



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 90–119
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-90-119

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ,
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ.
III. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе предьявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n . Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 227. — С. 100–128.

Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 228. — С. 92–118.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC,
POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS.
III. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES
OF FOUR-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n -dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n . We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **227** (2023), pp. 100–128.

The second part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **228** (2023), pp. 92–118.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-П05-07).

СОДЕРЖАНИЕ

3. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия	91
3.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию	92
3.2. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле	100
3.3. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией	103
Список литературы	116

3. ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение. В данном разделе представлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении пятимерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее пятимерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по четырехмерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего пятимерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим четырехмерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с четырьмя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [53, 55]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем представлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким четырехмерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [16]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, четырехмерного пространства Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассматривается усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией. Указываются достаточные условия интегрируемости.

3.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к четырехмерному многообразию.

3.1.1. *Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности.* Рассмотрим гладкое четырехмерное риманово многообразие $M^4\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha), \quad \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.1.1)$$

где $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \dots, z_4$, в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических, например, с тринадцатью ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении четырехмерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0; \end{cases} \quad (3.1.2)$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (3.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, примут вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \\ \quad - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - f_2(\alpha) g_1(\alpha) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 = -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \\ \quad - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_3 = -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \\ \quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \\ \dot{z}_4 = -f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \\ \quad - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

и уравнения геодезических (3.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (3.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (3.1.1), (3.1.3) на многообразии $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ с новой частью координат $z_1, \dots, z_4$ на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (3.1.2) (к системе (3.1.1), (3.1.3)).

- (а) Системы на касательном расслоении к четырехмерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства. Такая метрика естественна для изучения

задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного пятимерного твердого тела.

- (b) Системы на касательных расслоениях более общих четырехмерных поверхностей вращения.
- (c) Системы на касательном расслоении четырехмерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Отметим, что в [72, 73] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении четырехмерной сферы с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского.

3.1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении четырехмерного гладкого многообразия, то количество разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$ при $n = 4$, т.е. 40 коэффициентов. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических очень сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ из (3.1.1)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся тринадцатью (т.е. $n(n-1)+1$ при $n = 4$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (3.1.2). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число равно 7 (т.е. $n(n-1)/2+1$ при $n = 4$). Таким образом, имеем 20 функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Каково же количество $B(4)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(4) = 20$ функций ($A(n) = 3n(n-1)/2 + 2$ при $n = 4$)? Данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 20, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(4)$, тем больше разность $A(4) - B(4)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(4) = 16$ условий на имеющиеся $A(4) = 20$ функций. Число $B(4)$ складывается из трех слагаемых: $B(4) = B_1(4) + B_2(4) + B_3(4)$. Число $B_1(4)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, а именно,

$$f_1(\alpha) \equiv f_2(\alpha) \equiv f_3(\alpha) =: f(\alpha), \quad g_1(\beta_1) \equiv g_2(\beta_1) =: g(\beta_1), \quad (3.1.4)$$

т.е. $B_1(4) = 3$ (в общем случае $B_1(n) = (n-1)(n-2)/2$). Число $B_2(4)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_1(\alpha), \\ \Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) &\equiv \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_2(\beta_1), \quad \Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_3(\beta_2), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

т.е. $B_2(4) = 6$ (в общем случае $B_2(n) = n(n-1)/2$). Число $B_3(4)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6a)$$

$$f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6b)$$

$$f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6c)$$

$$f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6d)$$

$$f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6e)$$

$$f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (3.1.6f)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \quad (3.1.6g)$$

т.е. $B_3(4) = 7$ (в общем случае $B_3(n) = n(n-1)/2 + 1$). Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n) &= B_1(n) + B_2(n) + B_3(n) = \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 = (n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{2} + 1; \end{aligned}$$

при этом

$$A(n) - B(n) = \frac{3n(n-1)}{2} + 2 - (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 = n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(4) - B(4) = 4$.

Замечание 3.1. Пусть выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), при этом реализуется система дифференциальных равенств (3.1.6). Тогда справедливы следующие семь $(n(n-1)/2 + 1)$ при $n = 4$ тождеств:

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \quad \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2), \quad (3.1.7a)$$

$$\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{22}^1(\beta_1), \quad \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \quad (3.1.7b)$$

$$\Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{33}^2(\beta_2), \quad (3.1.7c)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \quad (3.1.7d)$$

а также три (т.е. $(n-1)(n-2)/2$ при $n = 4$) тождества

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \quad (3.1.8a)$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2). \quad (3.1.8b)$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых трех равенств (3.1.6a)–(3.1.6c) переписывается в виде

$$\begin{aligned} f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Из (3.1.9) следуют тождества (3.1.7a) и тождества (3.1.8a).

Далее, в условиях замечания вторая группа равенств (3.1.6d)–(3.1.6e) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0, \\ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Из (3.1.10) следуют тождества (3.1.7b) и тождества (3.1.8b). Наконец, в условиях замечания равенство (3.1.6f) переписывается в виде

$$\left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (3.1.11)$$

Из (3.1.11) следует тождество (3.1.7с). Из (3.1.6g) также следует последнее тождество (3.1.7d). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 3.1.

Замечание 3.2. Пусть выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), при этом реализуются 10 тождеств (3.1.7) и (3.1.8). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (3.1.6), которая примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) \equiv \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1)g^2(\beta_1) \equiv \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) =: \Gamma_4(\alpha), \\ \Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2)h^2(\beta_2), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^2(\beta_2) \equiv 0. \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

Таким образом, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в упомянутом смысле эквивалентны.

3.1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, для полного интегрирования системы (3.1.1), (3.1.3) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (3.1.2), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.1.13)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^4 g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (3.1.14)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha)$, $g_1(\beta_1)$, $g_2(\beta_1)$, $h(\beta_2)$ из (3.1.1) и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (3.1.2).

Теорема 3.1. Если выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), то система (3.1.1), (3.1.3) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}; \quad (3.1.15)$$

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.1.16)$$

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (3.1.17)$$

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const}, \quad (3.1.18)$$

$$\Phi_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \quad (3.1.19)$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad (3.1.20)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}, \quad \Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}. \quad (3.1.21)$$

Более того, после замен независимой и фазовых переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad (3.1.22)$$

$$w_4 = z_4, \quad w_3^* = \ln |w_3|, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad (3.1.23)$$

$$w_s^* = \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, 2, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}$$

фазовый поток системы (3.1.1), (3.1.3) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3. \quad (3.1.24)$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 3.1, а именно, сделаем замены (3.1.22) независимой переменной и (3.1.23) фазовых переменных. Тогда система (3.1.1), (3.1.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4, \\ \dot{w}_4 = -\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) e^{2w_3^*}, \\ \dot{w}_3^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_4; \end{cases} \quad (3.1.25)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2^* = \pm e^{w_3^*} \frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{W_2(w_2^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1), \end{cases} \quad (3.1.26)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.1.27)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.1.28)$$

где

$$w_s = W_s(w_s^*), \quad s = 1, 2,$$

в силу замены (3.1.23); при этом в составной системе (3.1.25)–(3.1.28) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция правой части составной системы (3.1.25)–(3.1.28) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании пяти первых интегралов. Дифференцирование функции (3.1.15) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) дает

$$\begin{aligned}
 & -2f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^3 - \\
 & \quad - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_3^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\
 & \quad - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\
 & \quad - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\
 & \quad - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
 & \quad - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\
 & \quad - 2 \left[f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} \equiv 0,
 \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (3.1.6). Но, как указано выше, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в известном смысле эквивалентны.

Далее, дифференцирование функции (3.1.16) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_4 \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.16).

Дифференцирование функции (3.1.17) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned}
 & -f_4(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_4 \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Psi_1(\beta_1) - \\
 & \quad - \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} z_3 f(\alpha) \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha).
 \end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.17).

Дифференцирование функции (3.1.18) в силу системы (3.1.1), (3.1.3) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned}
 & -f_4(\alpha) z_1 z_4 \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) \left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\
 & \quad + z_1 z_3 f(\alpha) \Phi_0(\alpha) \Psi_2(\beta_2) \left[- \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right] + \\
 & \quad + z_1 z_2 f(\alpha) g(\beta_1) \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \left[- \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2) + \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} \right].
 \end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1)$ и $\Psi_2(\beta_2)$ удовлетворяют, соответственно, обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha), \\ \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} &= \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) \\ \frac{d\Psi_2(\beta_2)}{d\beta_2} &= \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] \Psi_2(\beta_2),\end{aligned}$$

что и доказывает наличие первого интеграла (3.1.18).

Далее, рассмотрим два уровня C_3 и C_4 первых интегралов (3.1.17) и (3.1.18) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_4}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(\beta_2) - C_4^2}}. \quad (3.1.29)$$

Будем искать угол β_3 из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = \frac{z_1}{z_2} h(\beta_2).$$

Используя в этом уравнении равенство (3.1.29), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (3.1.19). Теорема доказана. $\square$

Заметим также, что систему равенств (3.1.6) (или (3.1.12)) можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (3.1.15) (или см. ниже (3.2.2)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [7, 9]). Поиск как первого интеграла (3.1.15), так и интегралов (3.1.16)–(3.1.19), опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 3.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пятимерного пространства (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0 \end{cases} \quad (3.1.30)$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad (3.1.31a)$$

$$\dot{z}_4 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (3.1.31b)$$

$$\dot{z}_3 = z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.31c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_2 z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} - \\ - z_1^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{aligned} \quad (3.1.31d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_3 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} + \\ + z_1 z_2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{aligned} \quad (3.1.31e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 \frac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.31f)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_2 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.31g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 \frac{1}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (3.1.31h)$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.31) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3.2. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, но когда метрика на четырехмерной сфере $\mathbb{S}^4$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - (\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2) \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \dot{\beta}_3^2 \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + 2 \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} = 0 \end{cases} \quad (3.1.32)$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad (3.1.33a)$$

$$\dot{z}_4 = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (3.1.33b)$$

$$\dot{z}_3 = z_3 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + z_2^2) \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.33c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = z_2 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} - \\ - z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{aligned} \quad (3.1.33d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = z_1 z_4 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos \alpha \cos \beta_1}{\sin \alpha \sin \beta_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} + \\ + z_1 z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \end{aligned} \quad (3.1.33e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.33f)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (3.1.33g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (3.1.33h)$$

если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.33) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 3.3. В случае четырехмерного пространства Лобачевского (с координатами $x = \beta_1$, $y = \beta_2$, $z = \beta_3$, $w = \alpha$, задача класса (с)) четырехпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dot{\beta}_2^2 - \dot{\beta}_3^2) = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 = 0 \end{cases} \quad (3.1.34)$$

и имеющая первые интегралы (3.1.15)–(3.1.19), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_4 \nu_1 \alpha, & \dot{z}_1 = z_1 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_4}, \\ \dot{z}_4 = -z_3^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2} - z_2^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3} - z_1^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_4}, & \dot{\beta}_1 = z_3 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \\ \dot{z}_3 = z_3 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, & \dot{\beta}_2 = z_2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_3}}, \\ \dot{z}_2 = z_2 z_4 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_3}, & \dot{\beta}_3 = z_1 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_4}}, \end{cases} \quad (3.1.35)$$

где $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{R}$, если первое, шестое, седьмое и восьмое уравнения системы (3.1.35) рассматривать как новые кинематические соотношения.

3.2. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в потенциальном силовом поле.

3.2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (3.1.1), (3.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле со следующими проекциями на оси $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_4$:

$$\tilde{F}(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1) f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha) f_4(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha), \quad (3.2.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.2.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.2.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \\ & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (3.2.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \\ & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - f_2(\alpha)g_1(\alpha) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2, \end{aligned} \quad (3.2.1e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad (3.2.1f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad (3.2.1g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.2.1h)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_4(\alpha)f_4^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - F_3(\beta_1)f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - F_2(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - F_1(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0 \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$.

3.2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (3.2.1) достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (3.2.1) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 3.2. *Если выполнены условия (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), то система (3.2.1) обладает полным набором, состоящим из пяти первых интегралов: первого интеграла*

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1^2 + \dots + z_4^2 + V(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_1 = \text{const}, \quad (3.2.2)$$

где

$$V(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = V_4(\alpha) + \sum_{k=1}^3 V_{4-k}(\beta_k) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da - 2 \sum_{k=1}^3 \int_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{4-k}(b) db,$$

а также, для простоты, при $F_{4-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, 2, 3$, — первых интегралов (3.1.16)–(3.1.19). Более того, после замен (3.1.22) независимой переменной и (3.1.23) фазовых переменных фазовый поток системы (3.2.1) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^4\{w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (3.1.24).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 3.2, а именно, сделаем замены (3.1.22) независимой переменной и (3.1.23) фазовых переменных. Тогда система (3.2.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4, \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) e^{2w_3^*}, \\ \dot{w}_3^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_4, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2^* = \pm e^{w_3^*} \frac{1}{\sqrt{1+w_1^2}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{W_2(w_2^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.2.5)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (3.2.6)$$

где $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, в силу замены (3.1.23), при этом в составной системе (3.2.3)–(3.2.6) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . Видно, что дивергенция правой части составной системы (3.2.3)–(3.2.6) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании пяти первых интегралов, при этом доказательство существования интегралов (3.1.16)–(3.1.19) проводится как в теореме 3.1. Дифференцирование функции (3.2.2) в силу системы (3.2.1) дает

$$\begin{aligned} & 2z_4 F_4(\alpha) f_4(\alpha) + 2z_3 F_3(\beta_1) f_1(\alpha) + 2z_2 F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) + \\ & + 2z_1 F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) - 2f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^3 - \\ & - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_3^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_4^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_4}{f_4(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_2^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_3}{f_1(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] + f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} - \\ & - 2z_4 F_4(\alpha) f_4(\alpha) - 2z_3 F_3(\beta_1) f_1(\alpha) - 2z_2 F_2(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) - \\ & - 2z_1 F_1(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2) \equiv 0, \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (3.1.6). Но, как указано выше, при выполнении девяти условий (3.1.4), (3.1.5) семь условий (3.1.6) и семь условий (3.1.12) в известном смысле эквивалентны. Теорема доказана. $\square$

3.3. Инварианты систем на касательном расслоении к четырехмерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

3.3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Теперь несколько модифицируем систему (3.2.1). При этом получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (3.3.1) (в отличие от системы (3.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от $z_1, \dots, z_4$:

$$\tilde{F}(z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) \\ F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \\ F_3(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_4(\alpha)f_4(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \\ z_3 F_3^1(\alpha) \\ z_4 F_4^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^4\{z_4, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ примет вид

$$\dot{\alpha} = z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \quad (3.3.1a)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f_4(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_4^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_3^2 - \\ - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_2^2 - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3.1b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = F_3(\beta_1)f_1(\alpha) - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_2^2 - \\ - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = F_2(\beta_2)f_2(\alpha)g_1(\beta_1) - \\ - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \\ - \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = F_1(\beta_3)f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2) - \\ - f_4(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - \\ - f_2(\alpha)g_1(\alpha) \left[2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3.1e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad (3.3.1f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \quad (3.3.1g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h(\beta_2), \quad (3.3.1h)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_4^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\alpha} - \\ - F_4(\beta_1)f_4^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_4^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_4(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \\ + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta}_1 - \left\{ F_3^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_1 - \\
- F_3(\beta_1) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_2 - \left\{ F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_2 - \\
- F_2(\beta_2) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\
\ddot{\beta}_3 - \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \dot{\beta}_3 - \\
- F_1(\beta_3) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + \\
+ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0
\end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Здесь, как и выше, $\tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы восьмого порядка (3.3.1) достаточно знать, вообще говоря, семь независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (3.3.1) достаточно знать пять независимых тензорных инвариантов: или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством пять. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 3.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются 16 алгебраических и дифференциальных соотношений (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12) на 20 функций: на 7 функций $f_1(\alpha), \dots, f_4(\alpha), g_1(\beta_1), g_2(\beta_1), h(\beta_2)$ и на 13, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (3.3.1) при выполнении свойств (3.1.4), (3.1.5), (3.1.12), а также при отсутствии проектирования внешней силы на оси $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$ и $\dot{z}_3$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot{z}_4$):

$$F_1(\beta_3) \equiv F_2(\beta_2) \equiv F_3(\beta_1) \equiv 0. \quad (3.3.2)$$

Тогда система (3.3.1) допускает отделение независимой подсистемы седьмого порядка:

$$\left\{ \begin{aligned}
\dot{\alpha} &= z_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\
\dot{z}_4 &= F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) z_3^2 - \\
&\quad - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) z_2^2 - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_4 F_4^1(\alpha), \\
\dot{z}_3 &= -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - f(\alpha) g^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\beta_1) z_2^2 - \\
&\quad - f(\alpha) g^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) z_1^2 + z_3 F_3^1(\alpha), \\
\dot{z}_2 &= -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_2 z_3 - \\
&\quad - f(\alpha) g(\beta_1) h^2(\beta_2) \Gamma_{33}^2(\beta_2) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\
\dot{z}_1 &= -f_4(\alpha) \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] z_1 z_3 - \\
&\quad - f(\alpha) g(\alpha) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\
\dot{\beta}_1 &= z_3 f(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1),
\end{aligned} \right. \quad (3.3.3)$$

при наличии также восьмого уравнения

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (3.3.4)$$

Далее, наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv F_2^1(\alpha) \equiv F_3^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \quad (3.3.5)$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (3.3.3), (3.3.4) при условии (3.3.5) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}} \quad (3.3.6)$$

система (3.3.3), (3.3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b \delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha) f_4(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3^2 + w_4 F_4^1(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \frac{f^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) w_3 w_4 + w_3 F^1(\alpha), \end{cases} \quad (3.3.7)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1+w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (3.3.9)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (3.3.10)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (3.3.7)–(3.3.10) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (3.3.7), по одному — для систем (3.3.8) и (3.3.9) (после соответствующих замен независимого переменного в них) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (3.3.10) (т.е. всего *пять*).

Продолжим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_4^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (3.3.11)$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$, $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_4(\alpha)$, а для некоторых $\lambda_4^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 4$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_4(\alpha) &= \lambda_4^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_4^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha); \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_4(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_4(\alpha), \quad k = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Условие (3.3.11) назовем «геометрическим», а условия из группы (3.3.12) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \lambda_3^1 =: \lambda^1$, в силу (3.3.5). Условие (3.3.11) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_4(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при

участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (3.3.12) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (знако)переменную диссипацию.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (3.3.11) и (3.3.12). Тогда система (3.3.7)–(3.3.10) обладает пятью независимыми, вообще говоря, трансцендентными (см. [24]) (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 3.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (3.3.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3^2/f_4(\alpha) + w_4F_4^1(\alpha)}{w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)w_3w_4/f_4(\alpha) + w_3F^1(\alpha)}{w_4f_4(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_3 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \quad (3.3.14)$$

приводим систему (3.3.13) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \frac{F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F_4^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_4(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.3.15)$$

что, учитывая (3.1.12), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\frac{du_2}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left(F_4(\alpha)f_4(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_4(\alpha)} - \right. \\ \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + [\Delta(\alpha)F_4^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2 \right), \\ \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left(\left[f^2(\alpha)\Gamma_4(\alpha)\frac{\Delta^2(\alpha)}{f_4(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha) \right] u_1u_2 + \right. \\ \left. + [\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1 \right); \end{cases} \quad (3.3.16)$$

напомним, что здесь и далее $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (3.3.16) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (3.3.11) и (3.3.12). Действительно, после их выполнения система (3.3.16) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_4^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \quad (3.3.17)$$

Уравнение (3.3.17) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]), а его общее решение достаточно громоздко. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ данное уравнение обладает первым интегралом

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_4^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (3.3.18)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{f_4^2(\alpha)(w_4^2 + w_3^2) + (b - \lambda^1)w_4\delta(\alpha)f_4(\alpha) - \lambda_4^0\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)f_4(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (3.3.19)$$

Замечание 3.3. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (3.3.7) (как часть системы (3.3.7)–(3.3.10)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Если же α не является периодической координатой, то мы в данном случае говорим о системе со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (3.1.12), геометрического и энергетических условий (3.3.11), (3.3.12) (но при любой гладкой функции $F_4(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F_4(\alpha)f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 - bw_4 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 - bw_3 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (3.3.20)$$

Действительно, система (3.3.20) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_4, w_3; \alpha) = w_3^2 + w_4^2 + 2bw_4\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (3.3.21)$$

$$\Phi_2(w_3; \alpha) = w_3\Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (3.3.22)$$

где

$$V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_4(a) da.$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_3; \alpha) &= w_3 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} = \\ &= w_3 f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_4(b) \frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_3 \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_4(b) \frac{f^2(b)}{f_4^2(b)} db \right\}, \end{aligned}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (3.3.11), (3.3.12) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_3 \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\Delta(b)| db \right\} \cong w_3 \Delta(\alpha) \quad (3.3.23)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (3.3.21), (3.3.22) также является первым интегралом системы (3.3.20). Но при $\lambda^1 = \lambda_4^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + (b - \lambda^1)w_4\Delta(\alpha) - \lambda_4^0\Delta^2(\alpha) \quad (3.3.24)$$

и (3.3.22) по отдельности не является первым интегралом системы (3.3.7). Однако отношение функций (3.3.24), (3.3.22) является первым интегралом системы (3.3.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_4^1$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (3.3.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$. Для этого преобразуем инвариантное соотношение (3.3.18) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2} \right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2} \right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_4^0. \quad (3.3.25)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0 \geq 0, \quad (3.3.26)$$

и фазовое пространство системы (3.3.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (3.3.25). Таким образом, в силу соотношения (3.3.18) первое уравнение системы (3.3.16) при условиях (3.3.11) и (3.3.12) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\bar{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{2(-\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b},$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_4^0)} \right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (3.3.26). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (3.3.7) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2(-\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 \{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_4^0)}\}/2}. \quad (3.3.27)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln |\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_4^0,$$

то правая часть равенства (3.3.27) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (3.3.28)$$

При вычислении интеграла (3.3.28) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_4^0$. В этом случае

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \right| + \text{const}.$$

II: $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_4^0$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

III: $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_4^0$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2},$$

находим окончательный вид для величины I_1 :

I. При $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_4^0$:

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_4^0}} \right| + \text{const}.$$

II. При $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_4^0$:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_4^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

III. При $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_4^0$:

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

Итак, мы нашли дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (3.3.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$); таким образом, предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 3.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (3.3.18). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (3.3.29)$$

Выражение первого интеграла (3.3.29) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы восьмого порядка (3.3.7)–(3.3.10) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (3.3.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу для систем (3.3.8) и (3.3.9) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.3.10).

Первые интегралы для систем (3.3.8) и (3.3.9) имеют следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \quad (3.3.30)$$

о функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (3.1.21).

В предыдущих переменных z первые интегралы (3.3.30) таковы:

$$\Theta'_3(z_3, z_2, z_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \\ \Theta'_4(z_2, z_1; \beta_2) = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}. \quad (3.3.31)$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (3.3.10), находится по аналогии с (3.1.19):

$$\Theta_5(\beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{2,0}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}; \quad (3.3.32)$$

после взятия интеграла (3.3.32) сюда можно формально подставить вместо постоянных C_3 и C_4 левые части равенств (3.3.30) (или (3.3.31)) при $s = 1, 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (3.3.7)–(3.3.10) имеет пять первых интегралов, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 3.3 доказана. $\square$

3.3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 3.4. Если для систем вида (3.3.7)–(3.3.10) выполняются геометрическое и энергетические свойства (3.3.11), (3.3.12), то у нее также существуют функционально независимые между собой пять инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными (т.е. имеющими существенно особые точки) коэффициентами (ср. [24]). Эти дифференциальные формы при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_4^1$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho_1(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha, \\ \rho_2(w_4, w_3; \alpha) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha, \\ \rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}} dw_s \wedge d\beta_s, \quad s = 1, 2; \\ \rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_2, \beta_3) dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1(w_4, w_3; \alpha) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \frac{u_4^2 + u_3^2 + (b - \lambda^1)u_4 - \lambda_4^0}{u_3}, \quad u_k = \frac{w_k}{\Delta(\alpha)}, \quad k = 3, 4; \\ \rho_2(w_4, w_3; \alpha) &= \Delta(\alpha) \cdot \exp \left\{ \int \frac{(2b + \lambda^1 + u_4)du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\}; \\ \rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_2, \beta_3) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_4}{U_2(C_1, u_4)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3), \end{aligned}$$

и они, вообще говоря, зависят с первыми интегралами (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30), (3.3.32).

Доказательство. I. Система (3.3.7) составной рассматриваемой системы (3.3.7)–(3.3.10) при выполнении свойств (3.3.11), (3.3.12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = \lambda_4^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 + \lambda_4^1 w_4 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 + \lambda^1 w_3 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (3.3.33)$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_3^* = \ln |w_3| \quad (3.3.34)$$

система (3.3.33) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda_4^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_3^*} + \lambda_4^1 w_4 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_4 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \quad (3.3.35)$$

при этом в системе (3.3.35) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . В принципе замена фазовой переменной (3.3.34) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_3^* , так и переменную w_3 .

Для системы (3.3.35) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_4, w_3^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_4, w_3^*; \alpha)dw_4 \wedge dw_3^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} [\rho(w_4, w_3^*; \alpha)X(w_4, w_3^*; \alpha)] = 0, \quad (3.3.36)$$

где

$$X(w_4, w_3^*; \alpha) = \{X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\} \quad (3.3.37)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (3.3.35) в координатах $(w_4, w_3^*; \alpha)$.

Уравнение (3.3.36) переписывается в виде

$$X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_4} + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha)\rho_{w_3^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_4, w_3^*; \alpha); \quad (3.3.38)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_4, w_3^*; \alpha) = (b + \lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \quad (3.3.39)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.3.38) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_4^1)\tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (3.3.40)$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (3.3.40), уже найдены два первых интеграла (3.3.19) и (3.3.29). Найдем третий независимый первый интеграл системы (3.3.40) уравнений характеристик. Сопоставим системе (3.3.40) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{\lambda_4^0 \Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_3^2/\Delta(\alpha) + \lambda_4^1 w_4 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_3 w_4/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_3 \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)}, \\ \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_4^1)\rho\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_4 + b\Delta(\alpha)} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dw_4}{d\Delta} = \frac{\lambda_4^0 \Delta - \kappa w_3^2/\Delta + \lambda_4^1 w_4}{w_4 + b\Delta}, \\ \frac{dw_3}{d\Delta} = \frac{\kappa w_3 w_4/\Delta + \lambda^1 w_3}{w_4 + b\Delta}, \\ \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_4^1)\rho}{w_4 + b\Delta}. \end{cases} \quad (3.3.41)$$

После введения однородных переменных

$$w_4 = u_2 \Delta, \quad w_3 = u_1 \Delta, \quad (3.3.42)$$

похожих на соответствующие переменные в замене (3.3.14), система (3.3.41) переписывается в виде

$$\begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_4^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_4^1)\rho}{u_2 + b} \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_4^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_4^1)u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1)u_1 u_2 - (b - \lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_4^1)\rho}{u_2 + b}. \end{cases} \quad (3.3.43)$$

Из первых двух уравнений системы (3.3.43) получается первый интеграл (3.3.19).

Из квадратуры

$$\begin{aligned} -\frac{d\Delta}{\Delta} &= \frac{(u_2 + b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \\ U_2(C_1, u_2) &= 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\}, \\ U_1(u_2) &= u_2^2 + (b - \lambda^1)u_2 - \lambda_4^0, \quad C_1 \neq 0, \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

получается первый интеграл (3.3.29) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_4^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \quad (3.3.45)$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ .

Вычислим квадратуру (3.3.45). Справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp \left\{ -(b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}, \quad (3.3.46)$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (3.3.40).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (3.3.38) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \quad (3.3.47)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (3.3.19), (3.3.29) соответственно.

В частности, в качестве двух функционально независимых решений линейного уравнения (3.3.38) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_4, w_3; \alpha), \quad (3.3.48)$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_4, w_3; \alpha), \quad (3.3.49)$$

$$u_2 = \frac{w_4}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_3}{\Delta(\alpha)}.$$

II. Рассмотрим далее системы (3.3.8), (3.3.9). После замен независимых переменных

$$\frac{d}{dt} = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d}{dt} = \pm w_3 f(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (3.3.50)$$

системы (3.3.8), (3.3.9) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1 + w_s^2} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}}, \quad s = 1, 2, \quad j = h, g; \end{cases} \quad (3.3.51)$$

при этом в системах (3.3.51) точкой обозначена также производная по новым независимым переменным τ .

Для систем (3.3.51) будем искать интегральные инварианты с плотностями $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующие дифференциальным формам площади $\rho(w_s; \beta_s) dw_s \wedge d\beta_s$, $s = 1, 2$, из линейных дифференциальных уравнений

$$\text{div} [\rho(w_s; \beta_s) X(w_s; \beta_s)] = 0, \quad (3.3.52)$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \{X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s)\} \quad (3.3.53)$$

— векторные поля рассматриваемых систем (3.3.51) в координатах $(w_s; \beta_s)$. Уравнения (3.3.52) перепишутся в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s) \rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) \rho_{\beta_s} = -\rho \text{div} X(w_s; \beta_s); \quad (3.3.54)$$

при этом

$$\text{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1 + w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \quad (3.3.55)$$

Тогда системы уравнений характеристик линейных дифференциальных уравнений (3.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\rho} = -\rho \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \end{cases} \quad (3.3.56)$$

У систем, состоящих из первых двух уравнений систем (3.3.56), уже найдены первые интегралы (3.3.30). Найдем второй независимый первый интеграл для каждой из систем (3.3.56) уравнений характеристик. Сопоставим двум последним уравнениям систем (3.3.56) неавтономные уравнения

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad s = 1, 2. \quad (3.3.57)$$

Последние уравнения дают следующие инвариантные соотношения:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s; \rho) = \rho \cdot \Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \text{const}, \quad (3.3.58)$$

которые являются вторыми, недостающими, первыми интегралами систем уравнений характеристик (3.3.56). О функциях $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, 2$, см. (3.1.21).

Таким образом, общие решения линейных уравнений (3.3.54) в частных производных примут вид

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]}{\Psi_s(\beta_s)}, \quad (3.3.59)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольные гладкие функции одного аргумента, при этом Θ_{s+2} — два первых интеграла (3.3.30), $s = 1, 2$. В частности, если положить

$$\mathcal{G}[\Theta_{s+2}] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad (3.3.60)$$

то в качестве решений линейных уравнений (3.3.54) можно взять функции

$$\rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, 2. \quad (3.3.61)$$

III. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_4, w_3; \alpha)$, $p = 1, 2$, а также $\rho_{2+s}(w_s; \beta_s)$, $s = 1, 2$, были получены выше через исследования отдельных систем (3.3.7), (3.3.8) и (3.3.9), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (3.3.7)–(3.3.10). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (3.3.10).

Составная система (3.3.7)–(3.3.10) при выполнении свойств (3.3.11), (3.3.12) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_4 f_4(\alpha) + b \delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = \lambda_4^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_4(\alpha) - \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3^2 + \lambda_4^1 w_4 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3 = \kappa f_4(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_3 w_4 + \lambda^1 w_3 f_4(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (3.3.62)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{\frac{1+w_2^2}{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{(1+w_1^2)(1+w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (3.3.63)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (3.3.64)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{(1 + w_1^2)(1 + w_2^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (3.3.65)$$

После замен независимой и фазовых переменных

$$\frac{d}{dt} = f_4(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_3^* = \ln |w_3|, \quad w_s^* = \ln |w_s + \sqrt{1 + w_s^2}|, \quad s = 1, 2, \quad (3.3.66)$$

составная система (3.3.62)–(3.3.65) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) = w_4 + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) = \lambda_4^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_3^*} + \lambda_4^1 w_4 \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_4 + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (3.3.67)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) \left[2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) = \pm \frac{W_2(w_2^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1), \end{cases} \quad (3.3.68)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) = \pm e^{w_3^*} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) = \pm \frac{W_1(w_1^*) e^{w_3^*}}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)}, \end{cases} \quad (3.3.69)$$

$$\dot{\beta}_3 = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) = \pm \frac{e^{w_3^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_4(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2); \quad (3.3.70)$$

при этом в составной системе (3.3.67)–(3.3.70) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ , а также $w_s = W_s(w_s^*)$, $s = 1, 2$, — функции в силу замен (3.3.66). В принципе, замена фазовых переменных (3.3.66) носит технический характер, и при этом можно использовать как группу переменных w_3^* , w_2^* , w_1^* , так и группу переменных w_3 , w_2 , w_1 .

Для составной системы (3.3.67)–(3.3.70) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) dw_4 \wedge dw_3^* \wedge dw_2^* \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge d\beta_2 \wedge d\beta_3,$$

из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} \left[\rho(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) X(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \right] = 0, \quad (3.3.71)$$

где

$$\begin{aligned} X(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \left\{ X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), \right. \\ \left. X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \right. \\ \left. X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.72)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (3.3.67)–(3.3.70) в координатах $(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Уравнение (3.3.71) переписывается в виде

$$\begin{aligned} X_\alpha(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_4} + \\ + X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha) \rho_{w_3^*} + X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{w_2^*} + X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1) \rho_{\beta_2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1) \rho_{w_1^*} + X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha) \rho_{\beta_1} + X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) \rho_{\beta_3} = \\
 &= -\rho \operatorname{div} X(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3); \quad (3.3.73)
 \end{aligned}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_4, w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (b + \lambda_4^1) \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (3.3.74)$$

как и в случае (3.3.39) для «отдельной» системы (3.3.35)! Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (3.3.73) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_4, w_3^*; \alpha), & \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_3^*; \alpha, \beta_1), \\ \dot{w}_4 = X_{w_4}(w_4, w_3^*; \alpha), & \dot{\beta}_1 = X_{\beta_1}(w_3^*, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_3^* = X_{w_3^*}(w_4, w_3^*; \alpha), & \dot{\beta}_3 = X_{\beta_3}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \\ \dot{w}_2^* = X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), & \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_4^1) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{\beta}_2 = X_{\beta_2}(w_3^*, w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1), \end{cases} \quad (3.3.75)$$

и она включает систему уравнений характеристик (3.3.40) для уравнения в частных производных (3.3.38).

У системы, состоящей из первых восьми уравнений системы (3.3.75), уже найдены пять первых интегралов (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30) и (3.3.32) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (3.3.46), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (3.3.75)) на функцию ρ . Таким образом, общее решение линейного уравнения (3.3.73) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{H}[\Theta_1, \dots, \Theta_5], \quad (3.3.76)$$

где $\mathcal{H}[\Theta_1, \dots, \Theta_5]$ — произвольная гладкая функция пяти аргументов, при этом $\Theta_1, \dots, \Theta_5$ — пять первых интегралов (3.3.19), (3.3.29), (3.3.30), (3.3.32) соответственно. В частности, в качестве пяти функционально независимых решений линейного уравнения (3.3.73) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_4, w_3; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_4, w_3; \alpha), \quad (3.3.77)$$

$$\rho_2(w_4, w_3; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_4, w_3; \alpha), \quad (3.3.78)$$

$$\rho_3(w_4, w_3, w_1; \alpha, \beta_1) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_1; \beta_1), \quad (3.3.79)$$

$$\rho_4(w_4, w_3, w_2; \alpha, \beta_2) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_4(w_2; \beta_2), \quad (3.3.80)$$

$$\rho_5(w_4, w_3; \alpha, \beta_2, \beta_3) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_5(\beta_2, \beta_3). \quad (3.3.81)$$

где $u_2 = w_4/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_3/\Delta(\alpha)$.

В разделе III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (3.3.67)–(3.3.70). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_4, w_3; \alpha)dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_4, w_3; \alpha)dw_4 \wedge dw_3 \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (3.3.7), но и для составной системы (3.3.7)–(3.3.10). При этом для интегрирования составной системы (3.3.7)–(3.3.10) можно использовать как более громоздкие формы с функциями (3.3.79), (3.3.80), так и формы с функциями (3.3.61), имеющие более простой наглядный вид, поскольку составная система (3.3.7)–(3.3.10) распалась известным образом. Теорема 3.3 считать доказана. $\square$

Итак, для полной интегрируемости системы (3.3.7)–(3.3.10) можно использовать или пять первых интегралов, или пять независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством пять.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [75]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение упомянем многочисленные приложения (см. [59]), касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к четырехмерной сфере, а также более общих систем на расслоении четырехмерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим работы [3, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.

25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.
28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анализ. — 2018. — № 95. — С. 79–101.

50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.
53. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
54. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
55. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
56. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
57. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
58. Шамолин М. В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
60. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
61. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
62. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
63. Шамолин М. В. Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
64. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
65. Шамолин М. В. Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
66. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
67. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
68. Шамолин М. В. Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
69. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
70. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.

71. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
72. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.
73. Шамолин М. В. Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n -мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
74. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
75. Шамолин М. В. Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
76. Шамолин М. В. Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
77. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. I. Системы на касательных расслоениях двумерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 227. — С. 100–128.
78. Шамолин М. В. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем. II. Системы на касательных расслоениях трехмерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 228. — С. 92–118.
79. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars, 1912.
80. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
81. Shamolin M. V. Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms” (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
82. Tikhonov A. A., Yakovlev A. B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru