ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 14–27
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-14-27

УДК 517.9

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ К НЕКОТОРЫМ КЛАССАМ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2023 г. А. Г. БАСКАКОВ, Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА

Аннотация. Рассмотрены два разностных оператора второго порядка, заданных своими бесконечными матрицами: оператор с обычным потенциалом и оператор с потенциалом с инволюцией. Исследование спектральных свойств этих операторов при различных условиях проводилось методом подобных операторов. Получены результаты, касающиеся асимптотики собственных значений в случае потенциала с инволюцией.

Ключевые слова: метод подобных операторов, собственное значение, спектральный проектор, биинвариантное подпространство.

APPLICATION OF THE METHOD OF SIMILAR OPERATORS TO SOME CLASSES OF DIFFERENCE OPERATORS

© 2023 A. G. BASKAKOV, G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA

Abstract. Two second-order difference operators defined by their infinite matrices are considered: an operator with an ordinary potential and an operator with an involutive potential. The spectral properties of these operators under various conditions were performed by the method of similar operators. Results concerning the asymptotics of the eigenvalues in the case of a potential with involution are obtained.

Keywords and phrases: method of similar operators, eigenvalue, spectral projector, bi-invariant subspace.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В работе рассматриваются разностные операторы второго порядка, соответствующие оператору Штурма—Лиувилля при дискретизации. Данная статья носит полуобзорный характер. В ней рассматривается как случай обычного потенциала, так и случай потенциала с инволюцией. Методом исследования служит метод подобных операторов. При этом акцент делается именно на отличиях в применении метода в зависимости от типа растущего потенциала. Заметим, что трехдиагональные матрицы n-го порядка, соответствующие разностным уравнениям Штурма—Лиувилля, рассматривались в работе [23]; там же с использованием вариационного принципа получены двусторонние оценки наименьшего собственного значения матриц указанного типа. Полученные в [23] результаты и методы исследования получили свое дальнейшее развитие в [24, 30]. В работе [24], являющейся в некотором роде продолжением [23], упор делается на коэрцитивных оценках решений разностных уравнений, а в [30] произведено обобщение и развитие метода из [23] и его применение к разностным теоремам вложения. В настоящей работе рассматриваются бесконечные аналоги разностных матриц из [23] и соответствующих операторов с точки зрения их спектральных свойств.

Трехдиагональные бесконечные матрицы с различными условиями на матричные элементы как числовые, так и блочные (операторные) широко используются в прикладных задачах. При этом элементы, стоящие на диагоналях, параллельных главной, не обязаны быть одинаковыми. Обычно рассматриваются несколько иные классы трехдиагональных бесконечных матриц таких, как в [5, 40]. Отметим отдельно работу [5], в которой содержится качественный обзор результатов и библиографии по спектральным свойствам этих матриц. Существуют различные способы оценки собственных значений рассматриваемых в [5] матриц. Одним из которых является их приближение собственными значениями некоторых конечных усеченных матриц (см. [38, 43]). В работе [5] оценки собственных значений производились с использованием метода подобных операторов с предварительным преобразованием подобия. Мы также будем использовать метод подобных операторов, но другую, отличную от [5] его модификацию, потому что в нашем случае элементы матрицы не удовлетворяют условиям из [5]. Отметим также работу [10] и имеющийся в ней обзор. В [10] рассматривались трехдиагональные бесконечные матрицы, у которых по диагоналям, параллельным главной, стоят последовательности, суммируемые с квадратом, а элементы главной диагонали «не разбегаются». Спектральные свойства таких матриц также исследовались с помощью метода подобных операторов, но при этом использовалась модификация метода подобных операторов обычно применяемая для дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и Дирака. Трехдиагональные матрицы из [10] дают хороший модельный пример указанной модификации, так как для него можно выписать и просчитать в явном виде весовую последовательность, используемую в методе.

В настоящей работе сначала проведен обзор результатов, касающихся спектральных свойств бесконечных трехдиагональных матриц, таких, как матрицы из [23] в случае четного потенциала и потенциала общего вида из [8,9,11,39]. Затем приводятся новые результаты, касающиеся асимптотики собственных значений в случае потенциала с инволюцией. Упор делается на отличиях в применении метода исследования в зависимости от потенциала. Также приведены результаты, касающиеся биинвариантных подпространств.

2. Постановка задачи. Перейдем к постановке задачи. Как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначено множество целых чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, а через $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой, индуцированной стандартным скалярным произведением:

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y}_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2.$$

В пространстве l_2 стандартный базис состоит из таких векторов $\{l_i, i \in \mathbb{Z}\}$, что $l_i(n) = \delta_{in}, i, n \in \mathbb{Z}$. Согласно [23] в пространстве l_2 рассматривается разностный оператор $\mathcal{E}_0 : l_2 \to l_2$, заданный своей (бесконечной) трехдиагональной матрицей в базисе $\{e_i, i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a(-2)+2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a(-1)+2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a(1)+2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & a(2)+2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Отметим, что рассматриваемый класс матриц соответствует разностным уравнениям Штурма—Лиувилля. Условия на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ будут приведены ниже. Кроме матрицы $\mathcal{A}_1$ также введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{A}_2$ вида

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & a(-2) & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & a(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a(0)+2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(1) & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & a(2) & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Матрицы типа матрицы $\mathcal{A}_2$ соответствуют разностным уравнением Штурма—Лиувилля с потенциалом с инволюцией.

Отметим, что в настоящее время дифференциальные операторы первого и второго порядка с инволюцией активно изучаются (см., например, [6, 7, 17, 33, 34, 36, 42]). Дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией также исследовались методом подобных операторов (см. [33,34,36]), но применялась другая схема метода подобных операторов из [35], в основе которой лежит возможность с помощью предварительного преобразования подобия перевести исследуемый оператор к оператору с возмущением из весового пространства операторов Гильберта—Шмидта. В рассматриваемом случае такая схема не работает.

Пусть матрица $\mathcal{A}_1$ определяет в l_2 оператор $A_1 : D(A_1) \subset l_2 \to l_2$ с областью определения

$$D(A_1) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)x(n)|^2 < \infty \right\}$$

а матрица $\mathcal{A}_2$ естественным образом определяет оператор $A_2 : D(A_2) \subset l_2 \to l_2$, где

$$D(A_2) = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(-n)x(n)|^2 < \infty \right\}.$$

Для оператора A_1 введем две группы условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

(I) $a(i) \neq a(j)$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$; $\lim\limits_{|n|\to\infty} |a(n)| \to \infty$;

$$0 < d_i = \inf_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty, \quad |i| \to \infty, \quad j \in \mathbb{Z};$$

(II) $a(i) = a(-i)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, $a(j) \neq a(i)$, $i \neq -j$, i, $j \in \mathbb{Z}$;

$$0 < d_i = \inf_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty,$$

Первая группа условий соответствует растущему потенциалу общего вида, вторая группа условий — четному растущему потенциалу. Для оператора A_2 условия на растущую последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ следующие:

(III) $a(i) = a(-i)$, $i \in \mathbb{N}$, $a(i) \neq a(j)$, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$,

$$d_i = \inf_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty, \quad i \to \infty, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Через $\operatorname{End} l_2$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в l_2. Представим оператор A_1 в виде

$$A_1 = A_0 - B,$$

где

$$(A_0x)(n) = (a(n) + 2)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad D(A_0) = D(A_1),$$
$$B \in \operatorname{End} l_2, \quad (Bx)(n) = x(n - 1) + x(n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор A_0 — нормальный оператор (см. определение 1), в случае выполнения группы условий (I) он имеет простые изолированные собственные значения

$$\lambda_n = a(n) + 2, \quad \sigma(A_0) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\lambda_n\},$$

а векторы $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ являются его собственными векторами. Пусть $P_n = P(\{\lambda_n\}, A_0)$ — спектральный проектор, построенный по спектральному множеству $\{\lambda_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $P_nx = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. В случае выполнения условий (II) собственные значения $\lambda_n = a(n) + 2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, оператора A_0 являются двукратными, $\lambda_0 = a(0) + 2$ — простое, векторы e_n, $n \in \mathbb{Z}$, также являются собственными векторами. Пусть

$$P_0x = (x, e_0)e_0, \quad P_nx = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Важно отметить, что из-за кратности собственных значений оператора A_0 в дальнейшем, при применении метода подобных операторов, приходится рассматривать именно блочные матрицы, состоящие из блоков 2×2. Иначе метод подобных операторов применять нельзя. Также блочные матрицы приходится рассматривать при применении других модификаций метода подобных операторов, например, в [3,4,25,35,37,44].

Перейдем к оператору A_2. Его также можно представить в виде $A_2 = \widetilde{A}_0 - B$, где оператор B останется таким же, как и в предыдущем случае, и

$$(\widetilde{A}_0 x)(n) = a(-n)x(n) + 2x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad D(\widetilde{A}_0) = D(A_2).$$

Отметим, что при применении метода подобных операторов обычно невозмущенный оператор не изменяется, а возмущения бывают различными или рассматриваемыми в разных операторных пространствах. В данной же статье наоборот, меняется вид невозмущенного оператора в зависимости от того, является ли рассматриваемый оператор оператором с инволюцией.

3. Предварительные сведения. Пусть $\mathcal{H}$ — абстрактное гильбертово пространство.

Определение 1 ([26]). Линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, называется *нормальным*, если для сопряженного оператора выполнены условия $D(A) = D(A^*)$, $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $x \in D(A)$, и *самосопряженным*, если $A^*x = Ax$.

Отметим, что оператор A_1 является самосопряженным в случае вещественной последовательности $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, а в общем случае он нормальный. Оператор A_2 является самосопряженным, так как последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ вещественная и четная.

Определение 2. Два линейных оператора $\mathcal{E}_i : D(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует такой непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, что

$$UD(\mathcal{E}_2) = D(\mathcal{E}_1), \quad \mathcal{E}_1 Ux = U\mathcal{E}_2 x, \quad x \in D(\mathcal{E}_2).$$

Оператор U называется оператором преобразования оператора $\mathcal{E}_1$ в оператор $\mathcal{E}_2$ или сплетающим оператором.

Широкое использование преобразования подобия обусловлено тем, что спектральные свойства одного из операторов можно найти, зная спектральные свойства ему подобного. Соответствующее утверждение удобно оформить в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}_i : D(\mathcal{E}_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — подобные операторы и U — оператор преобразования. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(a) $\operatorname{Im}\mathcal{E}_1 = U(\operatorname{Im}\mathcal{E}_2)$.

(b) *если $\sigma(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_d(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_c(\mathcal{E}_i)$, $\sigma_r(\mathcal{E}_i)$ — спектр, дискретный, непрерывный и остаточные спектры оператора $\mathcal{E}_i$, $i = 1, 2$, то*

$$\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_d(\mathcal{E}_1) = \sigma_d(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_c(\mathcal{E}_1) = \sigma_c(\mathcal{E}_2), \quad \sigma_r(\mathcal{E}_1) = \sigma_r(\mathcal{E}_2).$$

(c) *Пусть e — собственный вектор оператора $\mathcal{E}_2$, отвечающий собственному значению λ, $\mathcal{E}_2 e = \lambda e$. Тогда $\mathcal{E}_1 Ue = \lambda Ue$.*

(d) *Если оператор $\mathcal{E}_2$ допускает разложение*

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{21} \oplus \mathcal{E}_{22}, \quad \mathcal{E}_{2k} = \mathcal{E}_2 | \mathcal{H}_k,$$

и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ — прямая сумма инвариантных относительно $\mathcal{E}_2$ подпространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора $\mathcal{E}_1$ и

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{11} \oplus \mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_{1k} = \mathcal{E}_1 | \widetilde{\mathcal{H}}_k, \quad k = 1, 2.$$

Более того, пусть P — проектор, осуществляющий разложение

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = \operatorname{Im} P, \quad \mathcal{H}_2 = \operatorname{Im}(I - P),$$

то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, осуществляющий разложение

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2,$$

определяется формулой

$$\widetilde{P} = UPU^{-1}.$$

(e) *Если $\mathcal{E}_2$ — генератор сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, то оператор $\mathcal{E}_1$ также является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_1 : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}$, $T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}$, $t \geqslant 0$.*

Пусть пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде прямой суммы взаимно ортогональных ненулевых замкнутых подпространств $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n, \tag{1}$$

где $\mathcal{H}_i$ ортогонально $\mathcal{H}_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и

$$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n, \quad x_n \in \mathcal{H}_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2.$$

В этом случае последовательность $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ обычно называют *ортогональным базисом из подпространств* пространства $\mathcal{H}$ (см. [12, 18]). Такое представление пространства $\mathcal{H}$ ведет к существованию разложения единицы системы ортопроекторов $\mathcal{P} = \{P_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. При этом проекторы P_n, $n \in \mathbb{Z}$, обладают следующими свойствами:

$$P_n^* = P_n,\ n \in \mathbb{Z}; \qquad P_iP_j = 0 \text{ при } i \neq j,\ i, j \in \mathbb{Z};$$

ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} P_n x$ безусловно сходится к $x \in \mathcal{H}$ и $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|P_n x\|^2$; из равенств $P_k x = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, следует, что вектор x нулевой; $\mathcal{H}_k = \operatorname{Im} P_k$, $x_k = P_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 3 (см. [25, 36]). Линейный оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\mathcal{E}_n \in \operatorname{End}\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно разложения (1), если выполнены следующие условия:

(i) $\mathcal{H}_n \subset D(\mathcal{E}) = \Big\{x \in \mathcal{H} :\ \sum\limits_{k\in\mathbb{J}} \|\mathcal{E}_k x_k\|^2 < \infty,\ x_k = P_k x,\ k \in \mathbb{Z}\Big\}$ для всех $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) каждое подпространство $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, есть сужение оператора $\mathcal{E}$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\mathcal{E}x = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_k x_k$, $x \in D(\mathcal{E})$, где $x_k = P_k x$, $k \in \mathbb{Z}$.

При этом используется обозначение

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_n, \tag{2}$$

Если для последовательности подпространств $(\widetilde{\mathcal{H}}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ существует такой линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор U и такой ортогональный базис из подпространств $(\mathcal{H}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, что $\widetilde{\mathcal{H}}_n = U\mathcal{H}_n$, то $(\widetilde{\mathcal{H}}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, очевидно, тоже является базисом. Его принято называть *базисом Рисса из подпространств* (см. [12, 18]). Кроме того, если оператор U представим в виде $U = I + W$, где $W \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то базис Рисса будем называть *базисом Бари.* Для базисов Рисса будем использовать запись

$$\mathcal{H} = \biguplus_{k\in\mathbb{Z}} U\mathcal{H}_k = \biguplus_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{H}}_k. \tag{3}$$

Такой базис также называется базисом из подпространств, эквивалентным ортогональному, или спрямляемым базисом (см. [12, 31]).

Разложение (3) будем называть *квазиортогональным* или *U-ортогональным.*

Определение 4 (см. [36]). Линейный замкнутый оператор $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ назовем квазиортогональной (U-ортогональной) прямой суммой ограниченных операторов $\widetilde{\mathcal{E}}_k$, $k \in \mathbb{Z}$, относительно квазиортогонального разложения пространства $\mathcal{H}$ вида (3), если для некоторого обратимого оператора $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ имеет место разложение

$$U^{-1}\mathcal{E}U = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U^{-1}\mathcal{E}_n U$$

вида (2). При этом используется запись

$$\mathcal{E} = \biguplus_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{E}}_k.$$

Предположим, что операторы $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ подобны, а оператор U является оператором преобразования $\mathcal{E}$ в $\widetilde{\mathcal{E}}$. Пусть также оператор $\widetilde{\mathcal{E}}$ является ортогональной прямой суммой

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{\mathcal{E}}_k.$$

Из определений 1 – 3 немедленно вытекает, что в этом случае оператор $\mathcal{E}$ является U-ортогональной прямой суммой

$$\mathcal{E} = \biguplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}_k,$$

где $\mathcal{E}_k = U\widetilde{\mathcal{E}}_k U^{-1}$.

Далее мы также затронем проблему построения биинвариантных подпространств для оператора A_1, что не было рассмотрено в [8, 9, 11, 39]. Введем ниже соответствующую терминологию. При этом в вопросах биинвариантных подпространств мы будем придерживаться терминологии из [2].

Определение 5 ((см. [2])**.** Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}_0 \neq \mathcal{H}$) называется биинвариантным для линейного оператора $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, если $\mathcal{H}_0$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{H}_0^{\perp}$ инвариантны относительно $\mathcal{E}$.

Лемма 2. *Пусть линейный оператор $\mathcal{E}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q, т.е. $\mathcal{E}Q = Q\mathcal{E}$. Тогда подпространства $\operatorname{Im} Q$ и $\operatorname{Ran} Q$ являются биинвариантными для оператора $\mathcal{E}$.*

Отметим, что очевидная лемма 2 и применяется для построения биинвариантных подпространств.

Определение 6. Пусть подпространство $\mathcal{H}_0$ биинвариантно для некоторого оператора $\mathcal{E}$. Тогда подпространство $(I + U)\mathcal{H}_0$, где U, $(I + U)^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ назовем биинвариантным подпространством Рисса. Если же $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то $(I+U)\mathcal{H}_0$ назовем биинвариантным подпространством Бари.

4. Метод подобных операторов. Обычно изучение спектральных свойств некоторых операторов в гильбертовом пространстве, представимых в виде $A-B : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где A — хорошо изученный оператор с известными спектральными свойствами и B — его возмущение, подчиненное оператору A, укладывается в рамки теории возмущений линейных операторов. Эта теория восходит к книге [14] и развивается в работах различных авторов (см. [1, 13, 16, 19–21, 41]). Обзор имеющихся на 1967 год результатов в теории возмущений линейных операторов можно найти в диссертации [15]. Свое дальнейшее развитие и использование теория возмущений получила, например, в [22, 27, 28, 32], а также работах других авторов.

Одним из самых распространенных методов исследования в теории возмущений линейных операторов является резольвентный метод (см. [14]), связанный с использованием интегрального представления для проектора Рисса $P(\sigma, A)$, построенного по спектральной компоненте σ из спектра $\sigma(A)$ оператора A. С помощью резольвентного метода исследования проводились, например, в [22, 32, 42]. Не всегда бывает удобно оценивать соответствующие интегралы на контурах, поэтому существуют и другие методы исследования. Один из которых, метод операторов преобразования или transmutation method, связан с построением подходящего преобразования подобия исходного оператора в оператор более простой структуры. Историю и современное состояние метода операторов преобразования можно найти в [29]. Используемый нами метод подобных операторов также относится к методам операторов преобразования. В изложении метода подобных операторов будем придерживаться работы [35].

Пусть $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — некоторый абстрактный невозмущенный оператор. Одним из основных понятий метода подобных операторов является определение допустимой для невозмущенного оператора A тройки, которая для применимости метода должна удовлетворять ряду условий.

Определение 7 (см. [35])**.** Пусть $\mathfrak{U}$ — банахово пространство операторов из $\operatorname{End}\mathcal{H}$ с нормой $\|X\|_*$, $X \in \mathfrak{U}$, и $J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ — трансформаторы, т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов. Тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ будем называть допустимой тройкой для оператора A, а $\mathfrak{U}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

(i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

(ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$,
$$A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX \tag{4}$$
для любого $X \in \mathfrak{U}$ и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения
$$AY - YA = X - JX, \tag{5}$$
удовлетворяющее условию $JY = O$, где O — нулевой оператор в $\mathcal{H}$;

(iii) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathfrak{U}$ для всех X, $Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \leqslant \gamma$ и
$$\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \leqslant \gamma \|X\|_* \|Y\|_*;$$

(iv) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что
$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon;$$

(v) $J((\Gamma X)JX) = O$ для всех X, $Y \in \mathfrak{U}$.

Отметим, что для одного невозмущенного оператора A иногда можно построить несколько разных допустимых троек.

Трансформатор J — обычно это оператор диагонализации (блочной диагонализации) матрицы оператора $X \in \mathfrak{U}$. Трансформатор Γ связан с построением оператора U из определения 2. Свойства (ii)–(v) допустимой тройки необходимы для разрешения нелинейного операторного уравнения (7) метода подобных операторов, приведенного ниже.

Зафиксируем теперь некоторую допустимую тройку $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ для невозмущенного оператора A.

Теорема 1 (см. [33, 35])**.** *Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка и B — некоторый оператор из пространства возмущений $\mathfrak{U}$. Если*
$$4\gamma \|J\| \|B\|_* < 1, \tag{6}$$
то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ — решение уравнения
$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X); \tag{7}$$
оно может быть найдено методом простых итераций, если положить $X_0 = 0$, $X_1 = B$, ... Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathcal{H}$. Отображение $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре
$$\mathfrak{B} = \Big\{X \in \mathfrak{U} : \ \|X - B\|_* \leqslant 3\|B\|_*\Big\}.$$

5. Применение метода подобных операторов к оператору A_1. В этом разделе построим допустимую тройку для оператора A_1 в двух случаях: в случае потенциала общего вида и в случае четного потенциала; приведем полученные в [2, 8, 9, 11, 39] результаты, касающиеся основной теоремы о подобии, оценках собственных значений и спектральных проекторов, а также новые теоремы, касающиеся биинвариантных подпространств.

Вернемся к невозмущенному оператору A_0. Обозначим через $\mathbb{J}$ множество $\mathbb{J} = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+\}$. Тогда оператор A_0 есть ортогональная прямая сумма операторов $A_{0i} = A_0|\mathcal{H}_i = (a(i) + 2)I_i$, $i \in \mathbb{J}$, где I_i, $i \in \mathbb{J}$, есть тождественный оператор в $\mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i$, $i \in \mathbb{J}$. Иными словами,
$$A_0 = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (a(i) + 2)I_i$$

в случае выполнения первой группы условий и

$$A_0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}_+} (a(i)+2)I_i$$

в случае выполнения второй группы условий (четного потенциала). Это представление оператора A_0 связано с представлением пространства l_2 в виде

$$l_2 = \bigoplus_{i\in\mathbb{J}} \mathcal{H}_i = \bigoplus_{i\in\mathbb{J}} \operatorname{Im} P_i.$$

Напомним, что $\dim\operatorname{Im} P_0 = 1$, $\dim\operatorname{Im} P_i = 2$, $i\in\mathbb{N}$, в случае четного потенциала и $\dim\operatorname{Im} P_i = 1$, $i\in\mathbb{Z}$, в случае потенциала общего вида. При этом использовалось разложение единицы системой спектральных проекторов $\{P_i, i\in\mathbb{J}\}$ оператора A_0. Отметим, что подпространства $\mathcal{H}_i$, $i\in\mathbb{J}$, образуют базис из подпространств в l_2, а также систему биинвариантных подпространств.

Рассмотрим также другое представление единицы. Пусть

$$P_{(m)} = \sum_{|j|<m,\ j\in\mathbb{J}} P_j, \quad \mathcal{P}^{(m)} = \{P_{(m)}\} \cup \big\{P_i,\ |i|>m,\ i\in\mathbb{J}\big\}.$$

Тогда пространство l_2 представимо в виде ортогональной прямой суммы подпространств

$$l_2 = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i|>m,\ i\in\mathbb{J}} \mathcal{H}_i \Big),$$

где $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$. При этом подпространства $\mathcal{H}_{(m)}$, $\mathcal{H}_i$, $|i|>m$, $i\in\mathbb{J}$, также образуют базис из подпространств в l_2. Оператор A_0 можно представить в виде

$$A_0 = A_{0(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i|>m,\ i\in\mathbb{J}} A_{0i} \Big) = A_{0(m)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i|>m,\ i\in\mathbb{J}} (a(i)+2)I_i \Big),$$

где $m\in\mathbb{Z}_+$ и $A_{0(m)} = A_0|\mathcal{H}_{(m)}$.

Важно отметить, что системы подпространств $\{\mathcal{H}_i,\ i\in\mathbb{J}\}$ и $\{\mathcal{H}_{(m)},\ \mathcal{H}_i,\ |i|>m,\ i\in\mathbb{J}\}$ являются системами биинвариантных подпространств для оператора A_0.

Каждому ограниченному оператору $X\in\operatorname{End} l_2$ поставим в соответствие его (операторную) матрицу относительно некоторой дизъюнктной системы проекторов $\{Q_n,\ n\in\mathbb{J}\}$, $X\sim(Q_iXQ_j)$, $i,j\in\mathbb{J}$. Оператор X из $\operatorname{End} l_2$ отнесем к $\operatorname{End}_1 l_2$, если конечна величина

$$\sum_{p\in\mathbb{Z},\ i-j=p} \|Q_iXQ_j\|_\infty,$$

принимаемая за норму в $\operatorname{End}_1 l_2$. В рассматриваемом случае в качестве дизъюнктной системы проекторов будет выступать система спектральных проекторов $\{P_i,\ i\in\mathbb{J}\}$ невозмущенного оператора A_0. Отметим, что, очевидно, $B_1, B_2\in\operatorname{End}_1 l_2$ и имеют трехдиагональные матрицы относительно введенной системы проекторов. Поэтому в методе подобных операторов удобно в качестве пространства допустимых возмущений использовать $\operatorname{End}_1 l_2$.

Перейдем к построению операторов J, $\Gamma\in\operatorname{End}(\operatorname{End}_1 l_2)$. Положим

$$JX = J_0X = \sum_{i\in\mathbb{J}} P_iXP_i, \quad J_kX = P_{(k)}XP_{(k)} + \sum_{i\in\mathbb{J}\ |i|>k} P_iXP_i, \quad k\geqslant 0.$$

Отметим, что

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \qquad (J_kX)_{ij} = \begin{cases} X_{ij}, & i=j,\\ X_{ij}, & \max\{|i|,|j|\}\leqslant k,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом, оператор J оставляет в матрице оператора X главную диагональ, а остальные элементы обнуляет. Оператор $J_{(k)}$ оставляет главную диагональную и центральный блок размера $2k+1$, а остальные элементы обнуляет.

Оператор $\Gamma_k \in \mathrm{End}(\mathrm{End}_1 l_2)$ зададим матричными элементами

$$(\Gamma X)_{ij} = (\Gamma_0 X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \dfrac{X_{ij}}{a(i) - a(j)}, & i \neq j, \end{cases} \qquad (\Gamma_k X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 0, & \max\{|i|, |j|\} \leqslant k, \\ \dfrac{X_{ij}}{a(i) - a(j)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что знаменатель не обращается в нуль в случае группы условий (II) на потенциал, так как в этом случае в качестве матричных элементов выступают матрицы 2×2 и совпадающие члены четной последовательности $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ попадают в один матричный элемент, который обнуляет оператор $\Gamma_k \in \mathrm{End}(\mathrm{End}_1 l_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Теперь оператор Γ_k определен. Отметим также, что

$$\Gamma_k X = \Gamma_0 X - \Gamma_0(P_{(k)} X P_{(k)}) = \Gamma_0 X - P_{(k)}(\Gamma_0 X) P_{(k)}.$$

Из результатов [8, 9, 11, 39] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого $k \geqslant 0$ тройка $(\mathrm{End}_1 l_2, J_k, \Gamma_k)$ есть допустимая тройка для оператора A_0. При этом константа γ из определения 7 допускает оценку*

$$\gamma_k \leqslant \mathrm{const}\, d_k^{-1},$$

где

$$d_k = \mathrm{dist}\left(\sigma_{(k)}, \sigma(A) \setminus \sigma_{(k)}\right), \quad \sigma_{(k)} = \bigcup_{i \in \mathbb{J},\ |i| \leqslant k} \{a(i) + 2\}.$$

Теорема 3. *Существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что оператор A, подобен оператору $A_0 - J_k X_0 = A_0 - V_0$, где X_0, $V_0 \in \mathrm{End}_1 l_2$,*

$$(A_0 - B)(I + \Gamma_k X_0) = (I + \Gamma_k X_0)(A_0 - J_k X_0).$$

Оператор $A_0 - V_0$ есть ортогональная прямая сумма

$$A_0 - V_0 = A_0 - \Big(V_{0(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i| > k,\ i \in \mathbb{J}} V_{0i}\Big)\Big)$$

относительно ортогонального разложения пространства

$$l_2 = \mathcal{H}_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i| > k,\ i \in \mathbb{J}} \mathcal{H}_i\Big)$$

и размерность подпространства $\mathcal{H}_{(k)}$ есть $2k + 1$. Оператор X_0 есть решение нелинейного операторного уравнения (7). Более того, оператор A_1 есть U-ортогональная ($U = I + \Gamma_k X_0$) прямая сумма

$$A_1 = U\Big(A_0 - \Big(X_{0(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i| > k,\ i \in \mathbb{J}} X_{0i}\Big)\Big)\Big)U^{-1}$$

относительно U-ортогонального разложения

$$l_2 = U\mathcal{H}_{(k)} \oplus \Big(\bigoplus_{|i| > k,\ i \in \mathbb{J}} U\mathcal{H}_i\Big).$$

Из теоремы 3 немедленно вытекает, что система подпространств $\{U\mathcal{H}_{(k)}, U\mathcal{H}_i, |i| > k, i \in \mathbb{J}\}$ образует в l_2 базис Рисса из подпространств (спрямляемый базис; базис, эквивалентный ортогональному, из подпространств).

Следствие 1. *Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет группе условий (I). Тогда существует такое $k \in \mathbb{Z}_+$, что спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 представим в виде*

$$\sigma(A_1) = \sigma_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{|i| > k} \sigma_i\Big), \quad i \in \mathbb{J},$$

где множество $\sigma_{(k)}$ содержит не более чем $2k+1$ собственных значений, множества $\sigma_i = \{\mu_i\}$ одноточечны и

$$\mu_i = a(i) + 2 + \mathcal{O}(d_i^{-1}), \quad |i| > k, \tag{8}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + \mathcal{O}(d_i^{-2}). \tag{9}$$

Соответствующие собственные векторы $\widetilde{e}_i$ такие, что

$$\|\widetilde{e}_i - y_i\| = \mathcal{O}(d_i^{-2}), \quad |i| > k,$$

где

$$y_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ (a(i+1) - a(i))^{-1}, & j = i \pm 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Собственные векторы $\{\widetilde{e}_i\}$ образуют в l_2 базис Рисса со скобками.

Следствие 2. *Пусть последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет группе условий* (II). *Тогда спектр $\sigma(A_1)$ оператора A_1 также представим в виде*

$$\sigma(A_1) = \sigma_{(k)} \cup \Big(\bigcup_{i>k,\ i \in \mathbb{J}} \sigma_i \Big),$$

где множество $\sigma_{(k)}$, как и в следствии 1, содержит не более $2k+1$ собственных значений. Множества σ_i, $i > k$, двухточечны, $\sigma_i = \{\mu_i,\ \mu_{-i}\}$ и для $\mu_{\pm i}$ имеют место асимптотические оценки (8), (9).

Обозначим через $\widetilde{P}_n$, $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $\widetilde{P}_{(k)}$, спектральные проекторы, построенные по спектральным множествам $\sigma_{(k)}$, σ_i, $i \in \mathbb{J}$, $|i| > k$, из следствий 1 и 2.

Из леммы 1 и теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3. *Для спектральных проекторов $\widetilde{P}_n$, $|n| > k$, $n \in \mathbb{J}$, $\widetilde{P}_{(k)}$, имеют место формулы*

$$\widetilde{P}_n = (I + \Gamma_k X_*) P_n (I + \Gamma_k X_*)^{-1}, \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k,$$

$$\widetilde{P}_{(k)} = (I + \Gamma_k X_*) P_{(k)} (I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$

$$\widetilde{P}_n - P_n = (\Gamma_k X_* P_n - P_n \Gamma_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1},$$

$$\widetilde{P}_{(k)} - P_{(k)} = (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*)(I + \Gamma_k X_*)^{-1}.$$

При этом имеют место следующие оценки:

$$\|\widetilde{P}_n - P_n\| = \mathcal{O}(d_n^{-1}), \quad n \in \mathbb{J}, \quad |n| > k,$$

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} \widetilde{P}_n - \sum_{n=m}^{N} P_n \right\| = \mathcal{O}(d_n^{-1}), \quad m > k, \quad N > m, \quad N \in \mathbb{J},$$

$$\left\| \widetilde{P}_{(k)} + \sum_{|i|>k}^{l} \widetilde{P}_i - \sum_{|i|<l} P_i \right\| = \mathcal{O}(d_l^{-1}),$$

если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}$, и

$$\left\| \widetilde{P}_{(k)} + \sum_{i>k}^{l} \widetilde{P}_i - \sum_{i=0}^{l} P_i \right\| = \mathcal{O}(d_l^{-1}),$$

если $\mathbb{J} = \mathbb{Z}_+$.

Из теоремы 3 и леммы 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Подпространства* $\operatorname{Im} \widetilde{P}_{(k)}$, $\operatorname{Ker} \widetilde{P}_{(k)}$, $\operatorname{Im} \widetilde{P}_i$, $\operatorname{Ker} \widetilde{P}_i$, *$|i| > k$, $i \in \mathbb{J}$, образуют счетный набор биинвариантных подпространств Рисса для оператора A_1.*

6. Применение метода подобных операторов к оператору A_2. Перейдем к оператору A_2. Отметим еще раз, что в отличие от обычно применяемой схемы метода подобных операторов, когда невозмущенный оператор остается тем же, а меняется оператор-возмущение, в рассматриваемом случае, напротив, оператор-возмущение B одинаков для A_1 и A_2, а невозмущенные операторы различны. Поэтому в качестве пространства допустимых возмущений мы также будем использовать пространство $\mathrm{End}_1\, l_2$. Напомним, что невозмущенным оператором в рассматриваемом случае считаем оператор $\widetilde{A}_0 : D(\widetilde{A}_0) = D(A_2) \subset l_2 \to l_2$, где $(\widetilde{A}_0 x)(n) = a(-n)x(n) + 2x(n)$. Введем в рассмотрение следующую систему ортопроекторов в l_2:

$$P_0 x = (x, e_0)e_0, \quad P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где e_n, $n \in \mathbb{Z}$, — векторы стандартного базиса в l_2. Очевидно, что пространство l_2 представимо в виде прямой суммы

$$l_2 = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_n, \tag{10}$$

где $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, при этом $\dim \mathcal{H}_0 = 1$, $\dim \mathcal{H}_n = 2$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, как и в случае выполнения группы условий (II) для оператора A_1, мы будем рассматривать пространство l_2 как прямую сумму взаимно ортогональных двумерных подпространств. Но в случае оператора A_1 такое рассмотрение связано с четностью потенциала и возможностью корректного определения оператора $\Gamma \in \mathrm{End}(\mathrm{End}_1\, l_2)$.

В случае оператора A_2 отличием является то, что векторы стандартного базиса пространства l_2 не являются собственными векторами невозмущенного оператора $\widetilde{A}_0$, а введенные выше проекторы P_i, $i \in \mathbb{Z}_+$ его спектральными проекторами. Использование именно такого представления пространства l_2 связано с нахождением растущей последовательности на $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ побочной диагонали. Оператор $\widetilde{A}_0$ является ортогональной прямой суммой ограниченных операторов $\widetilde{A}_{0n}$ относительно разложения (10). Оператор $\widetilde{A}_{00}$ имеет ранг 1, а операторы $\widetilde{A}_{0n}$ — ранг 2; в $\mathcal{H}_n$ задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & a(-n) \\ a(n) & 2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом

$$\sigma(\widetilde{A}_0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma(\widetilde{A}_{0n}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где

$$\sigma(\widetilde{A}_{0n}) = \{\lambda_n^{\pm}\} = \{2 \pm \sqrt{a(n)a(-n)}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \sigma(\widetilde{A}_{00}) = \{\lambda_0\} = \{2 + a(0)\}.$$

Очевидно, что вектор $\widetilde{e}_0$, отвечающий собственному значению λ_0, совпадает с вектором стандартного базиса e_0. Ортогональные собственные векторы $e_{\pm n}$, $n \in \mathbb{N}$, отвечающие собственному значению $\lambda_{\pm n}$, $n \in \mathbb{N}$, входят в $\operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{N}$, и имеют в нем координаты $e_{n,0} = \{1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\}$, $e_{-n,0} = \{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$. При этом преобразование, приводящее матрицу оператора $\widetilde{A}_{0n}$, $n \in \mathbb{N}$, к диагональному виду унитарно. Таким образом, можно считать, что самосопряженный оператор $\widetilde{A}_0$ имеет диагональную матрицу, его собственные векторы известны, соответствующие спектральные проекторы $\widetilde{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, также определены, причем $\operatorname{Im} \widetilde{P}_n = \operatorname{Im} P_n$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом относительно нового базиса (или новой системы ортопроекторов) матрица возмущения $\widetilde{B}$ также остается блочной трехдиагональной матрицей. Таким образом, оператор $\widetilde{A}_0 - \widetilde{B}$ удовлетворяет всем условиям применения стандартной схемы метода подобных операторов и все выкладки предыдущего раздела относительно построения допустимой тройки и приведения оператора к блочно-диагональному виду проходят без изменений.

Единственным отличием для построения допустимой тройки является только то, что в формулах раздела 5, определяющих операторы J_k, $\Gamma_k \in \mathrm{End}(\mathrm{End}_1\, l_2)$ вместо стандартной системы проекторов $\{P_n\}$, $n \in \mathbb{J}$, используются спектральные проекторы $\{\widetilde{P}_n\}$, построенные по спектральным множествам $\sigma(\widetilde{A}_{0n})$ оператора $\widetilde{A}_0$. Аналогично теоремам 2 и 3 доказываются следующие теоремы.

Теорема 4. *Тройка* $(\operatorname{End}_1 l_2, J_k, \Gamma_k)$ *для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *является допустимой тройкой для невозмущенного оператора* $\widetilde{A}_0$.

Теорема 5. *Существует такое* $k \in \mathbb{Z}_+$, *что оператор* $\widetilde{A}_0 - \widetilde{B}$ *подобен оператору* $\widetilde{A}_0 - V_0$, $V_0 \in \operatorname{End}_1 l_2$, *который является ортогональной прямой суммой*

$$\widetilde{A}_0 - V_0 = \widetilde{A}_0 - \biggl(V_{0(k)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{i>k} V_{0i}\Bigr)\biggr)$$

относительно разложения пространства l_2 *вида* (10). *Оператор* $\widetilde{A}_0 - \widetilde{B}$ *есть* U*-ортогональная прямая сумма*

$$A_0 - \widetilde{B} = U\Biggl(A_0 - \biggl(V_{0(k)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{i>k} V_{0i}\Bigr)\biggr)\Biggr)U^{-1}$$

относительно U*-ортогонального разложения пространства*

$$l_2 = U\mathcal{H}_{(k)} \oplus \Bigl(\bigoplus_{i>k} U\mathcal{H}_i\Bigr).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае константа γ_k из определения 7 допускает оценку

$$\gamma = \gamma_k \leqslant (|a(k+1) - a(k)|)^{-1},$$

и ее можно сделать малой в силу выполнения группы условий (III).

Следствие 5. *Система подпространств* $U\mathcal{H}_{(k)}$, $U\mathcal{H}_i$, $i > k$, *образует в* l_2 *базис Рисса из подпространств* (*базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, спрямляемый базис*).

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *собственные значения* $\widetilde{\lambda}_i^{\pm}$, $i > k$, *оператора* A_2 *допускают оценку*

$$\bigl|\widetilde{\lambda}_i^{\pm} - \lambda_i^{\pm}\bigr| \leqslant C\gamma_i, \quad i > k.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции// в кн.: Обобщенные метод собственных колебаний в теории дифракции (Войтович Н. Н., Каценелебаум Б. З., Сивов А. Н., ред.). — М: Наука, 1977.
2. *Баскаков А. Г., Гаркавенко Г. В., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в проблеме биинвариантных подпространств// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *204*. — С. 3–15.
3. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 3. — С. 3–28.
4. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 1. — С. 3–47.
5. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 10–29.
6. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — *454*, № 1. — С. 15–17.
7. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
8. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — *16*, № 4. — С. 395–402.
9. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств разностных операторов с растущим потенциалом// Сиб. электрон. мат. изв. — 2017. — *14*. — С. 673–689.
10. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* О спектральных свойствах одной трехдиагональной бесконечной матрицы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 31–42.

11. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б., Зголич А. Р.* Метод подобных операторов и спектральные свойства разностного оператора с четным потенциалом// Прикл. мат. физ. — 2016. — *44*, № 20. — С. 42–49.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3// — 1974.
14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1967.
15. *Кацнельсон В. Э.* О сходимости и суммируемости рядов по корневым векторам некоторых классов несамосопряженных операторов. — Харьков: Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1967.
16. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функц. анал. прилож. — 1967. — *1*, № 2. — С. 39–51.
17. *Крицков Л. В., Сарсенби А. М.* Базисность Рисса системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 35–48.
18. *Маркус А. С.* О базисе из корневых векторов диссипативного оператора// Докл. АН СССР. — 1960. — *132*, № 3. — С. 524–527.
19. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
20. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* О сходимости разложений по собственным векторам оператора, близкого к самосопряженному// Мат. исслед. — 1981. — *61*. — С. 104–129.
21. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. о-ва. — 45. — С. 133–181.
22. *Мотовилов А. К., Шкаликов А. А.* Сохранение свойства безусловной базисности при несамосопряженных возмущениях самосопряженных операторов// Функц. анал. прилож. — 2019. — *53*, № 3. — С. 45–60.
23. *Мусилимов Б., Отелбаев М.* Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующего разностному уравнению Штурма—Лиувилля// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1981. — *21*, № 6. — С. 1430–1434.
24. *Отелбаев М.* О коэрцитивных оценках решений разностных уравнений// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1988. — *181*. — С. 241–249.
25. *Поляков Д. М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями// Алгебра и анализ. — 2015. — *27*, № 5. — С. 117–152.
26. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
27. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов// Диффер. уравн. — 1977. — *13*, № 7. — С. 1264–1271.
28. *Садовничий В. А., Дубровский В. В.* О некоторых свойствах операторов с дискретным спектром// Диффер. уравн. — 1979. — *15*, № 7. — С. 1206–1211.
29. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для операторных уравнений с оператором Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
30. *Смаилов Е. С.* Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения// Докл. АН СССР. — 1983. — *270*, № 1. — С. 52–55.
31. *Фаге М. К.* Спрямление базисов в гильбертовом пространстве// Докл. АН СССР. — 1950. — *74*, № 6. — С. 1053–1056.
32. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5 (431). — С. 113–174.
33. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu.* Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evol. Equ. — 2017. — *17*. — P. 669–684.
34. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Linear differential operator with an involution as a generator of an operator group// Operators and Matrices. — 2018. — *12*, № 3. — P. 723–756.
35. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *477*, № 2. — P. 930–960.
36. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 2. — P. 30–39.
37. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* General Dirac operators as generators of operator groups/ `arXiv: 1806.10831 [math.SP]`.

38. *Boutet de Monvel A., Zielinski L.* Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Cent. Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 3. — P. 445–463.
39. *Garkavenko G. V., Uskova N. B., Zgolich A. R.* Spectral analysis of a difference operator with a growing potential// J. Phys. Conf. Ser. — 2018. — *973*, № 1. — 012053.
40. *Djakov P., Mityagin B.* Simple and double eigenvalues of the Hill operator with a two-term potential// J. Approx. Th. — 2005. — *135*, № 1. — P. 70–104.
41. *Friedrichs K. O.* Lectures on Advanced Ordinary Differential Equations. — New York: Gordon and Breach, 1965.
42. *Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbation for a spectral problem with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — *2012*. — 590781.
43. *Malejki M.* Eigenvalues for some complex infinite matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — *26*, № 5. — P. 1–9.
44. *Polyakov D. M.* Sharp eigenvalue asymptotics of fourth-order differential operators// Asympt. Anal.. — *130*, № 5–6. — P. 1–27.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Баскаков Анатолий Григорьевич
Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Гаркавенко Галина Валерьевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: g.garkavenko@mail.ru

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: nat-uskova@mail.ru