ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 87–107
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-87-107

УДК 512.816.3

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛЬНОМ РАСШИРЕНИИ ГРУППЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

© 2023 г. **В. А. КЫРОВ**

Аннотация. Задача о нахождении всех локально ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов четырёхмерного пространства сведена к вычислению алгебр Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов. Найдены некоторые локально ограниченно точно дважды транзитивные группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли.

Ключевые слова: транзитивная группа преобразований, группа параллельных переносов, алгебра Ли, жорданова форма матрицы.

ON THE LOCAL EXTENSION OF THE GROUP OF PARALLEL TRANSLATIONS OF FOUR-DIMENSIONAL SPACE

© 2023 **V. A. KYROV**

Abstract. The problem of the search for all locally boundedly exactly doubly transitive extensions of the group of parallel translations of a four-dimensional space is reduced to the calculation of the Lie algebras of locally boundedly exactly doubly transitive extensions of the group of parallel translations. Some locally boundedly exactly doubly transitive transformation Lie groups with decomposable Lie algebras are found.

Keywords and phrases: transitive transformation group, group of parallel translations, Lie algebra, Jordan form.

AMS Subject Classification: 22F05

1. Введение. В работе В. В. Горбацевича [3] приводится определение расширения транзитивной группы Ли G, действующей в многообразии M: *расширением транзитивной группы Ли G называется группа Ли G_1, содержащая G в виде подгруппы Ли и также транзитивная на M, причем ограничение этого транзитивного действия на G дает исходное транзитивное действие группы Ли G*. Примером расширения группы параллельных переносов пространства R^3 является группа аффинных преобразований этого пространства.

Согласно [6, 10] можно говорить, что локально точно транзитивная группа Ли преобразований пространства R^4 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(2,2)$, а локально ограниченно точно дважды транзитивная группа Ли преобразований пространства R^4 задает феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(3,2)$. Отметим, что первым множеством является пространство R^4, а вторым множеством является транзитивно действующая группа Ли G.

В данной работе ставится задача о нахождении всех локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов пространства R^4. Результаты исследований изложены в [7, 9] на примере классификации локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов плоскости R^2, а также в [5, 8] на примере классификации локальных ограниченно точно дважды транзитивных расширений группы параллельных переносов прострнаства R^3.

2. Основные определения. Следуя [1, 6], определим локальное действие класса C^2 группы Ли G, $\dim G = n$, в пространстве R^4.

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : R^4 \times G \to R^4$ класса C^2 называется *эффективным локальным действием*, если выполняются следующие свойства:

(i) $\pi(a, e) = a$ для всех $a \in W$, где W — область в R^4, $e \in G$ — единица;
(ii) $\pi(\pi(a, h_1), h_2) = \pi(a, h_1 h_2)$ для всех $a \in W$, где $h_1, h_2 \in G$;
(iii) $\pi(a, h) = a$ для всех $a \in W$, где $h \in G$, тогда и только тогда, когда $h = e$;
(iv) $\pi_h : R^4 \to R^4$ — локальный диффеоморфизм для всякого $h \in G$.

Тройка (R^4, G, π) называется *локальной группой Ли преобразований* многообразия R^4.

Обозначим через L алгебру Ли данной группы преобразований. Базис этой алгебры Ли состоит из операторов

$$Z_i = Z_i^1 \partial_x + Z_i^2 \partial_y + Z_i^3 \partial_z + Z_i^4 \partial_w, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

Определение 2. Эффективное локальное действие $\pi : R^4 \times G \to R^4$ называется *локально ограниченно точно дважды транзитивным*, если дополнительно выполняются следующие свойства:

(v) $n = 8$;
(vi) матрица

$$V = \begin{pmatrix} Z_1^1(a) & Z_1^2(a) & Z_1^3(a) & Z_1^4(a) & Z_1^1(b) & Z_1^2(b) & Z_1^3(b) & Z_1^4(b) \\ Z_2^1(a) & Z_2^2(a) & Z_2^3(a) & Z_2^4(a) & Z_2^1(b) & Z_2^2(b) & Z_2^3(b) & Z_2^4(b) \\ Z_3^1(a) & Z_3^2(a) & Z_3^3(a) & Z_3^4(a) & Z_3^1(b) & Z_3^2(b) & Z_3^3(b) & Z_1^4(b) \\ Z_4^1(a) & Z_4^2(a) & Z_4^3(a) & Z_4^4(a) & Z_4^1(b) & Z_4^2(b) & Z_4^3(b) & Z_4^4(b) \\ Z_5^1(a) & Z_5^2(a) & Z_5^3(a) & Z_5^4(a) & Z_5^1(b) & Z_5^2(b) & Z_5^3(b) & Z_5^4(b) \\ Z_6^1(a) & Z_6^2(a) & Z_6^3(a) & Z_6^4(a) & Z_6^1(b) & Z_6^2(b) & Z_6^3(b) & Z_6^4(b) \\ Z_7^1(a) & Z_7^2(a) & Z_7^3(a) & Z_7^4(a) & Z_7^1(b) & Z_7^2(b) & Z_7^3(b) & Z_7^4(b) \\ Z_8^1(a) & Z_8^2(a) & Z_8^3(a) & Z_8^4(a) & Z_8^1(b) & Z_8^2(b) & Z_8^3(b) & Z_8^4(b) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

составленная из коэффициентов операторовЁ(2.1)б невырождена для любых точек некоторых окрестностей $U(a'), U(b') \subset W$.

Свойства (v) и (vi) равносильны тому, что действие $\pi \times \pi$ в $R^4 \times R^4$ локально точно транзитивно.

Определение 3. Будем говорить, что локально ограниченно точно дважды транзитивное действие $\pi : R^4 \times G \to R^4$ является *локальным расширением группы параллельных переносов*, если базис его алгебры Ли L состоит из операторов

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = A_i \partial_x + B_i \partial_y + C_i \partial_z + D_i \partial_w, \tag{2.3}$$

причём $A_i = A_i(x, y, z, w)$, $B_i = B_i(x, y, z, w)$, $C_i = C_i(x, y, z, w)$, $D_i = D_i(x, y, z, w)$, $i = 1, 2, 3, 4,$ — дифференцируемые функции класса гладкости C^1.

В таком случае в алгебре Ли L выделяется коммутативная трехмерная подалгебра J, образованная операторами X_1, X_2, X_3 и X_4. Произвольный оператор Y является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами базисных операторов.

Теорема 1. *Локальное действие $\pi : R^4 \times G \to R^4$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) локально ограниченно точно дважды транзитивно тогда и только тогда, когда матрица $K(b) - K(a)$ невырождена, где*

$$K(a) = \begin{pmatrix} A_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_1(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_1(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_2(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_2(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_3(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_3(x_a, y_a, z_a, w_a) \\ A_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & B_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & C_4(x_a, y_a, z_a, w_a) & D_4(x_a, y_a, z_a, w_a) \end{pmatrix},$$

причем $a = (x_a, y_a, z_a, w_a) \in U(a') \subset W \subset R^4$.

Доказательство. Матрица (2.2) для действия $\pi : R^4 \times G \to R^4$ с операторами ее алгебры Ли (2.3) принимает следующий вид:

$$V = \begin{pmatrix} E & E \\ K(a) & K(b) \end{pmatrix},$$

где E — единичная (4×4)-матрица. Согласно формуле Шура (см. [2, с. 59]) $|V| = |K(b) - K(a)|$. Если действие $\pi : R^4 \times G \to R^4$ локально ограниченно точно дважды транзитивно, то $|V| \neq 0$ и поэтому $|K(b) - K(a)| \neq 0$. Справедливо и обратное. □

Следствие. *Локальное действие $\pi : R^4 \times G \to R^4$ с операторами алгебры Ли вида*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w,$$
$$Y_i = A_i(x, y, z, w)\partial_x + B_i(x, y, z, w)\partial_y + C_i(x, y, z, w)\partial_z, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

не является локально ограниченно точно дважды транзитивным.

3. Системы линейных уравнений. Из свойства замкнутости относительно операции коммутирования, следует, что и коммутаторы $[X_j, Y_k]$, $j, k = 1, 2, 3, 4$, принадлежат этой же алгебре Ли (см. [12]). ВЁкоординатной записи, с учетом (2.3), это свойство приводит к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{A}_x = T_1\overrightarrow{A} + \overrightarrow{G}^1, \quad \overrightarrow{A}_y = T_2\overrightarrow{A} + \overrightarrow{P}^1, \quad \overrightarrow{A}_z = T_3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{Q}^1, \quad \overrightarrow{A}_w = T_4\overrightarrow{A} + \overrightarrow{R}^1, \\ &\overrightarrow{B}_x = T_1\overrightarrow{B} + \overrightarrow{G}^2, \quad \overrightarrow{B}_y = T_2\overrightarrow{B} + \overrightarrow{P}^2, \quad \overrightarrow{B}_z = T_3\overrightarrow{B} + \overrightarrow{Q}^2, \quad \overrightarrow{B}_w = T_4\overrightarrow{B} + \overrightarrow{R}^2, \\ &\overrightarrow{C}_x = T_1\overrightarrow{C} + \overrightarrow{G}^3, \quad \overrightarrow{C}_y = T_2\overrightarrow{C} + \overrightarrow{P}^3, \quad \overrightarrow{C}_z = T_3\overrightarrow{C} + \overrightarrow{Q}^3, \quad \overrightarrow{C}_w = T_4\overrightarrow{C} + \overrightarrow{R}^3, \\ &\overrightarrow{D}_x = T_1\overrightarrow{D} + \overrightarrow{G}^4, \quad \overrightarrow{D}_y = T_2\overrightarrow{D} + \overrightarrow{P}^4, \quad \overrightarrow{D}_z = T_3\overrightarrow{D} + \overrightarrow{Q}^4, \quad \overrightarrow{D}_w = T_4\overrightarrow{D} + \overrightarrow{R}^4, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где введены матричные обозначения:

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & b_1^4 \\ b_2^1 & b_2^2 & b_2^3 & b_2^4 \\ b_3^1 & b_3^2 & b_3^3 & b_3^4 \\ b_4^1 & b_4^2 & b_4^3 & b_4^4 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & c_1^3 & c_1^4 \\ c_2^1 & c_2^2 & c_2^3 & c_2^4 \\ c_3^1 & c_3^2 & c_3^3 & c_3^4 \\ c_4^1 & c_4^2 & c_4^3 & c_4^4 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 & d_2^4 \\ d_3^1 & d_3^2 & d_3^3 & d_3^4 \\ d_4^1 & d_4^2 & d_4^3 & d_4^4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{D} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{G}^j = \begin{pmatrix} g_1^j \\ g_2^j \\ g_3^j \\ g_4^j \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{Q}^j = \begin{pmatrix} q_1^j \\ q_2^j \\ q_3^j \\ q_4^j \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{P}^j = \begin{pmatrix} p_1^j \\ p_2^j \\ p_3^j \\ p_4^j \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{R}^j = \begin{pmatrix} r_1^j \\ r_2^j \\ r_3^j \\ r_4^j \end{pmatrix},$$

причем a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j, g_i^j, q_i^j, p_i^j, $r_i^j = \mathrm{const}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Из свойства независимости частных производных относительно порядка дифференцирования вытекают соотношения:

$$\begin{aligned}&(T_iT_j - T_jT_i)\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\mathrm{const}}, \quad (T_iT_j - T_jT_i)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{const}},\\ &(T_iT_j - T_jT_i)\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\mathrm{const}}, \quad (T_iT_j - T_jT_i)\overrightarrow{D} = \overrightarrow{\mathrm{const}},\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $i < j = 1, 2, 3, 4$. Линейные системы (3.1), очевидно, совместны.

Теорема 2. *Подалгебра Ли J алгебры Ли L является идеалом тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{A}_x$, $\overrightarrow{B}_x$, $\overrightarrow{C}_x$, $\overrightarrow{D}_x$, $\overrightarrow{A}_y$, $\overrightarrow{B}_y$, $\overrightarrow{C}_y$, $\overrightarrow{D}_y$, $\overrightarrow{A}_z$, $\overrightarrow{B}_z$, $\overrightarrow{C}_z$, $\overrightarrow{D}_z$, $\overrightarrow{A}_w$, $\overrightarrow{B}_w$, $\overrightarrow{C}_w$, $\overrightarrow{D}_w$ постоянные.*

Доказательство. Пусть сначала J — идеал в L. Заметим, что J является идеалом тогда и только тогда, когда

$$[X_i, Y_k] = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3 + \mu_4 X_4,$$

причем $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = \mathrm{const}$, $i, k = 1, 2, 3, 4$. Тогда векторы $\overrightarrow{A}_x$, $\overrightarrow{B}_x$, $\overrightarrow{C}_x$, $\overrightarrow{D}_x$, $\overrightarrow{A}_y$, $\overrightarrow{B}_y$, $\overrightarrow{C}_y$, $\overrightarrow{D}_y$, $\overrightarrow{A}_z$, $\overrightarrow{B}_z$, $\overrightarrow{C}_z$, $\overrightarrow{D}_z$, $\overrightarrow{A}_w$, $\overrightarrow{B}_w$, $\overrightarrow{C}_w$, $\overrightarrow{D}_w$ постоянные.

Обратно, пусть производные коэффициентов операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 постоянны; тогда коммутаторы $[X_i, Y_k]$ будут линейно выражаться через операторы X_1, X_2, X_3 и X_4, поэтому J — идеал в L. □

Следствие. $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$ *тогда и только тогда, когда J — идеал в L.*

Доказательство. Если $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$, то из системы (3.1) получаем, что производные векторов $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{D}$ по переменным x, y, z, w постоянны, и поэтому J — идеал в L (теорема 2).

Пусть J — идеал в L. Предположим для определенности, что $T_1 \neq 0$. Тогда согласно системе (3.2) хотя бы одна из производных $\overrightarrow{A}_x$, $\overrightarrow{B}_x$, $\overrightarrow{C}_x$, $\overrightarrow{D}_x$ не постоянна. Поэтому согласно теореме 2 получаем, что J не является идеалом в L. Противоречие. □

Теорема 3. *Матрицы коэффициентов системы* (3.1) *взаимно коммутативны, т.е.*

$$T_iT_j - T_jT_i = 0, \quad i < j = 1, 2, 3, 4.$$

Доказательство. Пусть одна из пар матриц коэффициентов системы (3.1) некоммутативна, т.е. $T_1T_2 - T_2T_1 \neq 0$. В таком случае ранг матрицы $T_1T_2 - T_2T_1$ равен либо 4, либо 3, либо 2, либо 1. Эквивалентными преобразованиями добьемся упрощения систем линейных уравнений

$$(T_1T_2 - T_2T_1)\overrightarrow{A} = \overrightarrow{R}_1, \quad (T_1T_2 - T_2T_1)\overrightarrow{B} = \overrightarrow{R}_2, \quad (T_1T_2 - T_2T_1)\overrightarrow{C} = \overrightarrow{R}_3, \quad (T_1T_2 - T_2T_1)\overrightarrow{D} = \overrightarrow{R}_4.$$

Тогда в эквивалентных системах матрица коэффициентов $T_1T_2 - T_2T_1$ принимает один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $A_1 = \mathrm{const}$, $B_1 = \mathrm{const}$, $C_1 = \mathrm{const}$, $D_1 = \mathrm{const}$, или $A_2 = \mathrm{const}$, $B_2 = \mathrm{const}$, $C_2 = \mathrm{const}$, $D2 = \mathrm{const}$, или $A_3 = \mathrm{const}$, $B_3 = \mathrm{const}$, $C_3 = \mathrm{const}$, $D_3 = \mathrm{const}$, или $A_4 = \mathrm{const}$, $B_4 = \mathrm{const}$, $C_4 = \mathrm{const}$, $D_4 = \mathrm{const}$. Поэтому, соответственно, оператор Y_1, или Y_2, или Y_3, или Y_4 из системы (2.3) линейно выражается через операторы X_1, X_2, X_3 и X_4, что противоречит линейной независимости базисных операторов (2.3). Аналогичная проверка проводится и относительно систем из (3.2) с матрицами коэффициентов $T_iT_j - T_jT_i = 0$, $i < j = 1, 2, 3, 4$. □

Теорема 4. *Для алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивного действия $\pi : R^4 \times G \to R^4$ в подходящем базисе матрица T_1 принимает следующий вид*:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad J_{1,\lambda_1} \dotplus J_{1,\lambda_2} \dotplus J_{1,\lambda_3} \dotplus J_{1,\lambda_4};\\
&2) \quad J_{2,\lambda_5} \dotplus J_{1,\lambda_6} \dotplus J_{1,\lambda_7};\\
&3) \quad J_{2,\lambda_5} \dotplus J_{2,\lambda_8};\\
&4) \quad J_{3,\lambda_9} \dotplus J_{1,\lambda_{10}};\\
&5) \quad J_{4,\lambda},
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где $J_{m,\mu}$ — жорданова клетка порядка m, соответствующая собственному значению μ.

Доказательство. Базис алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивного действия $\pi : R^4 \times G \to R^4$ задается операторами (2.3). Перейдем к новому базису

$$X_i' = X_i, \quad Y_i' = \sum_{j=1}^{4} \chi_i^j Y_j$$

при помощи невырожденной матрицы коэффициентов $\chi = \left(\chi_i^j\right)$. Тогда выражения (2.3) принимают следующий вид:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i' = A_i'\partial_x + B_i'\partial_y + C_i'\partial_z + D_i'\partial_w,$$

причем

$$\overrightarrow{A'} = \chi\overrightarrow{A}, \quad \overrightarrow{B'} = \chi\overrightarrow{B}, \quad \overrightarrow{C'} = \chi\overrightarrow{C}, \quad \overrightarrow{D'} = \chi\overrightarrow{D}. \tag{3.4}$$

Вычисляя коммутаторы $[X_i, Y_j']$, учитывая их замкнутость и сравнивая коэффициенты при ∂_x, ∂_y, ∂_z и ∂_w, получаем векторные уравнения

$$
\begin{cases}
\overrightarrow{A'}_x = T_1'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{G'}^1, & \overrightarrow{A'}_y = T_2'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{P'}^1, \quad \overrightarrow{A'}_z = T_3'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{Q'}^1, \quad \overrightarrow{A'}_w = T_4'\overrightarrow{A'} + \overrightarrow{R'}^1,\\
\overrightarrow{B'}_x = T_1'\overrightarrow{B'} + \overrightarrow{G'}^2, & \overrightarrow{B'}_y = T_2'\overrightarrow{B'} + \overrightarrow{P'}^2, \quad \overrightarrow{B'}_z = T_3'\overrightarrow{B'} + \overrightarrow{Q'}^2, \quad \overrightarrow{B'}_w = T_4'\overrightarrow{B'} + \overrightarrow{R'}^2,\\
\overrightarrow{C'}_x = T_1'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{G'}^3, & \overrightarrow{C'}_y = T_2'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{P'}^3, \quad \overrightarrow{C'}_z = T_3'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{Q'}^3, \quad \overrightarrow{C'}_w = T_4'\overrightarrow{C'} + \overrightarrow{R'}^3,\\
\overrightarrow{D'}_x = T_1'\overrightarrow{D'} + \overrightarrow{G'}^4, & \overrightarrow{D'}_y = T_2'\overrightarrow{D'} + \overrightarrow{P'}^4, \quad \overrightarrow{D'}_z = T_3'\overrightarrow{D'} + \overrightarrow{Q'}^4, \quad \overrightarrow{D'}_w = T_4'\overrightarrow{D'} + \overrightarrow{R'}^4.
\end{cases}
$$

Подставляя в последнюю систему выражения (3.4) и сравнивая с (3.1), находим

$$T_1 = \chi^{-1}T_1'\chi, \quad T_2 = \chi^{-1}T_2'\chi, \quad T_3 = \chi^{-1}T_3'\chi, \quad T_4 = \chi^{-1}T_4'\chi.$$

Поскольку матрицу T_1 можно привести к жордановому виду при помощи надлежащего выбора невырожденной матрицы χ (см. [4, с. 482]), приходим к утверждению теоремы. $\square$

Отметим, что в теореме 4 собственные значения матриц могут быть как вещественными, так и комплексно сопряженными, поэтому в явном виде эти матрицы, с учетом вещественных форм, принимают следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{1.}\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{2.}\ \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_1 & -\beta_1\\ 0 & 0 & \beta_1 & \alpha_1\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{3.}\ \begin{pmatrix}\alpha_2 & -\beta_2 & 0 & 0\\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3 & -\beta_3\\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_3\end{pmatrix},\\
\mathbf{4.}\ \begin{pmatrix}\lambda_5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{5.}\ \begin{pmatrix}\lambda_5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_4 & -\beta_4\\ 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{6.}\ \begin{pmatrix}\lambda_5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_8 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8\end{pmatrix},\\
\mathbf{7.}\ \begin{pmatrix}\lambda_9 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10}\end{pmatrix}, \quad
\mathbf{8.}\ \begin{pmatrix}\lambda_4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix},
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

причём $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, $\beta_4 \neq 0$. Заметим, что в этих матрицах все элементы — вещественные числа.

Теорема 5. *Пусть T_1 — вещественная форма (3.5) жордановой матрицы из (3.3). Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **1** *из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно четыре различных случая:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_5 & a_6 & a_7 & 0 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_4;$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4, \\ \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_4; \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix} \ \textit{для попарно различных } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4. \tag{3.6}$$

2. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **2** *из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно два различных случая:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_5 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = \lambda_2; \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \ \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{3.7}$$

3. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **3** *из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможен случай*

$$\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

4. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **4** *из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны четыре различных случая:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \ \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{10} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \ \lambda_5 = \lambda_6 \neq \lambda_7;$$
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}, \ \lambda_5 \neq \lambda_6 = \lambda_7; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_5 \neq \lambda_6, \\ \lambda_5 \neq \lambda_7, \\ \lambda_6 \neq \lambda_7. \end{matrix} \tag{3.9}$$

5. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **5** *из (3.5), с точностью до перестановки строк и столбцов, возможен случай*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

6. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **6** *из* (3.5), *с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны два различных случая*:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_9 & 0 & a_{11} \end{pmatrix},\ \lambda_5 = \lambda_8; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix},\ \lambda_5 \neq \lambda_8. \tag{3.11}$$

7. *Для матрицы T, коммутирующей с матрицей T_1 вида* **7** *из* (3.5), *с точностью до перестановки строк и столбцов, возможны соответственно два различных случая*:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix},\ \lambda_9 = \lambda_{10}; \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} \end{pmatrix},\ \lambda_9 \neq \lambda_{10}. \tag{3.12}$$

8. *Матрица T, коммутирующая с матрицей T_1 вида* **8** *из* (3.5), *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Доказательство данной теоремы сводится к вычислению матричных коммутаторов и приравниванию их к нулевой матрице: $T_1T - TT_1 = 0$. Проиллюстрируем это для последнего случая, когда матрица T_1 имеет вид 8) из (3.5) и

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$T_1T - TT_1 = \begin{pmatrix} -a_5 & a_1 - a_6 & a_2 - a_7 & a_3 - a_8 \\ -a_9 & a_5 - a_{10} & a_6 - a_{11} & a_7 - a_{12} \\ -a_{13} & a_9 - a_{14} & a_{10} - a_{15} & a_{11} - a_{16} \\ 0 & a_{15} & a_{14} & a_{15} \end{pmatrix} = 0.$$

Видно, что

$$a_5 = a_9 = a_{10} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0, \quad a_1 = a_6 = a_{11} = a_{16}, \quad a_7 = a_2 = a_{12}, \quad a_3 = a_b.$$

В результате матрица T принимает вид (3.13). Аналогично получаем (3.6)–(3.12). □

Теоремы 3–5 дают существенные ограничения на матрицы коэффициентов T_2, T_3 и T_4 из системы (3.1). Несложно установить, что матрицы T_1, T_2, T_3 и T_4 могут принимать следующие неупорядоченные четвёрки значений:

1. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix};$

2. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix},$
$\lambda_4 \neq 0;$

3. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & -\nu_2 & 0 & 0 \\ \nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & -\rho_2 & 0 & 0 \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix},$

$\lambda_2 \neq 0,\ \lambda_4 \neq 0;$

4. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix},$

$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0;$

5. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_4 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_4 \\ 0 & 0 & \nu_4 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 \end{pmatrix},$

$\lambda_4 \neq 0;$

6. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & \nu_4 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & \rho_4 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_3 \end{pmatrix},$

$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0,\ \lambda_4^2 + \mu_4^2 + \nu_4^2 + \rho_4^2 \neq 0;$

7. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & 0 \\ 0 & \rho_1 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix},$

$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0;$

8. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \nu_4 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \rho_4 \\ 0 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 \\ 0 & 0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_1 \end{pmatrix},$

$\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2 + \rho_2^2 \neq 0.$

4. Разложимая алгебра Ли. Решение системы дифференциальных уравнений (3.1) с нулевыми матрицами T_1, T_2, T_3 и T_4 в подходящем базисе принимает следующий вид:

$$\overrightarrow{A} = U^1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^1, \quad \overrightarrow{B} = U^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^2, \quad \overrightarrow{C} = U^3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^3, \quad \overrightarrow{D} = U^4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + C^4,$$

где

$$U^i = \begin{pmatrix} g_1^i & p_1^i & q_1^i & r_1^i \\ g_2^i & p_2^i & q_2^i & r_2^i \\ g_3^i & p_3^i & q_3^i & r_3^i \\ g_4^i & p_4^i & q_4^i & r_4^i \end{pmatrix}, \quad C^i = \begin{pmatrix} c_1^i \\ c_2^i \\ c_3^i \\ c_4^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

— постоянные матрицы. По найденным решениям запишем базисные операторы (2.3) *восьмимерных линейных пространств*, добиваясь при этом исключения свободных членов выбором линейных комбинаций с постоянными коэффициентами операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 с операторами X_1,

X_2, X_3 и X_4:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = \left\langle U_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{4.1}$$

где

$$U_i = \begin{pmatrix} g_i^1 & p_i^1 & q_i^1 & r_i^1 \\ g_i^2 & p_i^2 & q_i^2 & r_i^2 \\ g_i^3 & p_i^3 & q_i^3 & r_i^3 \\ g_i^4 & p_i^4 & q_i^4 & r_i^4 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов. Несложно вычислить коммутатор:

$$[Y_i, Y_j] = \left\langle (U_j U_i - U_i U_j) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = -\left\langle \big[U_i, U_j\big] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{4.2}$$

где $\big[U_i, U_j\big] = U_i U_j - U_j U_i$ — коммутатор матриц U_i и U_j, $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Тождество Якоби в нашем случае это свойство выполняется автоматически, поскольку X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 — векторные поля (см. [12, с. 88]).

Далее выясним, при каких условиях на коэффициенты операторы (3.1) становятся базисными операторами восьмимерных алгебр Ли. Очевидно, алгебра Ли $L = J \ltimes I$ *разложима*, так как является полупрямой суммой коммутативного трехмерного идеала J, образованного операторами X_1, X_2, X_3, X_4, и четырёхмерной подалгебры Ли I, образованной операторами Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Следуя классификации абстрактных четырехмерных вещественных алгебр Ли (см. [11, с. 138]), приведем полный список (с точностью до изоморфизма) подалгебр Ли I:

$[Y_1, Y_2]$	$[Y_1, Y_3]$	$[Y_2, Y_3]$	$[Y_1, Y_4]$	$[Y_2, Y_4]$	$[Y_3, Y_4]$	№
0	0	0	εY_1	kY_2	lY_3	**1.**
0	0	0	$kY_1 + Y_2$	$-Y_1 + kY_2$	lY_3	**2.**
0	0	0	$kY_1 + Y_2$	kY_2	εY_3	**3.**
0	0	0	$kY_1 + Y_2$	$kY_2 + Y_3$	εY_3	**4.**
0	0	Y_1	cY_1	Y_2	$(c-1)Y_3$	**5.**
0	0	Y_1	$2Y_1$	Y_2	$Y_2 + Y_3$	**6.**
0	0	Y_1	qY_1	Y_3	$-Y_2 + qY_3$	**7.**
0	Y_1	0	0	Y_2	0	**8.**
0	Y_1	Y_2	Y_2	$-Y_1$	0	**9.**
Y_3	$-Y_2$	Y_1	0	0	0	**10.**
Y_3	$-Y_2$	$-Y_1$	0	0	0	**11.**

(4.3)

где $\varepsilon = 0, 1$; $k, l, c, q = \text{const}$ и $-2 < q < 2$.

Теорема 6. *Для локальной ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований с разложимой алгеброй Ли* $L = J \ltimes I$, *базис которой задается операторами* (3.1), *матрица коэффициентов* K *операторов* Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 *невырождена.*

Доказательство. Согласно теореме 1 матрица, составленная по коэффициентам операторов, невырождена; значит

$$\begin{vmatrix} E & E \\ K(u) & K(v) \end{vmatrix} = |K(v) - K(u)| \neq 0.$$

Тогда матрица

$$K(v)-K(u)=$$

$$=\begin{pmatrix}\langle\overrightarrow{g}^1_1,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_1,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_1,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_1,\overrightarrow{v}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_2,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_2,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_2,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_2,\overrightarrow{v}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_3,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_3,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_3,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_3,\overrightarrow{v}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_4,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_4,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_4,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_4,\overrightarrow{v}\rangle\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\langle\overrightarrow{g}^1_1,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_1,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_1,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_1,\overrightarrow{u}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_2,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_2,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_2,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_2,\overrightarrow{u}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_3,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_3,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_3,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_3,\overrightarrow{u}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_4,\overrightarrow{v}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_4,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_4,\overrightarrow{u}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_4,\overrightarrow{u}\rangle\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\langle\overrightarrow{g}^1_1,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_1,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_1,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_1,\overrightarrow{v}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_2,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_2,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_2,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_2,\overrightarrow{v}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_3,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_3,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_3,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_3,\overrightarrow{vu}\rangle\\ \langle\overrightarrow{g}^1_4,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^2_4,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^3_4,\overrightarrow{vu}\rangle & \langle\overrightarrow{g}^4_4,\overrightarrow{vu}\rangle\end{pmatrix}$$

невырождена; здесь

$$\overrightarrow{u}=(x_u,y_u,z_u,w_u),\quad \overrightarrow{v}=(x_v,y_v,z_v,w_v),\quad \overrightarrow{vu}=(x_{vu},y_{vu},z_{vu},w_{vu}),\quad \overrightarrow{g}^j_i=(g^j_i,p^j_i,q^j_i,r^j_i),$$

$i,j=1,2,3,4$. Точки $u=(x_u,y_u,z_u,w_u)$ и $v=(x_v,y_v,z_v,w_v)$ выбираются произвольно, поэтому матрица K невырождена. $\square$

5. Вычисление алгебр Ли. Здесь и ниже рассматривается случай, когда для матрицы U_1 из (4.1) характеристический многочлен и минимальный многочлен совпадают, а её собственные значения различны и вещественны. В данном разделе из линейных пространств с базисными операторами вида (4.1) необходимо выделить алгебры Ли. Для этого пользуемся возможностью перехода к новому базису, заменой координат, а также замкнутостью коммутаторов базисных операторов. Последнее означает, что сам коммутатор должен принадлежать этой же алгебре Ли (см. [12, § 13]). Также учитывается теорема 6.

Теорема 7. *Из системы* (4.1), *для которой матрица U_1 оператора Y_1 имеет различные вещественные собственные значения, причём её характеристический многочлен совпадает с минимальным, с точностью до линейной замены координат, выделяются операторы $X_1=\partial_x$, $X_2=\partial_y$, $X_3=\partial_z$, $X_4=\partial_w$, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, образующие базисы восьмимерных линейных пространств*; *при этом операторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 образуют подпространство, являющееся алгеброй Ли, из списка* (4.3):

для алгебры Ли **1**:

$$\begin{gathered}Y_1=\lambda_1x\partial_x+\lambda_2y\partial_y+\lambda_3z\partial_z+\lambda_4w\partial_w,\quad Y_2=b_1x\partial_x+b_2y\partial_y+b_3z\partial_z+b_4w\partial_w,\\ Y_3=c_1x\partial_x+c_2y\partial_y+c_3z\partial_z+c_4w\partial_w,\quad Y_4=d_1x\partial_x+d_2y\partial_y+d_3z\partial_z+d_4w\partial_w,\\ \lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1\neq\lambda_3,\ \lambda_1\neq\lambda_4,\ \lambda_2\neq\lambda_3,\ \lambda_2\neq\lambda_4,\ \lambda_3\neq\lambda_4;\end{gathered}\tag{5.1}$$

$$\begin{gathered}Y_1=(\lambda_5x+y)\partial_x+\lambda_5y\partial_y+\lambda_6z\partial_z+\lambda_7w\partial_w,\\ Y_2=(b_1x+b_2y)\partial_x+b_1y\partial_y+b_{11}z\partial_z+b_{16}w\partial_w,\\ Y_3=(c_1x+c_2y)\partial_x+c_1y\partial_y+c_{11}z\partial_z+c_{16}w\partial_w,\\ Y_4=(d_1x+d_2y)\partial_x+d_1y\partial_y+d_{11}z\partial_z+d_{16}w\partial_w,\\ \lambda_5\neq\lambda_6,\ \lambda_5\neq\lambda_7,\ \lambda_6\neq\lambda_7;\end{gathered}\tag{5.2}$$

$$\begin{gathered}Y_1=(\lambda_5x+y)\partial_x+\lambda_5y\partial_y+(\lambda_8z+w)\partial_z+\lambda_8w\partial_w,\\ Y_2=(b_1x+b_2y)\partial_x+b_1y\partial_y+(b_{11}z+b_{12}w)\partial_z+b_{11}w\partial_w,\\ Y_3=(c_1x+c_2y)\partial_x+c_1y\partial_y+(c_{11}z+c_{12}w)\partial_z+c_{11}w\partial_w,\\ Y_4=(d_1x+d_2y)\partial_x+d_1y\partial_y+(d_{11}z+d_{12}w)\partial_z+d_{11}w\partial_w,\quad\lambda_5\neq\lambda_8;\end{gathered}\tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=(\lambda_9x+y)\partial_x+(\lambda_9y+z)\partial_y+\lambda_9z\partial_z+\lambda_{10}w\partial_w,\\ &Y_2=(b_1x+b_2y+b_3z)\partial_x+(b_1y+b_2z)\partial_y+b_1z\partial_z+b_{16}w\partial_w,\\ &Y_3=(c_1x+c_2y+c_3z)\partial_x+(c_1y+c_2z)\partial_y+c_1z\partial_z+c_{16}w\partial_w,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z)\partial_x+(d_1y+d_2z)\partial_y+d_1z\partial_z+d_{16}w\partial_w,\quad \lambda_9\neq\lambda_{10}; \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=(\lambda_9x+y)\partial_x+(\lambda_9y+z)\partial_y+(\lambda_9z+w)\partial_z+\lambda_9w\partial_w,\\ &Y_2=(b_1x+b_2y+b_3z+b_4w)\partial_x+(b_1y+b_2z+b_3w)\partial_y+(b_1z+b_2w)\partial_z+b_1w\partial_w,\\ &Y_3=(c_1x+c_2y+c_3z+c_4w)\partial_x+(c_1y+c_2z+c_3w)\partial_y+(c_1z+c_2w)\partial_z+c_1w\partial_w,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y+d_2z+d_3w)\partial_y+(d_1z+d_2w)\partial_z+d_1w\partial_w; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=y\partial_x+z\partial_y+w\partial_z,\quad Y_2=x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z+w\partial_w,\quad Y_3=z\partial_x+w\partial_y,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y-y+d_2z+d_3w)\partial_y+\\ &+(d_1z-2z+d_2w)\partial_z+(d_1w-3w)\partial_w; \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=y\partial_x+z\partial_y+w\partial_z,\quad Y_2=x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z+w\partial_w,\quad Y_3=w\partial_x,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y-y+d_2z+d_3w)\partial_y+\\ &+(d_1z-2z+d_2w)\partial_z+(d_1w-3w)\partial_w; \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=y\partial_x+z\partial_y+w\partial_z,\quad Y_2=z\partial_x+w\partial_y,\quad Y_3=w\partial_x,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y-y+d_2z+d_3w)\partial_y+\\ &+(d_1z-2z+d_2w)\partial_z+(d_1w-3w)\partial_w; \end{aligned} \tag{5.8}$$

для алгебры Ли **3**:

$$\begin{aligned} &Y_1=(\lambda_9x+y)\partial_x+(\lambda_9y+z)\partial_y+\lambda_9z\partial_z+\lambda_{10}w\partial_w,\quad Y_2=(d_2-d_7)z\partial_x,\\ &Y_3=(c_1x+c_3z)\partial_x+c_1y\partial_y+c_1z\partial_z+c_{16}w\partial_w,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z)\partial_x+(d_1y+d_7z)\partial_y+d_1z\partial_z+d_{16}w\partial_w,\lambda_9\neq\lambda_{10}; \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} &Y_1=(\lambda_9x+y)\partial_x+(\lambda_9y+z)\partial_y+(\lambda_9z+w)\partial_z+\lambda_9w\partial_w,\\ &Y_2=b_4w\partial_x,\quad Y_3=(c_1x+c_3z+c_4w)\partial_x+(c_1y+c_3w)\partial_y+c_1z\partial_z+c_1w\partial_w,\\ &Y_4=(d_1x+d_7y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y+d_7z+(d_3-b_4)w)\partial_y+(d_1z+d_7w)\partial_z+d_1w\partial_w; \end{aligned} \tag{5.10}$$

для алгебры Ли **4**:

$$\begin{aligned} &Y_1=(\lambda_9x+y)\partial_x+(\lambda_9y+z)\partial_y+(\lambda_9z+w)\partial_z+\lambda_9w\partial_w,\\ &Y_2=(b_3z+b_4w)\partial_x+b_3w\partial_y,\quad Y_3=2b_3^2w\partial_x,\\ &Y_4=(d_1x+d_2y+d_3z+d_4w)\partial_x+(d_1y+(d_2-b_3)z+(d_3-b_4)w)\partial_y+\\ &+(d_1z+(d_2-2b_3)w)\partial_z+d_1w\partial_w, \end{aligned} \tag{5.11}$$

причем все коэффициенты перед переменными — постоянные.

Остальные алгебры не реализуются.

Операторы Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4, приведенные в формулировке теоремы 7, линейно*независимы* и *ненулевые.* При доказательстве этой теоремы допускается линейная замена координат, линейная комбинация операторов и применение условия замкнутости коммутаторов базисных операторов.

Доказательство. В операторах (4.1) произведем линейную замену координат

$$\big(x'\ y'\ z'\ w'\big)^T=A\big(x\ y\ z\ w\big)^T,$$

где A — произвольная невырожденная матрица четвёртого порядка с постоянными элементами, ^{T} — знак транспонирования. Тогда для операторов дифференцирования относительно старых и новых координат получим связь

$$\big(\partial_x\ \partial_y\ \partial_z\ \partial_w\big)^T = A^T\big(\partial_{x'}\ \partial_{y'}\ \partial_{z'}\ \partial_{w'}\big)^T.$$

В новых координатах операторы X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 принимают следующий вид:

$$\begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} X_1'\\ X_2'\\ X_3'\\ X_4' \end{pmatrix}, \quad Y_i = \left\langle AU_iA^{-1}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\\ w' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_{x'}\\ \partial_{y'}\\ \partial_{z'}\\ \partial_{w'} \end{pmatrix} \right\rangle, \quad i = 1,2,3,4.$$

Линейной комбинацией переходим от операторов X_1, X_2, X_3, X_4 к операторам $X_1' = \partial_{x'}$, $X_2' = \partial_{y'}$, $X_3' = \partial_{z'}$, $X_4' = \partial_{w'}$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат и базисных операторов, получим:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = \partial_w, \quad Y_i = \left\langle U_i'\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где введены обозначения

$$U_i' = AU_iA^{-1}, \quad i = 1,2,3,4.$$

Известно, что матрица U_1' приводится к канонической вещественной форме (см. [12]). Возможны следующие варианты:

$$\text{I.}\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \text{II.}\ \begin{pmatrix} ,\lambda_5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}, \quad \text{III.}\ \begin{pmatrix} ,\lambda_5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_8 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 \end{pmatrix},$$

$$\text{IV.}\ \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}, \quad \text{V.}\ \begin{pmatrix} \lambda_4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix},$$

причем все элементы в данных матрицах вещественны,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_3, \quad \lambda_1 \neq \lambda_4, \quad \lambda_2 \neq \lambda_3, \quad \lambda_2 \neq \lambda_4, \quad \lambda_3 \neq \lambda_4,$$
$$\lambda_5 \neq \lambda_6, \quad \lambda_5 \neq \lambda_7, \quad \lambda_6 \neq \lambda_7, \quad \lambda_7 \neq \lambda_8, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}.$$

В таком случае ненулевой оператор Y_1 приводится к одному из четырех видов:

$$\begin{gathered} Y_1 = \lambda_1 x\partial_x + \lambda_2 y\partial_y + \lambda_3 z\partial_z + \lambda_4 w\partial_w,\\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_3,\ \lambda_1 \neq \lambda_4,\ \lambda_2 \neq \lambda_3,\ \lambda_2 \neq \lambda_4,\ \lambda_3 \neq \lambda_4; \end{gathered} \tag{5.12}$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + \lambda_6 z\partial_z + \lambda_7 w\partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_6,\ \lambda_5 \neq \lambda_7,\ \lambda_6 \neq \lambda_7; \tag{5.13}$$

$$Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + (\lambda_8 z + w)\partial_z + \lambda_8 w\partial_w, \quad \lambda_7 \neq \lambda_8; \tag{5.14}$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + \lambda_9 z\partial_z + \lambda_{10} w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}; \tag{5.15}$$

$$Y_1 = (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w. \tag{5.16}$$

Докажем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть ненулевые операторы Y_1, принимающий один из видов* (5.12)–(5.16), *и*

$$\begin{aligned} Y_2 = \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_5x + b_6y + b_7z + b_8w\big)\partial_y +&\\ + \big(b_9x + b_{10}y + b_{11}z + b_{12}w\big)\partial_z + \big(b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + b_{16}w\big)\partial_w,& \end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационному соотношению $[Y_1, Y_2] = 0$. *Тогда, с точностью до линейной замены координат, возможны следующие варианты для этих операторов*:

$$\begin{gathered} Y_1 = \lambda_1 x\partial_x + \lambda_2 y\partial_y + \lambda_3 z\partial_z + \lambda_4 w\partial_w, \quad Y_2 = b_1 x\partial_x + b_2 y\partial_y + b_3 z\partial_z + b_4 w\partial_w, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_3,\ \lambda_1 \neq \lambda_4,\ \lambda_2 \neq \lambda_3,\ \lambda_2 \neq \lambda_4,\ \lambda_3 \neq \lambda_4; \end{gathered} \tag{5.17}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + \lambda_6 z\partial_z + \lambda_7 w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + b_1 y\partial_y + b_{11} z\partial_z + b_{16} w\partial_w, \\ \lambda_5 \neq \lambda_6,\ \lambda_5 \neq \lambda_7,\ \lambda_6 \neq \lambda_7; \end{gathered} \tag{5.18}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + (\lambda_8 z + w)\partial_z + \lambda_8 w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1 x + b_2 y)\partial_x + b_1 y\partial_y + (b_{11} z + b_{12} w)\partial_z + b_{11} w\partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_8; \end{gathered} \tag{5.19}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + \lambda_9 z\partial_z + \lambda_{10} w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z)\partial_x + (b_1 y + b_2 z)\partial_y + b_1 z\partial_z + b_{16} w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}; \end{gathered} \tag{5.20}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w)\partial_x + (b_1 y + b_2 z + b_3 w)\partial_y + (b_1 z + b_2 w)\partial_z + b_1 w\partial_w. \end{gathered} \tag{5.21}$$

Доказательство. Вычислим коммутатор $[Y_1, Y_2]$ при помощи формулы (4.2) и приравняем его к нулю. Подробно рассмотрим случай, когда оператор Y_1 принимает вид (5.12). Используем матричные обозначения:

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle, \quad Y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[Y_1, Y_2] = -\left\langle \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)b_2 & (\lambda_1-\lambda_3)b_3 & (\lambda_1-\lambda_4)b_4 \\ (\lambda_2-\lambda_1)b_5 & 0 & (\lambda_2-\lambda_3)b_7 & (\lambda_2-\lambda_4)b_8 \\ (\lambda_3-\lambda_1)b_9 & (\lambda_3-\lambda_2)b_{10} & 0 & (\lambda_3-\lambda_4)b_{12} \\ (\lambda_2-\lambda_1)b_{13} & (\lambda_4-\lambda_2)b_{14} & (\lambda_4-\lambda_3)b_{15} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Поскольку элементы λ попарно различны, имеем систему (5.17). Доказательство для (5.18) – (5.21) аналогично. □

Лемма 2. *Пусть ненулевые операторы* Y_1, *принимающий один из видов* (5.12)–(5.16), *и*

$$\begin{aligned} Y_2 = \big(b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w\big)\partial_x + \big(b_5 x + b_6 y + b_7 z + b_8 w\big)\partial_y + \\ + \big(b_9 x + b_{10} y + b_{11} z + b_{12} w\big)\partial_z + \big(b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z + b_{16} w\big)\partial_w, \end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационному соотношению $[Y_1, Y_2] = Y_1$. *Тогда, с точностью до линейной замены координат, возможен единственный варианты для этих операторов*:

$$\begin{aligned} &Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \\ &Y_2 = \big(b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 w\big)\partial_x + \big(b_1 y - y + b_2 z + b_3 w\big)\partial_y + \\ &\qquad + \big(b_1 z - 2z + b_2 w\big)\partial_z + \big(b_1 w - 3w\big)\partial_w. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Доказательство. Вычислим коммутатор $[Y_1,Y_2]$ и приравняем его к нулю. При вычислении этого коммутатора используем формулу (4.2),

$$Y_2=\left\langle\begin{pmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\\b_5&b_6&b_7&b_8\\b_9&b_{10}&b_{11}&b_{12}\\b_{13}&b_{14}&b_{15}&b_{16}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Подробно рассмотрим случай, когда оператор Y_1 принимает вид (5.12). Используем матричные обозначения:

$$Y_1=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$[Y_1,Y_2]=-\left\langle\begin{pmatrix}0&(\lambda_1-\lambda_2)b_2&(\lambda_1-\lambda_3)b_3&(\lambda_1-\lambda_4)b_4\\(\lambda_2-\lambda_1)b_5&0&(\lambda_2-\lambda_3)b_7&(\lambda_2-\lambda_4)b_8\\(\lambda_3-\lambda_1)b_9&(\lambda_3-\lambda_2)b_{10}&0&(\lambda_3-\lambda_4)b_{12}\\(\lambda_2-\lambda_1)b_{13}&(\lambda_4-\lambda_2)b_{14}&(\lambda_4-\lambda_3)b_{15}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle=Y_1.$$

Тогда $Y_1=0$, что недопустимо.

Пусть оператор Y_1 принимает вид (5.13); тогда

$$Y_1=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_1&1&0&0\\0&\lambda_1&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle,\quad [Y_1,Y_2]=\left\langle V\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle=Y_1.$$

где

$$V=\begin{pmatrix}-b_5&b_1-b_6&(\lambda_3-\lambda_1)b_3-b_7&(\lambda_4-\lambda_1)b_4-b_8\\0&b_5&(\lambda_3-\lambda_1)b_7&(\lambda_4-\lambda_1)b_8\\(\lambda_1-\lambda_3)b_9&(\lambda_1-\lambda_3)b_{10}+b_9&0&(\lambda_4-\lambda_3)b_{12}\\(\lambda_1-\lambda_4)b_{13}&(\lambda_1-\lambda_4)b_{14}+b_{13}&(\lambda_3-\lambda_4)b_{15}&0\end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_6=\lambda_7=0$, что недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.14), то

$$Y_1=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_5&1&0&0\\0&\lambda_5&0&0\\0&0&\lambda_8&1\\0&0&0&\lambda_8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle,\quad [Y_1,Y_2]=-\left\langle V\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle=Y_1,$$

где

$$V=\begin{pmatrix}b_5&-b_1+b_6&(\lambda_5-\lambda_8)b_3+b_7&-b_3+(\lambda_5-\lambda_8)b_4+b_8\\0&-b_5&(\lambda_5-\lambda_8)b_7&-b_7+(\lambda_5-\lambda_8)b_8\\b_{13}+(\lambda_8-\lambda_5)b_9&(\lambda_8-\lambda_5)b_{10}+b_{14}-b_9&b_{15}&-b_{11}+b_{16}\\(\lambda_8-\lambda_5)b_{13}&-b_{13}+(\lambda_8-\lambda_5)b_{14}&0&-b_{15}\end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_5=\lambda_8=0$, что также недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.15), то

$$Y_1=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_9&1&0&0\\0&\lambda_9&1&0\\0&0&\lambda_9&0\\0&0&0&\lambda_{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle,\quad [Y_1,Y_2]=-\left\langle V\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\\\partial_w\end{pmatrix}\right\rangle=Y_1,$$

где

$$V = \begin{pmatrix} b_5 & -b_1+b_6 & -b_2+b_7 & -(\lambda_{10}-\lambda_9)b_4+b_8 \\ b_9 & b_{10}-b_5 & b_{11}-b_6 & b_{12}-(\lambda_{10}-\lambda_9)b_8 \\ 0 & -b_9 & -b_{10} & -(\lambda_{10}-\lambda_9)b_{12} \\ (\lambda_{10}-\lambda_9)b_{13} & -b_{13}+(\lambda_{10}-\lambda_9)b_{14} & -b_{14}+(\lambda_{10}-\lambda_9)b_{15} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda_9 = \lambda_{10} = 0$, что недопустимо.

Если оператор Y_1 имеет вид (5.16), то

$$Y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$[Y_1, Y_2] = -\left\langle \begin{pmatrix} b_5 & -b_1+b_6 & -b_2+b_7 & -b_3+b_8 \\ b_9 & b_{10}-b_5 & b_{11}-b_6 & b_{12}-b_7 \\ b_{13} & b_{14}-b_9 & -b_{10}+b_{15} & -b_{11}+b_{16} \\ 0 & -b_{13} & -b_{14} & -b_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} \right\rangle = Y_1.$$

Тогда допустимое решение получаем при $\lambda_9 = 0$. В итоге имеем операторы (5.22). □

Лемма 3. *Пусть ненулевые операторы: Y_1, принимающий один из видов* (5.12)–(5.16),

$$\begin{aligned} Y_2 &= \big(b_1x+b_2y+b_3z+b_4w\big)\partial_x + \big(b_5x+b_6y+b_7z+b_8w\big)\partial_y + \\ &\quad + \big(b_9x+b_{10}y+b_{11}z+b_{12}w\big)\partial_z + \big(b_{13}x+b_{14}y+b_{15}z+b_{16}w\big)\partial_w, \\ Y_3 &= \big(c_1x+c_2y+c_3z+c_4w\big)\partial_x + \big(c_5x+c_6y+c_7z+c_8w\big)\partial_y + \\ &\quad + \big(c_9x+c_{10}y+c_{11}z+c_{12}w\big)\partial_z + \big(c_{13}x+c_{14}y+c_{15}z+c_{16}w\big)\partial_w, \end{aligned}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_3] = 0.$$

Тогда, с точностью до линейной замены координат в этих операторов, возможны следующие варианты:

$$\begin{gathered} Y_1 = \lambda_1 x\partial_x + \lambda_2 y\partial_y + \lambda_3 z\partial_z + \lambda_4 w\partial_w, \quad Y_2 = b_1x\partial_x + b_2y\partial_y + b_3z\partial_z + b_4w\partial_w, \\ Y_3 = c_1x\partial_x + c_2y\partial_y + c_3z\partial_z + c_4w\partial_w, \\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_3,\ \lambda_1 \neq \lambda_4,\ \lambda_2 \neq \lambda_3,\ \lambda_2 \neq \lambda_4,\ \lambda_3 \neq \lambda_4; \end{gathered} \tag{5.23}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + \lambda_6 z\partial_z + \lambda_7 w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + b_1y\partial_y + b_{11}z\partial_z + b_{16}w\partial_w, \\ Y_3 = (c_1x + c_2y)\partial_x + c_1y\partial_y + c_{11}z\partial_z + c_{16}w\partial_w, \\ \lambda_5 \neq \lambda_6,\ \lambda_5 \neq \lambda_7,\ \lambda_6 \neq \lambda_7; \end{gathered} \tag{5.24}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_5 x + y)\partial_x + \lambda_5 y\partial_y + (\lambda_8 z + w)\partial_z + \lambda_8 w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1x + b_2y)\partial_x + b_1y\partial_y + (b_{11}z + b_{12}w)\partial_z + b_{11}w\partial_w, \\ Y_3 = (c_1x + c_2y)\partial_x + c_1y\partial_y + (c_{11}z + c_{12}w)\partial_z + c_{11}w\partial_w, \quad \lambda_5 \neq \lambda_8; \end{gathered} \tag{5.25}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + \lambda_9 z\partial_z + \lambda_{10} w\partial_w, \\ Y_2 = (b_1x + b_2y + b_3z)\partial_x + (b_1y + b_2z)\partial_y + b_1z\partial_z + b_{16}w\partial_w, \\ Y_3 = (c_1x + c_2y + c_3z)\partial_x + (c_1y + c_2z)\partial_y + c_1z\partial_z + c_{16}w\partial_w, \quad \lambda_9 \neq \lambda_{10}; \end{gathered} \tag{5.26}$$

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= (\lambda_9 x + y)\partial_x + (\lambda_9 y + z)\partial_y + (\lambda_9 z + w)\partial_z + \lambda_9 w\partial_w,\\
Y_2 &= (b_1x + b_2y + b_3z + b_4w)\partial_x + (b_1y + b_2z + b_3w)\partial_y + (b_1z + b_2w)\partial_z + b_1w\partial_w,\\
Y_3 &= (c_1x + c_2y + c_3z + c_4w)\partial_x + (c_1y + c_2z + c_3w)\partial_y + (c_1z + c_2w)\partial_z + c_1w\partial_w.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

Доказательство леммы 3 состоит в вычислении коммутаторов $[Y_1, Y_2]$, $[Y_1, Y_3]$, $[Y_2, Y_3]$, приравнивания их к нулю и сравнения коэффициенты; при этом используются результаты леммы 1. Оператор Y_1 берётся из системы (5.12)–(5.16), а операторы Y_2 и Y_3 — произвольного вида. В результате получаем соотношения (5.23)–(5.27). □

Лемма 4. *Рассмотрим ненулевые операторы Y_1, принимающий один из видов* (5.12)–(5.16),

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_5x + b_6y + b_7z + b_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(b_9x + b_{10}y + b_{11}z + b_{12}w\big)\partial_z + \big(b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + b_{16}w\big)\partial_w,\\
Y_3 &= \big(c_1x + c_2y + c_3z + c_4w\big)\partial_x + \big(c_5x + c_6y + c_7z + c_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(c_9x + c_{10}y + c_{11}z + c_{12}w\big)\partial_z + \big(c_{13}x + c_{14}y + c_{15}z + c_{16}w\big)\partial_w.
\end{aligned}
$$

Тогда для них коммутационные соотношения

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_2, Y_3] = Y_1$$

не выполняются.

Доказательство следует из леммы 1 и того факта, что операторы вида Y_2 в каждой системе коммутативны. □

Лемма 5. *Пусть ненулевые операторы Y_1, принимающий один из видов* (5.12)–(5.16),

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_5x + b_6y + b_7z + b_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(b_9x + b_{10}y + b_{11}z + b_{12}w\big)\partial_z + \big(b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + b_{16}w\big)\partial_w,\\
Y_3 &= \big(c_1x + c_2y + c_3z + c_4w\big)\partial_x + \big(c_5x + c_6y + c_7z + c_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(c_9x + c_{10}y + c_{11}z + c_{12}w\big)\partial_z + \big(c_{13}x + c_{14}y + c_{15}z + c_{16}w\big)\partial_w,
\end{aligned}
$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = 0.$$

Тогда, с точностью до линейной замены координат возможен единственный вариант для этих операторов:

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z,\\
Y_2 &= \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_1y - y + b_2z + b_3w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(b_1z - 2z + b_2w\big)\partial_z + \big(b_1w - 3w\big)\partial_w,\\
Y_3 &= x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w.
\end{aligned}
$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 1–3.

Лемма 6. *Рассмотрим ненулевые операторы Y_1, принимающий один из пяти видов* (5.12)–(5.16),

$$
\begin{aligned}
Y_2 &= \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_5x + b_6y + b_7z + b_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(b_9x + b_{10}y + b_{11}z + b_{12}w\big)\partial_z + \big(b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + b_{16}w\big)\partial_w,\\
Y_3 &= \big(c_1x + c_2y + c_3z + c_4w\big)\partial_x + \big(c_5x + c_6y + c_7z + c_8w\big)\partial_y +\\
&\quad + \big(c_9x + c_{10}y + c_{11}z + c_{12}w\big)\partial_z + \big(c_{13}x + c_{14}y + c_{15}z + c_{16}w\big)\partial_w.
\end{aligned}
$$

Тогда для них коммутационные соотношения

$$[Y_1, Y_2] = 0, \quad [Y_1, Y_3] = Y_1, \quad [Y_2, Y_3] = Y_2$$

не выполняются.

Доказательство. Оператор Y_1 берётся из системы (5.12)–(5.16), а операторы Y_2 — согласно лемме 1, поскольку $[Y_1, Y_2] = 0$. Далее, вычисляя коммутатор $[Y_1, Y_3] = Y_1$ (лемма 2), приходим в единственному варианту для этих трёх операторов:

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z,$$
$$Y_2 = \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_1y + b_2z + b_3w\big)\partial_y + \big(b_1z + b_2w\big)\partial_z + b_1w\partial_w,$$
$$Y_3 = \big(c_1x + c_2y + c_3z + c_4w\big)\partial_x + \big(c_1y - y + c_2z + c_3w\big)\partial_y + \big(c_1z - 2z + c_2w\big)\partial_z + \big(c_1w - 3w\big)\partial_w.$$

Наконец, вычисляя коммутатор $[Y_2, Y_3] = Y_2$, получаем $Y_2 = c_2Y_1$, что недопустимо для базисных операторов. □

Теперь возвращаемся к доказательству теоремы 7.

Сначала рассмотрим алгебру **1** из (4.3). Операторы Y_1, Y_2, Y_3 берутся из леммы 1. Если $\varepsilon = 0$, то по лемме 1 вычисляется оператор Y_4. В таком случае

$$[Y_1, Y_4] = [Y_2, Y_4] = [Y_3, Y_4] = 0,$$

значит алгебра **1** коммутативна; тогда получаем системы (5.1)–(5.5). Если же $\varepsilon = 1$, то согласно леммам 1 и 2 будем иметь

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z,$$
$$Y_2 = \big(b_1x + b_2y + b_3z + b_4w\big)\partial_x + \big(b_1y + b_2z + b_3w\big)\partial_y + \big(b_1z + b_2w\big)\partial_z + b_1w\partial_w,$$
$$Y_3 = \big(c_1x + c_2y + c_3z + c_4w\big)\partial_x + \big(c_1y + c_2z + c_3w\big)\partial_y + \big(c_1z + c_2w\big)\partial_z + c_1w\partial_w,$$
$$Y_4 = \big(d_1x + d_2y + d_3z + d_4w\big)\partial_x + \big(d_1y - y + d_2z + d_3w\big)\partial_y + \big(d_1z - 2z + d_2w\big)\partial_z + \big(d_1w - 3w\big)\partial_w.$$

Вычисляя остальные коммутаторы

$$[Y_2, Y_4] = kY_2, \quad [Y_3, Y_4] = lY_3,$$

получаем (5.6)–(5.8).

Исследуем теперь алгебру **2** из (4.3). Операторы Y_1, Y_2, Y_3 берутся из леммы 1, а Y_4 — произвольного линейного вида. Если Y_1 совпадает с (5.12), то из соотношения

$$[Y_1, Y_4] = kY_1 + Y_2$$

получаем $kY_1 + Y_2 = 0$, что недопустимо. Пусть теперь Y_1 совпадает с (5.13); тогда из

$$[Y_1, Y_4] = kY_1 + Y_2, \quad [Y_2, Y_4] = -Y_1 + kY_2 \tag{5.28}$$

следует $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$, что недопустимо. Если же Y_1 совпадает с (5.14), то из (5.28) следует $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$, что недопустимо. Если Y_1 совпадает с (5.15), то из (5.28) следует $\lambda_9 = \lambda_{10} = 0$, что также недопустимо. Если Y_1 совпадает с (5.16), то получаем противоречие $b_2^2 + 1 = 0$.

Аналогично, из алгебры **3** получаем два положительных результата (5.9) и (5.10), а из **4** — (5.11).

Из леммы 4 вытекает, что алгебры **5**–**7** дают отрицательный результат, а из лемм 5 и 6 — отрицательный результат для алгебр **8** и **9**

Алгебры **10** и **11** также не реализуются. В этом легко убедиться, взяв Y_4 из системы (5.12)–(5.16); тогда по лемме 1 находим операторы Y_1, Y_2, Y_3, которые между собой коммутативны.

Таким образом, теорема 7 доказана. □

Далее из восьмимерных линейных пространств, найденных в теореме 7, выделим алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространства R^4. Для этого применим теорему 6 и используем возможность перехода к новому базису (линейной комбинации базисных операторов).

Теорема 8. *Из восьмимерных линейных пространств* (5.1)–(5.11) *выделяются восьмимерные алгебры Ли локально ограниченно точно дважды транзитивных групп Ли преобразований пространстваËR^4, полученных расширением группы параллельных переносов. Базис этих алгебр Ли, с точностью до линейных комбинаций операторов и линейных замен координат, состоит* *из операторов дифференцирования* $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = \partial_z$, $X_4 = \partial_w$, *а также из операторов* Y_1, Y_2, Y_3, Y_4:

$$Y_1 = x\partial_x, \quad Y_2 = y\partial_y, \quad Y_3 = z\partial_z, \quad Y_4 = w\partial_w; \tag{5.29}$$

$$Y_1 = (ax + y)\partial_x, \quad Y_2 = bx\partial_x + y\partial_y, \quad Y_3 = cx\partial_x + z\partial_z, \quad Y_4 = dx\partial_x + w\partial_w; \tag{5.30}$$

$$Y_1 = w\partial_z, \quad Y_2 = z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = x\partial_x + y\partial_y, \quad Y_4 = y\partial_x; \tag{5.31}$$

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_3 = z\partial_x, \quad Y_4 = w\partial_w; \tag{5.32}$$

$$Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_3 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_4 = w\partial_x; \tag{5.33}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \\ Y_3 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_4 = aw\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z + 3w\partial_w; \end{gathered} \tag{5.34}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \\ Y_3 = w\partial_x, \quad Y_4 = az\partial_x + (y + aw)\partial_y + 2z\partial_z + 3w\partial_w; \end{gathered} \tag{5.35}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_3 = w\partial_x, \\ Y_4 = ax\partial_x + (a-1)y\partial_y + (a-2)z\partial_z + (a-3)w\partial_w; \end{gathered} \tag{5.36}$$

$$Y_1 = ay\partial_x + z\partial_y, \quad Y_2 = z\partial_x, \quad Y_3 = w\partial_w, \quad Y_4 = (x + by)\partial_x + y\partial_y + z\partial_z; \tag{5.37}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = y\partial_x + z\partial_y + aw\partial_w, \quad Y_2 = z\partial_x, \\ Y_3 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + bw\partial_w, \quad Y_4 = cy\partial_x + dw\partial_w; \end{gathered} \tag{5.38}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = y\partial_x + (z + aw)\partial_y + w\partial_z, \quad Y_2 = w\partial_x, \\ Y_3 = z\partial_x + w\partial_y, \quad Y_4 = x\partial_x + (y + aw)\partial_y + z\partial_z + w\partial_w; \end{gathered} \tag{5.39}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (ax + y)\partial_x + (ay + z)\partial_y + (az + w)\partial_z + aw\partial_w, \quad Y_2 = w\partial_x, \\ Y_3 = (x + cz)\partial_x + (y + cw)\partial_y + z\partial_z + w\partial_w, \quad Y_4 = dz\partial_x + bw\partial_y; \end{gathered} \tag{5.40}$$

$$\begin{gathered} Y_1 = (ax + y)\partial_x + (ay + z)\partial_y + (az + w)\partial_z + aw\partial_w, q \quad Y_2 = z\partial_x + w\partial_y, \\ Y_3 = w\partial_x, \quad Y_4 = bx\partial_x + (by - cz - dw)\partial_y + (bz - 2cw)\partial_z + bw\partial_w, \end{gathered} \tag{5.41}$$

причем коэффициенты a, b, c, d *постоянны.*

Доказательство этой теоремы проводится в два этапа. На первом этапе применяем теорему 6. Для этого исследуем на невырожденность матрицу K, составленную из коэффициентов операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4. Например, для линейного пространства (5.1) эта матрица имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} \lambda_1 x & \lambda_2 y & \lambda_3 z & \lambda_4 w \\ b_1 x & b_2 y & b_3 z & b_4 w \\ c_1 x & c_2 y & c_3 z & c_4 w \\ d_1 x & d_2 y & d_3 z & d_4 w \end{pmatrix}.$$

Требование невырожденности равносильно линейной независимости операторов Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4. На втором этапе линейно комбинируем операторы Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4, что приводит к упрощению базиса соответствующих алгебр Ли. Так, например, система (5.1) линейной комбинацией приводится к (5.29). Таким образом производится выделение алгебр Ли (5.29)–(5.41). $\square$

6. Вычисления локально ограниченно точно дважды транзитивных действий. Экспоненциальное отображение оператора Y определяем формулой

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \mathrm{Exp}(tY) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + tY \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \frac{(tY)^2}{2!} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \ldots. \tag{6.1}$$

Теорема 9. *Локальные группы Ли преобразований трехмерного пространства R^4, задающие локально ограниченно точно дважды транзитивные действия в R^4, в подходящих обозначениях параметров и координат принимают следующий вид*:

$$x' = a_1 x + a_5, \quad y' = a_2 y + a_6, \quad z' = a_3 z + a_7, \quad w' = a_4 z + a_8; \tag{6.2}$$

$$x' = a_1^a a_2^b a_3^c a_4^d x + a_2 \left(\frac{a_1^a - 1}{a} \right) + a_5, \quad y' = a_2 y + a_6, \quad z' = a_3 z + a_7, \quad w' = a_4 w + a_8; \tag{6.3}$$

$$x' = a_1 x + a_2 y + a_5, \quad y' = a_1 y + a_6, \quad z' = a_3 z + a_4 w + a_7, \quad w' = a_3 w + a_8; \tag{6.4}$$

$$x' = a_2 x + a_3 z + a_1 y + a_5, \quad y' = a_2 y + a_1 z + a_6, \quad z' = a_2 z + a_7, \quad w' = a_4 w + a_8; \tag{6.5}$$

$$\begin{gathered} x' = a_2 x + a_3 z + a_4 w + a_1 y + a_5, \quad y' = a_2 y + a_1 z + a_3 w + a_6, \\ z' = a_2 z + a_1 w + a_7, \quad w' = a_2 w + a_8; \end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} x' = a_2 x + \left(a_3 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) a_2 z + \left(a_1 a_3 + \frac{1}{6} a_1^3 + \frac{a}{3}(1 + a_4^3) \right) a_2 w + a_1 a_2 y + a_5, \\ y' = a_2 a_4 y + a_1 a_2 a_4^2 z + \left(a_3 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) a_2 a_4 w + a_6, \quad z' = a_2 a_4^2 z + a_7, \quad w' = a_2 a_4^3 w + a_8; \end{gathered} \tag{6.7}$$

$$\begin{gathered} x' = a_2 x + \left(\frac{a}{2}(a_4^2 - 1) + \frac{1}{2} a_1^2 a_4^2 \right) a_2 z + a_3 w + a_1 a_2 a_4 y + a_5, \\ y' = a_2 a_4 y + a_1 a_2 a_4^2 z + \left(A(a_4) + \frac{1}{2} a_1^2 a_4^3 \right) a_2 w + a_6, \\ z' = a_2 a_4^2 z + a_1 a_2 a_4^3 w + a_7, \quad w' = a_2 a_4^3 w + a_8, \\ A(a) = \ln a + 4 \ln^2 \frac{a}{2} + 13 \ln^3 \frac{a}{6} + 40 \ln^4 \frac{a}{24} + \ldots; \end{gathered} \tag{6.8}$$

$$\begin{gathered} x' = a_4^4 x + a_1 a_4^4 y + a_2 a_4^4 z + a_3 a_4^4 w + a_1 y + a_5, \\ y' = a_4^3 y + a_1 a_4^3 z + a_2 a_4^3 w + a_6, \quad z' = a_4^2 z + a_1 a_4^2 w + a_7, \quad w' = a_4 w + a_8; \end{gathered} \tag{6.9}$$

$$\begin{gathered} x' = a_4 x + a_3 z + (a a_1 + b a_4 \ln a_4) y + a_5, \quad y' = a_4 y + a_1 z + a_6, \\ z' = a_4 z + a_7, \quad w' = a_3 w + a_8; \end{gathered} \tag{6.10}$$

$$
\begin{gathered}
x' = a_3x + (\ln a_1 + c\ln a_4)a_3y + a_2z + a_5, \\
y' = a_3y + a_1z + a_6, \quad z' = a_3z + a_7, \quad w' = a_1^a a_3^b a_4^d w + a_8;
\end{gathered} \tag{6.11}
$$

$$
\begin{gathered}
x' = a_4x + a_3z + a_2w + a_5, \quad y' = a_4y + a_1z + (a_3 + aa_1 + aa_4\ln a_4)w + a_6, \\
z' = a_4z + a_7, \quad w' = a_4w + a_8;
\end{gathered} \tag{6.12}
$$

$$
\begin{gathered}
x' = a_1^a a_3x + a_1^a a_3 \ln a_1 y + a_1^a a_3\left(c\ln a_3 + da_4 + \ln^2\frac{a_1}{2}\right)z + a_1^a a_3 a_2 w + a_5, \\
y' = a_1^a a_3 y + a_1^a \ln a_1 a_3 z + a_1^a a_3\left(ba_4 + c\ln a_3 + \ln^2\frac{a_1}{2}\right)w + a_6, \\
z' = a_1^a a_3 z + a_1^a \ln a_1 a_3 w + a_7, \quad w' = a_a a_3 w + a_8;
\end{gathered} \tag{6.13}
$$

$$
\begin{gathered}
x' = a_1^a a_4^b x + a_1^a \ln a_1 a_4^b \ln a_1 y + a_1^a a_4^b a_2 z + a_1^a a_4^b a_3 w + a_5, \\
y' = a_1^a a_4^b y + a_1^a a_4^b(\ln a_1 - c\ln a_1 \ln a_4)z + a_1^a a_4^b a_2 w + a_6, \\
z' = a_1^a a_4^b z + a_1^a a_4^b(\ln a_1 - 2c\ln a_4)w + a_7, \quad w' = a_a a_4^b w + a_8.
\end{gathered} \tag{6.14}
$$

Доказательство сводится к применению экспоненциального отображения (6.1) к базисным операторам алгебр Ли (5.29)–(5.41) и дальнейшему вычислению композиций получаемых действий. □

7. Заключение. В работе решена задача локального расширения группы параллельных переносов пространства R^4 до локально ограниченно точно дважды транзитивной группы Ли преобразований этого же пространства при двух условиях: $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 0$; матрица U_1 имеет совпадающие характеристический и минимальный многочлены и вещественные собственные числа. Эта задача может быть распространена на случай произвольной матрицы U_1, а также на случай ненулевых матриц T_1, T_2, T_3, T_4. Согласно одной из теорем Г. Г. Михайличенко (см. [10]) полученные локально ограниченно точно дважды транзитивные группы Ли преобразований задают двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств (физическую структуру) ранга $(3, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2010.
3. *Горбацевич В. В.* О расширении транзитивных действий групп Ли// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — *81*, № 6. — С. 86–99.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
5. *Кыров В. А.* К вопросу о локальном расширении группы параллельных переносов трехмерного пространства// Владикавказ. мат. ж. — 2021. — *23*, № 1. — С. 32–42.
6. *Кыров В. А.* Кратно транзитивная группа Ли преобразований как физическая структура// Мат. тр. — 2021. — *24*, № 2. — С. 81–84.
7. *Кыров В. А.* Локальное расширение группы параллельных переносов плоскости до локально дважды транзитивной группы Ли преобразований этой же плоскости// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *204*. — С. 85–96.
8. *Кыров В. А.* О локальном расширении группы параллельных переносов в трехмерном пространстве// Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2022. — *32*, № 1. — С. 62–80.
9. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Вложение аддитивной двуметрической феноменологически симметричной геометрии двух множеств ранга (2, 2) в двуметрические феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга (3, 2)// 2018. — *28*, № 3. — С. 305–327.
10. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. — Барнаул, 2003.

11. *Михайличенко Г. Г., Мурадов Р. М.* Физические структуры как геометрии двух множеств. — Горно-Алтайск, 2008.
12. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru