ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 41–50
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-41-50

УДК 517.95, 532.5

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ 3D УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2023 г. **А. В. КОПТЕВ**

Аннотация. В работе предложена процедура построения точного решения 3D уравнений Навье—Стокса для случая потенциального движения несжимаемой жидкости в глубоком резервуаре большого объема. Рассматривается решение при асимптотических граничных условиях, которые соответствуют заданному значению вектора скорости на большой глубине. Процедура построения решения основывается на интеграле 3D уравнений Навье—Стокса. В результате введения функций комплексного переменного задача сводится к системе уравнений Риккати, допускающей аналитическое решение. Для полученного решения исследованы качественные особенности.

***Ключевые слова*:** уравнения Навье—Стокса, вязкая жидкость, потенциальное движение, интеграл, функция комплексного переменного, уравнение Риккати.

EXACT SOLUTION OF 3D NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR POTENTIAL MOTIONS OF AN INCOMPRESSIBLE FLUID

© 2023 **A. V. KOPTEV**

Abstract. A procedure for constructing an exact solution of the 3D Navier–Stokes equations for the case of potential motion of an incompressible fluid in a deep, large-volume reservoir is proposed. The solution is considered under asymptotic boundary conditions that correspond to a given value of the velocity vector at great depth. The procedure for constructing a solution is based on the integral of the 3D Navier–Stokes equations. By introducing functions of a complex variable, the problem is reduced to a system of Riccati equations, which can be solved analytically. The qualitative features of the solution are examined.

***Keywords and phrases*:** Navier–Stokes equations, viscous fluid, potential motion, integral, function of a complex variable, Riccati equation.

***AMS Subject Classification*:** 76D05, 34A34

1. Уравнения Навье—Стокса. Уравнения Навье—Стокса описывают движение жидких и газообразных сред при наличии вязкости. Они представляют интерес как с чисто математической точки зрения, так и с точки зрения приложения к практическим задачам. Для случая 3D движения несжимаемой среды уравнения Навье—Стокса вместе с уравнением неразрывности в безразмерных переменных имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial(p+\Phi)}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial (p+\Phi)}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Основными неизвестными являются компоненты вектора скорости u, v, w и давление p; каждая из них есть функция четырех независимых переменных x, y, z и t. Величина Φ представляет заданную функцию потенциала внешних сил, Re — неотрицательный параметр, называемый числом Рейнольдса.

На сегодняшний день многие вопросы, связанные с уравнениями (1)–(4) проработаны недостаточно и требуют дополнительного исследования. Нет окончательного решения проблемы существования гладкого решения при достаточно гладких краевых и начальных условиях (см. [2, 4]). Нет четкого представления об асимптотике решения при больших временах и при больших значениях числа Рейнольдса. Не ясна структура решений и нет общего подхода к решению как самих уравнений, так и краевых и начальных задач для них. В этой связи представляет интерес построение точных решений 3D уравнений Навье—Стокса, причем особый интерес представляют достаточно широкие классы решений и исследование их особенностей.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать движение несжимаемой жидкости в большом резервуаре, когда влиянием ограничивающих поверхностей можно пренебречь. Пусть ось OZ направлена вертикально вверх, а координатная плоскость XOY совпадает со свободной поверхностью в начальный момент времени. Считаем, что движение жидкости происходит в поле силы тяжести, направленной вертикально вниз. Потенциал внешних сил определен как $\Phi = gz$, где g — ускорение свободного падения. Ограничимся рассмотрением потенциальных движений жидкости, т.е. таких, для которых существует потенциал скорости φ. Для этого случая движение безвихревое, и выполнены равенства

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{5}$$

При этом потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{6}$$

Построим решения уравнений (1)–(4), удовлетворяющих асимптотическим условиям на большой глубине при $z\to-\infty$ и гладким начальным условиям. Асимптотические условия зададим следующим образом. Полагаем

$$u\to u_0,\quad v\to v_0,\quad w\to w_0, \tag{7}$$

если

$$x=\frac{c_x}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad y=\frac{c_y}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad z=\frac{c_z}{\varepsilon}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\quad \text{при } \varepsilon\to+0,$$

где u_0, v_0, w_0 представляют заданные предельные значения компонентов вектора скорости на бесконечности, а символом $o(1/\varepsilon)$ обозначены величины, имеющие на бесконечности порядок меньший, чем $1.\varepsilon$.

Асимптотические условия (7) соответствуют наличию постоянно действующего источника на глубине, который генерирует струю со скоростью $\overline{U}(u_0,v_0,w_0)$. При этом предполагается, что $w_0>0$. Также предполагаются заданными величины c_x, c_y, c_z, которые определяют коэффициенты при старших слагаемых, когда аргументы x, y, z приближаются к бесконечности. Для нашего случая полагаем $c_x\neq0$, $c_y\neq0$, $c_z<0$.

3. Метод решения. Традиционный подход к построению решений для случая потенциальных движений жидкости основан на решении уравнения (6) для потенциала. Если следовать этому подходу, то уравнения (1)–4 значительно упрощаются. Уравнение (4) выполняется автоматически, а в уравнениях (1)–3 выпадают члены со старшими производными ввиду равенств

$\Delta u = \Delta v = \Delta w = 0$. В результате эти три уравнения приводят к интегралу Лагранжа—Коши

$$p + gz + \frac{U^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(t), \tag{8}$$

где U — модуль вектора скорости, $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, а $f(t)$ — произвольная функция времени. Однако при таком подходе из дальнейшего рассмотрения выпадает число Рейнольдса Re, поскольку оно не будет фигурировать ни в уравнении (6), ни в интеграле Лагранжа—Коши (8). В этом случае фактически будем получать решение более простых уравнений Эйлера.

Построим решение уравнений Навье—Стокса, в котором присутствовало бы в качестве параметра число Рейнольдса Re, и тем самым попытаемся выявить зависимость решения от этой важнейшей характеристики движения. Предлагается использовать не интеграл Лагранжа—Коши, а более общие интегралы уравнений Навье—Стокса, описание и вывод которых дано в [1,5,6].

3.1. Интеграл 3D уравнений Навье—Стокса для общего случая движения вязкой несжимаемой жидкости сводится к девяти соотношениям

$$p + \Phi + \frac{U^2}{2} + d + d_t = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \tag{9}$$

$$u^2 - v^2 + \frac{2}{Re}\left(-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} + \\ + \frac{\partial^2 \Psi_{15}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial(\Psi_5 + \Psi_6)}{\partial z}\right) + 3(\alpha_1 - \beta_1), \tag{10}$$

$$v^2 - w^2 + \frac{2}{Re}\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial z^2} + \\ - \frac{\partial^2 \Psi_{13}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_{14}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\Psi_1 + \Psi_2)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial z}\right) + 3(\beta_1 - \gamma_1), \tag{11}$$

$$uv - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{10}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial(\Psi_8 + \Psi_9)}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial z} - \frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \frac{\partial \beta_4}{\partial z} - \frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right), \tag{12}$$

$$uw - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial(\Psi_9 - \Psi_7)}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_4}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_4}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\right), \tag{13}$$

$$vw - \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial^2 \Psi_{12}}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi_{14}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{15}}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_{13}}{\partial z}\right) + \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\partial \Psi_7 + \Psi_8)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_4}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_4}{\partial x} + \frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right), \tag{14}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_7}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \Psi_5}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_8}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial z} + \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} + \frac{\partial \delta_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta_2}{\partial z}\right), \tag{15}$$

$$v = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_7}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi_9}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z}\right)\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \frac{\partial \beta_3}{\partial z} - \frac{\partial \delta_1}{\partial x} + \frac{\partial \delta_3}{\partial z}\right), \tag{16}$$

$$w=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi_5}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_8}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\Psi_9}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_6}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial z}\right)\right)+ \\ +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_3}{\partial x}-\frac{\partial\delta_2}{\partial x}-\frac{\partial\delta_3}{\partial y}\right), \qquad (17)$$

где Ψ_j представляют новые ассоциированные неизвестные, возникающие при интегрировании, $j=1,2,\dots,15$, α_i, β_i, γ_i, δ_i при $i=1,2,3,4$ — произвольные функции трех переменных, для которых выполнено условие

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x}=\frac{\partial\beta_i}{\partial y}=\frac{\partial\gamma_i}{\partial z}=\frac{\partial\delta_i}{\partial t}=0.$$

Величины d и d_t, входящие в (9), определены формулами

$$d_t=\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\Psi_2-\Psi_1)}{\partial x}+\frac{\partial(\Psi_4-\Psi_3)}{\partial y}+\frac{\partial(\Psi_6-\Psi_5)}{\partial z}\right), \qquad (18)$$

$$d=-\frac{U^2}{6}+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2\Psi_4}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_6}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\Psi_5}{\partial x\partial y}-\Delta_{xy}\Psi_1+\Delta_{xz}\Psi_2-\Delta_{yz}\Psi_3\right), \qquad (19)$$

где

$$\Delta_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \Delta_{yz}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \Delta_{xz}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Соотношения (9)-17, рассмотренные в совокупности, представляют интеграл 3D движения вязкой несжимаемой жидкости.

Отметим некоторые свойства этих соотношений. Во-первых, порядок производных для основных неизвестных u, v, w, p на единицу меньше их порядка в исходных уравнениях (см. [1–4]). Во-вторых, число неизвестных больше числа уравнений. Имеем девятнадцать неизвестных, среди которых четыре основных (u, v, w, p) и пятнадцать ассоциированных (функции Ψ_i, $i=1,2,\dots,15$). Поскольку связывающих их соотношений девять, появляются возможности удовлетворить дополнительным условиям, например, краевым или начальным. В-третьих, замечаем, что в пяти соотношениях явно присутствует число Рейнольдса Re в качестве параметра. При этом можно показать, что интеграл Лагранжа—Коши для движения несжимаемой среды получается из соотношений (9)–(17) как частный случай (см. [7]). Обратим внимание также на то, что линейные уравнения (15)–(17) заведомо обеспечивают выполнимость уравнения неразрывности (4). Обращает на себя внимание также тот факт, что неизвестное p присутствует лишь в соотношении (9), причем аддитивно. Следовательно, при решении конкретной задачи вначале можно сосредоточиться на разрешении уравнений (10)–(14) и лишь на последнем этапе обратиться к (9) для определения неизвестного p. В рассматриваемой работе именно в такой последовательности и предлагается действовать.

В целом справедливо полагать, что соотношения (9)–(17) открывают новые возможности для построения точных решений уравнений Навье—Стокса (1)–(4) (см. [8–10]).

3.2. Функции комплексного переменного. Рассмотрим нелинейные уравнения (10)–(14). Эти уравнения обладают симметрией относительно u, v, w. Чтобы учесть симметрию в полной мере, добавим к этим пяти уравнениям еще одно, которое получается как взятая с обратным знаком сумма (10) и (11). Это новое уравнение имеет вид

$$w^2-u^2+\frac{2}{Re}\left(-\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2\Psi_{10}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_{11}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi_{12}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi_{13}}{\partial x\partial y}- \\ -\frac{\partial^2\Psi_{15}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_3}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_4}{\partial y}+\frac{\partial\Psi_5}{\partial z}\right)+3(\gamma_1-\alpha_1). \qquad (20)$$

Рассмотрим шесть уравнений (10)–(14) и (20) попарно в зависимости от того, какие из основных неизвестных они связывают. Первую пару образуют уравнения (10) и (12). Эти уравнения связывают основные неизвестные u и v. Вторая пара — это уравнения (11) и (14), которые связывают неизвестные v и w. Третья пара образована уравнениями (13) и (20), которые связывают неизвестные w и u. Для каждой из указанных пар уравнений введем функции комплексного переменного.

Рассмотрим первую пару уравнений, т.е. уравнения (10) и (12). В целях удобства последующих вычислений умножим (12) на $-2i$ и введем функцию комплексного переменного

$$F_1(z_1) = u - iv, \quad z_1 = x + iy. \tag{21}$$

Тогда левые части указанных уравнений представляют действительную и мнимую части величины

$$F_1^2(z_1) - \frac{4}{Re} \cdot \frac{dF_1}{dz_1}.$$

Обоснованием последнего утверждения являются равенства

$$F_1^2(z_1) = u^2 - v^2 - 2iuv, \quad \frac{dF_1}{dz_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

В результате пара уравнений (10) и (12) равносильна одному комплексному дифференциальному уравнению

$$-\frac{4}{Re} \cdot \frac{dF_1}{dz_1} + F_1^2(z_1) = r_1(z_1),$$

где правая часть $r_1(z_1)$ есть сумма всех членов, не зависящих от u, v и F_1.

Для двух других пар действуем аналогичным образом. Каждое из уравнений (13) и (14) умножаем на $-2i$ и вводим функции комплексного переменного, сохраняя циклический порядок. Для второй пары вводим функцию $F_2(z_2) = v - iw$, где $z_2 = y + iz$, и для третьей пары — функцию $F_3(z_3) = w - iu$, где $z_3 = z + ix$. В результате каждая из рассмотренных пар уравнений равносильна одному дифференциальному уравнению относительно функции комплексного переменного

$$-\frac{4}{Re} \cdot \frac{dR}{dz_k} + R^2 = r_k(z_k), \tag{22}$$

где в качестве R фигурируют функции $F_k(z_k)$ при $k = 1, 2, 3$.

Уравнение (22) есть нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение известного вида. Оно характеризуется как специальное уравнение Риккати (см. [3]). Уравнения этого вида хорошо изучены и разрешимы в квадратурах при некоторых вариантах правой части. Имея целью получить аналитическое решение задачи, выберем один из таких вариантов. Положим каждую из правых частей уравнения (22) квадратом некоторой комплекснозначной функции t:

$$r_k(z_k) = C_k^2(t), \tag{23}$$

где $C_k(t) = A_k(t) + iB_k(t)$, тогда как $A_k(t)$ и $B_k(t)$ суть некоторые действительные функции t. Ввиду того, что уравнение (15) для третьей пары получалось как взятая с обратным знаком сумма (10) и (11), то необходимо ограничение

$$A_1^2(t) + A_2^2(t) + A_3^2(t) = B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t). \tag{24}$$

3.3. Нахождение основных неизвестных. Рассмотрим более подробно дифференциальное уравнение (22), когда правые части заданы в виде (23). Сосредоточимся на рассмотрении лишь ограниченных по модулю решений. Для уравнения (22) такие решения имеют вид

$$R = -C_k(t)\,\mathrm{th}\left(\frac{Re}{4}C_k(t)\bigl(z_k - z_k^{(0)}\bigr)\right) \tag{25}$$

или

$$R = \pm C_k(t), \tag{26}$$

где $z_k^{(0)}$, $k = 1, 2, 3,$ — произвольные комплексные постоянные.

Решение (26) — это особое решение, не зависящее от координат и не представляющее интереса. Поэтому сосредоточимся на рассмотрении решения (25). Для этого решения можно удовлетворить краевым и начальным условиям.

На данном этапе удобно от комплексных величин вновь перейти к действительным. Отделяем действительные и мнимые части в (25) и получаем выражения для u, v, w. При этом обнаруживается следующая закономерность. Каждая из неизвестных u, v, w встречается в полученных выражениях дважды. Так, u одновременно представляет $\operatorname{Re} F_1(z_1)$ и $-\operatorname{Im} F_3(z_3)$. Точно так же v представляет $-\operatorname{Im} F_1(z_1)$ и $\operatorname{Re} F_2(z_2)$, а w представляет $\operatorname{Re} F_3(z_3)$ и $-\operatorname{Im} F_2(z_2)$, где Re и Im обозначают соответственно действительную и мнимую части комплексной величины. Предлагается искомое выражение для каждого из неизвестных u, v, w строить в виде суммы обоих представляющих выражений. В результате получаем

$$u = \operatorname{Re} F_1(z_1) - \operatorname{Im} F_3(z_3), \quad v = -\operatorname{Im} F_1(z_1) + \operatorname{Re} F_2(z_2), \quad w = -\operatorname{Im} F_2(z_2) + \operatorname{Re} F_3(z_3). \tag{27}$$

Действуя подобным образом, мы заведомо обеспечиваем выполнимость уравнения неразрывности (4) поскольку введение функций комплексного переменного $F_1(z_1)$, $F_2(z_2)$, $F_3(z_3)$ вносит условия Коши—Римана на их действительные и мнимые части. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} u_1 &= \operatorname{Re} F_1(z_1), & u_2 &= -\operatorname{Im} F_3(z_3), \\ v_1 &= -\operatorname{Im} F_1(z_1), & v_2 &= \operatorname{Re} F_2(z_2), \\ w_1 &= -\operatorname{Im} F_2(z_2), & w_2 &= \operatorname{Re} F_3(z_3), \end{aligned}$$

то будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -\frac{\partial v_1}{\partial y}, & \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \frac{\partial v_1}{\partial x}, & \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{\partial w_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial z} &= \frac{\partial w_1}{\partial y}, & \frac{\partial w_2}{\partial z} &= -\frac{\partial u_2}{\partial x}, & \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial z}. \end{aligned} \tag{28}$$

Левая часть уравнения неразрывности (4) с учетом (28) преобразуется к виду

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x} + \frac{\partial(v_1+v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial z} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right).$$

Последнее тождественно равно нулю, ввиду первого, третьего и пятого равенств (28). Уравнение (4) выполнено. Таким образом, выражения (27) обеспечивают выполнимость всех соотношений (10)–(17); при этом не пришлось определять выражения для ассоциированных неизвестных Ψ_j.

В результате отделения действительных и мнимых частей в (25) с учетом (27) приходим к выражениям для неизвестных u, v, w в виде

$$\begin{aligned} u &= -\frac{A_1(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_1}{2} - B_1(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_1}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_1}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_1}{4}\right)} + \frac{B_3(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_3}{2} + A_3(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_3}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_3}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_3}{4}\right)}, \\ v &= -\frac{A_2(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_2}{2} - B_2(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_2}{4}\right)} + \frac{B_1(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_1}{2} + A_1(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_1}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_1}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_1}{4}\right)}, \\ w &= -\frac{A_3(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_3}{2} - B_3(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_3}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_3}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_3}{4}\right)} + \frac{B_2(t)\operatorname{sh}\dfrac{\operatorname{Re}\theta_2}{2} + A_2(t)\sin\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{2}}{2\left(\cos^2\dfrac{\operatorname{Re}\lambda_2}{4} + \operatorname{sh}^2\dfrac{\operatorname{Re}\theta_2}{4}\right)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Выражение для неизвестного p получается с помощью (9) с учетом (19), (18). В данном случае получается выражение, аналогичное тому, которое получилось бы из интеграла Лагранжа—Коши (8). Вычисления приводят к следующему результату:

$$p - p_0 = -gz - \frac{u^2+v^2+w^2}{2} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}; \tag{30}$$

потенциал скорости φ представляется суммой трех слагаемых

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{Re} \ln\left(\cos^2 \frac{\operatorname{Re}\lambda_k}{4} + \operatorname{sh}^2 \frac{\operatorname{Re}\theta_k}{4}\right), \quad k = 1, 2, 3,$$

причем

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A_1(t)(x - x_0) - B_1(t)(y - y_0), \qquad & \lambda_1 &= B_1(t)(x - x_0) + A_1(t)(y - y_0), \\ \theta_2 &= A_2(t)(y - y_0) - B_2(t)(z - z_0), \qquad & \lambda_2 &= B_2(t)(y - y_0) + A_2(t)(z - z_0), \\ \theta_3 &= A_3(t)(z - z_0) - B_3(t)(x - x_0), \qquad & \lambda_3 &= B_3(t)(z - z_0) + A_3(t)(x - x_0). \end{aligned} \tag{31}$$

Выражения (29)–31 представляют множество точных решений 3D уравнений Навье—Стокса (1)–4. При этом x_0, y_0, z_0 суть произвольные постоянные, а u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z — заданные параметры. Величины $A_k(t)$, $B_k(t)$ при $k = 1, 2, 3,$ — пока не определенные функции времени.

4. Выполнимость краевых и начальных условий.

4.1. Краевые условия. Обратимся к краевым условиям, которые заданы асимптотическими соотношениями (7), и исследуем возможности, как им удовлетворить. Пусть, для простоты $x_0 = y_0 = w_0 = 0$, а величины u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z считаем заданными. Но при этом полагаем выполненными ограничения $c_z < 0$ и $w_0 > 0$. Нужно выбрать функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$ так, чтобы удовлетворить условиям (7). Эта частная задача решается следующим образом. Согласно условиям (7) необходимо, чтобы правые части выражений (29) на бесконечности асимптотически приближались бы соответственно к u_0, v_0, w_0. Ясно также, что асимптотическое поведение u, v, w во многом определяется знаком аргументов гиперболических функций при больших по модулю значениях аргументов.

Пусть $1/\varepsilon \to +\infty$ и каждый из аргументов x, y, z приближается к бесконечности. Рассмотрим, например, первое слагаемое правой части первого из выражений (29) для u. Если $\theta_1 > 0$, то эта величина приближается к $-A_1(t)$. Если же $\theta_1 < 0$, то эта величина приближается к $A_1(t)$. Первая возможность имеет место, если $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0$, а вторая — при $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0$. Нужно рассматривать различные возможности в зависимости от знаков величин θ_k при больших значениях x, y, z. Всего имеем восемь основных возможностей, которые отличаются друг от друга хотя бы одним знаком в выражениях для θ_k. Рассмотрим некоторые из них более подробно.

1. Пусть $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_3 > 0$. Эта возможность имеет место при предположениях

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z > 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x > 0. \tag{32}$$

В этом случая для выполнимости условий (7) необходимо

$$-A_1(t) + B_3(t) = u_0, \quad -A_2(t) + B_1(t) = v_0, \quad -A_3(t) + B_2(t) = w_0.$$

К этим равенствам нужно добавить уравнение (24) и разрешить систему относительно шести неизвестных $A_k(t)$ и $B_k(t)$. Вычисления приводят к следующим результатам. Величины $A_1(t)$, $B_1(t)$ можно выбрать произвольно, а остальные четыре выражаются через них по формулам

$$\begin{aligned} &A_2(t) = B_1(t) - v_0, \quad B_2(t) = \frac{v_0^2 - u_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ &A_3(t) = \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \end{aligned} \tag{33}$$

Таким образом, для рассмотренной возможности когда, согласно предположению, выполнены неравенства (32), решение, удовлетворяющее условиям (7), построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (33), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени. Если же хотя бы одно из неравенств (32) не выполнено, то приведенные выражения не имеют места.

2. Рассмотрим вторую возможность, которая соответствует случаю $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 > 0$. Эта возможность имеет место при предположениях

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z < 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x > 0. \tag{34}$$

Для выполнимости условий (7) необходимо

$$-A_1(t) + B_3(t) = u_0, \quad A_2(t) + B_1(t) = v_0, \quad -A_3(t) - B_2(t) = w_0.$$

Дальнейшие вычисления приводят к следующим результатам:

$$\begin{gathered} A_2(t) = v_0 - B_1(t), \quad B_2(t) = \frac{u_0^2 - v_0^2 + w_0^2 + 2u_0A_1(t) + 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ A_3(t) = \frac{v_0^2 - u_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \end{gathered} \tag{35}$$

Таким образом, при выполнимости неравенств (34) решение, удовлетворяющее условиям (7), построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (35), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени.

3. Рассмотрим вариант $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Эта возможность имеет место, если

$$A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0, \quad A_2(t)c_y - B_2(t)c_z < 0, \quad A_3(t)c_z - B_3(t)c_x < 0. \tag{36}$$

Для выполнимости условий (7) необходимо

$$A_1(t) - B_3(t) = u_0, \quad A_2(t) - B_1(t) = v_0, \quad A_3(t) - B_2(t) = w_0.$$

В результате приходим к следующим выражениям:

$$\begin{gathered} A_2(t) = v_0 + B_1(t), \quad B_2(t) = \frac{u_0^2 - v_0^2 - w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \\ A_3(t) = \frac{u_0^2 - v_0^2 + w_0^2 - 2u_0A_1(t) - 2v_0B_1(t)}{2w_0}, \quad B_3(t) = u_0 + A_1(t). \end{gathered} \tag{37}$$

Таким образом, если выполнены неравенства (36), то решение, удовлетворяющее условиям (7), также построено. Основные неизвестные задаются выражениями (29) и (30). При этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, задаются формулами (37), где $A_1(t)$ и $B_1(t)$ — произвольные функции времени.

Для каждой из возможностей, как рассмотренных, так и для других пяти, имеют место следующие закономерности. Общие выражения (29) и (30) для основных неизвестных остаются в силе, но при этом функции $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, определяются разными выражениями. Отсюда следует, что окончательные выражения для неизвестных u, v, w, p также получаются различными. При этом во всех выражениях присутствуют произвольные функции времени $A_1(t)$ и $B_1(t)$.

Решения указанного вида существуют только когда значения $A_1(t)$ и $B_1(t)$ находятся внутри некоторой области, конфигурация которой определяется параметрами u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z. В частности, если положить

$$c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = -3, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 4,$$

то эта область представляет прямоугольник на декартовой плоскости, когда значения $A_1(t)$ откладываются вдоль оси абсцисс, а $B_1(t)$ — вдоль оси ординат. Вершины этого прямоугольника расположены в точках $(\pm 6, \pm 3)$. Диагональ, соединяющая точки $(-6, -3)$ и $(6, 3)$, разбивает указанный прямоугольник на две треугольные области. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается в нижней треугольной области, то имеет место одна из четырех возможностей, для которых выполнено неравенство $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y > 0$. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается в верхней треугольной области, то имеет место одна из четырех возможностей, для которых выполнено $A_1(t)c_x - B_1(t)c_y < 0$. Если точка $(A_1(t), B_1(t))$ располагается вне указанного прямоугольника, то решений, удовлетворяющих условию (7), не существует.

Таким образом, чтобы при некоторых функциях $A_1(t)$ и $B_1(t)$ и при заданных величинах u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z удовлетворить условию (7), нужно определить знаки величин θ_k и тем самым определить одну из возможностей для нахождения $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$. При этом искомое решение существует только в случае, когда $A_1(t)$ и $B_1(t)$ располагается внутри строго определенной области в зависимости от значений параметров u_0, v_0, w_0, c_x, c_y, c_z.

4.2. Начальные условия. Задание начальных условий во многом определяется функциями $A_1(t)$ и $B_1(t)$. Зададим их, а также значения параметров следующим образом:

$$\begin{gathered} A_1(t) = 0, \quad B_1(t) = t \\ c_x = 1, \quad c_y = 2, \quad c_z = -3, \quad u_0 = v_0 = 0, \quad w_0 = 4. \end{gathered} \tag{38}$$

Тогда при $0 < t < 3$ точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри треугольника с вершинами $(-6, -3)$, $(-6, 3)$, $(6, 3)$ и выполнены неравенства $\theta_1 < 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta_3 < 0$. Имеет место третья возможность, и вспомогательные величины $A_k(t)$ и $B_k(t)$, $k = 2, 3$, определяются согласно формулам (37). Начальные условия для рассматриваемого случая зададим следующим образом:

$$\begin{gathered} u(0) = \frac{\sin(\operatorname{Re} x)}{\cos^2 \dfrac{\operatorname{Re} x}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{\operatorname{Re} z}{2}}, \quad v(0) = -\frac{\sin(\operatorname{Re} y)}{\cos^2 \dfrac{\operatorname{Re} y}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{\operatorname{Re} z}{2}}, \\ w(0) = -\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re} z)}{\cos^2 \dfrac{\operatorname{Re} x}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{\operatorname{Re} z}{2}} + \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{Re} z)}{\cos^2 \dfrac{\operatorname{Re} y}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{\operatorname{Re} z}{2}}. \end{gathered} \tag{39}$$

Ясно, что выражения (39) определяют гладкие начальные условия. Таким образом, формулы (29)–(30) с учетом (37) представляют решение уравнений (1)–(4) с краевыми асимптотическими условиями (7) и гладкими начальными условиями (39).

5. Качественные особенности. Имеем точное решение уравнений Навье—Стокса (1)–(4) с асимптотическими условиями (7) и начальными условиями (39). Кратко проанализируем качественные особенности.

Рассмотрим формулы (29), определяющие выражения для скоростей. В этих выражениях присутствуют тригонометрические функции, причем, их аргументы пропорциональны числу Рейнольдса *Re*. Данные формулы определяют некоторое колебательное движение с частотой колебаний, пропорциональной числу *Re*. При больших значениях *Re* период колебаний стремится к нулю; в реальной несжимаемой жидкости такие колебания не могут быть реализованы. Таким образом, полученное решение имеет место лишь при сравнительно небольших значениях *Re*, тогда как при больших *Re* построенное решение будет разрушаться.

Еще одна особенность состоит в том, что построенное решение имеет конечное время жизни. Действительно, как уже отмечалось выше, решение, удовлетворяющее всем условиям, существует лишь до тех пор, пока точка $(A_1(t), B_1(t))$ находится внутри треугольника с вершинами $(-6, -3)$, $(-6, 3)$, $(6, 3)$. При выборе функций $A_1(t)$ и $B_1(t)$ согласно (38) указанное условие выполнено лишь при $0 < t < t_*$, где $t_* = 3$. Значит, при $t > 3$ построенное решение не существуетб и в безразмерных единицах время жизни данного решения равно 3.

Следует также отметить, что свойства решения, включая свойства гладкости, во многом определяется функциями $A_1(t)$ и $B_1(t)$, которые не фигурируют ни в краевых, ни в начальных условиях. Значит, для того чтобы гарантировать достаточную гладкость получаемого решения, нужно накладывать некоторые дополнительные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коптев А. В.* Интегралы уравнений Навье—Стокса// Тр. Средневолж. мат. о-ва. — 2004. — *6*, № 1. — С. 215–225.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
3. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Физматлит, 2001.
4. *Fefferman C. L.* Existence and Smoothness of the Navier–Stokes Equation. — Princeton Univ., 2000.

5. *Koptev A. V.* Integrals of motion of an incompressible medium flow. From classic to modern// in: Handbook on Navier–Stokes Equations. Theory and Applied Analysis. — New York: Nova Science Publishers, 2017. — P. 443–460.
6. *Koptev A. V.* Method for solving the Navier–Stokes and Euler equations of motion for incompressible media// J. Math. Sci. — 2020. — *250*, № 1. — P. 254–382.
7. *Koptev A. V.* Systematization and analysis of integrals of motion for an incompressible fluid flow// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2018. — *11*, № 3. — С. 370–382.
8. *Koptev A. V.* Constructive method to solving 3D Navier–Stokes equations// 8 Eur. Congr. Math. Book of Abstracts. — Portorozh: Univ. of Primorska Press, 2021. — P. 638–639.
9. *Koptev A. V.* Exact solutions of 3D Navier–Stokes equations// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2020. — *13*, № 3. — С. 306–313.
10. *Koptev A. V.* Deep water movement// in: Navier–Stokes Equations and Their Applications. — New York: Nova Science Publishers, 2021. — P. 83–103.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Коптев Александр Владимирович
Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С. О. Макарова, Санкт-Петербург
E-mail: Alex.Koptev@mail.ru