ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 120–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-120-130

УДК 517.977.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ФУНКЦИЕЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ УСЛОВИИ

© 2023 г. **Т. К. ЮЛДАШЕВ, Г. К. АБДУРАХМАНОВА**

Аннотация. Изучены вопросы слабой обобщенной разрешимости в обратной задаче оптимизации для уравнения теплопроводности с нелокальным краевым условием и нелинейным функционалом качества. Сформулированы необходимые условия оптимальности, а нахождение функции управления сведено к функционально-интегральному уравнению.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелинейная обратная задача, оптимальное управление, нелинейное управление, минимизация функционала.

OPTIMIZATION OF THERMAL PROCESSES IN A NONLOCAL PROBLEM WITH A REDEFINITION FUNCTION UNDER AN INTEGRAL CONDITION

© 2023 **T. K. YULDASHEV, G. K. ABDURAKHMANOVA**

Abstract. In this paper, we examine the weak generalized solvability of an inverse optimization problem for the heat equation with a nonlocal boundary condition and a nonlinear target performance. We formulate necessary optimality conditions and reduce the search for a control function to a functional integral equation.

Keywords and phrases: heat equation, nonlinear inverse problem, optimal control, nonlinear control, minimization of a functional.

AMS Subject Classification: 49J20, 49K20, 49N45

1. Введение. Некоторые задачи математического моделирования тепловых процессов часто приводят к рассмотрению нелокальных обратных задач для параболических уравнений. Теория обратных задач — один из современных и важнейших разделов дифференциальных уравнений математической физики. Нелокальные задачи с условиями интегрального вида встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для прямых измерений. Примером могут служить некоторые задачи изучения процессов распространения тепла. Теория оптимального управления динамическими системами широко используется при решении различных задач науки, техники и экономики. В теории оптимального управления разработаны и эффективно используются различные аналитические и приближенные методы (см., например, [2–5, 7, 9, 10, 15–17]). В [6] рассматривается широкий класс нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В [1] рассматриваются линейные эллиптические уравнения с коэффициентами, зависящими от функции управления и ее градиента, и изучается задача оптимального управления.

В данной работе рассматриваются вопросы обобщенного решения нелокальной обратной задачи оптимизации процессом распространения тепла по стержню конечной длины с квадратичным критерием оптимальности. При помощи принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности и вычисляется управляющая функция. Рассмотрим следующее уравнение распространения тепла по стержню конечной длины:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(x, p(t)), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1}$$

с интегральным условием

$$\int_0^T u(t,x) dt = \varphi(x), \quad x \in \Omega_l, \tag{2}$$

и граничными условиями Дирихле

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in \Omega_T, \tag{3}$$

где $f(x,p) \in C(\Omega_l \times \Upsilon)$ — функция внешнего источника, $p(t) \in C(\Omega_T)$ — функция управления, $u(t,x) \in C(\Omega)$ — функция состояния, $\varphi(x)$ — функция переопределения распределения тепла вдоль стержня, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\nu > 0$ — действительный параметр, $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$, $\Upsilon \equiv [0, M^*]$, $0 < M^* < \infty$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Для определения функции переопределения $\varphi(x)$ задано следующее промежуточное условие:

$$u(t_1, x) = \psi(x), \quad x \in \Omega_l, \tag{4}$$

где $0 < t_1 < T$, $\psi(x) \in L_2(\Omega_l)$.

В данной работе рассматривается нелокальная задача нелинейного оптимального управления, где интегральное условие (2) моделирует ситуации, когда либо объект исследования в обратной задаче принципиально недоступен для измерения, либо проведение такого измерения дорого. Функция $\varphi(x)$ в условии (2) также неизвестна. Исходя из практического применения, возникает необходимость использования дополнительного условия (4) с промежуточным значением по времени. Сформулированы необходимые условия оптимальности на основе принципа максимума, вычислены функция управления и функция состояния.

В обратной задаче оптимального управления (1)–(4) требуется найти тройку неизвестных функций:

$$\Big\{ u(t,x) \in \bar{H}_u(\Omega),\ \varphi(x) \in L_2(\Omega_l),\ p(t) \in C\left(\Omega_T\right) \Big\}.$$

Для решения уравнения (1) применяем метод рядов Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, b_n(x), \tag{5}$$

где функции $b_n(x)$ являются собственными функциями спектральной задачи

$$b''(x) + \lambda^2\, b(x) = 0, \quad b(0) = b(l) = 0, \quad 0 < \lambda,$$

и образуют полную систему ортонормированных функций $\big\{b_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(\Omega_l)$, а λ_n — соответствующие собственные числа, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Предположим, что и следующие функции тоже разлагаются в ряд Фурье по функциям $b_n(x)$:

$$f(x, p(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(p)\, b_n(x),\ \ \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\, b_n(x), \tag{6}$$

где

$$f_n(p) = \int_0^l f(y, p(t))\, b_n(y)\, dy, \quad \varphi_n = \int_0^l \varphi(y)\, b_n(y)\, dy.$$

Задача. Найти функцию переопределения $\varphi(x)$, функцию управления

$$p(t) \in \Big\{ p : |p(t)| \leqslant M^*, \ t \in \Omega_T \Big\}$$

и функцию состояния $u(t,x)$, которые доставляют минимум функционалу

$$J[p] = \int\limits_0^l \big[u(T,y) - \xi(y) \big]^2 dy + \alpha \int\limits_0^T p^2(t)\, dt, \tag{7}$$

где $\xi(x)$ — такая непрерывная функция, что

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \, b_n(x), \quad \xi_n = \int\limits_0^l \xi(y)\, b_n(y)\, dy,$$

$$\xi(0) = \xi(l) = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty, \quad 0 < \alpha = \mathrm{const}\,.$$

2. Обратная задача (1)–(4).

Рассмотрим пространства

$$\bar{C}_u^{1,2}(\Omega) = \Big\{ u : u(t,x) \in C^{1,2}(\Omega), \ u(t,0) = u(t,l) = 0 \Big\},$$

$$\bar{C}_\Phi^{1,2}(\Omega) = \Big\{ \Phi : \Phi(t,x) \in C^{1,2}(\Omega), \ \Phi(0,x) = 0 \Big\}$$

(см. [8]) и их замыкания $\bar{H}_u(\Omega)$, $\bar{H}_\Phi(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{\bar{H}(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_0^T \int\limits_0^l |u(t,y)|^2 \, dy\, dt} < \infty.$$

Определение. Функция $u(t,x) \in \bar{H}_u(\Omega)$ называется обобщенным решением нелокальной задачи (1)–(3), если эта функция почти всюду удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и условиям (2) и (3).

Рассмотрим также следующие известные банаховы пространства (см., например, [12–14]):

(a) пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\|a(t)\|_{B_2(\Omega_T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |a_n(t)| \right)^2};$$

(b) пространство ℓ_2 с нормой

$$\|\varphi\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|^2} < \infty;$$

(c) пространство $L_2(\Omega_l)$ с нормой

$$\|\vartheta(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int\limits_0^l |\vartheta(x)|^2 dx} < \infty.$$

Используя определение обобщенного решения и ряды Фурье (5), (6) и учитывая, что функции $b_n(x)$ образуют полную систему ортонормированных функций в $L_2(\Omega_l)$, из уравнения (1) приходим к следующей счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$u_n'(t) + \lambda_n^2 \nu \, u_n(t) = f_n(p(t)), \quad \text{где} \quad \lambda_n^2 = \left[\frac{n\pi}{l} \right]^2. \tag{8}$$

Интегрируя счетную систему диффефренциальных уравнений (8) на интервале $(0, t)$, получим

$$u_n(t) = A_n e^{-\lambda_n^2\,\nu\, t} + \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2\,\nu\,(t-s)} \int\limits_0^l f(y, p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \tag{9}$$

где A_n — неизвестный коэффициент интегрирования. Используя ряды Фурье (5) и (6), из интегрального условия (2) имеем

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(y)\, b_n(y)\, dy = \int\limits_0^l \int\limits_0^T u(t,y) dt\, b_n(y)\, dy = \int\limits_0^T \int\limits_0^l u(t,y)\, b_n(y)\, dy\, dt = \int\limits_0^T u_n(t) dt. \tag{10}$$

Для нахождения неизвестного коэффициента интегрирования A_n воспользуемся условием (10):

$$\varphi_n = A_n \int\limits_0^T e^{-\lambda_n^2\,\nu\, t} dt + \int\limits_0^T \int\limits_0^t e^{-\lambda_n^2\,\nu\,(t-s)} \int\limits_0^l f(y, p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds\, dt =$$

$$= \frac{A_n}{\lambda_n^2 \nu}\, G_n(0) + \frac{1}{\lambda_n^2 \nu} \int\limits_0^T G_n(t) \int\limits_0^l f(y, p(t))\, b_n(y)\, dy\, dt,$$

где $G_n(t) = 1 - e^{-\lambda_n^2\,\nu\,(T-t)}$. Отсюда находим, что

$$A_n = \frac{\lambda_n^2 \nu}{G_n(0)}\, \varphi_n - \frac{1}{G_n(0)} \int\limits_0^T G_n(t) \int\limits_0^l f(y, p(t))\, b_n(y)\, dy\, dt. \tag{11}$$

Подставляя (11) в представление (9), получаем

$$\begin{gathered} u_n(t) = \frac{\varphi_n}{G_n(0)}\, \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2\,\nu\, t}} + \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y, p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \\ u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \Bigg\{ \frac{\varphi_n}{G_n(0)}\, \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} + \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y, p(s))\, b_n(y)\, dy\, ds \Bigg\}, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$K_n(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{1}{G_n(0)}\, G_n(s)\, e^{-\lambda_n^2 \nu\, t}, & t < s \leqslant T, \\ -\dfrac{1}{G_n(0)}\, G_n(s)\, e^{-\lambda_n^2 \nu\, t} + e^{-\lambda_n^2 \nu\,(t-s)}, & 0 \leqslant s < t. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $\varphi(x) \in L_2(\Omega_l)$ и $\|f(x,p)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$. Тогда для функции (12) имеет место включение $u(t,x) \in \bar{H}(\Omega)$.*

Доказательство. При фиксированных значениях функции переопределения и функции управления, подставляя формулу (12) в интеграл

$$\mathfrak{I} = \int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2(t,y)\, dy\, dt,$$

получим

$$\Im = \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\frac{\varphi_n}{G_n(0)} \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} + \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(z,p(s))\, b_n(z)\, dz\, ds \right] \right\}^2 dy\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} b_n(y) \right\}^2 dy\, dt +$$

$$+ 2 \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} b_n(y) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(z,p(s))\, b_n(z)\, dz\, ds \right\} b_i(y)\, dy\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^T K_n(t,s) \int\limits_0^l f(z,p(s))\, b_n(z)\, dz\, ds\, b_n(y) \right\}^2 dy\, dt.$$

Учитывая, что $b_n(x) = \sqrt{2/l} \sin \pi\, n/l$, и применяя неравенства Коши—Шварца и Бесселя, получаем следующую оценку:

$$\Im \leqslant 2 \int\limits_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} \right| \right]^2 dt +$$

$$+ 4 \int\limits_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} \right| \int\limits_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy \right| ds\, dt +$$

$$+ 2 \int\limits_0^T \left\{ \int\limits_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| K_n(t,s) \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy \right| ds \right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} \right|^2 dt + 4 \int\limits_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\varphi_n}{G_n(0)} \right|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n^2 \nu}{e^{\lambda_n^2 \nu\, t}} \right|^2 \right]^{1/2} \times$$

$$\times \int\limits_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} |K_n(t,s)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds\, dt +$$

$$+ 2 \int\limits_0^T \left\{ \int\limits_0^T \left[\sum_{n=1}^{\infty} |K_n(t,s)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int\limits_0^l f(y,p(s))\, b_n(y)\, dy \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds \right\}^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\, [\chi_0]^2\, \chi_2 + 4 \chi_0\, \chi_1\, \chi_3\, \chi_4 + 2 [\chi_3 \chi_4]^2 T < \infty,$$

где

$$\chi_0 = \left\| \frac{\varphi}{G(0)} \right\|_{\ell_2}, \quad \chi_1 = \int\limits_0^T \left\| \frac{\lambda^2 \nu}{e^{\lambda^2 \nu t}} \right\|_{\ell_2} dt, \quad \chi_2 = \int\limits_0^T \left\| \frac{\lambda^2 \nu}{e^{\lambda^2 \nu t}} \right\|_{\ell_2}^2 dt, \quad \chi_3 = \left\| \int\limits_0^T K(t,s)\, ds \right\|_{B_2(T)},$$

$$\chi_4 = \max_{t \in [0,T]} \left\| f(x,p(t)) \right\|_{L_2(\Omega_l)},$$

откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Теперь рассмотрим функцию переопределения. По условию задачи предполагается, что

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n b_n(x),\quad \psi_n=\int\limits_0^l \psi(y)\,b_n(y)\,dy.$$

Применим промежуточное условие (4) к представлению (12):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t_1)\,b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}\,\frac{\varphi_n}{e^{\lambda_n^2\nu\, t_1}}+\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\right]b_n(x). \tag{13}$$

Умножая скалярно каждый член (13) на $b_m(x)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\big(b_n(x),b_m(x)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}\,\frac{\varphi_n}{e^{\lambda_n^2\nu\, t_1}}\big(b_n(x),b_m(x)\big)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\,\big(b_n(x),b_m(x)\big).$$

Отсюда, учитывая, что функции $b_n(x)$ образуют полную систему ортонормированных функций в $L_2\,(\Omega_l)$, имеем

$$\psi_n=\varphi_n\omega_n+\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f\,(y,p(s))\;b_n(y)\,dy\,ds,\quad \text{где}\quad \omega_n=\frac{\lambda_n^2\nu}{G_n(0)}e^{-\lambda_n^2\nu\, t_1}. \tag{14}$$

Из (14) однозначно определяем коэффициенты Фурье φ_n для функции переопределения $\varphi(x)$:

$$\varphi_n=\psi_n\omega_n^{-1}-\omega_n^{-1}\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds, \tag{15}$$

если функция управления $p(s)$ существует и единственна. Подставляя (15) в представление (12), получаем

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\Bigg\{\psi_n\,\gamma_n(t)-\gamma_n(t)\int\limits_0^T K_n(t_1,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds+$$
$$+\int\limits_0^T K_n(t,s)\int\limits_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds\Bigg\}, \tag{16}$$

где $\gamma_n(t)=e^{\lambda_n^2\nu\,(t_1-t)}$. Аналогично, подставляя (15) в ряды Фурье (6), имеем

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\left\{\psi_n\omega_n^{-1}-\omega_n^{-1}\int\limits_0^T K_n(t_1,s)f_n(p(s))\,ds\right\}. \tag{17}$$

3. Функция управления. Пусть $p(t)$ — функция оптимального управления:

$$\Delta J\big[p(t)\big]=J\big[p(t)+\Delta p(t)\big]-J\big[p(t)\big]\geqslant 0,$$

где $p(t)+\Delta p(t)\in C\,(\Omega_T)$. Применение принципа максимума приводит нашу задачу к следующим необходимым условиям оптимальности (см., например, [3, 17]):

$$q(t,x)\,f_p\big(x,p(t)\big)-2\alpha\,p(t)=0, \tag{18}$$
$$q(t,x)\,f_{pp}\big(x,p(t)\big)-2\alpha<0, \tag{19}$$

в котором $q(t,x)$ является обобщенным решением следующей задачи:

$$q_t(t,x)+\nu\, q_{xx}(t,x)=0, \quad (t,x)\in\Omega,$$
$$q(T,x)=-2\big[u(T,x)-\xi(x)\big], \quad q(t,0)=q(t,l)=0,$$

и определяется формулой

$$q(t,x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg\{\psi_n\,\gamma_n(T)-\gamma_n(T)\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))b_n(y)\,dy\,ds+ \\ +\int_0^T K_n(T,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds-\xi_n\Bigg\}e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}b_n(x). \quad (20)$$

С учетом условия $f_p(x,p(t))\neq 0$ условия оптимальности (18) можно переписать следующим образом:

$$2\alpha p(t)f_p^{-1}(x,p(t))=q(t,x). \quad (21)$$

Подставляя (21) в условие (19), получаем

$$f_p(x,p(t))\left(\frac{p(t)}{f_p(x,p(t))}\right)_p>0. \quad (22)$$

В силу (22), подставляя (20) в (21), получаем

$$\frac{\alpha\,p(t)}{f_{np}(p(t))}-\gamma_n(T)\int_0^T K_n(t_1,s)\int_0^l f(y,p(s))b_n(y)\,dy\,ds+ \\ +\int_0^T K_n(T,s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds=\left(\frac{\psi_n}{\gamma_n(T)}+\xi_n\right)e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}. \quad (23)$$

Перепишем (23) как следующее сложное интегральное уравнение относительно управляющей функции $p(t)$:

$$\alpha p(t)\Big/\int_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy+\int_0^T R_n(s)\int_0^l f(y,p(s))\,b_n(y)\,dy\,ds=F_n(t), \quad (24)$$

где

$$R_n(s)=K_n(T,s)-\gamma_n(T)\,K_n(t_1,s), \quad F_n(t)=\left(\frac{\psi_n}{\gamma_n(T)}+\xi_n\right)e^{-\lambda_n^2\nu\,(T-t)}.$$

Для того чтобы решить уравнение (24), мы используем следующие методы (см. [18]). В уравнении (24) положим

$$\alpha p(t)\Big/\int_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy=g(t), \quad (25)$$

где $g(t)\in C(\Omega_T)$ — пока неизвестная функция. Однако мы предполагаем, что она задана, т.е. функция $g(t)$ известна. Поэтому из уравнения (25) относительно функции управления $p(t)$ получаем следующее нелинейное функциональное уравнение:

$$p(t)=\frac{g(t)}{\alpha}\int_0^l f_p(y,p(t))\,b_n(y)\,dy. \quad (26)$$

В действительности функция $p(t)$ зависит от n, так как функция

$$\int\limits_0^l f_p(y, p(t))\, b_n(y)\, dy$$

— коэффициент Фурье на $[0, l]$. Для произвольной функции $p(t) \in C(\Omega_T)$ рассмотрим следующую непрерывную норму:

$$\|p(t)\|_C = \max_{t \in \Omega_T} |p(t)|.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия*:

(i) $0 < \|f_p(x, p(t))\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant M_1$, $0 < M_1 = \text{const}$;

(ii) $\left|f_p(x, p_1(t)) - f_p(x, p_2(t))\right| \leqslant M_2(x) \left|p_1(t) - p_2(t)\right|$, $0 < \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;

(iii) $\rho = \sqrt{l/2}\, \alpha^{-1} \max\limits_{t \in \Omega_T} |g(t)| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < 1$.

Тогда нелинейное функциональное уравнение (26) *имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций* $C(\Omega_T)$. *Это решение может быть найдено из следующего итерационного процесса*:

$$p_{0,n}(t) = 0, \quad p_{k+1,n}(t) = \frac{g(t)}{\alpha} \int\limits_0^l f_p(y, p_{k,n}(t))\, b_n(y)\, dy, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

Доказательство. Из (27) получаем, что справедливы следующие оценки:

$$\left|p_{k+1,n}(t) - p_{0,n}(t)\right| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \int\limits_0^l \left|f_p(y, p_{k,n}(t))\, b_n(y)\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha} \left\|f_p(y, p_{k,n}(t))\right\|_{L_2(\Omega_l)} \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha}\, M_1 < \infty;$$

$$\left|p_{k+1,n}(t) - p_{k,n}(t)\right| \leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \left|\int\limits_0^l \left|f_p(y, p_{k,n}(t)) - f_p(y, p_{k-1,n}(t))\right| \cdot b_n(y)\, dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{g(t)}{\alpha}\right| \left|\int\limits_0^l M_2(y) \left|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\right| \cdot b_n(y)\, dy\right| \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, \frac{|g(t)|}{\alpha} \left|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\right| \cdot \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$\left\|p_{k+1,n}(t) - p_{k,n}(t)\right\|_C \leqslant \rho \cdot \left\|p_{k,n}(t) - p_{k-1,n}(t)\right\|_C.$$

Из справедливости этих оценок следует, что оператор в правой части (26) является сжимающим, так что он имеет единственную неподвижную точку в пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$. Поскольку $C(\Omega)$ — банахово пространство, функциональное уравнение (26) имеет единственное решение в данном пространстве. Теорема 2 доказана. □

Обозначим указанное это решение функционального уравнения (26) через $p_n(t) = h(t, g_n(t))$. Подставляя его в (24) и учитывая (25), получаем следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$g_n(t) = \Im(t; g_n) \equiv F_n(t) - \int\limits_0^T R_n(s) \int\limits_0^l f\big(y, h(s, g_n(s))\big)\, b_n(y)\, dy\, ds. \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия*:

(i) $\xi(x) \in L_2(\Omega_l)$;

(ii) $\left|h(t, g_{1,n}(t)) - h(t, g_{2,n}(t))\right| \leqslant M_3 \left|g_{1,n}(t) - g_{2,n}(t)\right|$, $0 < M_3 = \text{const}$;

(iii) $\tau = \sqrt{l/2}\, M_3 \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \int\limits_0^T |R_n(s)|\, ds < 1.$

Тогда нелинейное интегральное уравнение Фредгольма (28) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций* $g_n(t) \in C(\Omega_T)$, *которое можно найти из следующего итерационного процесса*:

$$g_{0,n}(t) = F_n(t), \quad g_{k+1,n}(t) = \Im(t; g_{k,n}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{29}$$

Доказательство. Из последовательных приближений (29) получаем следующие оценки:

$$\big\|g_{k+1,n}(t) - g_{0,n}(t)\big\|_C \leqslant \int\limits_0^T |R_n(s)| \int\limits_0^l \big|f_p(y, h(s, g_{k,n}(s)))\, b_n(y)\big|\, dy\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}} \int\limits_0^T |R_n(s)|\, \big\|f_p(x, h(s, g_{k,n}(s)))\big\|_{L_2(\Omega_l)}\, ds \leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, M_1 \int\limits_0^T |R_n(s)|\, ds < \infty;$$

$$\big\|g_{k+1,n}(t) - g_{k,n}(t)\big\|_C \leqslant \int\limits_0^T |R_n(s)|\, \big\|f_p(x, h(s, g_{k,n}(s))) - f_p(x, h(s, g_{k-1,n}(s)))\big\|_{L_2(\Omega_l)} ds \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{l}{2}}\, M_3 \|M_2(x)\|_{L_2(\Omega_l)} \int\limits_0^T |R_n(s)|\, \big\|g_{k,n}(s) - g_{k-1,n}(s)\big\|_C ds =$$

$$= \tau \cdot \big\|g_{k,n}(t) - g_{k-1,n}(t)\big\|_C < \big\|g_{k,n}(t) - g_{k-1,n}(t)\big\|_C.$$

Из этих оценок следует, что оператор в правой части (24) является сжимающим, так что он имеет единственную неподвижную точку в пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$. Следовательно, нелинейное интегральное уравнение (28) имеет единственное решение в пространстве непрерывных функций $g_n(t) \in C(\Omega_T)$. Теорема 3 доказана. □

Подставляя решение уравнения (28) в (24), определим управляющую функцию $p_n(t)$.

Согласно (16), оптимальный процесс находится по формуле

$$\bar{u}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \int\limits_0^T R_n(t, s) \int\limits_0^l f(y, \bar{p}(s))\, b_n(y)\, dy\, ds, \tag{30}$$

где $R_n(t, s) = K_n(t, s) - \gamma_n(t)\, K_n(t_1, s)$. Согласно (17), функция переопределения имеет вид

$$\bar{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \left\{ \psi_n \omega_n^{-1} - \omega_n^{-1} \int\limits_0^T K_n(t, s) \int\limits_0^l f\left(y, \bar{p}(s)\right)\, b_n(y)\, dy\, ds \right\}. \tag{31}$$

Согласно формулам (7) и (24), минимальное значение функционала вычисляется по следующей формуле:

$$J[\bar{p}] = \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\psi_n\, \gamma_n(T) + \int\limits_0^T R_n(s) \int\limits_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz\, ds - \xi_n \right] \right\} dy + \alpha \int\limits_0^T \left[\bar{p}(t)\right]^2 dt. \tag{32}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Если функция* $\psi(x) \in L_2(\Omega_l)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|\psi_n\, \gamma_n(T)\big| < \infty,$$

то функционал (32) *принимает конечное значение.*

Доказательство. Достаточно показать абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T R_n(s) \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz\, ds. \tag{33}$$

Применим к (33) неравенство Коши—Шварца и неравенство Бесселя:

$$B \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T |R_n(s)| \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz \right| ds = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} |R_n(s)| \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(s))\, b_n(z)\, dz \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T} |R_n(t)|^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \left| \int_0^l f(z, \bar{p}(t))\, b_n(z)\, dz \right|^2 \right\}^{1/2} ds \leqslant$$

$$\leqslant T \|R(t)\|_{B_2(T)} \max_{0\leqslant t\leqslant T} \big\| f(x, \bar{p}(t)) \big\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

□

Приближенное значение функционала вычисляется из следующего итерационного процесса:

$$J[\bar{p}^k] = \int_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \left[\psi_n\, \gamma_n(T) + \int_0^T R_n(s) \int_0^l f\big(z, \bar{p}^k(s)\big)\, b_n(z)\, dz\, ds - \xi_n \right] \right\} dy + \alpha \int_0^T \big[\bar{p}^k(t)\big]^2 dt. \tag{34}$$

4. Заключение. При помощи метода разделения переменных Фурье исследована нелокальная задача для уравнения теплопроводности с интегральным условием, условиями Дирихле и условием с промежуточным значением. На основе принципа максимума сформулированы необходимые условия оптимальности функции управления по квадратичным критериям. Функция оптимального управления однозначно определяется из интегрального уравнения (24) методом последовательных приближений. Получены уравнения для определения функции переопределения, функции оптимального управления и функции состояния. Приведены представления для расчета оптимального процесса, функции переопределения и минимального значения функционала — формулы (27), (29), (30), (31) и (34). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение при развитии математической и прикладной теории нелинейного оптимального управления в обратных задачах для некоторых систем с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Искендеров А. Д., Гамидов Р. А.* Задачи оптимизации с градиентом управления в коэффициентах эллиптических уравнений// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 9. — С. 1627–1636.
2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление термическими и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
5. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
6. *Квитко А. Н.* Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 2. — С. 236–246.
7. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. телемех. — 2013. — *74*, № 12. — С. 56–103.
8. *Пулькина Л. С.* Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 3. — С. 435–445.
9. *Рапопорт Е. Я.* Оптимальное управление системами с распределенным параметром. — М.: Высшая школа, 2009.

10. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
11. *Юлдашев Т. К.* Оптимальное управление обратными тепловыми процессами в параболическом уравнении с нелинейными отклонениями по времени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 117–135.
12. *Юлдашев Т. К.* Определение коэффициента и классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Бенни—Люка с вырожденным ядром// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *156*. — С. 89–102.
13. *Юлдашев Т. К.* Обратная смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения с многомерным оператором Бенни—Люка и нелинейными максимумами// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *201*. — С. 3–15.
14. *Юлдашев Т. К., Рахмонов Ф. Д., Исмоилов А. С.* Интегро-дифференциальное уравнение Буссинеска с интегральными условиями и с малым параметром при смешанных производных// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 114–130.
15. *Girsanov I. V.* Lectures on the Mathematical Theory of Extremum Problems. — New York: Springer-Verlag, 1972.
16. *Lions J. L.* Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1971.
17. *Kerimbekov A. K.* On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semilinear parabolic equations// Proc. World Congress Engineering, Vol. I (London, July 6-8, 2011), 2011. — P. 270–275.
18. *Yuldashev T. K.* Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 124–136.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Абдурахманова Гулнора Каландаровна
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: g.abdurakhmanova@tsue.uz