ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 83–89
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-83-89

УДК 517.96; 517.984

ОБОБЩЕННАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ВИДА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2023 г. **А. П. ХРОМОВ**

Аннотация. Приведены результаты по обобщенной смешанной задаче (однородной и неоднородной) для волнового уравнения, основанные на операции интегрирования расходящегося ряда формального решения по методу разделения переменных. Найдено решение обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения в предположении, что функция, характеризующая неоднородность, локально суммируема. В качестве приложения рассмотрена смешанная задача с ненулевым потенциалом.

***Ключевые слова*:** расходящийся ряд, волновое уравнение, смешанная задача.

GENERALIZED MIXED PROBLEM FOR THE SIMPLEST WAVE EQUATION AND ITS APPLICATIONS

© 2023 **A. P. KHROMOV**

Abstract. In this paper, we present results for generalized homogeneous and inhomogeneous mixed problems for the wave equation based on the operation of integrating a divergent series of a formal solution using the method of separation of variables. A solution to the generalized mixed problem for an inhomogeneous equation is found under the assumption that the function characterizing the inhomogeneity is locally summable. As an application, a mixed problem with nonzero potential is considered.

***Keywords and phrases*:** divergent series, wave equation, mixed problem.

***AMS Subject Classification*:** 35Mxx

Введение Обобщенная смешанная задача для волнового уравнения является одним из наиболее сильных обобщений смешанной задачи. Она впервые появилась в [6]. Внешний вид ее такой же, как и у исходной смешанной задачи и характеризуется тем, что в формальном решении ее по методу Фурье потенциал и начальные данные считаются произвольными суммируемыми функциями, а возмущение в случае неоднородной задачи — произвольной локально суммируемой функцией. Ряд формального решения может быть и расходящимся. Расходящийся ряд рассматривается в понимании Л. Эйлера (см. [7, с. 100–101]), основоположника теории суммирования расходящихся рядов. Найти решение обобщенной смешанной задачи — значит найти сумму ряда формального решения.

В настоящей статье основное внимание уделяется следующей обобщенной смешанной задаче простейшего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0 \tag{3}$$

в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Ее удается решить, привлекая аксиомы о расходящихся рядах из [3, с. 19], используя следующее правило интегрирования расходящегося ряда:

$$\int \sum = \sum \int, \tag{4}$$

где $\int$ — определенный интеграл, и опираясь на известные результаты, относящиеся к почленному интегрированию тригонометрического ряда Фурье по синусам.

Затем показано, как полученный результат помогает дать решение и обобщенной смешанной задачи для неоднородного уравнения. Наконец, в качестве приложения к вышеприведенным результатам рассмотрена смешанная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом. Показано, что эта задача приводится к интегральному уравнению, решение которого получается по методу последовательных подстановок.

Кратко содержание статьи представлено в [5].

1. Простейшая однородная обобщенная смешанная задача. Рассмотрим обобщенную смешанную задачу (1)–(3) в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье имеет вид

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x \cos n\pi t, \tag{5}$$

где

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Имеем

$$u(x,t) = \Sigma_+ + \Sigma_-, \quad \text{где} \quad \Sigma_\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi(x \pm t). \tag{6}$$

Отсюда следует, что для вычисления суммы ряда (6) требуется найти сумму тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$, т.е. ряда

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \sin n\pi x. \tag{7}$$

Пусть сумма ряда (7) при $x \in [0,1]$ есть какая-либо функция $g(x) \in L[0,1]$ (в запасе имеются только функции из $L[0,1]$). Тогда в соответствии с правилом (4) имеем

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta. \tag{8}$$

По теореме 3 из [2, с. 320] ряд в (8) сходится при любом $x \in [0,1]$, а его сумма равна

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(\xi), \sin n\pi\xi) \int_0^x \sin n\pi\eta\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом, получили, что

$$\int_0^x g(\eta)\,d\eta = \int_0^x \varphi(\eta)\,d\eta.$$

Отсюда $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду, т.е. найдена сумма $g(x)$ расходящегося ряда (7). Далее, $\sin n\pi x$ нечетна и 2-периодична. Тогда получаем, что сумма ряда (7) при $x \in (-\infty, \infty)$ равна $\tilde{\varphi}(x)$, где $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с отрезка $[0, 1]$ на всю ось. В силу (6) получаем, что сумма $u(x, t)$ ряда (5) есть

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)\big]. \tag{9}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 1. *Решением обобщенной смешанной задачи* (1)–(3) *является функция* $u(x,t)$ *класса* Q*, определенная по формуле* (9).

Функция $u(x,t)$ класса Q означает, что $u(x,t) \in L[Q_T]$ при любом $T > 0$, где Q_T — множество $[0,1] \times [0,T]$.

2. Приложение. Простейшая неоднородная смешанная задача. Рассмотрим следующую простейшую неоднородную смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty), \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$u(x,0) = u'_t(x,0) = 0, \tag{12}$$

где $f(x,t)$ есть функция класса Q. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau)\, d\tau. \tag{13}$$

Так как

$$\frac{2}{n\pi} \sin n\pi x \sin n\pi(t-\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta,$$

то (13) переходит в

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi)\, d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sin n\pi\eta\, d\eta. \tag{14}$$

Из (14) в силу правила (4) получим

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (f(\xi,\tau), \sin n\pi\xi) \sin n\pi\eta\, d\eta = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta, \tag{15}$$

поскольку ряд в (15), как это следует из п. 1, имеет сумму $\frac{1}{2}\tilde{f}(\eta,\tau)$, где $\tilde{f}(\eta,\tau)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение по η на всю ось функции $f(\eta,\tau)$ с отрезка $[0,1]$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Решение* $u(x,t)$ *обобщенной смешанной задачи* (10)–(12) *есть функция класса* Q*, определяемая по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\, d\eta. \tag{16}$$

Отметим, что без привлечения операции интегрирования расходящегося ряда формула (16) приводится в [1].

Тот факт, что $u(x,t)$ есть функция класса Q, дается следующей леммой.

Лемма 1. *Имеет место оценка*

$$\|u(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Доказательство. Из (16) имеем

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta.$$

Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого $T \leqslant m$. Тогда в силу нечетности $\tilde f(\eta,\tau)$ по η имеем

$$\int\limits_{-T}^{T+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant \int\limits_{-m}^{m+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_{-m}^{0} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta =$$

$$= \int\limits_{-m}^{0} |\tilde f(-\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta = \int\limits_{0}^{m} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta + \int\limits_{0}^{m+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{0}^{m+1} |\tilde f(\eta,\tau)|\,d\eta = 2\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{k}^{k+1} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta.$$

Пусть k четно, т.е. $k=2v$. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int\limits_{k}^{k+1} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta = \int\limits_{2v}^{2v+1} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \bigl|\tilde f(2v+\xi,\tau)\bigr|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \bigl|f(\xi,\tau)\bigr|\,d\xi.$$

Если k нечетно, т.е. $k=2v+1$, то

$$\int\limits_{k}^{k+1} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta = \int\limits_{2v+1}^{2v+2} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \bigl|\tilde f(2v+1+\xi,\tau)\bigr|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \bigl|\tilde f(1+\xi,\tau)\bigr|\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \bigl|\tilde f(-1-\xi,\tau)\bigr|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \bigl|f(1-\xi,\tau)\bigr|\,d\xi = \int\limits_{0}^{1} \bigl|f(\xi,\tau)\bigr|\,d\xi.$$

Таким образом, при всех k (четных и нечетных) получаем один и тот же результат:

$$\int\limits_{k}^{k+1} \bigl|\tilde f(\eta,\tau)\bigr|\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} \bigl|f(\xi,\tau)\bigr|\,d\xi.$$

Отсюда

$$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau 2(m+1)\int\limits_0^1 \bigl|f(\eta,\tau)\bigr|d\eta = (m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}.$$

Значит,

$$\int\limits_{Q_T} |u(x,t)|dx\,dt \leqslant T(m+1)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|f(x,t)\|_{L[Q_T]}. \qquad \square$$

3. Приложение. Смешанная задача с ненулевым потенциалом. Сначала рассмотрим следующую обобщенную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t)\in[0,1]\times[0,\infty), \tag{17}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{18}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u'_t(x,0)=0. \tag{19}$$

Здесь $f(x,t)$ — функция класса Q и $\varphi(x) \in L[0,1]$. Формальное решение ее по методу Фурье есть

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t),$$

где функция $u_0(x,t)$ определена формулой (5), а $u_1(x,t)$ — ряд (13). Поэтому, исходя из пп. 1, 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Обобщенная смешанная задача* (17)–(19) *имеет решение класса Q, определяемое по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{20}$$

Теперь приступаем к смешанной задаче с ненулевым потенциалом:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t), \quad (x,t) \in [0,1]\times[0,\infty), \tag{21}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{22}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = 0, \tag{23}$$

где $\varphi(x) \in L[0,1]$, $q(x) \in L[0,1]$, $q(x)u(x,t)$ — функция класса Q.

В этой задаче будем рассматривать $-q(x)u(x,t)$ как возмущение в задаче (17)–(19). Тогда по теореме 3 перейдем от задачи (21)–(23) к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t) + \tilde{\varphi}(x-t)] - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{24}$$

где $\widetilde{q(\eta)u}(\eta,\tau)$ — нечетное, 2-периодическое продолжение $q(\eta)u(\eta,\tau)$ на всю ось.

Приступаем к решению уравнения (24). Тот факт, что $\tilde{\varphi}(x)$ есть нечетное, 2-периодическое продолжение $\varphi(x)$ с $[0,1]$ на всю ось, трактуется следующим образом: сначала нечетно находится $\tilde{\varphi}(x)$ при $x \in [-1,0]$, т.е. $\tilde{\varphi}(x) = -\varphi(-x)$ при $x \leqslant 0$; затем полученная $\tilde{\varphi}(x)$ на $[-1,1]$ продолжается 2-периодически на всю ось. Отсюда получаются следующие утверждения.

Лемма 2. *Функция $\tilde{\varphi}(x)$ определяется однозначно по $\varphi(x)$.*

Лемма 3. *Операция $\tilde{\varphi}(x)$ линейна, т.е.*

$$\alpha\varphi_1\widetilde{(x) + \beta}\varphi_2(x) = \alpha\tilde{\varphi}_1(x) + \beta\tilde{\varphi}_2(x).$$

Доказательство. Обе операции в формулировке леммы нечетны и 2-периодичны. Но на $[0,1]$ они обе равны $\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)$. Поэтому из леммы 2 следует лемма 3. $\square$

Введем оператор

$$Bf = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{25}$$

где $f(x,t) \in C[Q_T]$.

Лемма 4. *Оператор B является линейным и ограниченным в $C[Q_T]$, причем*

$$\|Bf\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1 \cdot \|f(x,t)\|_{C[Q_T]},$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L[0,1]$.

Доказательство. Линейность B следует из леммы 3. Докажем ограниченность. Как и в лемме 1, имеем

$$|Bf| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-T}^{T+1} \big|\widetilde{q(\eta)f}(\eta,\tau)\big|\,d\eta \leqslant (m+1)\|q(x)f(x,t)\|_{L[Q_T]} \leqslant$$

$$\leqslant (m+1)T\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant T(T+2)\|q\|_1\|f(x,t)\|_{C[Q_T]}. \quad \square$$

Образуем ряд

$$A_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x,t),$$

где $a_n(x,t)=Ba_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$ и $a_0(x,t)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}(x+t)+\tilde{\varphi}(x-t)]$.

Лемма 5 (см. [6, с. 220–221]). *Если m — наименьшее натуральное число, для которого $T\leqslant m$, то*

$$\|a_n(x,t)\|_{C[Q_T]}\leqslant M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!},\quad n\geqslant 1, \tag{26}$$

где $M_1=\|a_1(x,t)\|_{C[Q_T]}$, $M_2=(2m+1)\|q\|_1$. Кроме того, $M_1\leqslant C_T\|\varphi\|_1$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Приведем необходимое для дальнейшего доказательство этой леммы.

Доказательство. Положим $f_n(x,t)=-q(x)a_n(x,t)$. Очевидно, $f_n(x,t)\in L[Q_T]$, $a_n(x,t)\in C[Q_T]$ при $n\geqslant 1$. При $n=1$ оценка (26) справедлива. Предположим, что она выполняется и при некотором n, и докажем ее справедливость при $n+1$. Имеем

$$|a_{n+1}(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|\tilde{f}_n(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}\left|\tilde{f}_n(\eta,\tau)\right|d\eta\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)||a_n(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^1|q(\eta)|M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1}\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\,d\eta=M_1\left(\frac{M_2}{2}\right)^{n}\frac{t^n}{n!}.$$

Тем самым оценка (26) установлена. Оценим M_1. Имеем

$$|a_1(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}|\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant\frac{1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{-m}^{m+1}|\tilde{f}_0(\eta,\tau)|\,d\eta=$$

$$=\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^1|f_0(\eta,\tau)|\,d\eta\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{-T}^{T+1}|\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2m+1}{2}\int\limits_0^1|q(\eta)|\,d\eta\int\limits_{-m}^{m+1}|\tilde{\varphi}(\tau)|\,d\tau=\frac{(2m+1)^2}{2}\|q\|_1\|\varphi\|_1.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для M_1. □

Таким образом, ряд $A_1(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T.

Теорема 4. *Уравнение* (24) *имеет единственное решение $u(x,t)=A(x,t)$, где $A(x,t)=a_0(x,t)+A_1(x,t)$, получаемое по методу последовательных подстановок.*

Доказательство. Положим $v(x,t)=u(x,t)-a_0(x,t)$. Тогда из (24) получаем для $v(x,t)$ интегральное уравнение

$$v(x,t)=a_1(x,t)+Bv. \tag{27}$$

Так как $a_1(x,t)\in C[Q_T]$, то уравнение (27) рассматриваем в $C[Q_T]$. По методу последовательных подстановок из (27) получаем ряд $A_1(x,t)$. Поскольку B — линейный и ограниченный оператор в $C[Q_T]$ и $BA_1(x,t)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n(x,t)$, то $A_1(x,t)$ есть решение (27). Докажем, что уравнение (27) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x,t)$ есть еще другое решение $w(x,t)$ этого уравнения. Тогда $z(x,t) = A_1(x,t) - w(x,t)$ — решение уравнения $z(x,t) = Bz(x,t)$, а, значит, и $z(x,t) = B^n z(x,t)$ при любом натуральном n. Заметим, что оценка (26) в лемме 5 остается верной, если в качестве $a_1(x,t)$ взять любую функцию из $C[Q_T]$. Возьмем в качестве такой функции функцию $z(x,t)$. Тогда из оценки (26) получаем следующую оценку:

$$\|z(x,t)\|_{C[Q_T]} = \|B^{n-1}z(x,t)\|_{C[Q_T]} \leqslant \|z(x,t)\|_{C[Q_T]} \left(\frac{M_2}{2}\right)^{n-1} \|q\|_1 \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем $z(x,t) = 0$, и единственным решением уравнения (27) является ряд $A_1(x,t)$, а уравнение (24) — ряд $A(x,t)$. □

Для сравнения приведем следующие результаты из [6] и [4].

Теорема 5 (см. [4, теорема 6]). *Если функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x,t)$ представляет собой классическое решение задачи* (21)–(23) *при условии, что $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2$ класса Q (уравнение удовлетворяется почти всюду).*

Теорема 6 (см. [6, теорема 5]). *Если $\varphi(x) \in L[0,1]$, $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, $\|\varphi_h - \varphi\|_1 \to 0$ при $h \to 0$, то соответствующее $\varphi_h(x)$ классическое решение $u_h(x,t)$ задачи* (21)–(23) *сходится при $h \to 0$ по норме $L[Q_T]$ к $A(x,t)$.*

Утверждение теоремы следует из линейности $A(x,t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 5.

Таким образом, классическое решение задачи (21)–(23) и решение ее, приводимое в статье, выражаются одной и той же формулой: $u(x,t) = A(x,t)$, и $A(x,t)$ в случае $\varphi(x) \in L[0,1]$ играет роль обобщенного решения, понимаемого как предел классических.

Отметим еще, что ряд $A(x,t)$ в [6] получается иным приемом с более активным использованием обобщенной смешанной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Сходимость формального решения по методу Фурье в смешанной задаче для простейшего неоднородного волнового уравнения// Мат. Мех. — 2017. — *19*. — С. 41–44.
2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной пееменной. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1957.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.
4. *Хромов А. П.* Необходимые и достаточные условия существования классического решения смешанной задачи для однородного волнового уравнения в случае суммируемого потенциала// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 5. — С. 717–731.
5. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. конф. «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов, 2022. — С. 319–324.
6. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 215–238.
7. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хромов Август Петрович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

E-mail: khromovap@info.sgu.ru