ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 79–91
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-79-91

УДК 517.5, 514.17

ПОЛНОТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ПЕРИМЕТРА

© 2023 г. **Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА, Р. Р. МУРЯСОВ**

Аннотация. Установлена новая шкала условий полноты экспоненциальных систем в двух видах функциональных пространств на подмножествах комплексной плоскости. Первый — банаховы пространства функций, непрерывных на компакте и одновременно голоморфных во внутренности этого компакта, если она непуста, с равномерной нормой. Второй — пространства голоморфных функций на ограниченном открытом множестве с топологией равномерной сходимости на компактах. Эти условия сформулированы в терминах мажорирования периметра выпуклой оболочки области определения функций из пространства новыми характеристиками распределения показателей экспоненциальной системы.

Ключевые слова: полнота систем функций, экспоненциальная система, целая функция экспоненциального типа, распределение корней, периметр, выпуклая оболочка, опорная функция.

COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN FUNCTIONAL SPACES IN TERMS OF PERIMETER

© 2023 **B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA, R. R. MURYASOV**

Abstract. A new scale of completeness conditions for exponential systems is established for two types of functional spaces on subsets of the complex plane. The first type of spaces are Banach spaces of functions that are continuous on a compact set and holomorphic in the interior of this compact set (if it is nonempty) with the uniform norm. The second type consists of spaces of holomorphic functions on a bounded open set with the topology of uniform convergence on compact sets. These conditions are formulated in terms of majorizing the perimeter of the convex hull of the domain of functions from the space by new characteristics of the distribution of exponents of the exponential system.

Keywords and phrases: completeness of systems of functions, exponential system, entire function of exponential type, distribution of roots, perimeter, convex hull, support function.

AMS Subject Classification: 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

1. Введение.

1.1. Некоторые обозначения, определения и соглашения. Одноточечные множества $\{a\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как a. Так, для множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ всех *натуральных чисел* $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. *Множество всех действительных чисел* $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как *вещественную ось* в *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$. Порядковое пополнение множества $\mathbb{R}$ верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ и нижней гранью $-\infty := \inf \mathbb{R} \notin \mathbb{R}$ даёт *расширенное* множество действительных чисел $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ с порядковой топологией. *Интервалы с концами* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *и* $b \in \overline{\mathbb{R}}$ — это

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

множества $[a,b] := \bigl\{x \in \overline{\mathbb{R}} \bigm| a \leqslant x \leqslant b\bigr\}$ — *отрезок* в $\overline{\mathbb{R}}$, $(a,b] := [a,b] \setminus a$, $[a,b) := [a,b] \setminus b$, а также $(a,b) := [a,b) \setminus a$ — *открытый интервал* в $\overline{\mathbb{R}}$. Используем также обозначения $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$ для *положительной полуоси* и $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0,+\infty]$ для её расширения. При $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ через $D(r) := \bigl\{z' \in \mathbb{C} \bigm| |z| < r\bigr\}$ и $\overline{D}(r) := \bigl\{z' \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leqslant r\bigr\}$, а также $\partial\overline{D}(r) := \overline{D}(r) \setminus D(r)$ обозначаем соответственно *открытый и замкнутый круги*, а также *окружность с центром в нуле радиуса* r. Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$, ∂S и $\operatorname{conv} S$ обозначаем соответственно *замыкание*, *внутренность*, *границу* и *выпуклую оболочку* множества S в $\mathbb{C}$. Если граница ∂S подмножества $S \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая замкнутая кривая, то евклидову длину этой границы ∂S обозначаем через $\operatorname{prm}(\partial S)$ — *периметр границы* ∂S.

Всюду далее через Z обозначаем *распределение точек* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, среди которых могут быть повторяющиеся. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{N}}_0$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в распределении точек Z. Для такой функции, которую часто называют *функцией кратности*, или *дивизором*, распределения точек Z (см. [11, пп. 0.1.2–0.1.3], сохраняем то же обозначение Z. Другими словами, $Z(z)$ — это количество вхождений точки $z \in \mathbb{C}$ в Z; пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$. Распределение точек Z можно трактовать и как меру со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0$ с тем же обозначением

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \tag{1}$$

Распределение точек Z на $\mathbb{C}$ называется *локально конечным*, если её *считающая радиальная функция* $Z^{\text{rad}}(r) := Z\bigl(\overline{D}(r)\bigr)$ конечна, т.е. $Z^{\text{rad}}(r) < +\infty$ для любого $r \in \mathbb{R}^+$.

Для компакта K в $\mathbb{C}$ через $C(K)$ обозначаем *банахово пространство непрерывных функций* $f\colon K \to \mathbb{C}$ *с* sup-*нормой* $\|f\|_{C(K)} := \sup\Bigl\{\bigl|f(z)\bigr| \Bigm| z \in K\Bigr\}$. Для открытого подмножества $O \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{Hol}(O)$ обозначаем *пространство голоморфных функций* $f\colon O \to \mathbb{C}$ *с топологией равномерной сходимости на всех компактах* $K \subset O$, определяемой sup-полунормами $\|f\|_{C(K)}$. Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ с *внутренностью* $\operatorname{int} K$ через $C(K) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} K)$ обозначаем *банахово пространство непрерывных на K и голоморфных на внутренности* $\operatorname{int} K$ *функций* $f\colon K \to \mathbb{C}$ *с* sup-*нормой* $\|f\|_{C(K)}$. Очевидно, если $\operatorname{int} K = \varnothing$ — *пустое множество*, то $C(K) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} K) = C(K)$.

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ далее рассматривается полнота лишь *экспоненциальных систем*

$$\operatorname{Exp}^Z := \Bigl\{w \underset{w \in \mathbb{C}}{\longmapsto} w^p \exp(zw) \Bigm| z \in Z,\ Z(z) - 1 \geqslant p \in \mathbb{N}_0\Bigr\} \tag{2}$$

с распределением показателей Z. Всюду далее рассматриваются только системы (2) с *локально конечным распределением показателей* Z, поскольку в противном случае система Exp^Z заведомо полна в любом из рассматриваемых в этой статье функциональных пространств.

1.2. Предшествующие результаты. Детальный обзор по полноте экспоненциальных систем по состоянию до 2012 г. изложен в монографии-обзоре [11] первого из авторов. Следующий давно известный результат (см. [5, гл. IV, § 1], [11, комментарий после теоремы 3.3.5]) даёт, по-видимому, самое первое условие полноты экспоненциальной системы (2) в терминах *периметра*.

Теорема A. *Если $S \neq \varnothing$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и*

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{1}{r} \int\limits_1^r \frac{Z^{\text{rad}}(t)}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial S), \tag{3}$$

то экспоненциальная система Exp^Z *из* (2) *полна в пространстве* $\operatorname{Hol}(S)$.

Как отмечено в [11, п. 3.4.1], если $S \neq \varnothing$ — *выпуклый компакт* в $\mathbb{C}$ и нестрогое неравенство $\geqslant$ в (3) заменить на строгое неравенство $>$, то система Exp^Z полна в пространстве $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$.

Частным проявлением [8, § 7, п. 4, теорема единственности], [9, теорема 4.1], [10, теорема A], [11, теорема 3.3.5 и п. 3.4.1] является следующее утверждение.

Теорема B. *Пусть $S \neq \varnothing$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и выполнено хотя бы одно из следующих трёх утверждений*:

(i) *для некоторого $p \in [0,1)$ выполнено неравенство*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \int\limits_1^r \left(\left(\frac{r}{t}\right)^p + \left(\frac{t}{r}\right)^p \right) \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t} dt \geqslant \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-p^2} \operatorname{prm}(\partial S); \tag{4}$$

(ii) *выполнено неравенство*

$$\limsup_{1<a\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r\to+\infty} \int\limits_r^{ar} \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t^2} dt \geqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial S); \tag{5}$$

(iii) *для некоторого числа $p > 1$ выполнено неравенство*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{2r} \left(\int\limits_1^r \left(2 - \left(\frac{t}{r}\right)^p\right) Z^{\mathrm{rad}}(t) \frac{dt}{t} + \int\limits_r^{+\infty} \left(\frac{r}{t}\right)^p Z^{\mathrm{rad}}(t) \frac{dt}{t} \right) \geqslant \frac{1}{2\pi} \frac{p^2}{p^2-1} \operatorname{prm}(\partial S). \tag{6}$$

Тогда экспоненциальная система Exp^Z *из* (2) *полна в пространстве* $\operatorname{Hol}(S)$.

Если $S \neq \varnothing$ — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ и хотя бы в одном из трёх утверждений (i), (ii) *или* (iii) *соответствующее неравенство* (4), (5) *или* (6) *выполнено со строгим знаком $>$ вместо нестрогого $\geqslant$, то система* Exp^Z *полна в пространстве* $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$.

Замечание 1. При выборе $p = 0$ в условии полноты (4) из части (i), а также при $p \to +\infty$ в условии (6) части (iii) теоремы B получаем в точности условие полноты (3) из теоремы A.

Замечание 2. Внешний верхний предел $\limsup\limits_{a\to+\infty}$ можно заменить как на точную нижнюю грань $\inf\limits_{a>1}$, так и на предел $\lim\limits_{a\to+\infty}$, который существует, и все эти три величины совпадают (см. [4, теорема 1], [7, предложение 6]), когда конечна *верхняя плотность распределение точек Z*

$$\overline{\operatorname{dens}}(Z) := \limsup_{r\to+\infty} \frac{Z^{\mathrm{rad}}(r)}{r} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \tag{7}$$

1.3. Основной результат о полноте экспоненциальной системы. Мы развиваем условие полноты системы Exp^Z, выраженное неравенством (5) из утверждения ii) теоремы B.

Функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *положительной* (обозначение $f \geqslant 0$) *на* X, если $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}^+$, и *отрицательной* ($f \leqslant 0$) *на* X, если противоположная ей функция $-f$ положительна. Та же функция f называется *строго положительной*, если $f(X) \subset \overline{\mathbb{R}}^+ \setminus 0$, и *строго отрицательной*, если противоположная функция $-f$ строго положительна. Функция f называется *возрастающей* (соответственно *строго возрастающей*) на *интервале* $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$). Функция $f\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *убывающей* (соответственно *строго убывающей*) на I, если противоположная функция $-f$ является возрастающей (соответственно строго возрастающей) на I.

Теорема 1. *Пусть $r_0 \in \mathbb{R}^+$, $f\colon [r_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — выпуклая положительная убывающая функция, Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ и $P > 0$ — строго положительное число. Тогда имеют место следующие условия полноты*:

I. *Если выполнено соотношение*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{P}{2\pi} \int\limits_r^R \frac{f(t^2)}{t} dt \right) = +\infty, \tag{8}$$

то для любого компакта $S \subset \mathbb{C}$ *со связным дополнением* $\mathbb{C} \setminus K$ *и с периметром границы выпуклой оболочки, удовлетворяющим неравенству*

$$\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \leqslant P, \tag{9}$$

экспоненциальная система Exp^Z *полна в пространстве* $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$.

II. *Если выполнено одно из следующих двух условий*:

(1) *расходится интеграл*

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dt = +\infty \tag{10}$$

и выполнено соотношение

$$\limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \ \limsup_{1<a \to +\infty} \left(\int_{r<t\leqslant ar} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int_r^{ar} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dt \right) \geqslant \frac{P}{2\pi}, \tag{11}$$

(2) *бесконечен двойной нижний предел*

$$\liminf_{1<a \to +\infty} \ \liminf_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \int_r^{ar} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dt = +\infty \tag{12}$$

и выполнено соотношение

$$\limsup_{1<a \to +\infty} \ \limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \left(\int_{r<t\leqslant ar} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int_r^{ar} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dt \right) \geqslant \frac{P}{2\pi}, \tag{13}$$

то для любой односвязной ограниченной области $S \subset \mathbb{C}$, *для которой периметр границы выпуклой оболочки удовлетворяет неравенству* (9), *система* Exp^Z *полна в пространстве* $\operatorname{Hol}(S)$.

Доказательство теоремы 1 будет дано в конце статьи в разделе 3 после формулировки и доказательства теоремы 2 об интегральных оценках распределений масс Рисса субгармонических функций с ограничениями на их рост через опорную функцию множества. Доказательство теоремы 2 использует построенные во вспомогательном разделе 2 специальные радиальные субгармонические функции на $\mathbb{C} \setminus 0$, которые конструируются на основе выпуклых убывающих положительных функций f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Замечание 3. Если $\overline{\operatorname{dens}}(Z) \overset{(7)}{=} +\infty$, то система Exp^Z полна в $\operatorname{Hol}(S)$ для любого открытого множества $S \subset \mathbb{C}$ и в $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ при любом компакте $S \subset \mathbb{C}$. Таким образом, представляет интерес только случай конечной верхней плотности $\overline{\operatorname{dens}}(Z) < +\infty$. Тогда, учитывая существование правой производной f'_+ для выпуклой на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f, при $r > 0$ имеем равенства

$$\int_{r<t\leqslant R} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) = \frac{f\big(R^2\big)}{R} Z^{\mathrm{rad}}(R) - \frac{f\big(r^2\big)}{r} Z^{\mathrm{rad}}(r) - \int_{r<t\leqslant R} \left(\frac{f\big(t^2\big)}{t} \right)'_+ Z^{\mathrm{rad}}(t) dt.$$

Отсюда в случае ещё и убывающей функции $f \geqslant 0$ при $\overline{\operatorname{dens}}(Z) < +\infty$ получаем

$$\int_{r<t\leqslant R} \frac{f\big(t^2\big)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) = \int_r^R \frac{Z^{\mathrm{rad}}(t)}{t^2} \big(f(t^2) - 2tf'_+(t^2)\big) dt + O(1) \quad \text{при } r_0 \leqslant r < R < +\infty. \tag{14}$$

Таким образом, каждый интеграл из левой части (14), входящий в (8), (11) и (13), можно заменить на интеграл из правой части (14), поскольку добавление постоянных к этим интегралам не влияет на условия (8), (11) и (13).

Пример 1. Для выпуклой убывающей функции $f(x) \equiv 1$ при $x > 0$ интеграл из (12) при любом $r > 0$ равен $\ln a$ и выполнено (12), а соотношение (13) при учёте замечания 3 с соотношением (14) — это в точности (5) для $P = \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)$. Таким образом, условие полноты II(2) из теоремы 1 действительно обобщает условие полноты (ii) из теоремы B.

Пример 2. Функция $f\colon x \mapsto 1/\ln x$ является выпуклой, убывающей и положительной на $[e, +\infty)$, а также удовлетворяет условию (10), но не условию (12). Следовательно, такая функция даёт новые условия полноты в форме I и II(1). То же самое справедливо при любом $n \in \mathbb{N}$ для функции

$$f : x \xmapsto[x\in[r_0,+\infty)]{} \frac{1}{\underbrace{\ln\ln\dots\ln}_{n\text{ раз}} x}, \quad r_0 := \underbrace{e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}}_{n\text{ раз}}.$$

2. Одна конструкция субгармонических функций. Назовем последовательность функций $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, *возрастающей*, если при каждом $n \in \mathbb{N}$ разность $f_{n+1} - f_n \geqslant 0$ — положительная функция на X, и *убывающей*, если последовательность $(-f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ противоположных функций $-f_n$ является возрастающей.

2.1. Выпуклые убывающие функции на открытой положительной полуоси.

Предложение 1. *Если функция $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ является выпуклой и убывающей, то справедливы следующие утверждения*:

(i) *функция f является непрерывной, причем левая f'_- и правая f'_+ производные на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ конечны и возрастают*;

(ii) *существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_\pm(x) = 0$ и выполнены неравенства $f'_- \leqslant f'_+ \leqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, а также неравенства*

$$0 \geqslant f'_\pm(x_2) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant f'_\pm(x_1) \quad \textit{при всех } x_2 > x_1 > 0; \tag{15}$$

(iii) *существует убывающая последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых убывающих функций f_n, которая равномерно стремится к f, а также выполнены неравенства*

$$0 \geqslant f'_\pm(x) \geqslant f'_n(x - 1/n) \quad \textit{при всех } x > 1/n. \tag{16}$$

Доказательство. Свойства из (i) относятся к элементарным свойствам выпуклых функций (см. [3, гл. 1, § 4], [14, гл. I]). Свойства (ii) легко следуют из убывания выпуклой функции $f \geqslant 0$, где для (15) используем, к примеру, геометрический смысл левой/правой производной как соответственно левой/правой полукасательной и секущей для графика выпуклой убывающей функции.

Некоторого обсуждения требует, по-видимому, свойство (iii), которое может быть получено из методов сглаживания выпуклых функций из [2, ч. 2, гл. 3]. Но здесь проще схематически описать возможную конструкцию требуемой убывающей последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Функция $f \geqslant 0$ является убывающей и непрерывной на $(0, +\infty)$, поэтому при $n = 1$ можно выбрать двустороннюю последовательность $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ точек $x_k \in (0, +\infty)$, строго возрастающую в том смысле, что $x_k < x_{k+1}$ при любом $k \in \mathbb{Z}$, для которой $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ и $x_k \xrightarrow[k\to-\infty]{} 0$, а также одновременно

$$0 < x_{k+1} - x_k \leqslant \frac{1}{2}, \quad 0 \leqslant f(x_k) - f(x_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим кусочно-аффинную функцию l_1, график которой образован отрезками, соединяющими пару точек с координатами $\bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ и $\bigl(x_{k+1}, f(x_{k+1})\bigr)$. По построению из выпуклости и убывания f следует, что функция l_1 является выпуклой, убывающей, удовлетворяет неравенству $0 \leqslant l_1(x) - f(x) \leqslant 1/2$ при всех $x \in (0, +\infty)$, а также согласно (15) неравенствам $0 \geqslant f'_\pm(x) \geqslant (l_1)'_\pm(x - 1/2)$ при всех $x > 1/2$. В достаточно малых окрестностях точек излома графика функции l_1 можно сгладить её выпуклыми сплайнами до дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой убывающей функции $f_1 \geqslant l_1$ так, что

$$0 \leqslant f_1(x) - f(x) \leqslant 1 \quad \text{при всех } x \in (0,+\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_1(x-1) \quad \text{при всех } x > 1.$$

Для построения функции f_2 сначала добавим в каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ конечное число попарно различных точек, начиная с x_k и заканчивая x_{k+1}, так, что как расстояние между соседними точками, так и между значениями функции f в этих точках было $\leqslant 1/4$. За полученной таким образом новой двусторонней строго возрастающей последовательностью сохраним то же обозначение $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Снова рассмотрим кусочно-аффинную функцию l_1, график которой образован отрезками, соединяющими пару точек с координатами $\bigl(x_k, f(x_k)\bigr)$ и $\bigl(x_{k+1}, f(x_{k+1})\bigr)$. По построению из выпуклости и убывания f следует, что функция l_2 является выпуклой, убывающей, удовлетворяет неравенствам $f \leqslant l_2 \leqslant f_1$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ и $0 \leqslant l_2(x) - f(x) \leqslant 1/4$ при всех $x \in (0,+\infty)$, а также согласно (15) неравенствам $0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant (l_2)'_{\pm}(x-1/4)$ при всех $x > 1/4$. В очень малых окрестностях точек излома графика функции l_1 можем сгладить её выпуклыми сплайнами до дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой убывающей функции $f_2 \geqslant l_2$ так, что $f_2 \leqslant f_1$ и

$$0 \leqslant f_2(x) - f(x) \leqslant 1/2 \quad \text{при всех } x \in (0,+\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_2(x-1/2) \quad \text{при всех } x > 1/2.$$

Продолжая эту процедуру, на каждом n-м шаге получаем требуемую выпуклую убывающую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $f_n \leqslant f_{n-1}$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ при $n > 1$, для которой

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant 1/n \quad \text{при всех } x \in (0,+\infty), \quad 0 \geqslant f'_{\pm}(x) \geqslant f'_n(x-1/n) \quad \text{при всех } x > 1/n.$$

Это завершает доказательство свойства (iii) с неравенством (16). □

Замечание 4. Условие убывания функции f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ в предложении 1 можно заменить на формально более слабое условие

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

поскольку оно при выпуклости функции $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ влечёт за собой убывание функции f на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Для $a \in \overline{\mathbb{R}}$ или функции a со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ полагаем $a^+ := \sup\{a, 0\}$.

Предложение 2. *Пусть функция $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ является выпуклой и убывающей. Тогда для любого числа $R > 0$ положительная функция F_R, определённая равенствами*

$$F_R(x) := \left(\frac{1}{x}f(x^2) - \frac{1}{R}f(R^2)\right)^+ \quad \textit{при каждом } x \in \mathbb{R}^+ \setminus 0, \tag{17}$$

непрерывна, убывает и обладает левой $(F_R)'_-$ и правой $(F_R)'_+$ конечными производными всюду на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$, а также для неё выполнены соотношения

$$F_R(x) \geqslant 0 = F_R(R) \qquad \textit{при } x \in (0, R], \tag{18+}$$

$$F_R(x) \equiv F'_R(x) \equiv 0 \qquad \textit{при } x \in (R, +\infty), \tag{18_0}$$

$$F_R(x) = \frac{1}{x}f(x^2) - \frac{1}{R}f(R^2) \geqslant 0 \qquad \textit{при } x \in (0, R), \tag{18_R}$$

$$(F_R)'_{\pm}(x) = -\frac{1}{x^2}f(x^2) + 2f'_{\pm}(x^2) \qquad \textit{при } x \in (0, R), \tag{18$'$}$$

$$(F_R)'_-(R) = -\frac{1}{R^2}f(R^2) + 2f'_-(R^2), \qquad (F_R)'_+(R) = 0, \tag{18R}$$

$$\bigl|(F_R)'_{\pm}(x)\bigr| \leqslant \frac{f(x^2)}{x^2} + \frac{2f(x)}{x(x-1)} \leqslant \frac{3f(x)}{x(x-1)} \qquad \textit{при } x > 1. \tag{18$\leqslant$}$$

Доказательство. Все свойства функции F_R до группы соотношений (18) автоматически следуют из свойств функции f, отражённых в п. (i) предложения 1, если учесть что функция-множитель $x \mapsto 1/x$ при f в (17) является убывающей и бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$.

Соотношения (18+) очевидно по построению (17) функции F_R.

В силу убывания функции $x \mapsto f(x^2)/x$, во-первых, имеем

$$\frac{1}{x}f(x^2) \leqslant \frac{1}{R}f(R^2) \quad \text{при } x \in [R, +\infty),$$

откуда по построению функции F_R в (17) получаем тождества (18_0), а во-вторых,

$$\frac{1}{x}f(x^2) \geqslant \frac{1}{R}f(R^2) \quad \text{при } x \in (0, R],$$

что по построению функции F_R в (17) влечёт за собой (18_R).

Вычисление левой и правой производных для (18_R) даёт ($18'$), а вместе с (18+)–(18_0) и (18R).

Наконец, из ($18'$), (18R) и (18_0) имеем

$$\bigl|(F_R)'_{\pm}(x)\bigr| \leqslant \frac{f(x^2)}{x^2} + 2\bigl|f'_{\pm}(x^2)\bigr|,$$

а применение неравенства (15) при $x_2 := x^2 > x =: x_1 > 1$ влечёт за собой неравенства

$$\bigl|f'_{\pm}(x^2)\bigr| \leqslant \frac{f(x) - f(x^2)}{x^2 - x} \leqslant \frac{f(x)}{x(x-1)}.$$

Таким образом, установлено первое неравенство в ($18\leqslant$). Второе неравенство в ($18\leqslant$)при $x > 1$ для убывающей функции $f \geqslant 0$ очевидно. □

2.2. Построение субгармонических функций с помощью выпуклых.

Предложение 3. *Для любой функции F_R вида* (17) *из предложения* 2 *с выпуклой и убывающей функцией $f \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ радиальная функция*

$$V(re^{i\theta}) := F_R(r) \overset{(17)}{=} \left(\frac{1}{r}f(r^2) - \frac{1}{R}f(R^2)\right)^+, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

является положительной непрерывной субгармонической функцией на $\mathbb{C} \setminus 0$ и существует последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ со всеми свойствами из утверждения (iii) *предложения* 1, *для которых последовательность субгармонических радиальных на $\mathbb{C} \setminus 0$ функций V_n вида*

$$V_n(re^{i\theta}) := \left(\frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2)\right)^+, \quad 0 < r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \tag{20}$$

сходится к функции V равномерно на компактах из $\mathbb{C}\setminus 0$, а каждая из функций V_n — это сужение на проколотый круг $\overline{D}(R) \setminus 0$ дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции

$$v_n \colon re^{i\theta} \longmapsto \frac{1}{r}f_n(r^2) - \frac{1}{R}f_n(R^2), \quad re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0. \tag{21}$$

При этом модуль производной по внешней нормали $\vec{n}_{\text{out}}$ к границе кольца $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ в точках на окружности $\partial\overline{D}(r) \subset \partial\bigl(D(R)\setminus\overline{D}(r)\bigr)$ для каждой из функций V_n и V оценивается следующим образом:

$$\sup_{\theta\in\mathbb{R}} \max\left\{\left|\frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\right|, \ \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\text{out}}}(re^{i\theta})\right|\right\} \leqslant \frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R. \tag{22}$$

Доказательство. По построению (20) и по свойствам функций f_n каждая из функций V_n — это сужение дважды непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{C} \setminus 0$ функции (21). Из равномерной сходимости последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ к функции f и вида радиальных функций V и V_n в (19)–(20) следует, что для любого $r \in (0, R)$ последовательность функций V_n равномерно сходится к V на кольце $\overline{D}(R) \setminus D(r)$, а значит, сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C} \setminus 0$.

Сначала установим субгармоничность на $\mathbb{C} \setminus 0$ функций v_n из (21), для которых

$$\frac{\partial v_n}{\partial r}(re^{i\theta}) \overset{(18')}{=} -\frac{1}{r^2}f_n(r^2) + 2f'_n(r^2), \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2}(re^{i\theta}) = \frac{2}{r^3}f_n(r^2) - \frac{2}{r}f'_n(r^2) + 4rf''_n(r^2), \quad r > 0. \tag{23}$$

Прямое вычисление оператора Лапласа в полярных координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

от функции v_n из (21) на $\mathbb{C} \setminus 0$ даёт согласно (23) равенство

$$\Delta v_n(re^{i\theta}) \overset{(23)}{=} \left(\frac{2}{r^3}f_n(r^2) - \frac{2}{r}f_n'(r^2) + 4rf_n''(r^2)\right) + \frac{1}{r}\Bigl(-\frac{1}{r^2}f_n(r^2) + 2f_n'(r^2)\Bigr),$$

из которого после раскрытия скобок и приведения подобных получаем

$$\Delta v_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{r^3}f_n(r^2) + 4rf_n''(r^2) \geqslant 0 \quad \text{при } re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus 0 \tag{24}$$

в силу положительности $f_n \geqslant 0$ и выпуклости f_n, дающей положительность $f_n'' \geqslant 0$ на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$. Таким образом, каждая функция v_n из (23) является субгармонической. Следовательно, и каждая функция $V_n = v_n^+ := \sup\{v_n, 0\}$ по построению (20) является субгармонической на $\mathbb{C} \setminus 0$. Равномерная сходимость на компактах из $\mathbb{C} \setminus 0$ последовательности субгармонических непрерывных функций V_n к функции V обеспечивает и её субгармоничность на $\mathbb{C} \setminus 0$.

По неравенству (18⩽) предложения 2 модули левой производной по радиусу для первых сомножителей в определениях (19) для V и (20) для V_n не превышают соответственно дробей

$$\frac{3f(r)}{r(r-1)}, \quad \frac{3f_n(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R,$$

каждая из которых не больше

$$\frac{3f_1(r)}{r(r-1)}, \quad 1 < r < R.$$

Отсюда для модуля производной $\partial/\partial\vec{n}_{\text{out}}$ к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ на $\partial\overline{D}(r)$ от функций V и V_n, равного модулю левой производной по радиусу в точках на $\partial\overline{D}(r)$, получаем (22). □

3. Оценки распределений масс Рисса субгармонических функций. Для $z \in \mathbb{C}$, как обычно, $\bar{z}$ — комплексное число, сопряжённое с z. *Опорной функцией множества* $S \subset \mathbb{C}$ называется функция

$$\operatorname{Spf}_S\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \sup_{s\in S} \operatorname{Re} s\bar{z} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{25}$$

(см. [1]). Опорная функция Spf_S принимает только конечные значения из $\mathbb{R}$, если и только если $S \neq \varnothing$ — ограниченное в $\mathbb{C}$. Для такого $S \subset \mathbb{C}$ его опорная функция по построению (25) *положительно однородна* и *выпукла*, а следовательно, *непрерывна* и *субгармонична* на $\mathbb{C}$ (см. [13, 15]).

Каждой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции $u \not\equiv -\infty$ соответствует положительная мера Радона $\Delta_u := \frac{1}{2\pi}\Delta u$, где Δ — *оператор Лапласа*, действующий в смысле теории обобщённых функций (см. [13–15]). Меру Δ_u называем *распределением масс Рисса* субгармонической функции u.

Для меры Радона μ на $\mathbb{C}$ её *считающая радиальная функция* обозначается и определяется следующим образом:

$$\mu^{\text{rad}}\colon r \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\longmapsto} \mu\bigl(\overline{D}(r)\bigr).$$

Теорема 2. *Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — ограниченный компакт в $\mathbb{C}$ с опорной функцией Spf_S и периметром $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) > 0$ границы $\partial \operatorname{conv} S$ выпуклой оболочки $\operatorname{conv} S$ множества S. Если $u \not\equiv -\infty$ — субгармоническая функция с распределением масс Рисса Δ_u, удовлетворяющая неравенствам*

$$u(z) \leqslant \operatorname{Spf}_S(z) + c \quad \text{для некоторого } c \in \mathbb{R} \text{ при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

то для любой положительной выпуклой убывающей на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f существует число $C \in \mathbb{R}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,d\Delta_u^{\text{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)\int_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt + C \quad \text{при всех } 1 < r < R < +\infty. \tag{27}$$

Доказательство. Не умаляя общности, в (26) можно положить $c = 0$, поскольку распределение масс Рисса для субгармонической функции $u - c$ то же самое, что и для u.

Основную роль при доказательстве будет играть следующая лемма.

Лемма 1 ([9, леммы 2.2–2.3]). *Пусть $0 < r < R < +\infty$ и функция V положительна на замкнутом кольце $\overline{D}(R) \setminus D(r)$, субгармонична в его внутренности $D(R) \setminus \overline{D}(r)$, тождественно равна нулю на окружности $\partial\overline{D}(R)$ и совпадает с сужением на $\overline{D}(R) \setminus D(r)$ некоторой дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности кольца $\overline{D}(R) \setminus D(r)$ функции. Используя инверсию функции V относительно окружности $\partial\overline{D}(r)$, построим положительную на $\mathbb{C}$ функцию*

$$V^*(z) := \begin{cases} V(z) & \text{при } r < |z| \leqslant R, \\ V\left(\dfrac{r^2}{\bar{z}}\right) & \text{при } \dfrac{r^2}{R} < |z| \leqslant r, \\ 0 & \text{при } |z| \leqslant \dfrac{r^2}{R} \text{ и } |z| > R, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

Тогда для любой пары субгармонических на окрестности круга $\overline{D}(R)$ функций $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ с распределениями масс Рисса соответственно Δ_u и Δ_M из неравенства $u \leqslant M$ на этой окрестности следует неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_u \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} V^* d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \bigl(u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})\bigr) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\rm out}}(re^{i\theta}) d\theta, \tag{29}$$

где по-прежнему, как и в конце формулировки предложения 3, $\partial/\partial\vec{n}_{\rm out}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ в точках на окружности $\overline{D}(r)$.

В качестве функции M выберем опорную функцию Spf_S. Её распределение масс Рисса в полярных координатах определяется как произведение мер [11, п. 3.3.1]

$$d\Delta_M = d\Delta_{\operatorname{Spf}_S} = \frac{1}{2\pi} dr \otimes dl_{\operatorname{conv} S}(\theta), \tag{30}$$

где $l_{\operatorname{conv} S}(\theta)$ — длина дуги границы $\partial \operatorname{conv} S$, отсчитываемой при движении по границе «против часовой стрелки» от последней точки опоры опорной к $\operatorname{clos}\operatorname{conv} S$ прямой, ортогональной положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, до последней точки опоры опорной к $\operatorname{clos}\operatorname{conv} S$ прямой, ортогональной направлению радиус-вектора точки $e^{i\theta}$ (см. [1], [11, п. 3.3.1]). В частности,

$$\int\limits_0^{2\pi} dl_{\operatorname{conv} S}(\theta) = l_{\operatorname{conv} S}(2\pi) - l_{\operatorname{conv} S}(0) = \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S). \tag{31}$$

В качестве функции V выбираем функции V_n, определённые как в (20)–(21) из предложения 3 для функции из (19) по функции f из условия доказываемой теоремы 2, $n \in \mathbb{N}$. Для функций $V := V_n$ по предложению 3 выполнены все условия леммы 1, а положительные по построению функции V_n^*, построенные как (28), будут иметь явный радиальный вид

$$0 \leqslant V_n^*(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{|z|} f_n\bigl(|z|^2\bigr) - \dfrac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } r < |z| \leqslant R, \\ \dfrac{|z|}{r^2} f_n\left(\dfrac{r^4}{|z|^2}\right) - \dfrac{1}{R} f_n(R^2) & \text{при } \dfrac{r^2}{R} < |z| \leqslant r, \\ 0 & \text{при } |z| \leqslant \dfrac{r^2}{R} \text{ и } |z| > R, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

По лемме 1 из заключения (29) с учётом (26) для $c = 0$, (30) и (22) при $1 < r < R < +\infty$ следует

$$\int\limits_{\mathbb{C}} V_n^* d\Delta_u \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{r^2/R}^{R} \int\limits_0^{2\pi} V_n^*(te^{i\theta}) dt dl_{\operatorname{conv} S}(\theta) + \frac{r}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Bigl(\bigl|u(re^{i\theta})\bigr| + \bigl|\operatorname{Spf}(re^{i\theta})\bigr|\Bigr) \left|\frac{\partial V_n}{\partial \vec{n}_{\rm out}}(re^{i\theta})\right| d\theta \overset{(32),(22)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{r^2/R}^{r} \frac{t}{r^2} f_n\bigl(r^4/t^2\bigr)\,dt + \int\limits_{r}^{R} \frac{f_n\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt\right) \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} dl_{\operatorname{conv} S}(\theta) + \\ + \frac{r}{\pi}\left(\int\limits_0^{2\pi} \bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \bigl|\operatorname{Spf}(re^{i\theta})\bigr|\,d\theta\right)\frac{3f_1(r)}{r(r-1)}.$$

Отсюда согласно (31) и (32) при $2 \leqslant r < R < +\infty$ получаем

$$\int\limits_{\overline{D}(R)\setminus\overline{D}(r)} \frac{f_n\bigl(|z|^2\bigr)}{|z|}\,d\Delta_u(z) \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\overline{D}(R)\setminus\overline{D}(r)} \frac{1}{R} f_1(R^2)\,d\Delta_u + \left(\frac{1}{2} f_1(r^2) + \int\limits_r^R \frac{f_n\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt\right)\frac{1}{2\pi}\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) + \\ + \frac{3f_1(r)}{r}\int\limits_0^{2\pi} \bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,d\theta + 2f_1(r)\max_{\theta\in[0,2\pi)}\bigl|\operatorname{Spf}(e^{i\theta})\bigr|. \quad (33)$$

Опорная функция Spf_S удовлетворяет ограничению $\operatorname{Spf}(z) = O\bigl(|z|\bigr)$ при $z \to \infty$ в силу её положительной однородности. Отсюда функция u согласно (26) удовлетворяет условию

$$\limsup_{z\to+\infty} \frac{u(z)}{|z|} < +\infty,$$

т.е. функция *u конечного типа при порядке* 1. Следовательно, для распределения масс Рисса Δ_u такой функции имеем $\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) = O(t)$, а также [12, лемма 6.2]

$$\int\limits_0^{2\pi} \bigl|u(re^{i\theta})\bigr|\,d\theta = O(r) \quad \text{при } r \to +\infty.$$

Отсюда ввиду убывания функции f_1 из (33) следует существование числа $C \in \mathbb{R}^+$, для которого

$$\int\limits_r^R \frac{f_n\bigl(t^2\bigr)}{t}\,d\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)\int\limits_r^R \frac{f_n\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt + C \quad \text{при всех } 2 \leqslant r < R < +\infty.$$

Следовательно, для убывающей и равномерно сходящейся к f последовательности функций f_n из предложения 1 имеем неравенства

$$\int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,d\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)\int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt + C \quad \text{при всех } 2 \leqslant r < R < +\infty,$$

где нижнее ограничение $2 \leqslant r$ ввиду конечности интегралов по отрезкам $[1,2]$ можно заменить на $1 \leqslant r$, увеличивая, если необходимо, число $C \in \mathbb{R}^+$. □

Доказательство теоремы 1. Отметим сначала, что функцию f можно продолжить на весь луч $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ как выпуклую, положительную и убывающую, возможно, изменив r_0 на чуть большее.

Допустим, что экспоненциальная система Exp^Z не полна в пространстве $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ для некоторого компакта $S \subset \mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus S$, удовлетворяющего (9). По теореме Хана—Банаха (см. [11, п. 1.1.1]) и теореме Рисса о представлении линейных функционалах это означает, что найдётся комплекснозначная мера Радона $\mu \neq 0$ с носителем $\operatorname{supp}\mu \subset S$, для которой ненулевая целая функция

$$g(z) \underset{z\in\mathbb{C}}{=} \int\limits_S e^{zs}\,d\mu(s) \not\equiv 0, \tag{34}$$

обращается в нуль на Z *с учётом кратности* в том смысле, что для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ кратность корня целой функции f в точке z не меньше $Z(z)$. При этом функция $u := \ln|g| \not\equiv -\infty$ — субгармоническая с распределением масс Рисса $\Delta_u \geqslant Z$, где Z рассматривается как мера, определённая в (1). Из представления (34) и определения (25) опорной функции следует

$$u(z) = \ln\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \ln\Bigl(\exp\bigl(\sup_{s\in S} \operatorname{Re} zs\bigr)|\mu|(S)\Bigr) \leqslant \operatorname{Spf}_{\bar S}(z) + \ln|\mu|(S) \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C}, \tag{35}$$

где $|\mu|$ — полная вариация меры μ, а $\bar S := \bigl\{\bar z \mid z \in S\bigr\}$ — компакт, зеркально симметричный компакту S относительно вещественной оси. Неравенство в (35) означает, что выполнено условие (26) теоремы 2 с $\bar S$ вместо S. По теореме 2 для любой положительной выпуклой убывающей на $\mathbb{R}^+ \setminus 0$ функции f существует число $C \in \mathbb{R}$, для которого выполнено неравенство (27) с $\operatorname{prm}\bigl(\partial \operatorname{conv} \bar S\bigr)$, очевидно, равным $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)$. Таким образом, ввиду неравенства для мер $Z \leqslant \Delta_u$ получаем

$$\int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dZ^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,d\Delta_u^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt + C \tag{36}$$

для некоторого числа $C \in \mathbb{R}$ при всех $1 < r < R < +\infty$. Нижнее ограничение $1 < r$ здесь можно поменять на $r_0 \leqslant r$, поскольку возможно и добавляющиеся при это интегралы по интервалам с концами r_0 и 1 конечны. Неравенство между крайними частями (36) означает, что

$$\sup_{r_0 \leqslant r < R < +\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant R} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dZ^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)}{2\pi} \int\limits_r^R \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt \right) < +\infty,$$

откуда ввиду неравенства $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \overset{(9)}{\leqslant} P$ конечна точная верхняя грань в левой части равенства (8), что противоречит условию (8). Это противоречие доказывает, что на самом деле система Exp^Z полна в $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$. Таким образом, часть I теоремы 1 доказана.

Перейдём к доказательству части II теоремы 1 в условиях сначала из II1. Пусть теперь $S \neq \varnothing$ — односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая (9), а $K \subset S$ — непустой компакт со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$. Тогда $\operatorname{conv} K$ — выпуклый компакт в выпуклой открытой области $\operatorname{conv} S$, очевидно, со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus \operatorname{conv} K$, а $\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) < \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)$ (см. [6]). Выберем промежуточные числа $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^+$ так, что

$$\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) \leqslant P_3 < P_2 < P_1 < \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S) \overset{(9)}{\leqslant} P. \tag{37}$$

Соотношение (11) означает, что найдётся достаточно большое $r \geqslant r_0$, для которого

$$\limsup_{1<a\to+\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant ar} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int\limits_r^{ar} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt \right) \geqslant \frac{P_1}{2\pi}.$$

Последнее согласно (37) означает, что найдётся возрастающая последовательность $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ чисел $1 < a_k \to \infty$, для которой

$$\int\limits_{r<t\leqslant a_k r} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int\limits_{r_n}^{a_k r} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt \geqslant \frac{P_2}{2\pi} \overset{(37)}{=} \frac{P_3}{2\pi} + \frac{P_2 - P_3}{2\pi} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$

где последнее слагаемое строго положительно. Отсюда следует

$$\int\limits_{r<t\leqslant a_k r} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dZ^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{P_3}{2\pi} \int\limits_r^{a_k r} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt \geqslant \frac{P_2 - P_3}{2\pi} \int\limits_{r_n}^{a_k r} \frac{f\bigl(t^2\bigr)}{t}\,dt \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

В силу расходимости интеграла (10) и строгой положительности $P_2 - P_3 > 0$ правая часть здесь неограниченно возрастает и поэтому получаем

$$\sup_k \left(\int\limits_{r<t\leqslant a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{P_3}{2\pi} \int\limits_r^{a_k r} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) = +\infty.$$

Тем более, выполнено соотношение (8) с числом $P_3 \overset{(37)}{\geqslant} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K)$ вместо P. Отсюда согласно доказанной части I теоремы 1 экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} K)$. В силу произвола в выборе компакта K со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$ в односвязной ограниченной области $S \subset \mathbb{C}$ такие компакты исчерпывают односвязную ограниченную область $S \subset \mathbb{C}$. Это доказывает полноту экспоненциальной системы Exp^Z в пространстве $\operatorname{Hol}(S)$. Тем самым в условиях II1 часть II теоремы 1 доказана.

Перейдем к доказательству части II теоремы 1 в условиях II2. Пусть, по-прежнему, $S \neq \varnothing$ — открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, удовлетворяющее (9), и пусть выполнены условия (12)–(13). Предположим, что экспоненциальная система Exp^Z не полна в пространстве $\operatorname{Hol}(S)$. Это означает, что существует такой компакт $K \subset S$ со связным дополнением $\mathbb{C} \setminus K$, что эта система Exp^Z не полна в $C(K) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} K)$. Тогда согласно доказанной части I теоремы 1 имеем

$$\sup_{r_0 \leqslant r < R < +\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant R} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) - \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K)}{2\pi} \int\limits_r^{R} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) < +\infty,$$

откуда следует существование числа $C \in \mathbb{R}$, для которого, выбирая $R := ar$, получаем

$$\int\limits_{r<t\leqslant ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \leqslant \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K)}{2\pi} \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt + C \quad \text{при любых } r \geqslant r_0 \text{ и } a > 1.$$

Поделив обе части этого неравенства на последний интеграл и переходя к пределу при $r \to +\infty$ в обеих частях неравенства, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) &\leqslant \\ \leqslant \limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) + C \Big/ \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) &= \\ = \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) + C \Big/ \liminf_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt&. \end{aligned}$$

Применяя второй верхний предел по $1 < a \to +\infty$ к крайним частям этого соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{1<a\to+\infty} \limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) &\leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi} \operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K) + C \Big/ \liminf_{1<a\to+\infty} \liminf_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt&, \end{aligned}$$

где по условию (12) знаменатель последней дроби даёт $+\infty$, вследствие чего

$$\limsup_{1<a\to+\infty} \limsup_{r_0 \leqslant r \to +\infty} \left(\int\limits_{r<t\leqslant ar} \frac{f(t^2)}{t} dZ^{\mathrm{rad}}(t) \Big/ \int\limits_r^{ar} \frac{f(t^2)}{t} dt \right) \leqslant \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} K)}{2\pi} < \frac{\operatorname{prm}(\partial \operatorname{conv} S)}{2\pi} \overset{(9)}{\leqslant} \frac{P}{2\pi}.$$

Здесь строгое промежуточное неравенство $<$ порождает противоречие с условием (13). Следовательно, система Exp^Z полна в пространстве $\mathrm{Hol}(S)$. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. Элементарная теория. — М.: Наука, 1965.
4. *Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н.* Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций// Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы». III. Анализ и дифференциальные уравнения. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
6. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
7. *Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса// Уфим. мат. ж. — 2020. — *12*, № 2. — С. 35–48.
8. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1991. — *55*, № 5. — С. 1101–1123.
9. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 6. — С. 811–827.
10. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 4. — С. 603–616.
11. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
12. *Хабибуллин Б. Н., Шмелёва А. В.* Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. I. Классический случай// Алгебра и анализ. — 2019. — *31*, № 1. — С. 156–210.
13. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
14. *Hörmander L.* Notions of Convexity. — Boston, MA: Birkhäuser, 1994.
15. *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru

Мурясов Роман Русланович
Уфимский университет науки и технологий
E-mail: romrumur@yandex.ru