ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 59–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-59-68

УДК 517.925

КВАЗИБЕЗМОНОДРОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

© 2023 г. **А. А. ГОЛУБКОВ**

Аннотация. Введено понятие квазибезмонодромной особой точки системы дифференциальных уравнений первого порядка с параметром и аналитическими на комплексной плоскости коэффициентами, как такой особой точки, некоторая степень матрицы монодромии M которой при всех допустимых значениях параметра пропорциональна единичной матрице. При этом коэффициент пропорциональности может как зависеть, так и не зависеть от параметра. Для системы двух уравнений сформулированы условия на матрицу M, её след и определитель, необходимые и достаточные для того, чтобы особая точка системы была квазибезмонодромной. Приведены примеры систем двух уравнений с такими особыми точками, включая точки ветвления одного из коэффициентов системы.

Ключевые слова: безмонодромная особая точка, квазибезмонодромная особая точка.

QUASI-NONMONODROMIC SYSTEMS OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A PARAMETER

© 2023 **A. A. GOLUBKOV**

1. Введение. Матрица монодромии. Безмонодромные и квазибезмонодромные системы уравнений первого порядка. Рассмотрим систему L линейных дифференциальных уравнений с параметром λ

$$\frac{dy}{dz} = A(z,\lambda)y, \quad z \in K, \tag{1}$$

в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$. Здесь Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек, причем область Ω_1 может состоять и из единственной точки. Будем считать, что матрица коэффициентов $A(z,\lambda)$ голоморфна всюду в области K при $\lambda \in \mathbb{C}$, однако это условие можно ослабить, ограничив область допустимых значений параметра λ.

Пусть существует такое минимальное целое число $N \geqslant 1$, что при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ аналитическое продолжение матричной функции $A(z,\lambda)$ вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset K$, N раз обходящей область Ω_1 в положительном направлении и имеющей начало конец в точке z_0, совпадает с исходной матричной функцией в окрестности точки z_0 (процедура аналитического продолжения вдоль кривой описана, например, в [12, гл. 8, § 5]). В частности, $N = 1$, если все элементы матрицы A являются однозначными функциями $z \in K$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим через $Y_0(z,\lambda,z_0)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений системы (1) в окрестности точки $z_0 \in K$ при некотором значении параметра λ, а через $Y_1(z,\lambda,z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль кривой γ. По построению кривой γ матрицы Y_0 и Y_1 являются в окрестности точки z_0 фундаментальными матрицами для одной и той же системы уравнений (1). Поэтому для системы (1) существует такая постоянная невырожденная *матрица монодромии* M *области* Ω_1, что

$$Y_1(z,\lambda,z_0) = Y_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,Y_0). \tag{2}$$

Пусть теперь $Y_n(z,\lambda,z_0)$ — аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямлямой кривой $\gamma_n \subset K$ с началом и концом в точке z_0, которая nN раз обходит область Ω_1. При этом $n > 0$, если обход происходит в положительном направлении, и $n < 0$, если в отрицательном. Нетрудно убедиться, что

$$Y_n(z,\lambda,z_0) = Y_0(z,\lambda,z_0)M^n(\lambda,Y_0).$$

Заметим, что матрица монодромии области Ω_1 в силу аналитичности матрицы коэффициентов A в области K не зависит от формы кривой $\gamma \subset K$, но зависит от выбора фундаментальной матрицы Y_0. Действительно, рассмотрим аналитическое продолжение вдоль кривой γ фундаментальной матрицы $\widetilde{Y}_0 := Y_0T$, где T — произвольная постоянная невырожденная матрица. Тогда получим, что

$$\widetilde{Y}_1(z,\lambda,z_0) = Y_1(z,\lambda,z_0)T = Y_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,Y_0)T = \\ = \widetilde{Y}_0(z,\lambda,z_0)T^{-1}M(\lambda,Y_0)T = \widetilde{Y}_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,\widetilde{Y}_0),$$

где $M(\lambda,\widetilde{Y}_0) = T^{-1}M(\lambda,Y_0)T$. К аналогичному результату приводит также сдвиг начальной и конечной точки z_0 замкнутой кривой γ, а для многозначной матричной функции A — также и изменение выбора её начальной ветви. Таким образом, все матрицы монодромии области Ω_1 подобны друг другу, и, следовательно, имеют одинаковые след m и определитель d. Более того, из формулы Лиувилля (см. [10, ч. 1, § 9]) и соотношения (2) непосредственно следует, что определитель d любой матрицы монодромии системы (1), состоящей из L уравнений, однозначно определяется интегралом вдоль описанной выше кривой γ от следа матрицы коэффициентов A и может быть записан в виде

$$d(\lambda) = d_0^L(\lambda), \quad \text{где} \quad d_0(\lambda) := \exp\left\{\int\limits_{\gamma} \frac{1}{L}\operatorname{Tr}\big(A(z,\lambda)\big)dz\right\}; \tag{3}$$

он заведомо отличен от нуля при любом значении λ, при котором след матрицы $A(z,\lambda)$ голоморфен всюду в областиЁK.

Из формулы (3) и подобия друг другу всех матриц монодромии области Ω_1 получаем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Если для системы* (1) *хотя бы одна матрица монодромии области* Ω_1 (*её* n*-я степень*) *при некотором значении параметра* λ *пропорциональна единичной матрице* I, *то при этом значении параметра* λ *все матрицы монодромии этой области* (*их* n*-е степени*) *равны между собой и могут быть записаны в виде* $\alpha d_0 I$ (*или* $\alpha d_0^n I$), *где величина* d_0 *определена в* (3), *а коэффициент* α *может принимать одно из следующих* L *значений*:

$$\alpha \in \left\{\exp\left(\frac{2\pi ik}{L}\right),\ k = \overline{1,L}\right\} \tag{4}$$

(*здесь* i — *мнимая единица*).

Доказательство. Тот факт, что в условиях предложения все матрицы монодромии области Ω_1 совпадают между собой, следует из их подобия. Определитель матрицы $M^n = \alpha d_0^n I$ равен $\alpha^L d^n$ в силу (3) с одной стороны и d^n с другой. Поэтому $\alpha^L = 1$, откуда вытекает (4). □

Если для системы (1), у которой все элементы матрицы A являются *однозначными* функциями $z \in K$ при $\lambda \in \mathbb{C}$, хотя бы одна матрица монодромии области Ω_1 равна единичной матрице при любых значениях параметра λ, то такую систему и соответствующую матрицу A называют безмонодромными в области K. Задача о нахождении безмонодромных матриц A является частным случаем существенно более общей задачи об изомонодромных деформациях систем (1), которой посвящено большое число работ (см. например, работу [1] и ссылки в ней). При этом возникает следующий вопрос. Допустим, что A не является однозначной матричной функцией или (и) область K не является безмонодромной. Возможна ли в этом случае ситуация, когда при любых значениях λ матрица монодромии области Ω_1 или её некоторая ненулевая степень n пропорциональна единичной матрице I, т.е. представима в виде $\alpha d_0^n I$, где возможные значения коэффициента α приведены в (4). Этот вопрос возникает, в частности, при исследовании асимптотик решений систем линейных дифференциальных уравнений вдоль кривых на комплексной плоскости, которые к настоящему времени изучены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на матрицу коэффициентов A (см. например, работы [2,19] и ссылки в них).

Определение 1.1. Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Матрицу коэффициентов A и соответствующую систему уравнений (1) будем называть *квазибезмонодромными* в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности матрицы A, если существует такое натуральное число $n \geqslant 1$, что $M^n(\lambda) \equiv \alpha d_0^n I$, где M — некоторая матрица монодромии области Ω_1, величина d_0 определена в (3), а возможные значения коэффициента α приведены в (4). Пусть $n_{\min}$ — минимальное значение степени n, при котором это тождество выполнено. Тогда будем называть $I_M := \alpha n_{\min}$ *показателем безмонодромности* матрицы коэффициентов A и системы уравнений (1) для области Ω_1.

Если система уравнений (1) является квазибезмонодромной в области K и область Ω_1 состоит из единственной точки, то эту точку будем называть квазибезмонодромной особой точкой системы (1) и её матрицы коэффицентов A.

Подчеркнем, что в силу предложения 1.1 показатель безмонодромности область не зависит от выбора матрицы монодромии области Ω_1. Заметим также, что $M^n(\lambda) \equiv \alpha d_0^n I$, если и только если $M^{-n}(\lambda) \equiv \alpha^{-1} d_0^{-n} I$, причем, как следует из (4), множества возможных значений α и α^{-1} совпадают. Поэтому ограничение $n \geqslant 1$ в определении 1.1 не является существенным, а использовано исключительно для удобства. Существенно только ограничение $n \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$ для любой матрицы M. Определение 1.1 также легко обобщается на случай, когда в области K существуют безмонодромные особые точки матрицы коэффициентов. При этом достаточно оговорить, что замкнутая кривая $\gamma \subset K$, вдоль которой происходит аналитическое продолжение матрицы A и которой соответствует некоторая матрица M монодромии области Ω_1, не проходит через эти особые точки. Кроме того, в соответствии с определением 1.1 для безмонодромной матрицы коэффициентов имеем $I_M = 1$.

Предложение 1.2. *Пусть матрицы монодромии области Ω_1 для системы уравнений имеют определитель d и след m. Замена в* (1) *неизвестных функций $y(z)$ на функции*

$$y_s(z) = P(z)y(z), \quad \text{где} \quad P(z) := \exp\left\{-\int_{z_0}^{z} \frac{1}{L}\operatorname{Tr}\big(A(v,\lambda)\big)dv\right\}, \quad z_0, z, v \in K, \tag{5}$$

сохраняет вид системы (1), *но меняет матрицу коэффицентов $A(z,\lambda)$ на матрицу $A(z,\lambda) - \operatorname{Tr}(A(z,\lambda))/L$ со следом, равным нулю всюду в K* (*интегрирование в* (5) *ведется вдоль спрямляемой кривой, аналогичной кривой γ, описанной в начале статьи*). *При этом все матрицы монодромии области Ω_1 для преобразованной системы* (1) *имеют единичный определитель и след, равный m/d_0, где величина d_0 определена в* (3); *для области Ω_1 новая и исходная системы уравнений являются или не являются квазибезмонодромными одновременно и их показатели безмонодромности совпадают.*

Доказательство. Приведенное в утверждении преобразование матрицы коэффициентов системы (1) проверяется непосредственной подстановкой замены (5) в (1). Далее заметим, что для преобразованной системы (1) в силу (3), (5) фундаментальные матрицы решений Y_{0s}, Y_{1s}, соответствующие входящим в соотношение (2) фундаментальным матрицам решений Y_0, Y_1 исходной системы, следующим образом связаны с последними:

$$Y_{0s}(z_0,\lambda,z_0) = Y_0(z_0,\lambda,z_0), \quad Y_{1s}(z_0,\lambda,z_0) = Y_1(z_0,\lambda,z_0)/d_0.$$

Поэтому, как следует из (2), соответствующая фундаментальной матрице Y_{0s} матрица монодромии области Ω_1 новой системы есть $M_s = M/d_0$, что в силу (3) и определения 1.1 доказывает остальные утверждения предложения. □

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса о существовании систем двух уравнений первого порядка с квазибезмонодромными особыми точками, имеющими различные значения показателя безмонодромности. В разделе 2 сформулированы три необходимых и достаточных условия квазибезмонодромности системы уравнений (1) при $L = 2$ в терминах матрицы монодромии M и отношения её следа к величине d_0, определенной в (3). Для каждого из этих трех условий найдено значение I_M и доказано, что не существует квазибезмонодромных матриц A второго порядка с положительным четным показателем безмонодромности. В разделе 3 приведены примеры матриц A второго порядка с квазибезмонодромными особыми точками, включая точки ветвления, со всеми остальными значениями I_M. При этом рассмотрены примеры только таких матриц A с нулевым следом (см. предложение 1.2), для которых системаЁ(1) эквивалентна уравнению Штурма—Лиувилля вида

$$y''(z) + \big(q(z) - \lambda^2 r(z)\big)y(z) = 0, \quad z \in K, \tag{6}$$

при постоянном или переменном весе $r(z)$. Особый интерес к указанному частному случаю систем (1), связан с тем, что изучение их квазибезмонодромных особых точек необходимо для дальнейшего исследования краевых и обратных спектральных задач для уравнений Штурма—Лиувилля на кривых в комплексной плоскости, которые к настоящему времени рассмотрены только при достаточно жестких ограничениях на форму кривой и (или) на коэффициенты уравнения (см. например, работы [3–5, 9, 17, 18] и ссылки в них).

2. Необходимые и достаточные условия квазибезмонодромности системы двух уравнений первого порядка в кольцеобразной области аналитичности её коэффициентов.

Лемма 2.1. *Пусть $m = \operatorname{Tr} M$ — след матрицы второго порядка M с единичным определителем, I — единичная матрица второго порядка. Тогда для любого целого n*

$$M^n = a_n M + b_n I, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

где $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, а остальные коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_n = m a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = -a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Доказательство. Справедливость представления (7) и выражения для коэффициентов a_n и b_n при $n \in \{0, 1\}$ следуют непосредственно из определения нулевой и первой степени матрицы, причем $b_0 = a_1 = 1$, $a_0 = b_1 = 0$, т.е. формулы (8) справедливы при $n = 1$. Учитывая, что $\det M = 1$, нетрудно также получить, что

$$M^2 = mM - I, \quad M^{-1} = -M + mI, \tag{9}$$

т.е. представление (7) справедливо также при $n \in \{-1, 2\}$, причем $a_2 = b_{-1} = m$, $a_{-1} = b_2 = -1$, и значит, формулы (8) выполнены при $n \in \{0, 2\}$. Далее воспользуемся индукцией по $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что представление (7) справедливо при $n \in \{-N+1, \ldots, N\}$, $N \geqslant 2$, а формулы (8) — при $n \in \{-N+2, \ldots, N\}$ (выше это было доказано для $N = 2$). Тогда, пользуясь соотношениями (7) при $n = -N+1$ и $n = N$, а также формулами (9), получим:

$$M^{N+1} = a_N M^2 + b_N M = (m a_N + b_N) M - a_N I,$$
$$M^{-N} = a_{-N+1} I + b_{-N+1} M^{-1} = -b_{-N+1} M + (m b_{-N+1} + a_{-N+1}) I,$$

т.е. представление (7) справедливо также и при $n = N+1$, $n = -N$, причем

$$a_{N+1} = m a_N + b_N, \quad b_{N+1} = -a_N,$$
$$a_{-N} = -b_{-N+1}, \qquad b_{-N} = m b_{-N+1} + a_{-N+1} = -m a_{-N} + a_{-N+1},$$

что доказывает формулы (8) при $n = -N+1$ и $n = N+1$. □

Лемма 2.2. *Пусть* $\mu = 0{,}5\big(m + \sqrt{m^2-4}\big)$. *Тогда в условиях леммы* 2.1

$$a_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad \text{при } m = \pm 2, \tag{10}$$

$$a_n = \frac{\mu^n - \mu^{-n}}{\mu - \mu^{-1}} \quad \text{при } m \neq \pm 2,\ \mu \neq \pm 1. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку в силу леммы 2.1 коэффициенты a_n и b_n зависят только от номера n и следа M, то достаточно провести доказательство леммы для диагональной матрицы M с элементами μ и $1/\mu = 0{,}5\big(m - \sqrt{m^2-4}\big)$ (напомним, что $\det M = 1$, $M = \operatorname{Tr} M$). В этом случае M^n — диагональная матрица с элементами μ^n и μ^{-n}. Поэтому из соотношений (7) сразу имеем

$$\mu^n = a_n\mu + b_n, \quad \mu^{-n} = \frac{a_n}{\mu} + b_n. \tag{12}$$

Если $M = \pm 2$, т.е. $\mu = \pm 1$, то уравнения в (12) равносильны. Добавляя к ним вторую формулу из (8), получим новое рекуррентное соотношение

$$\mu a_n = \mu^n + a_{n-1}. \tag{13}$$

Обозначим $c_n := \mu^{n+1} a_n$. Тогда умножая (13) на μ^n и учитывая, что $\mu^2 = 1$, получим $c_n = 1 + c_{n-1}$. Поскольку $c_0 = a_0 = 0$, то, пользуясь формулой для n-го члена арифметической прогрессии, получаем (10). Пусть теперь $M \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$). В этом случае формула (11) следует непосредственно из соотношений (12). □

В силу леммы 2.2 при $M = \pm 2$ коэффициент $a_n \neq 0$ при любом целом $n \neq 0$. Пользуясь также леммой 2.1, получим следующие два утверждения.

Следствие 2.1. *Если* $M = 2$ *и* $M \neq I$, *то* $M^n \neq \pm I$ *при любом целом* $n \neq 0$.

Следствие 2.2. *Если* $M = -2$ *и* $M \neq -I$, *то* $M^n \neq \pm I$ *при любом целом* $n \neq 0$.

Лемма 2.3. *При* $m \neq \pm 2$ *и* $n \neq 0$ *коэффициент* a_n *в формуле* (7) *равен нулю тогда и только тогда, когда* $M = 2\cos\big(\pi k/n\big)$, *где* $|n| \geqslant 2$, *а* $k \in \{1, \ldots, |n|-1\}$. *При этом* $b_n = (-1)^k$.

Доказательство. При $m \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$) из формулы (11) следует, что $a_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = \exp(i\pi k/n)$, т.е. $\mu^n = (-1)^k$, где i — мнимая единица, а целое число $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, при таких значениях μ имеем:

$$M \equiv \mu + (\mu)^{-1} = 2\cos\frac{\pi k}{n}, \quad b_n = -a_{n-1} = (-1)^k$$

в силу соотношений (8) и (11). Ограничения $|n| \neq 1$, $k \neq pn$ возникают из условия $m \neq \pm 2$. Приведенные в лемме ограничения на значения k, отличные от условия $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$, несущественны, т.к. в силу свойств косинуса они не меняют множество всех подходящих значений M. Они добавлены для удобства использования леммы в дальнейших доказательствах. □

Лемма 2.4. *Пусть* $M = 2\cos\big(\pi k/n\big)$, *где числа* $n \geqslant 2$ *и* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *взаимно просты. Тогда* $a_j \neq 0$, $j = \overline{1, n-1}$, $a_n = 0$.

Доказательство. Очевидно, что в условиях леммы $M \neq \pm 2$, и $a_n = 0$ в силу леммы 2.3. Если $n = 2$, то лемма полностью доказана, поскольку $a_1 = 1$. Предположим, что $n \geqslant 3$, и $a_j = 0$ при некотором $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Тогда из леммы 2.3 получаем, что $M = 2\cos\big(\pi s/j\big)$, где $s \in \{1, \ldots, j-1\}$. В силу условия леммы это означает, что $\cos\big(\pi k/n\big) = \cos\big(\pi s/j\big)$. Воспользовавшись формулой разности косинусов, находим, что $k/n + s/j = 2p$ или $k/n - s/j = 2p$, где $p \in \mathbb{Z}$. По условию $0 < k/n, s/j < 1$, поэтому возможен только второй случай при $p = 0$. Допустим, что $k/n = s/j$, т.е. $kj = ns$. Но n и k взаимно просты, поэтому последнее равенство возможно только, если $j = rn$, где целое число $r \geqslant 1$, а по условию $j < n$. Это противоречие доказывает лемму. □

Теорема 2.1. *Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Тогда при $L = 2$ система уравнений* (1) *и матрица коэффициентов A являются квазибезмонодромными в кольцеобразной области $K = \Omega_2 \backslash \Omega_1$ аналитичности матрицы A тогда и только тогда, когда для системы уравнений* (1) *некоторая матрица монодромии M области Ω_1 или её след M удовлетворяют одному из следующих трех альтернативных условий*:

(i) $M = d_0 I$;

(ii) $M = -d_0 I$;

(iii) $M = 2d_0 \cos\big(\pi k/n\big)$, *где числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ взаимно просты, а множитель d_0 определен в* (3).

В первых двух случаях показатель безмонодромности равен $I_M = \pm 1$ соответственно, а в последнем случае $I_M = (-1)^k n$.

Доказательство. Рассмотрим прежде всего случай системы (1) с единичным определителем матрицы монодромии, т.е. случай $d = d_0 = 1$. В этом случае при $n \geqslant 1$ в силу формулы (7) $M^n \in \{\pm I\}$ тогда и только тогда, когда либо $M \in \{\pm I\}$, либо $M \notin \{\pm I\}$, но $a_n = 0$. Поэтому необходимость и достаточность выполнения одного из трех условий теоремы непосредственно вытекает из следствий 2.1, 2.2 и леммы 2.3. При этом условие взаимной простоты чисел k и n, очевидно, не является существенным, так как не меняет множество всех подходящих значений M. Значение I_M в первых двух случаях сразу следует из определения 1.1, а в третьем случае $(m \neq \pm 2)$ — из определения 1.1, формулы (7) и леммы 2.4.

Пусть теперь $d_0 \neq 1$. Тогда, делая замену (5), получим новую системы вида (1), матрицы монодромии M_1 которой в силу предложения 1.2 будут иметь след $M_1 = m/d_0$ и единичный определитель. Применяя к новой системе теорему 2.1, только что доказанную для случая единичного определителя, получим, что утверждение теоремы справедливо и в общем случае. □

Следствие 2.3. *При $L = 2$ не существует матриц коэффициентов A с положительным четным показателем безмонодромности I_M.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 показатель безмонодромности равен либо ± 1, либо $(-1)^k n$, где k и n взаимно просты и, следовательно, не могут быть одновременно четными. □

3. Примеры систем двух уравнений первого порядка с квазибезмонодромными особыми точками. Пользуясь предложением 1.2, ограничимся примерами систем (1), у которых матрицы A имеют след, тождественно равный нулю в области K; значит, матрицы монодромии области Ω_1 в силу соотношения (3) имеют единичный определитель. К таким системам, в частности, относятся системы уравнений (1) с матрицей коэффициентов вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda^2 r(z) - q(z)) & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

которые равносильны уравнению Штурма—Лиувилля (6). При этом элементы первой строки фундаментальных матриц Y_0, Y_1 образуют фундаментальную систему голоморфных решений (ФСР) уравнения (6), а элементы второй строки — первые производные по z элементов первой строки. Это позволяет естественным образом перенести определение 1.1 с системы (1) и её особых точек на уравнение (6) и его особые точки. Поэтому в дальнейшем будем говорить в том числе и о показателях безмонодромности особых точек коэффициентов уравнения (6). Кроме того, следуя терминологии, принятой в теории уравнений Штурма—Лиувилля, будем называть $q(z)$ потенциалом, а $r(z)$ — весом.

Для матриц A вида (14) *с единичным весом* случай $M = I$ в теории уравнений Штурма—Лиувилля хорошо изучен для однозначных потенциалов (см. [7,8,13,15,16]), но для многозначных потенциалов он ранее не исследовался; случай (ii) в теореме 2.1 для таких матриц A, скорее всего, не реализуем ни для каких однозначных потенциалов. По крайней мере, пользуясь известными асимптотическими представлениями решений уравнения (6) (см. [14,19]) можно доказать, что это справедливо, если в области K существует хотя бы одна спрямляемая кривая, ограничивающая выпуклую область. Последнее, в частности, всегда имеет место в некоторой достаточно малой выколотой окрестности изолированной особой точки. Вместе с тем, как показано в данном пункте, случай $M = -I$ реализуем при единичном весе для особых точек потенциала многозначного характера. Кроме того, ниже приведены примеры матриц A вида (14), имеющих любое заданное значение показателя безмонодромности, не запрещенное следствием 2.3.

Пусть в (14)

$$r(z) = 1, \quad q(z) = -\frac{p(p-1)}{z^2}, \quad \text{где} \quad p \geqslant \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Ограничение на значения p учитывает тот факт, что замена p на $1-p$ не меняет вид потенциала в (15). Как известно (см. например, [10, ч. 3, гл. 2, пример 2.162(7)]), если $\lambda \neq 0$, то одну из ФСР уравнения (6) с коэффициентами (15) образуют функции $y^{(1)} = \sqrt{z}\, J_{p-1/2}(i\lambda z)$ и $y^{(2)} = \sqrt{z}\, N_{p-1/2}(i\lambda z)$, где J_k и N_k — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Также хорошо известно (см. [11, формула (21.8-6)]), что

$$J_k\big(\exp\{2\pi i\}z\big) = \exp\{2\pi k i\}J_k(z), \quad N_k\big(\exp\{2\pi i\}z\big) = \exp\{-2\pi k i\}N_k(z) + 4i\cos^2(\pi k)J_k(z).$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$ и указанном выборе ФСР матрица монодромии особой точки $z = 0$ уравнения (6) с коэффициентами (15), и значит, системы (1) с матрицей коэффициентов (14), (15) будет равна

$$M = \begin{pmatrix} \exp\{2\pi p i\} & -4i\sin^2(\pi p) \\ 0 & \exp\{-2\pi p i\} \end{pmatrix}.$$

Поэтому для этой особой точки $M \equiv \operatorname{Tr} M = 2cos(2\pi p)$. Заметим также, что при $\lambda = 0$ в качестве ФСР уравнения (6) с коэффициентами (15) можно взять, например, функции z^p, z^{1-p} при $p \neq 1/2$ и $z^{1/2}$, $z^{1/2}\ln z$ при $p = 1/2$. При этом вид матрицы монодромии будет немного другим, но формула для следа сохраняется. Из нее и теоремы 2.1 следует, что возможны два интересных для нас случая квазибезмонодромных матриц коэффициентов A вида (14), (15):

(1) случай $p \in \mathbb{N}$ соответствует частному случаю хорошо исследованного класса безмонодромных потенциалов ($M = I$) уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (см. [7, 8]);
(2) случай $p = (r+k/n)/2$, где $r \in \mathbb{N}$, а числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ взаимно просты, соответствует ранее не рассматривавшемуся случаю уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида с квазибезмонодромным потенциалом, при этом его показатель безмонодромности $I_M = (-1)^k n$, если r четное, и $I_M = (-1)^{n-k}n$, если r нечетное.

При остальных значениях p матрица A вида (14), (15) не будет квазибезмонодромной. Иными словами, матрицы коэффициентов вида (14), (15) являются квазибезмонодромными при любом рациональном p, отличном от полуцелого числа. При этом они охватывают все возможные значения показателя безмонодромности, не запрещенные следствием 2.3, кроме $I_M = -1$.

Поскольку, как уже говорилось, при единичном весе однозначные изолированные особые точки потенциала заведомо не могут иметь $I_M = -1$, то рассмотрим потенциалы, имеющие в нуле точку ветвления порядка $N-1 > 0$, и сделаем в уравнении (6) с $r(z) = 1$ следующие замены переменной и неизвестной функции:

$$w = z^{1/N}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-N)/2}. \tag{16}$$

Тогда прямой подстановкой нетрудно убедиться, что $u(w)$ удовлетворяет уравнению Штурма—Лиувилля с комплексным весом, имеющим в точке $w = 0$ нуль кратности $2(N-1)$:

$$u''(w) + \left\{\frac{1-N^2}{4w^2} + N^2 w^{2N-2}\left(q(w^N) - \lambda^2\right)\right\}u(w) = 0. \tag{17}$$

При этом существенно, что при N-кратном обходе по замкнутой траектории особой точки $z = 0$ на комплексной плоскости z, особая точка $w = 0$ на комплексной плоскости w будет обходиться один раз также по замкнутой траектории, и значит, потенциал в уравнении (17) будет однозначной функцией w. При этом для любых ФСР уравнений (6) и (17), связанных между собой соотношением (16), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w этих особых точек будут также связаны:

$$M_w = (-1)^{N-1}M_z. \tag{18}$$

Действительно, пусть функции $u^{(j)}(w)$, $j=1,2$, образуют ФСР уравнения (17). Тогда соответствующее ФСР уравнения (6) в силу (16) будет иметь вид

$$y^{(j)}(z)=u^{(j)}(w)w^{(N-1)/2},\quad w=z^{1/N}.$$

Поэтому, если

$$u^{(j)}(w\exp\{2\pi i\})=M_{w,jk}u^{(k)}(w),\quad j,k=1,2$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), то

$$y^{(j)}\big(z\exp\{2\pi Ni\}\big)=(-1)^{N-1}u^{(j)}\big(w\exp\{2\pi i\}\big)w^{(N-1)/2}= \\ =(-1)^{N-1}M_{w,jk}u^{(k)}(w)w^{(N-1)/2}=(-1)^{N-1}M_{w,jk}y^{(k)}(z).$$

Из соотношения (18) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть точка $z=0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N-1$ ($N\geqslant 2$), а точка $w=0$ — безмонодромная особая точка уравнения (17). Тогда точка $z=0$ является квазибезмонодромной особой точкой уравнения (6) с $r(z)=1$, причем $I_M=(-1)^{N-1}$.*

Неограниченное количество уравнений вида (17) с безмонодромной особой точкой $w=0$ можно построить, пользуясь следующей леммой, являющейся частным случаем (при $\lambda=0$) леммы 1 из [6],

Лемма 3.1. *Пусть функция $h(w)$ имеет вид*

$$h(w)=-\frac{\nu(\nu-1)}{w^2}+h_{-1}w^{-1}+\sum_{k=0}^{\infty}h_kw^k,$$

где $\nu\in\mathbb{N}$, $h_{-1}=h_1=\ldots=h_{2\nu-3}=0$, и ряд сходится в круге $U_R=\{|z|<R\}$. Тогда все голоморфные решения уравнения

$$u''(w)+h(w)u(w)=0$$

однозначны в кольце $K_R=\{0<|w|<R\}$.

Заметим, что различие в знаке перед первым слагаемым формулы для потенциала в [6, лемма 1] и в лемме 3.1 настоящей работы связано с соответствующими различиями в знаках перед потенциалами в уравнениях Штурма—Лиувилля.

Пусть потенциал $q(z)$ в уравнении (6) имеет вид

$$q(z)=\frac{1}{N^2z^2}\left(-\frac{1-N^2}{4}-\nu(\nu-1)+\sum_{k=-1}^{\infty}h_kz^{(k+2)/N}\right).$$

Здесь $N\geqslant 2$, $\nu\in\mathbb{N}$, $h_{-1}=h_1=\ldots=h_{2\nu-3}=0$, ряд сходится в круге U_R, и существует хотя бы одно $h_k\neq 0$ с номером $k=l-2$, где $l\in\mathbb{N}$, l и N взаимно просты (т.е. точка $z=0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N-1$). Тогда в силу предложения 3.1 и леммы 3.1 показатель безмонодромности уравнения (6) с $r(z)=1$ в кольце K_R будет равен $(-1)^{N-1}$. Таким образом, при любом четном (нечетном) $N\geqslant 2$ получаем семейство многозначных потенциалов, особая точка которых имеет показатель бемонодромности $I_M=-1$ ($I_M=1$).

Предложение 3.1 может быть обращено и использовано для поиска уравнений Штурма—Лиувилля с переменным весом, безмонодромных в некоторой области. Пусть уравнение (6) является квазибезмонодромым в некоторой кольцеобразной области $K_z=\Omega_2\backslash\Omega_1$ комплексной плоскости z, причем модуль показателя безмоноромности $n\geqslant 1$, а голоморфный всюду в K потенциал $q(z)$ имеет конечный порядок ветвления $N-1\geqslant 0$ ($nN>1$). Без ограничения общности можно считать, что точка $z=0$ лежит в области Ω_1. Тогда, делая в уравнении (6) замены переменной и неизвестной функции, аналогичные заменам (16):

$$w=z^{1/(nN)},\quad u(w)=y(z)w^{(1-nN)/2}, \tag{19}$$

получим, что функция $u(w)$ удовлетворяет следующему уравнению Штурма—Лиувилля, аналогичному уравнению (17):

$$u''(w) + \left\{ \frac{1-(nN)^2}{4w^2} + (nN)^2 w^{2nN-2} \left(q(w^{nN}) - \lambda^2 \right) \right\} u(w) = 0, \quad w \in K_w. \tag{20}$$

Замена (19) отобразит любую замкнутую кривую, лежащую в области K_z и обходящую nN раз область Ω_1, в замкнутую кривую, лежащую в некоторой кольцевой области $K_w = \Omega_{2w} \setminus \Omega_{1w}$ комплексной плоскости w и обходящую область Ω_{1w} один раз. Поэтому потенциал уравнения (20) будет однозначной функцией w в области K_w. При этом для любых ФСР уравнений (6) и (20), связанных между собой соотношением (19), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w областей Ω_1 и Ω_{1w} будут связаны соотношениями, аналогичными формуле (18):

$$M_w = (-1)^{nN-1} M_z.$$

Поэтому справедливо, в частности, следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть точка $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N-1$, $N \geqslant 1$, и имеет порядок безмонодромности $I_{Mz} = (-1)^L n$, где $n \geqslant 1$. Тогда порядок безмонодромности точки $w = 0$ уравнения (20) равен $I_M = (-1)^{L+nN-1}$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Дифференциальные уравнения с мероморфными коэффициентами// Совр. пробл. мат. — 2003. — № 1. — С. 29—82.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. *Голубков А. А.* Обратная задача для операторов Штурма—-Лиувилля в комплексной плоскости// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2018. — *18*, № 2. — С. 144—156.
4. *Голубков А. А.* Краевая задача для уравнения Штурма—-Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1005—1027.
5. *Голубков А. А.* Спектр оператора Штурма—-Лиувилля на кривой с параметром в краевых условиях и условиях разрывов решений// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *193*. — С. 45—68.
6. *Ишкин Х. К.* О критерии однозначности решений уравнения Штурма—-Лиувилля// Мат. заметки. — 2008. — *84*, № 4. — С. 552—566.
7. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма—-Лиувилля// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 4. — С. 552—568.
8. *Ишкин Х. К., Ахметшина А. Д.* О классе потенциалов с тривиальной монодромией// Вестн. Казах. нац. ун-та. Сер. мат. мех. информ. — 2018. — *99*, № 3. — С. 43—52.
9. *Ишкин Х. К., Давлетова Л. Г.* Регуляризованный след оператора Штурма—-Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде// Диффер. уравн. — 2020. — *56*, № 10. — С. 1291—1303.
10. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1981.
12. *Маркушевич А. М.* Теория аналитических функций. Т. 2. — М.: Наука, 1968.
13. *Обломков А. А.* Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом// Теор. мат. физ. — 1999. — *121*, № 3. — С. 374—386.
14. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965.
15. *Duistermaat J. J., Grünbaum F. A.* Differential equations in the spectral parameter// Commun. Math. Phys. — 1986. — *103*, № 2. — P. 177—240.
16. *Gibbons J., Veselov A. P.* On the rational monodromy-free potentials with sextic growth// J. Math. Phys. — 2009. — *50*, № 1. — 013513.
17. *Golubkov A. A., Kuryshova Yu. V.* Inverse problem for Sturm—Liouville operators on a curve// Tamkang J. Math. — 2019. — *50*, № 3. — P. 349—359.
18. *Golubkov A. A.* Inverse problem for the Sturm—Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on a curve// Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — *18*, № 2. — С. 951—974.

19. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — *46.* — P. 151—190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Голубков Андрей Александрович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andrej2501@yandex.ru