то*

$$e_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B\big)_{p,\tau_2} \leqslant CM^{-r_1}\big(\log_2(M+1)\big)^{(\nu-1)r_1}\big(\log_2(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\tau_2 - 1/\tau_j^{(1)})}.$$

Доказательство. Для числа $M \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное число n, что $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n^{\gamma'}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n^{\gamma}} a_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x}\rangle}$$

ряда Фурье функции f. Положим $n_0 = n + (\nu - 1)\log n$.

Для функции $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$, $1 < \tau_2 < p \leqslant 2$, приближающий полином $P(\Omega_M, \boldsymbol{x})$ будем строить в виде

$$P(\Omega_M, \boldsymbol{x}) = R_n(\boldsymbol{x}) + Q(\boldsymbol{x}),$$

где $R_n(\boldsymbol{x}) = S_n^{\gamma'}(f, \boldsymbol{x})$, а полином $Q(\boldsymbol{x})$ построим в процессе доказательства.

Для натурального числа l положим

$$S_l = \left(\sum_{l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|^{\theta}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}\right)^{1/\theta}, \quad m_l^* = \Big[2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^{\theta}\Big] + 1,$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Рассмотрим полином

$$R^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) \tag{4.1}$$

и каждому натуральному числу $l \in [n, [n_0]+1]$ сопоставим m_l^* «блоков» из внутренней суммы в (4.1) с наибольшими значениями

$$\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|^*_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{1/\beta - 1/\tau_j^{(1)}} \tag{4.2}$$

(см. [29]). Множество таких $\boldsymbol{s}$ обозначим символом G_l.

Пусть $\alpha_i(f,l)$, $i=1,2,\ldots,m_l^*$, — числа (4.2), переставленные в убывающем порядке, для которых блоки $\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ входят в сумму (4.1). Сумму полученных таким образом «блоков» $\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x})$ по всем $l\in[n,n_0)$ обозначим $Q(\boldsymbol{x})$.

Докажем, что количество гармоник $\mathbb{K}$, которые образуют полином $P(\Omega_M,\boldsymbol{x})$, не превышает по порядку M. Действительно,

$$\mathbb{K}\ll 2^n n^{\nu-1}+\sum_{l=n}^{[n_0]+1}2^l m_l^*\ll 2^n n^{\nu-1}+2^n n^{\nu-1}\sum_{l=n}^{[n_0]+1}\sum_{l\leqslant\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle<l+1}2^{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta}\ll$$
$$\ll 2^n n^{\nu-1}+2^n n^{\nu-1}\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+}2^{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta}\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta}\ll 2^n n^{\nu-1}<<M.$$

По свойству нормы

$$\big\|f-P(\Omega_M)\big\|_{\boldsymbol{p},\tau_2}^{*}\leqslant\left\|f-\sum_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle<n_0}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{\boldsymbol{p},\tau_2}^{*}+\|R^*-Q\|_{\boldsymbol{p},\tau^{(2)}}=J_1+J_2. \tag{4.3}$$

Пользуясь следствием из теоремы 2.1, получим

$$J_1=\Big\|f-S_n^{\gamma'}(f)\Big\|_{p,\tau_2}^{*}\ll\left(\sum_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^{m}s_j^{(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})\tau_2}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\Big)^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}. \tag{4.4}$$

Если $1\leqslant\theta\leqslant\tau_2<\infty$, то согласно неравенству Йенсена из (4.4) получим

$$J_1\ll\left(\sum_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}2^{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\tau_2}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\Big)^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}\sup_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{1/\beta-1/\tau_j^{(1)}}\times$$
$$\times\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m}2^{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta}\Big(\big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*}\Big)^{\theta}\right)^{1/\theta}\sup_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{1/\beta-1/\tau_j^{(1)}}. \tag{4.5}$$

Согласно [4, лемма 2.1] имеет место неравенство

$$\sup_{\langle\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle\geqslant n_0}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}s_j^{1/\beta-1/\tau_j^{(1)}}\ll 2^{-n_0r_1}n_0^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}. \tag{4.6}$$

Из неравенств (4.5) и (4.6) получим

$$J_1\ll 2^{-n_0r_1}n_0^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}.$$

Учитывая, что $n_0=n+(\nu-1)\log n$ и $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$, отсюда получим

$$J_1\ll\big(2^n n^{\nu-1}\big)^{-r_1}(n+1)^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}\ll M^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \tag{4.7}$$

для функции $f\in S_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}^{\boldsymbol{r}}B$ при $1\leqslant\theta\leqslant\tau_2<\infty$.

Оценим J_2. Снова пользуясь следствием теоремы 2.1 и определением чисел $\alpha_i(f,l)$ будем иметь

$$J_2 = \|R^* - Q\|_{\boldsymbol{p},\tau_2} = \left\| \sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\substack{l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1, \\ \boldsymbol{s} \notin G_l}} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \right\|_{p,\tau_2}^{\theta} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{\substack{l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1, \\ \boldsymbol{s} \notin G_l}} \prod_{j=1}^{m} s_j^{(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} \left(\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{*} \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} = C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l^*} \alpha_i^{\tau_2}(f,l) \right)^{1/\tau_2}. \tag{4.8}$$

В силу неравенства

$$\alpha_i(f,l) \leqslant C i^{-1/\theta}\, 2^{-lr_1}\, l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} S_l,$$

справедливого для $i = 1, \ldots, \tilde{m}_l$, где $\tilde{m}_l$ — количество элементов множества $\sigma_l = \big\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^m : l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1\big\}$ (см. доказательство в [25, с. 92]), и учитывая, что $\theta < \tau_2$, находим

$$J_2 \leqslant C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{i > m_l^*} \left(i^{-1/\theta}\, 2^{-lr_1}\, l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} S_l \right)^{\tau_2} \right)^{1/\tau_2} =$$

$$= C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1\tau_2}\, l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} \sum_{i > m_l^*} i^{-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1\tau_2}\, l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} (m_l^*)^{1-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2}. \tag{4.9}$$

Теперь, подставляя значения чисел m_l^* из (4.9), получим

$$J_2 \leqslant C \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-lr_1\tau_2} l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\tau_2} \big(2^n n^{\nu-1} 2^{-l} S_l^{\theta}\big)^{1-\tau_2/\theta} \right)^{1/\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C \big(2^n n^{\nu-1}\big)^{1/\tau_2 - 1/\theta} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} 2^{-l(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)\tau_2}\, l^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})\tau_2} S_l^{\theta} \right)^{1/\tau_2}. \tag{4.10}$$

Если $\theta < \tau_2$, то $1/\tau_2 - 1/\theta < 0$. Поэтому, если $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$, то получим

$$J_2 \leqslant C \big(2^n n^{\nu-1}\big)^{1/\tau_2 - 1/\theta}\, 2^{-n(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)}\, n^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^{\theta} \right)^{1/\tau_2} =$$

$$= C \big(2^n n^{\nu-1}\big)^{1/\tau_2 - 1/\theta}\, 2^{-n(r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta)}\, n^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} \sum_{l \leqslant \langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}'\rangle < l+1} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta} \right)^{1/\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)(1/\tau_2 - 1/\theta)}\, n^{\sum_{j=1}^{\nu}(1/\beta - 1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta} \right)^{1/\tau_2} \tag{4.11}$$

для функции $f \in S_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}^{\boldsymbol{r}} B$, $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$.

Если $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta < 0$, то из оценки (4.10) получим

$$J_2 \leqslant C\big(2^n n^{\nu-1}\big)^{1/\tau_2-1/\theta}\, 2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)}\, n_0^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{l=n}^{[n_0]+1} S_l^{\theta}\right)^{1/\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C\big(2^n n^{\nu-1}\big)^{1/\tau_2-1/\theta}\, 2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)}\, n_0^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta}\right)^{1/\tau_2}. \qquad (4.12)$$

Так как согласно выбору числа n_0 верно равенство

$$2^{-n_0(r_1+1/\tau_2-1/\theta)} = \big(2^n n^{\nu-1}\big)^{-(r_1+1/\tau_2-1/\theta)},$$

то из (4.12) следует, что

$$J_2 \leqslant C\big(2^n n^{\nu-1}\big)^{-r_1}\big(n+(\nu-1)\log n\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{\langle \boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\rangle\theta} \big\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)}}^{\theta}\right)^{1/\tau_2}.$$

Таким образом,

$$J_2 \leqslant C\big(2^n n^{\nu-1}\big)^{-r_1}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} \qquad (4.13)$$

для функции $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$.

Теперь из неравенств (4.3), (4.7) и (4.11) получим

$$\big\|f - P(\Omega_M)\big\|^*_{\boldsymbol{p},\tau_2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{M^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} + 2^{-nr_1}\, n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant CM^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{(\nu-1)(r_1+1/\tau_2-1/\theta)}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

для функции $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$ в случае $1 \leqslant \tau_2 \leqslant p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$. Следовательно,

$$e_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B\big)_{p,\tau_2} \leqslant CM^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{(\nu-1)(r_1+1/\tau_2-1/\theta)}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

в случае $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta > 0$.

Далее из неравенств (4.3), (4.7) и (4.13) находим

$$\big\|f - P(\Omega_M)\big\|^*_{\boldsymbol{p},\tau_2} \leqslant C\left\{M^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})} + \big(2^n n^{\nu-1}\big)^{-r_1}\, n^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant CM^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

для функции $f \in S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$. Следовательно,

$$e_M\big(S^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\tau}^{(1)},\theta}B\big)_{p,\tau_2} \leqslant CM^{-r_1}\big(\log(M+1)\big)^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}(1/\beta-1/\tau_j^{(1)})}$$

в случае $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$ и $0 < r_1 < 1/\theta - 1/\tau_2$. □

Замечание 4.1. Так как в случае $1 \leqslant \theta < \tau_2 < \infty$, имеем $r_1 + 1/\tau_2 - 1/\theta < r_1$, то оценка в первом пункте теоремы 4.1 лучше, чем оценка (3.1) в теореме 3.1 при $\theta_1 = \ldots = \theta_m = \theta$.

Основные результаты статьи были представлены в докладе на Международной Воронежской зимней математической школе (27 января — 1 февраля 2023 г.; см. [5]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акишев Г.* Приближение функциональных классов в пространствах смешанной нормой// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 8. — С. 17–40.
2. *Акишев Г.* О порядках приближения функций многих переменных в пространстве Лоренца// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 4. — С. 1–17.
3. *Акишев Г.* О точности оценок наилучшего M-членного приближения класса Бесова// Сиб. электрон. мат. изв. — 2010. — *7*. — С. 255–274.
4. *Акишев Г.* Об оценках порядка наилучших M−членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца—Карамата// Уфим. мат. ж. — 2023. — *15*, № 1.
5. *Акишев Г.* Об оценках наилучших n-членных приближений классов функций в анизотропном пространстве Лоренца// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронежская зимняя математическая школа) (Воронеж, 27 января — 1 февраля 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 24–25.
6. *Аманов Т. И.* Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{\bar{r}}_{p,\theta}B(R_n)$ и $S^{\bar{r}}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = 1, \ldots, n)$// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1965. — *77*. — С. 5–34.
7. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрические многочленами// Докл. АН СССР. — 1960. — № 5. — С. 982–985.
8. *Базарханов Б.* Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной тригонометрическими полиномами// в кн.: Современные проблемы теории функций. Мат. Всесоюз. школы по теории функций. — Баку: АзГУ, 1977. — С. 70–75.
9. *Базарханов Д. Б.* Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I// Тр. мат. ин-та им. В. А Стеклова РАН. — 2010. — *269*. — С. 8–30.
10. *Базарханов Д. Б.* Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных// Тр. мат. ин-та им. В. А Стеклова РАН. — 2016. — *293*. — С. 8–42.
11. *Бекмаганбетов К. А.* О порядках приближения класса Бесова в метрике метрике анизотропных пространств Лоренца// Уфим. мат. ж. — 2009. — *1*, № 2. — С. 9–16.
12. *Белинский Э. С.* Приближение «плавающей» системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной// в кн.: Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль, 1988. — С. 16–33.
13. *Белинский Э. С.* Приближение «плавающей» системой экспонент на классах гладких периодических функций// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 1. — С. 20–27.
14. *Бугров Я. С.* Приближение классов функций с доминирующей смешанной производной// Мат. сб. — 1964. — *64*, № 3. — С. 410–418.
15. *Галеев Э. М.* Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными// Мат. сб. — 1978. — *23*, № 2. — С. 197–212.
16. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами// Усп. мат. наук. — 1974. — *29*, № 3. — С. 161–178.
17. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной с декомпозиционной точки зрения// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1989. — *187*. — С. 143–161.
18. *Майоров В. Е.* Тригонометрические поперечники соболевских классов W^r_p в пространстве L_q// Мат. заметки. — 1986. — *40*, № 2. — С. 161–173.
19. *Митягин Б. С.* Приближение функций в пространствах L^p и C на торе// Мат. сб. — 1962. — *58*, № 4. — С. 397–414.
20. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
21. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера// Сиб. мат. ж. — 1963. — *4*, № 6. — С. 1342–1364.
22. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p// Сиб. мат. ж. — 1974. — *15*, № 2. — С. 395–412.
23. *Нурсултанов Е. Д.* Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 2006. — *255*. — С. 1–18.
24. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве L_q// Укр. мат. ж. — 1991. — *43*, № 10. — С. 1398–1408.

25. *Романюк А. С.* Наилучшие M-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных// Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — *67*, № 2. — С. 61–100.
26. *Романюк А. С.* Наилучшие тригонометрические и билинейные приближения классов функций многих переменных// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 3. — С. 401–415.
27. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 1. — С. 37–40.
28. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами// Мат. сб. — 1964. — *63*, № 3. — С. 426–444.
29. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной// Тр. мат. ин-та АН СССР. — 1986. — *178*. — С. 3–112.
30. *Темляков В. Н.* Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 11. — С. 131–1160.
31. *Тихомиров В. М.* Теория приближений// Совр. пробл. мат. Фундам. напр. — 1987. — *14*. — С. 103–270.
32. *Akishev G.* Estimations of the best M-term approximations of functions in the Lorentz space with constructive methods// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2017. — *3*. — P. 13–26.
33. *Akishev G.* On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz–Zygmund space/ `arXiv: 2106.07188 [math.CA]`.
34. *Bazarkhanov D. B., Temlyakov V. N.* Nonlinear tensor product approximation of functions/// `arXiv: 1409.1403 [stat.ML]`.
35. *Blozinski A. P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — *263*. — P. 146–167.
36. *De Vore R. A.* Nonlinear approximation// Acta Numerica. — 1998. — *7*. — P. 51–150.
37. *Dinh Dũng, Temlyakov V. N., Ullrich T.* Hyperbolic Cross Approximation. — Basel–Berlin: Birkhäuser, Springer, 2018.
38. *Hansen M., Sickel W.* Best m-term approximation and Sobolev–Besov spaces of dominating mixed smoothness the case of compact embeddings// Constr. Approx. — 2012. — *36*, № 1. — P. 1–51.
39. *Makovoz Y.* On trigonometric n-widths and their generalization// J. Approx. Theory. — 1984. — *41*, № 4. — P. 361–366.
40. *Schmeisser H.-J., Sickel W.* Spaces of functions of mixed smoothness and approximation from hyperbolic crosses// J. Approx. Theory. — 2004. — *128*. — P. 115–150.
41. *Temlyakov V. N.* Multivariate Approximation// Cambridge Univ. Press — 2018.
42. *Temlyakov V. N.* Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness// Constr. Approx. — 2017. — *45*, № 3. — P. 467–495.
43. *Van Kien Nguyen, Van Dung Nguyen* Best n-term approximation of diagonal operators and application to function spaces with mixed smoothness// Anal. Math. — 2022. — *48*. — P. 1127–1152.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Акишев Габдолла
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Казахстанский филиал, Астана, Республика Казахстан
E-mail: `akishev_g@mail.ru`