ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 100–128
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-100-128

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ. I. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. **М. В. ШАМОЛИН**

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n-мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

***Ключевые слова*:** динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS. I. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 **M. V. SHAMOLIN**

Abstract. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n-dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n. We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

***Keywords and phrases*:** dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

***AMS Subject Classification*:** 34Cxx, 70Cxx

Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

СОДЕРЖАНИЕ

0. Примеры из маломерной динамики

Введение. Как известно (см. [14,15,77]), обнаружение достаточного количества тензорных инвариантов (не только первых интегралов) позволяет проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объема позволяет уменьшить количество требуемых первых интегралов. Как известно, для консервативных систем этот факт естествен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, включать трансцендентные (т.е. имеющие существенно особые точки, в смысле комплексного анализа) функции (см. также [2, 17, 24, 25]).

Как показано ранее, задача о движении плоского (двумерного) маятника на цилиндрическом шарнире в неконсервативном поле сил, приводит к динамической системе на касательном расслоении к одномерной сфере (окружности). Динамические системы второго порядка, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, первый интеграл является трансцендентной (т.е. имеющих существенно особые точки) функцией, выражающейся через конечную комбинацию элементарных функций.

1. Пример: плоский маятник в потоке набегающей среды. Кратко охарактеризуем задачу о физическом маятнике на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды, начатую в [8, 19]. Пространство положений такого маятника — одномерная окружность $\mathbb{S}^1\{\theta \bmod 2\pi\}$, фазовое пространство — касательное расслоение $T\mathbb{S}^1\{\dot\theta; \theta \bmod 2\pi\}$ к ней, т.е. двумерный цилиндр.

При рассматриваемых модельных предположениях выписано уравнение движения такого маятника. В [23] доказано утверждение о том, что динамическая система, описывающая поведение такого маятника, траекторно топологически эквивалентна следующему дифференциальному уравнению на двумерном цилиндре (угол θ измеряется «по потоку»):

$$\ddot\theta + h\dot\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0, \quad h > 0. \tag{0.1.1}$$

Уравнение (0.1.1) можно переписать в виде системы на фазовом цилиндре $\mathbb{R}^1\{\omega\}\times\mathbb{S}^1\{\alpha \bmod 2\pi\}$ ($\alpha = \theta + \pi$):

$$\begin{cases} \dot\alpha = -\omega + h\sin\alpha, \\ \dot\omega = \sin\alpha\cos\alpha, \end{cases} \tag{0.1.2}$$

фазовый портрет которой представлен на рис. 1 при $0 < h < 2$.

Вообще же говоря, при $h < 2$ точки покоя $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, являются фокусами, при $h = 2$ — вырожденными узлами, а при $h > 2$ — (грубыми) узлами.

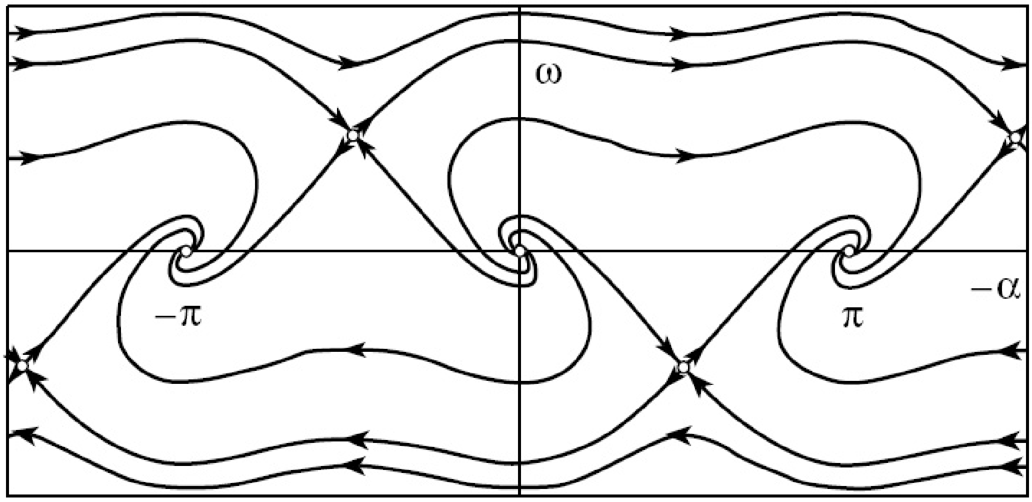

Рис. 1. Портрет системы (0.1.2) на фазовом цилиндре

При $h = 0$ консервативная система (0.1.2) обладает аналитическим первым интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{2} = C_0 = \text{const}; \tag{0.1.3}$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма

$$d\alpha \wedge d\omega \tag{0.1.4}$$

площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии (0.1.3), или факт сохранения фазовой площади (0.1.4).

В случае $h \neq 0$ ситуация сложнее. Поскольку у системы (0.1.2) имеются притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы — трансцендентная (т.е. имеющая существенно особые точки) функция, которая имеет вид

$$\Phi_0(\alpha, \omega) = \sin\alpha \exp\Psi_0(\zeta) = C_1 = \text{const}, \quad \Psi_0(\zeta) = \int \frac{(\zeta - h)d\zeta}{\zeta^2 - h\zeta + 1}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\sin\alpha}; \tag{0.1.5}$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\sin\alpha = 0, \quad \omega = 0 \tag{0.1.6}$$

(см. также [13]).

Заметим также, что в точках, задаваемых последними равенствами, приведенная функция как первый интеграл не просто не определена, а имеет особенности в виде существенно особых точек (как указано выше — в смысле комплексного анализа). В остальных точках фазового пространства первый интеграл рассматриваемой системы можно считать гладкой функцией (см. также [24, 25, 30]). Данное замечание распространяется и на другие трансцендентные первые интегралы данной работы (в каждом конкретном случае координаты существенно особых точек уточняются).

Поскольку у системы (0.1.2) имеются асимптотические предельные множества (рис. 1), не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости (ср. [1, 12, 16]). Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями, которая имеет вид

$$T_1(\alpha, \omega) = \exp\{-h\Psi_1(\zeta)\}\, d\alpha \wedge d\omega, \quad \Psi_1(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - h\zeta + 1}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\sin\alpha}. \tag{0.1.7}$$

2. Пример более общей системы с одной степенью свободы. Рассмотрим гладкую динамическую систему на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$ (или на касательном расслоении $M^1\{\alpha\}\times\mathbb{R}^1\{\omega\} = TM^1\{\omega;\alpha\}$) с одной степенью свободы α следующего вида:

$$\dot\alpha = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \dot\omega = F(\alpha), \tag{0.2.1}$$

которая переписывается в виде уравнения

$$\ddot\alpha - b\tilde\delta(\alpha)\dot\alpha + F(\alpha) = 0, \quad \tilde\delta(\alpha) = \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}. \tag{0.2.2}$$

Пара гладких функций $(F(\alpha),\delta(\alpha))$ определяет силовое поле в системе: функция $F(\alpha)$ описывает консервативную составляющую поля, а функция $\delta(\alpha)$ — возможные рассеяние или подкачку энергии в системе (в зависимости от знака функции $\tilde\delta(\alpha)$ в уравнении (0.2.2)).

При $b=0$ консервативная система (0.2.1) обладает гладким интегралом энергии:

$$\frac{\omega^2}{2} + 2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F(\xi)d\xi = C_0 = \text{const}; \tag{0.2.3}$$

при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbb{R}^2\{\alpha,\omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма (0.1.4) площади с единичной плотностью. При интегрировании системы (0.2.1) при $b=0$ можно использовать или первый интеграл энергии (0.2.3), или факт сохранения фазовой площади (форма (0.1.4)).

Иначе обстоит дело в случае $b\neq 0$. Поскольку у системы (0.2.1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие предельные множества (назовем их *асимптотическими*), первый интеграл системы — трансцендентная (т.е. имеющая существенно особые точки) [24] функция. Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda\delta(\alpha)\tilde\delta(\alpha), \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{0.2.4}$$

Действительно, при использовании условия (0.2.4) системе (0.2.1) можно сопоставить уравнение

$$\frac{d\omega}{d\delta} = \frac{\lambda\delta}{-\omega + b\delta}. \tag{0.2.5}$$

Переходя к однородным координатам $\omega = \zeta\delta$, для поиска искомого первого интеграла получаем следующую квадратуру:

$$\frac{d\delta}{\delta} = \frac{b-\zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda}\, d\zeta. \tag{0.2.6}$$

Тогда искомый первый интеграл примет окончательный вид

$$\Phi(\alpha,\omega) = \delta(\alpha)\exp\Psi(\zeta) = C_1 = \text{const}, \quad \Psi(\zeta) = \int \frac{(\zeta-b)d\zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}; \tag{0.2.7}$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы алгебраических равенств

$$\delta(\alpha) = 0, \quad \omega = 0 \tag{0.2.8}$$

(см. также [13]).

Поскольку у рассматриваемой системы при $b\neq 0$ появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой *даже* абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры во всей фазовой плоскости (ср. [18, 29]). Но можно (наряду с полученным первым интегралом (0.2.7)) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными (имеющими существенно особые точки) функциями.

На рис. 1 для примера показан фазовый портрет системы (0.2.1) для случая $\delta(\alpha) = \sin\alpha$ (соответственно, $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$).

Действительно, искомая 2-форма имеет вид

$$T(\alpha,\omega) = \exp\{-b\Theta(\zeta)\}\, d\alpha\wedge d\omega, \quad \Theta(\zeta) = \int \frac{d\zeta}{\zeta^2 - b\zeta + \lambda}, \quad \zeta = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}. \tag{0.2.9}$$

Видно, что дифференциальная форма (0.2.9) площади имеет все же более простой вид, чем первый интеграл (0.2.7).

1. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия

Введение. Примерами часто встречающихся тензорных инвариантов являются скалярные инварианты — первые интегралы рассматриваемой системы, — и инвариантные векторные поля — поля симметрий для данной системы (они коммутируют с векторным полем рассматриваемой системы). Фазовые потоки систем дифференциальных уравнений, порождаемых этими полями, переводят решения рассматриваемой системы в решения той же системы. Инвариантные внешние дифференциальные формы порождают интегральные инварианты рассматриваемой системы (этот вопрос в основном и рассматривается в данной работе). При этом само векторное поле рассматриваемой системы является одним из инвариантов (тривиальный инвариант). Знание тензорных инвариантов рассматриваемой системы дифференциальных уравнений облегчает и ее интегрирование, и качественное исследование. Наш подход состоит в том, что для точного интегрирования автономной системы из n дифференциальных уравнений, помимо упомянутого тривиального инварианта, надо знать еще $n-1$ независимых тензорных инвариантов.

В данном разделе предъявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении трехмерного (пространственного) маятника на сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее трехмерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7, 11, 32, 33]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по двумерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего трехмерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим двумерным поверхностям вращения, на плоскости Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в случае присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (см. [36, 37]).

Важные частные случаи систем с двумя степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [46, 56]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем предъявлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные (см. также [79]).

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, плоскости Лобачевского. Указываются достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем в системы добавляется потенциальное поле сил специального вида, также указываются достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассмотрено усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией, и указаны достаточные условия интегрируемости.

1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к двумерному многообразию.

1.1. Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности. Рассмотрим гладкое двумерное риманово многообразие $M^2\{\alpha,\beta\}$ с координатами (α,β), римановой метрикой $g_{ij}(\alpha,\beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha,\dot\beta;\alpha,\beta\}$ (ср. [7,9]) при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot\alpha = z_2 f_2(\alpha),\quad \dot\beta = z_1 f_1(\alpha), \tag{1.1.1}$$

где $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических (см. [39,40]), например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении (двумерных) поверхностей вращения, плоскости Лобачевского и т. д.):

$$\begin{cases}\ddot\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0,\\ \ddot\beta + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0;\end{cases} \tag{1.1.2}$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (1.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$, примут вид

$$\begin{aligned}\dot z_1 &= -f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2,\\ \dot z_2 &= -f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2,\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

и уравнения геодезических (1.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (1.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (1.1.1), (1.1.3) на многообразии $TM^2\{z_2,z_1;\alpha,\beta\}$ с новой частью координат z_1, z_2 на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (1.1.2) (к системе (1.1.1), (1.1.3)).

(a) Системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства; такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по такой сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для пространственного движения динамически симметричного (трехмерного) твердого тела (см. [28, 31]).

(b) Системы на касательных расслоениях двумерных поверхностей вращения.

(c) Системы на касательном расслоении плоскости Лобачевского в модели Клейна.

Отметим также, что в [7] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении двумерной сферы с различными метриками, а в [3] — примеры систем геодезических на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского.

1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении двумерного гладкого многообразия, то количество различных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$, т.е. шесть коэффициентов при $n=2$. Как видно из этого, общая задача интегрирования уравнений геодезических весьма сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции (в нашем случае $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (1.1.1)), определяющие координаты на касательном расслоении.

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь тремя (т.е. $n(n-1)+1$ при $n=2$) ненулевыми коэффициентами связности, формирующими уравнения геодезических (1.1.2). При этом по такому количеству выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении — их число равно двум (т.е. $n(n-1)/2+1$ при $n=2$). Таким образом, имеем пять функций, *характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.*

Каково же количество $B(2)$ накладываемых алгебраических и дифференциальных условий на имеющиеся $A(2)=5$ функций ($A(n)=3n(n-1)/2+2$ при $n=2$)? Ведь данные условия являются достаточными для полного интегрирования уравнений геодезических. Понятно, что таких функциональных условий должно быть меньше 5, иначе задача не имеет смысла. Вопрос — на сколько меньше, потому что чем меньше число $B(2)$, тем больше разность $A(2)-B(2)$, и тем больше систем уравнений геодезических допускают полный набор инвариантов для их интегрирования.

В данной работе будем накладывать $B(2)=3$ условия на имеющиеся $A(2)=5$ функций. Число $B(2)$ складывается из трех слагаемых: $B(2)=B_1(2)+B_2(2)+B_3(2)$.

Число $B_1(2)$ равно количеству условий, накладываемых на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$. При $n=2$ мы не намерены накладывать явные алгебраические условия на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, т.е. $B_1(2)=0$ (в общем случае $B_1(n)=(n-1)(n-2)/2$). Введем лишь новое обозначение для универсальности, а именно, $f_1(\alpha)=: f(\alpha)$.

Число $B_2(2)$ равно количеству условий, накладываемых на коэффициенты связности, а именно,

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma_1(\alpha), \tag{1.1.4}$$

т.е. $B_2(2)=1$ (в общем случае $B_2(n)=n(n-1)/2$).

Число $B_3(3)$ равно количеству алгебраических и дифференциальных условий, накладываемых и на функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, и на коэффициенты связности, а именно,

$$\begin{cases} f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\equiv 0,\\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\equiv 0,\end{cases} \tag{1.1.5}$$

т.е. $B_3(2)=2$ (в общем случае $B_3(n)=n(n-1)/2+1$). Видно, что в общем случае

$$\begin{aligned} B(n)&=B_1(n)+B_2(n)+B_3(n)=\\ &=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+1=(n-1)^2+\frac{n(n-1)}{2}+1;\end{aligned}$$

при этом

$$A(n)-B(n)=\frac{3n(n-1)}{2}+2-(n-1)^2-\frac{n(n-1)}{2}-1=n,$$

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия. В нашем случае $A(2)-B(2)=2$.

Замечание 1.1. Пусть выполнено условие (1.1.4), при этом реализуется система дифференциальных равенств (1.1.5). Тогда справедливы следующие два (т.е. $n(n-1)/2+1$ при $n=2$) тождества:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha),\quad \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\equiv\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha). \tag{1.1.6}$$

Доказательство. В условиях замечания первое равенство из (1.1.5) переписывается в виде

$$f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha)+\frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f^2(\alpha)\Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\equiv 0. \tag{1.1.7}$$

Из (1.1.7) следуют первая строка тождеств из (1.1.6). Наконец, из последней строки (1.1.5) также следует последняя строка тождеств из (1.1.6). □

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 1.1. В нашем случае, при $n=2$, оно носит некоторый формальный (даже тавтологичный) смысл, который будет ясен при увеличении размерности $n\geqslant 3$ многообразия M^n.

Замечание 1.2. Пусть выполнено условие (1.1.4), при этом реализуются два тождества (1.1.6). Тогда справедлива система дифференциальных равенств (1.1.5), которая примет следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta}(\alpha) =: \Gamma_2(\alpha), \\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\alpha) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \\ f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma_1(\alpha) + \dfrac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha) \equiv 0. \end{cases} \tag{1.1.8}$$

Фактически уравнения (1.1.8) и (1.1.5) совпадают с точностью до обозначений. Как указано выше, это произошло по причине низкой размерности $n = 2$ многообразия M^n.

Таким образом, при выполнении одного условия (1.1.4) 2 условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) эквивалентны в упомянутом смысле.

1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы четвертого порядка достаточно знать, вообще говоря, три независимых инварианта. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (1.1.1), (1.1.3) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [71, 72]).

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (1.1.2), переписанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^{2} \Gamma^i_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k = 0, \ i = 1, 2, \tag{1.1.9}$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^{2} g_{jk}(x)\dot{x}^j\dot{x}^k, \tag{1.1.10}$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: на две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ из (1.1.1) и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha, \beta)$ из (1.1.2).

Теорема 1.1. *Если выполнены условия* (1.1.4), (1.1.8), *то система* (1.1.1), (1.1.3) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида*

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}; \tag{1.1.11}$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1\Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad \textit{где} \quad \Phi_0(\alpha) = f(\alpha)\exp\left\{2\int_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\}; \tag{1.1.12}$$

$$\Phi_3(\alpha, \beta) = \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f(b)}{f_2(b)\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(b) - C_2^2}}\, db = C_3 = \text{const}\,. \tag{1.1.13}$$

Более того, после замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau} \tag{1.1.14}$$

и фазовых

$$w_2 = z_2, \quad w_1 = z_1, \quad w_1^* = \ln|w_1|, \tag{1.1.15}$$

— *фазовый поток системы* (1.1.1), (1.1.3) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении* $TM^2\{w_2, w_1^*; \alpha, \beta\}$, *т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма*

$$dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta. \tag{1.1.16}$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 1.1, а именно, сделаем замены (1.1.14) независимой переменной и (1.1.15) фазовых переменных (переобозначение $z \to w$ в данном случае вводится для универсальности обозначений; см. далее случаи высших размерностей $n \geqslant 3$). Тогда система (1.1.1), (1.1.3) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_2, \\ \dot{w}_2 = -\dfrac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)e^{2w_1^*}, \\ \dot{w}_1^* = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)w_2, \end{cases} \tag{1.1.17}$$

$$\dot{\beta} = e^{w_1^*}\frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)}; \tag{1.1.18}$$

при этом в составной системе (1.1.17), (1.1.18), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (1.1.17), (1.1.18) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании трех первых интегралов. Действительно, дифференцирование функции (1.1.11) в силу системы (1.1.1), (1.1.3) дает

$$-2f_2(\alpha)\left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^3 - \\ - 2\left[f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha,\beta) + \frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] + f_1^2(\alpha)\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2 z_2}{f_2(\alpha)} \equiv 0,$$

если выполнена система дифференциальных равенств (1.1.5). Но, как указано выше, при выполнении одного условия (1.1.4) два условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) в известном смысле эквивалентны.

Дифференцирование функции (1.1.12) в силу системы (1.1.1), (1.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_2(\alpha)\left\{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha}\right\}z_1 z_2.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (1.1.12).

Далее, рассмотрим два уровня C_1^2 и C_2 первых интегралов (1.1.11) и (1.1.12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2\Phi_0^2(\alpha) - C_2^2}}. \tag{1.1.19}$$

Будем искать угол β из следующего уравнения, полученного из уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z_1}{z_2}\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}.$$

Используя в этом уравнении равенство (1.1.19), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (1.1.13). Теорема доказана. □

Заметим также, что система равенств (1.1.5) (или (1.1.8)) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (1.1.11) (или (1.2.2) ниже) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [1, 5, 21]). Поиск как первого интеграла (1.1.11), так и интегралов (1.1.12), (1.1.13) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий (см. [47, 49, 50]).

Пример 1.1. В случае сферических координат (α, β), когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована евклидовой метрикой объемлющего трехмерного пространства (задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \tag{1.1.20}$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \\ \dot{\beta} = z_1 \dfrac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1.21}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.21) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.2. В случае сферических координат (α, β), но когда метрика на двумерной сфере $\mathbb{S}^2$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (см. также [6], задача класса (a)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \dot{\beta}^2 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0, \quad \ddot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 0 \tag{1.1.22}$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -z_2, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\dfrac{1}{1+\nu_1\sin^2\alpha}, \\ \dot{\beta} = z_1 \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sqrt{1+\nu_1\sin^2\alpha}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1.23}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.23) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.3. В случае плоскости Лобачевского (с координатами $x = \beta$, $y = \alpha$, задача класса (c)) двухпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2) = 0, \quad \ddot{\beta} - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0 \tag{1.1.24}$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2\nu_1\alpha, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 \dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 \dfrac{\nu_1\alpha^2}{\alpha^2+\nu_2}, \\ \dot{\beta} = z_1 \dfrac{\nu_1\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\nu_2}}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1.25}$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.25) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 1.4. В случае цилиндрических координат объемлющего трехмерного пространства (ρ, $\varphi = \beta$, $z = \alpha$, задача класса (b)) двухпараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} + G_1(\alpha)\dot{\alpha}^2 + G_2(\alpha)\dot{\beta}^2 = 0, \quad \ddot{\beta} + G_3(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0, \tag{1.1.26}$$

где

$$G_1(\alpha) = \frac{\rho'(\alpha)\rho''(\alpha)}{1+\rho^2(\alpha)}, \quad G_2(\alpha) = \frac{\rho(\alpha)\rho'(\alpha)}{1+\rho^2(\alpha)}, \quad G_3(\alpha) = 2\frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)},$$

и имеющая первые интегралы (1.1.11)–(1.1.13), примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 \dfrac{\nu_1}{\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}}, \\ \dot{z}_2 = -z_1^2 G(\alpha), \\ \dot{z}_1 = z_1 z_2 G(\alpha), \\ \dot{\beta} = z_1 \dfrac{\nu_1}{\rho(\alpha)\sqrt{\nu_2\nu_1^2\rho^2(\alpha)-1}}, \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1.27}$$

где

$$G(\alpha) = \frac{\nu_1 \rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)\sqrt{1+\rho'^2(\alpha)}(\nu_2\nu_1^2\rho^2(\alpha)-1)},$$

если первое и четвертое уравнения системы (1.1.27) рассматривать как новые кинематические соотношения.

2. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в потенциальном силовом поле.

2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (1.1.1), (1.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле в проекциях на оси $\dot{z}_1$, $\dot{z}_2$ соответственно:

$$\tilde{F}(z_2, z_1; \alpha) = \begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = z_2 f_2(\alpha), \\ \dot{z}_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - \dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2, \\ \dot{z}_1 = F_1(\beta) f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2, \\ \dot{\beta} = z_1 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.2.1}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot{\beta}^2 = 0, \\ \ddot{\beta} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} = 0 \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}; \alpha, \beta\}$.

2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы четвертого порядка (1.2.1) достаточно знать, вообще говоря, три независимых инварианта. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (1.2.1) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее (ср. [75, 79, 80]).

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Теорема 1.2. *Если выполнены условия* (1.1.4), (1.1.8), *то система* (1.2.1) *обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов. Это*

$$\begin{gathered}\Phi_1(z_2,z_1;\alpha,\beta)=z_1^2+z_2^2+V(\alpha,\beta)=C_1=\mathrm{const},\\ V(\alpha,\beta)=V_2(\alpha)+V_1(\beta)=-2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}F_2(a)da-2\int\limits_{\beta_0}^{\beta}F_1(b)db,\end{gathered}\tag{1.2.2}$$

а также, для простоты, при $F_1(\beta)\equiv 0$ — первый интеграл (1.1.12) *и*

$$\Phi_3(\alpha,\beta)=\beta\pm\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{C_2f_1(b)}{f_2(b)\sqrt{\Phi_0^2(b)[C_1-V(b,\beta_0)]-C_2^2}}\,db=C_3=\mathrm{const}\,.\tag{1.2.3}$$

Более того, после замен независимой переменной (1.1.14) *и фазовых* (1.1.15) *— фазовый поток системы* (1.2.1) *сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^2\{w_2,w_1^*;\alpha,\beta\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма* (1.1.16).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 1.2, а именно, сделаем замены (1.1.14) независимой переменной и (1.1.15) фазовых переменных (напомним, что переобозначение $z\to w$ в данном случае вводится для универсальности обозначений — см. далее случаи высших размерностей ($n\geqslant 3$)). Тогда система (1.2.1) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\dot\alpha=w_2,\\ \dot w_2=F_2(\alpha)-\dfrac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)e^{2w_1^*},\\ \dot w_1^*=\dfrac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha)w_2,\end{cases}\tag{1.2.4}$$

$$\dot\beta=e^{w_1^*}\frac{f(\alpha)}{f_2(\alpha)};\tag{1.2.5}$$

при этом в составной системе (1.2.4), (1.2.5), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. Видно, что дивергенция правой части составной системы (1.2.4), (1.2.5) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании трех первых интегралов, при этом доказательство существования интеграла (1.1.12) проводится так же, как в теореме 1.1. Действительно, дифференцирование функции (1.2.2) в силу системы (1.2.1) дает

$$\begin{gathered}2z_2F_2(\alpha)f_2(\alpha)+2z_1F_1(\beta)f_1(\alpha)-2f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]z_2^3-\\ -2\left[f_2^2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)+\frac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]+f_1^2(\alpha)\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\right]\frac{z_1^2z_2}{f_2(\alpha)}-\\ -2z_2F_2(\alpha)f_2(\alpha)-2z_1F_1(\beta)f_1(\alpha)\equiv 0,\end{gathered}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (1.1.5). Но, как указано выше, при выполнении одного условия (1.1.4) два условия (1.1.5) и два условия (1.1.8) в известном смысле эквивалентны.

Далее, в условиях теоремы первый интеграл (1.2.2) примет вид

$$z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta_0) = C_1 = \mathrm{const}\,.$$

Рассмотрим два уровня C_1 и C_2 первых интегралов (1.2.2) и (1.1.12) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp\frac{C_2}{\sqrt{(C_1 - V(\alpha,\beta_0))\Phi_0^2(\alpha) - C_2^2}}. \tag{1.2.6}$$

Будем искать угол β из следующего уравнения, полученного из уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{z_1}{z_2}\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}.$$

Используя в этом уравнении равенство (1.2.6), и получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (1.2.3). Теорема доказана. $\square$

3. Инварианты систем на касательном расслоении к двумерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией.

3.1. Введение внешнего силового поля со знакопеременной диссипацией. Теперь несколько модифицируем систему (1.2.1). При этом получим систему *с диссипацией*. Именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (1.3.1) (в отличие от системы (1.2.1)), но и следующая линейная зависимость гладкого (внешнего) силового поля от z_1, z_2 в проекциях на оси $\dot z_1$, $\dot z_3$ соответственно:

$$\tilde F(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_2 = F_2(\alpha) f_2(\alpha) - f_2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_2^2 - -\dfrac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = F_1(\beta) f_1(\alpha) - f_2(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \dot\beta = z_1 f_1(\alpha), \end{cases} \tag{1.3.1}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot\alpha - \left\{b\tilde\delta(\alpha) + F_2^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\alpha - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + \\ \qquad + b^2\delta^2(\alpha)\left[\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_2(\alpha)|}{d\alpha}\right] + \Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}(\alpha,\beta)\dot\alpha^2 + \Gamma^\alpha_{\beta\beta}(\alpha,\beta)\dot\beta^2 = 0, \\ \ddot\beta - \left\{F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha)\left[2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta) + \dfrac{d\ln|f_1(\alpha)|}{d\alpha}\right]\right\}\dot\beta - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma^\beta_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)\dot\alpha\dot\beta = 0, \end{cases}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\dot\alpha, \dot\beta; \alpha, \beta\}$. Здесь, как и выше, $\tilde\delta(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha$.

3.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы (1.3.1) достаточно знать три независимых тензорных инварианта: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством три. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 1.3 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются три алгебраических и дифференциальных соотношения (1.1.4), (1.1.8) на пять функций: на две функции $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ и на три, вообще говоря, ненулевых коэффициента связности $\Gamma^i_{jk}(\alpha,\beta)$.

Перейдем к интегрированию искомой системы четвертого порядка (1.3.1) при выполнении свойств (1.1.4), (1.1.8), а также при отсутствии проекции внешней силы на ось $\dot z_1$ (т.е. отлична от нуля лишь проекция внешней силы на ось $\dot z_2$):

$$F_1(\beta)\equiv 0. \tag{1.3.2}$$

Тогда система (1.3.1) допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha = z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot z_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot z_1 = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \end{cases} \tag{1.3.3}$$

при наличии также четвертого уравнения

$$\dot\beta = z_1 f(\alpha). \tag{1.3.4}$$

В целях дальнейшей универсальности ведем обозначение

$$F_1^1(\alpha) =: F^1(\alpha) \tag{1.3.5}$$

(это станет более понятно в случаях высших размерностей) и формально переобозначим $w_k = z_k$, $k=1,2$. В результате система (1.3.3), (1.3.4) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - \dfrac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) w_1^2 + w_2 F_2^1(\alpha), \\ \dot w_1 = \dfrac{f^2(\alpha)}{f_2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) w_1 w_2 + w_1 F^1(\alpha), \end{cases} \tag{1.3.6}$$

$$\dot\beta = w_1 f(\alpha). \tag{1.3.7}$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (1.3.6), (1.3.7) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (1.3.6) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (1.3.7) (т.е. всего *три* инварианта).

Наложим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa\in\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)}\Gamma_2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\Delta(\alpha)| = \kappa\frac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad \tilde\Delta(\alpha) = \frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \tag{1.3.8}$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_k^1\in\mathbb{R}$, $k=1,2$, должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} F_2(\alpha) = \lambda_2^0\frac{d}{d\alpha}\frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_2^0\tilde\Delta(\alpha)\Delta(\alpha), \\ F_k^1(\alpha) = \lambda_k^1 f_2(\alpha)\frac{d}{d\alpha}\Delta(\alpha) = \lambda_k^1\tilde\Delta(\alpha) f_2(\alpha), \quad k=1,2. \end{gathered} \tag{1.3.9}$$

Условие (1.3.8) назовем «геометрическим», а условия из группы (1.3.9) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 =: \lambda^1$ в силу (1.3.5).

Условие (1.3.8) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_2(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения.

Условия группы (1.3.9) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле, «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ и вносит в систему диссипацию разных знаков, или так называемую *(знако)переменную диссипацию* (см. также [60, 62, 64, 65]).

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия* (1.3.8) *и* (1.3.9). *Тогда система* (1.3.6), (1.3.7) *обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными* (см. [24]) (*т.е. имеющими существенно особые точки*) *первыми интегралами.*

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 1.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (1.3.6) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dw_2}{d\alpha} = \dfrac{F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1^2/f_2(\alpha) + w_2F_2^1(\alpha)}{w_2f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_1}{d\alpha} = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)w_1w_2/f_2(\alpha) + w_1F^1(\alpha)}{w_2f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \tag{1.3.10}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_2 = u_2\Delta(\alpha), \quad w_1 = u_1\Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \tag{1.3.11}$$

приводим систему (1.3.10) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_2 = \dfrac{F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_2(\alpha) + \Delta(\alpha)F_2^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha)u_1 = \dfrac{f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_2(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \tag{1.3.12}$$

что с учетом (1.1.8), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha)\dfrac{du_2}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg(F_2(\alpha)f_2(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_2(\alpha)} - \\ \qquad\qquad - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + \Big[\Delta(\alpha)F_2^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_2\Bigg), \\ \Delta(\alpha)\dfrac{du_1}{d\alpha} = \dfrac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}\Bigg(\Big[f^2(\alpha)\Gamma_2(\alpha)\dfrac{\Delta^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1u_2 + \\ \qquad\qquad + \Big[\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)\Big]u_1\Bigg), \end{cases} \tag{1.3.13}$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$. Теперь для интегрирования системы (1.3.13) нам потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (1.3.8) и (1.3.9). Действительно, после их выполнения система (1.3.13) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_2^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \tag{1.3.14}$$

Уравнение (1.3.14) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$ данное уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_2^0}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.3.15}$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_2, w_1; \alpha) = \frac{f_2^2(\alpha)(w_2^2 + w_1^2) + (b - \lambda^1)w_2\delta(\alpha)f_2(\alpha) - \lambda_2^0\delta^2(\alpha)}{w_1\delta(\alpha)f_2(\alpha)} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{1.3.16}$$

Замечание 1.3. Если α — периодическая координата периода 2π, то система (1.3.6) (как часть системы (1.3.6), (1.3.7)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [51, 53, 57]). Если же α не является периодической координатой, то мы в данном случае говорим о системе со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (1.1.8), геометрического и энергетических условий (1.3.8), (1.3.9) (но при любой гладкой функции $F_2(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_2^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_2 = F_2(\alpha)f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_1^2 - bw_2 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_1 = \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}w_1 w_2 - bw_1 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{1.3.17}$$

Действительно, система (1.3.17) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_2, w_1; \alpha) = w_1^2 + w_2^2 + 2bw_2\Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \mathrm{const}, \quad V(\alpha) = -2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a)da, \tag{1.3.18}$$

$$\Phi_2(w_1; \alpha) = w_1\Delta(\alpha) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{1.3.19}$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов, имеем:

$$\Phi_2(w_1; \alpha) = w_1 f(\alpha)\exp\left\{2\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_1(b)db\right\} =$$

$$= w_1 f(\alpha)\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\left[\Gamma_2(b)\frac{f^2(b)}{f_2^2(b)} + \frac{d\ln|f(b)|}{db}\right]db\right\} \cong w_1\exp\left\{-\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\Gamma_2(b)\frac{f^2(b)}{f_2^2(b)}db\right\},$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. Теперь в силу (1.3.8), (1.3.9) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_1\exp\left\{\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d}{db}\ln|\Delta(b)|db\right\} \cong w_1\Delta(\alpha) \tag{1.3.20}$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.3.18), (1.3.19) также является первым интегралом системы (1.3.17). Но при $\lambda^1 = \lambda_2^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + (b - \lambda^1)w_2\Delta(\alpha) - \lambda_2^0\Delta^2(\alpha) \tag{1.3.21}$$

и (1.3.19) по отдельности не является первым интегралом системы (1.3.6). Однако отношение функций (1.3.21), (1.3.19) является первым интегралом системы (1.3.6) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_2^1$ и b.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.3.6) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$. Преобразуем инвариантное соотношение (1.3.15) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_2^0. \tag{1.3.22}$$

Ясно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_2^0 \geqslant 0, \tag{1.3.23}$$

и фазовое пространство системы (1.3.6) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.3.22).

Таким образом, в силу соотношения (1.3.15) первое уравнение системы (1.3.13) при условиях (1.3.8) и (1.3.9) и при $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_2^1$ примет вид

$$-\frac{\Delta(\alpha)}{\tilde{\Delta}(\alpha)}\frac{du_2}{d\alpha}=\frac{2(-\lambda_2^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2)+C_1U_1(C_1,u_2)}{u_2+b},$$

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\left\{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_2^0)}\right\};$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.3.23). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.3.6) примет вид

$$-\int\frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)}=\int\frac{(b+u_2)du_2}{2\big(-\lambda_2^0-(\lambda^1-b)u_2+u_2^2\big)+C_1\big\{-C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-(\lambda^1-b)u_2-\lambda_2^0)}\big\}/2}. \tag{1.3.24}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln|\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2-\frac{\lambda^1-b}{2}=r_1,\quad b_1^2=(\lambda^1-b)^2+C_1^2+4\lambda_2^0,$$

то правая часть равенства (1.3.24) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm1\right|\mp\frac{b}{2}I_1,$$

где

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{1.3.25}$$

При вычислении интеграла (1.3.25) возможны три случая.

I: $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda_1-b)^2+4\lambda_2^0}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\right|+\mathrm{const}.$$

II: $(\lambda^1-b)^2<-4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{-4\lambda_2^0-(\lambda^1-b)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

III: $(\lambda^1-b)^2=-4\lambda_2^0$. В этом случае

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_2}{\Delta(\alpha)}-\frac{\lambda^1-b}{2},$$

находим окончательный вид для величины I_1:

I. При $(\lambda^1-b)^2>-4\lambda_2^0$

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}\pm2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\ln\left|\frac{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}\mp2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1-b)^2+4\lambda_2^0}}\right|+\mathrm{const}.$$

II. При $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_2^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_2^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}\,.$$

III. При $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_2^0$

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}\,.$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.3.6) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_2^1$): предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 1.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.3.15).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_2, w_1; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_1}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{1.3.26}$$

Выражение первого интеграла (1.3.26) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (а она, в принципе, может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы четвертого порядка (1.3.6), (1.3.7) при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (1.3.6). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.3.7).

Для получения искомого интеграла общий подход заключается в следующем. Получим из рассматриваемой системы (1.3.6), (1.3.7) следующее уравнение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{w_1 f(\alpha)}{w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \tag{1.3.27}$$

Поскольку выше были найдены два функционально независимых первых интеграла (1.3.16), (1.3.26), не зависящих от фазовой переменной β, то, по теореме о неявной функции, поскольку

$$\frac{\partial(\Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \Theta_2(w_2, w_1; \alpha))}{\partial(w_2, w_1)} \neq 0 \tag{1.3.28}$$

почти всюду, то в фазовом пространстве существуют достаточно гладкие функции

$$w_2 = W_2(\alpha; C_1, C_2),\ w_1 = W_1(\alpha; C_1, C_2), \tag{1.3.29}$$

при подстановке в первые интегралы (1.3.16), (1.3.26) дающие тождества, а значит, сотканые из решений рассматриваемой системы.

Таким образом, при подстановке функций (1.3.29) в уравнение (1.3.27) имеем следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{W_1(\alpha; C_1, C_2) f(\alpha)}{W_2(\alpha; C_1, C_2) f_2(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \tag{1.3.30}$$

позволяющее найти искомое инвариантное соотношение в квадратурах:

$$\beta - \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{W_1(a; C_1, C_2) f(a)}{W_2(a; C_1, C_2) f_2(a) + b\delta(a)}\, da = C_3 = \mathrm{const}\,. \tag{1.3.31}$$

Последнее соотношение имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_3(\alpha, \beta) = G_3\left(\alpha, \beta, C_1, C_2\right) = C_3 = \mathrm{const}\,. \tag{1.3.32}$$

Предъявленный только что достаточно общий подход поиска дополнительного первого интеграла, «привязывающего» уравнение на β, имеет ряд своих недостатков. Например, остается под вопросом область фазового пространства, в которой может быть применено неравенство (1.3.28). Но данный недостаток носит в принципе технический характер.

Как показывают приложения, дословно данный общий подход применять не требуется, поскольку уравнение (1.3.27), как правило, упрощается. Поясним последние рассуждения. Сопоставим рассматриваемой системе (1.3.6), (1.3.7) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha)\frac{du_1}{d\alpha} &= \frac{\left[(\kappa-1)u_1u_2+(\lambda^1-b)u_1\right]\tilde{\Delta}(\alpha)}{u_2+b}, \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= \frac{u_1 f(\alpha)/f_2(\alpha)}{u_2+b}, \end{aligned} \tag{1.3.33}$$

которые получаются переходом к однородным переменным (1.3.11). Из уравнений (1.3.33) вытекает дифференциальное соотношение

$$\frac{du_1}{d\beta} = \left[(\kappa-1)u_2+(\lambda^1-b)\right]\frac{\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha)}{\Delta(\alpha)f(\alpha)}, \tag{1.3.34}$$

в котором функция $\tilde{\Delta}(\alpha)f_2(\alpha)/\Delta(\alpha)f(\alpha)$ очень часто является постоянной величиной. Далее применяется дифференциальное соотношение (1.3.15), и искомый первый интеграл находится через квадратуры.

После перехода к однородным переменным (1.3.11) уравнение (1.3.27) перепишется в виде

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{u_1 f(\alpha)/f_2(\alpha)}{u_2+b} \tag{1.3.35}$$

и для получения искомого первого интеграла достаточно выразить комбинацию $u_1/(u_2+b)$ через соотношения, соответствующие первым интегралам (1.3.16), (1.3.26).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.3.6), (1.3.7) имеет три первых интеграла, являющихся, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 1.3 доказана. □

3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 1.4. *Если для систем вида* (1.3.6), (1.3.7) *выполняются геометрическое и энергетические свойства* (1.3.8), (1.3.9), *то у нее также существуют функционально независимые между собой три инвариантных дифференциальных формы с, вообще говоря, трансцендентными* (*т.е. имеющими существенно особые точки*) *коэффициентами. Эти дифференциальные формы, для простоты, при* $\kappa=-1$, $\lambda^1=\lambda_2^1$ *примут следующий вид:*

$$\rho_1(w_2,w_1;\alpha)dw_2\wedge dw_1\wedge d\alpha, \quad \rho_2(w_2,w_1;\alpha)dw_2\wedge dw_1\wedge d\alpha,$$
$$\rho_3(w_2,w_1;\alpha,\beta)dw_2\wedge dw_1\wedge d\alpha\wedge d\beta,$$

где

$$\rho_1(w_2,w_1;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\}\frac{u_2^2+u_1^2+(b-\lambda^1)u_2-\lambda_2^0}{u_1}, \quad u_k=\frac{w_k}{\Delta(\alpha)},\ k=1,2;$$
$$\rho_2(w_2,w_1;\alpha) = \Delta(\alpha)\exp\left\{\int\frac{(2b+\lambda^1+u_2)du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\},$$
$$\rho_3(w_2,w_1;\alpha,\beta) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int\frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\};$$

они, вообще говоря, зависимы с первыми интегралами (1.3.16), (1.3.26), (1.3.32).

Доказательство. I. Система (1.3.6) составной рассматриваемой системы (1.3.6), (1.3.7) при выполнении свойств (1.3.8), (1.3.9) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_2 = \lambda_2^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1^2 + \lambda_2^1 w_2 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_1 = \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1 w_2 + \lambda^1 w_1 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{1.3.36}$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \quad w_1^* = \ln|w_1| \tag{1.3.37}$$

система (1.3.36) примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) = w_2 + b\Delta(\alpha), \\ \dot w_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) = \lambda_2^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa \dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_1^*} + \lambda_2^1 w_2 \tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) = \kappa \dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 + \lambda^1 \tilde\Delta(\alpha); \end{cases} \tag{1.3.38}$$

при этом в системе (1.3.38) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. В принципе, замена фазовой переменной (1.3.37) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_1^*, так и переменную w_1.

Для системы (1.3.38) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_2, w_1^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_2, w_1^*; \alpha) dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_2, w_1^*; \alpha) X(w_2, w_1^*; \alpha)\right] = 0, \tag{1.3.39}$$

где

$$X(w_2, w_1^*; \alpha) = \left\{X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha),\ X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha),\ X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha)\right\} \tag{1.3.40}$$

— векторное поле рассматриваемой системы (1.3.38) в координатах $(w_2, w_1^*; \alpha)$. Уравнение (1.3.39) перепишется в виде

$$X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_2} + X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_1^*} = -\rho \operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha); \tag{1.3.41}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha) = (b + \lambda_2^1)\tilde\Delta(\alpha). \tag{1.3.42}$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (1.3.41) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot w_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot\rho = -\rho(b + \lambda_2^1)\tilde\Delta(\alpha). \end{cases} \tag{1.3.43}$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (1.3.43), уже найдены два первых интеграла (1.3.16) и (1.3.26). Найдем третий независимый первый интеграл системы (1.3.43) уравнений характеристик. Сопоставим системе (1.3.43) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_2}{d\alpha} = \dfrac{\lambda_2^0\Delta(\alpha)\tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_1^2/\Delta(\alpha) + \lambda_2^1 w_2\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{dw_1}{d\alpha} = \dfrac{\kappa\tilde{\Delta}(\alpha)w_1w_2/\Delta(\alpha) + \lambda^1 w_1\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b\Delta(\alpha)}, \\ \dfrac{d\rho}{d\alpha} = -\dfrac{(b+\lambda_2^1)\rho\tilde{\Delta}(\alpha)}{w_2 + b\Delta(\alpha)} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dw_2}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_2^0\Delta - \kappa w_1^2/\Delta + \lambda_2^1 w_2}{w_2 + b\Delta}, \\ \dfrac{dw_1}{d\Delta} = \dfrac{\kappa w_1w_2/\Delta + \lambda^1 w_1}{w_2 + b\Delta}, \\ \dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_2^1)\rho}{w_2 + b\Delta}. \end{cases} \tag{1.3.44}$$

После введения однородных переменных

$$w_2 = u_2\Delta, \quad w_1 = u_1\Delta, \tag{1.3.45}$$

похожих на соответствующие переменные в замене (1.3.11), система (1.3.44) перепишется в виде

$$\begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \dfrac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_2^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \dfrac{\kappa u_1u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_2^1)\rho}{u_2 + b} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta\dfrac{du_2}{d\Delta} = \dfrac{\lambda_2^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b-\lambda_2^1)u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{du_1}{d\Delta} = \dfrac{(\kappa-1)u_1u_2 - (b-\lambda^1)u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta\dfrac{d\rho}{d\Delta} = -\dfrac{(b+\lambda_2^1)\rho}{u_2 + b}. \end{cases} \tag{1.3.46}$$

Из первых двух уравнений системы (1.3.46) получается первый интеграл (1.3.16). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2+b)du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \tag{1.3.47}$$

где

$$U_2(C_1,u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\}, \quad U_1(u_2) = u_2^2 + (b-\lambda^1)u_2 - \lambda_2^0, \quad C_1 \neq 0,$$

получается первый интеграл (1.3.26) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_2^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b+\lambda^1)\rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)} \tag{1.3.48}$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ.

Вычислим квадратуру (1.3.48). Справедливо следующее инвариантное соотношение:

$$\rho \cdot \exp\left\{-(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} = C_\rho = \text{const}, \tag{1.3.49}$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (1.3.43). Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.3.41) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \cdot \mathcal{F}\left[\Theta_1, \Theta_2\right], \tag{1.3.50}$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1,\Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (1.3.16), (1.3.26) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (1.3.41) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_2,w_1;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(w_2,w_1;\alpha), \tag{1.3.51}$$

$$\rho_2(w_2,w_1;\alpha) = \exp\left\{(b+\lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1,u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(w_2,w_1;\alpha), \tag{1.3.52}$$

где $u_2 = w_2/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_1/\Delta(\alpha)$.

II. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_2, w_1; \alpha)$, $p = 1, 2$, были получены выше через исследование отдельной системы (1.3.6), которая сама составляет общую рассматриваемую составную систему (1.3.6), (1.3.7). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит нам, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (1.3.7).

Составная рассматриваемая система (1.3.6), (1.3.7) при выполнении свойств (1.3.8), (1.3.9) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot\alpha = w_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot w_2 = \lambda_2^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) f_2(\alpha) - \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1^2 + \lambda_2^1 w_2 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_1 = \kappa f_2(\alpha)\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_1 w_2 + \lambda^1 w_1 f_2(\alpha)\tilde\Delta(\alpha), \end{cases} \tag{1.3.53}$$

$$\dot\beta = w_1 f(\alpha). \tag{1.3.54}$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_2(\alpha)\frac{d}{d\tau}, \quad w_1^* = \ln|w_1| \tag{1.3.55}$$

— составная система (1.3.53), (1.3.54) примет вид

$$\begin{cases} \dot\alpha = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha) = w_2 + b\Delta(\alpha), \\ \dot w_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha) = \lambda_2^0 \Delta(\alpha)\tilde\Delta(\alpha) - \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_1^*} + \lambda_2^1 w_2 \tilde\Delta(\alpha), \\ \dot w_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha) = \kappa\dfrac{\tilde\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_2 + \lambda^1 \tilde\Delta(\alpha), \end{cases} \tag{1.3.56}$$

$$\dot\beta = X_\beta(w_1^*; \alpha) = e^{w_1^*}\frac{f(\alpha)}{f_3(\alpha)}; \tag{1.3.57}$$

при этом в составной системе (1.3.56), (1.3.57), и только в ней, точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ. В принципе, замена фазовой переменной (1.3.55) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_1^*, так и переменную w_1.

Для составной системы (1.3.56), (1.3.57) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$, соответствующие дифференциальным формам объема

$$\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) dw_2 \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

из линейного дифференциального уравнения

$$\operatorname{div}\left[\rho(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)\right] = 0, \tag{1.3.58}$$

где

$$X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) = \Big\{X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha),\ X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha),\ X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha),\ X_\beta(w_1^*; \alpha)\Big\} \tag{1.3.59}$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (1.3.56), (1.3.57) в координатах $(w_2, w_1^*; \alpha, \beta)$. Уравнение (1.3.58) перепишется в виде

$$X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_\alpha + X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_2} + X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha)\rho_{w_1^*} + X_\beta(w_1^*; \alpha)\rho_\beta = \\ = -\rho \operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta); \tag{1.3.60}$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_2, w_1^*; \alpha, \beta) = (b + \lambda_2^1)\tilde\Delta(\alpha), \tag{1.3.61}$$

как и в случае (1.3.42) для «отдельной» системы (1.3.38)!

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (1.3.60) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_2 = X_{w_2}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{w}_1^* = X_{w_1^*}(w_2, w_1^*; \alpha), \\ \dot{\beta} = X_\beta(w_1^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_2^1)\tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \tag{1.3.62}$$

она включает систему уравнений характеристик (1.3.43) для уравнения в частных производных (1.3.41).

У системы, состоящей из первых четырех уравнений системы (1.3.62), уже найдены три первых интеграла (1.3.16), (1.3.26) и (1.3.32) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (1.3.49), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (1.3.62)) на функцию ρ.

Таким образом, общее решение линейного уравнения (1.3.60) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \mathcal{H}\left[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\right], \tag{1.3.63}$$

где $\mathcal{H}\left[\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\right]$ — произвольная гладкая функция трех аргументов, при этом Θ_1, Θ_2, Θ_3 — три первых интеграла (1.3.16), (1.3.26), (1.3.32) соответственно.

В частности, за три функционально независимых решения линейного уравнения (1.3.60) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_2, w_1; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_1(w_2, w_1; \alpha), \tag{1.3.64}$$

$$\rho_2(w_2, w_1; \alpha) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_2(w_2, w_1; \alpha), \tag{1.3.65}$$

$$\rho_3(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \exp\left\{(b + \lambda^1)\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(\alpha, \beta), \tag{1.3.66}$$

где $u_2 = w_2/\Delta(\alpha)$, $u_1 = w_1/\Delta(\alpha)$.

Видно, что в разделе II данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (1.3.56), (1.3.57). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_2, w_1; \alpha) dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_2, w_1; \alpha) dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (1.3.6), но и для составной системы (1.3.6), (1.3.7). Теорема 1.3 доказана. □

Итак, для полной интегрируемости системы (1.3.6), (1.3.7) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством три (ср. [54, 55, 59]).

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [58, 61]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [63]).

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения (см. [26, 27]), касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского. При этом из всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим также работы [20, 22].

4. Пример: пространственный маятник в потоке набегающей среды. Кратко охарактеризуем задачу о физическом маятнике на сферическом шарнире в потоке набегающей среды, начатую в [26]. Пространство положений такого маятника — двумерная сфера $\mathbb{S}^2\{0 \leqslant \xi \leqslant \pi,$

$\eta \bmod 2\pi\}$, фазовое пространство — касательное расслоение $T\mathbb{S}^2\{\dot{\xi},\ \dot{\eta};\ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi,\ \eta \bmod 2\pi\}$ к ней.

При рассматриваемых модельных предположениях выписаны уравнения движения такого маятника, где, в том числе, доказано утверждение о том, что динамическая система, описывающая поведение такого маятника, траекторно топологически эквивалентна следующей динамической системе на касательном расслоении двумерной сферы (угол ξ измеряется «по потоку»):

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + b\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \dot{\eta}^2\dfrac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\ \ddot{\eta} + b\dot{\eta}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}\dfrac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} = 0, \quad b > 0. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Система (1.4.1) почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -w_2 - b\sin\xi, \\ \dot{w}_2 = \sin\xi\cos\xi - w_1^2\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ \dot{w}_1 = w_1 w_2\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \end{cases} \tag{1.4.2}$$

$$\dot{\eta} = w_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi} \tag{1.4.3}$$

на касательном расслоении двумерной сферы.

Видно, что в системе четвертого порядка (1.4.2), (1.4.3) по причине цикличности переменной η выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.4.2), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии.

Ключевой первый интеграл системы (1.4.2), (1.4.3) (который может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.16) (см. выше)) имеет следующий вид:

$$\Theta_1(w_2, w_1; \xi) = \frac{w_2^2 + w_1^2 + bw_2\sin\xi + \sin^2\xi}{w_1\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{1.4.4}$$

Все вышеизложенные замечания о гладкости первых интегралов применимы и к ключевому первому интегралу (1.4.4).

Замечание 1.5. Рассмотрим систему (1.4.2) с переменной диссипацией с нулевым средним [45, 78], становящейся консервативной при $b = 0$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -w_2, \\ \dot{w}_2 = \sin\xi\cos\xi - w_1^2\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ \dot{w}_1 = w_1 w_2\dfrac{\cos\xi}{\sin\xi}. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_2^2 + w_1^2 + \sin^2\xi = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{1.4.6}$$

$$w_1\sin\xi = C_2^* = \mathrm{const}\,. \tag{1.4.7}$$

Очевидно, что отношение двух интегралов (1.4.6), (1.4.7) также является первым интегралом системы (1.4.5). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$w_2^2 + w_1^2 + bw_2\sin\xi + \sin^2\xi \tag{1.4.8}$$

и (1.4.7) по отдельности не является первым интегралом системы (1.4.2). Однако отношение функций (1.4.8), (1.4.7) является первым интегралом системы (1.4.2) при любом b.

Дополнительный первый интеграл системы (1.4.2) может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.26) (см. выше), выражается через элементарные функции и имеет следующий вид (ввиду громоздкости выпишем его структурный вид):

$$\Theta_2(w_2, w_1; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_2}{\sin\xi}, \frac{w_1}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}\,. \tag{1.4.9}$$

Функция G является трансцендентной в смысле комплексного анализа, т.е. имеет существенно особые точки, задаваемые системой

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \sin\xi = 0. \tag{1.4.10}$$

Вне точек (1.4.10) фазового пространства рассматриваемый первый интеграл можно рассматривать как гладкую функцию.

Еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1.4.3), можно представить в виде

$$\Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta) = -\eta \pm \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{w_1^2 - w_2^2 - bw_2\sin\xi - \sin^2\xi}{w_1(2w_2 + b\sin\xi)} = C_3 = \mathrm{const}\,. \tag{1.4.11}$$

Он обладает теми же свойствами, что и функция G. Данный первый интеграл может быть найден методом, аналогичным поиску первого интеграла (1.3.32) (см. выше).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.4.2), (1.4.3) имеет три первых интеграла, выражающихся соотношениями (1.4.4), (1.4.9), (1.4.11), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (т.е. имеющих существенно особые точки) и выражающихся через элементарные функции.

Можно также предъявить инвариантные дифференциальные формы для рассматриваемой системы динамических уравнений:

$$\rho_1(w_2, w_1; \xi)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi, \quad \rho_2(w_2, w_1; \xi)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi, \quad \rho_3(w_2, w_1; \xi, \eta)dw_2 \wedge dw_1 \wedge d\xi \wedge d\eta,$$

где

$$\rho_1(w_2, w_1; \xi) = \exp\left\{b\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \frac{u_2^2 + u_1^2 + bu_2 + 1}{u_1},$$

$$\rho_2(w_2, w_1; \xi) = \sin\xi \exp\left\{\int \frac{(2b + u_2)du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\},$$

$$\rho_3(w_2, w_1; \xi, \eta) = \exp\left\{b\int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)}\right\} \cdot \Theta_3(w_2, w_1; \xi, \eta), \quad u_2 = \frac{w_2}{\sin\xi}, \quad u_1 = \frac{w_1}{\sin\xi},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + bu_2 + 1, \quad U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)}\right\}, \quad C_1 \neq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. *Вейль Г.* Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2001. — *380*, № 1. — С. 47–50.
5. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$// Докл. РАН. — 2002. — *383*, № 5. — С. 635–637.
6. *Георгиевский Д. В., Шамолин М. В.* Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — *5*. — С. 37–41.
7. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. *Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании// Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.

9. *Иванова Т. А.* Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 2. — С. 43–51.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Усп. мат. наук. — 1983. — *38*, № 1. — С. 3–67.
13. *Козлов В. В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем// Прикл. мат. мех. — 2015. — *79*, № 3. — С. 307–316.
14. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 1 (445). — С. 117–148.
15. *Колмогоров А. Н.* О динамических системах с интегральным инвариантом на торе// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 5. — С. 763–766.
16. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — *9*, № 100. — С. 136–150.
17. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — *9/1*, № 110. — С. 35–41.
18. *Походня Н. В., Шамолин М. В.* Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — *7*, № 118. — С. 60–69.
19. *Самсонов В. А., Шамолин М. В.* К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. *Трофимов В. В.* Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 5. — С. 1191–1199.
21. *Трофимов В В.* Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем// Докл. АН СССР. — 1980. — *254*, № 6. — С. 1349–1353.
23. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем// Фундам. прикл. мат. — 2010. — *16*, № 4. — С. 3–229.
24. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 3. — С. 209–210.
26. *Шамолин М. В.* Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой// Докл. РАН. — 1999. — *364*, № 5. — С. 627–629.
27. *Шамолин М. В.* Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде// Докл. РАН. — 2000. — *375*, № 3. — С. 343–346.
28. *Шамолин М. В.* Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 1. — С. 169–170.
29. *Шамолин М. В.* Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 6. — С. 233–234.
30. *Шамолин М. В.* Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — *69*, № 6. — С. 1003–1010.
31. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 5. — С. 169–170.
32. *Шамолин М. В.* Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — *425*, № 3. — С. 338–342.
33. *Шамолин М. В.* Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — *65*, № 1. — С. 189–190.
34. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — *437*, № 2. — С. 190–193.
35. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — *440*, № 2. — С. 187–190.

36. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *444*, № 5. — С. 506–509.
37. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — *442*, № 4. — С. 479–481.
38. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 1. — С. 46–49.
39. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 5 (413). — С. 185–186.
40. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 4. — С. 416–419.
41. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — *457*, № 5. — С. 542–545.
42. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — *20*, № 4. — С. 3–231.
43. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 533–536.
44. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — *464*, № 6. — С. 688–692.
45. *Шамолин М. В.* Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — *52*, № 6. — С. 743–759.
46. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 519–523.
47. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — *474*, № 2. — С. 177–181.
48. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 2. — С. 168–172.
49. *Шамолин М. В.* Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анал. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *482*, № 5. — С. 527–533.
51. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — *479*, № 3. — С. 270–276.
52. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 6. — С. 592–598.
53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *485*, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — *487*, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *491*, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *494*, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — *495*, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *497*, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *500*, № 1. — С. 78–86.

60. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — *501*, № 1. — С. 89–94.
61. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — *507*, № 1. — С. 86–92.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 22–54.
63. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *205*. — С. 55–94.
64. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *208*. — С. 91–121.
65. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 88–107.
66. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *209*. — С. 108–116.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 77–95.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 96–105.
69. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 29–40.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *211*. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212*. — С. 120–138.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *212*. — С. 139–148.
73. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. III. Системы на касательных расслоениях гладких n-мерных многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *213*. — С. 96–109.
74. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого n-мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *214*. — С. 82–106.
75. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоении к n-мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *216*. — С. 133–152.
76. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — *509*, № 1. — С. 69–76.
77. *Poincaré H.* Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
78. *Shamolin M. V.* Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — P. 2528–2557.

79. *Shamolin M. V.* Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. "Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms" (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
80. *Tikhonov A. A., Yakovlev A. B.* On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — *13*, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолин Максим Владимирович
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru