ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 108–114
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-108-114

УДК 517.977, 519.7

О ПОИСКЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2023 г. **С. С. ПОСТНОВ**

Аннотация. Для системы, описываемой одномерным неоднородным диффузионно-волновым уравнением на отрезке, рассматривается два типа задач оптимального граничного управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача поиска управления, переводящего систему в заданное состояние за минимальное время при заданном ограничении на норму управления. Рассмотрены разные способы задания условий на конечное состояние. Проанализирована конечномерная l-проблема моментов, к которой может быть сведена поставленная задача оптимального управления на основе приближенного решения диффузионно-волнового уравнения. Показано, что при выполнении условий корректности и разрешимости данной проблемы задача поиска управления с минимальной нормой всегда имеет решение, а задача поиска управления с минимальным временем перехода может решения не иметь.

Ключевые слова: оптимальное управление, производная Капуто, диффузионно-волновое уравнение, l-проблема моментов.

ON THE SEARCH FOR A TIME-OPTIMAL BOUNDARY CONTROL USING THE METHOD OF MOMENTS FOR SYSTEMS GOVERNED BY THE DIFFUSION-WAVE EQUATION

© 2023 **S. S. POSTNOV**

Abstract. For a system described by a one-dimensional, inhomogeneous diffusion-wave equation on a segment, two types of optimal boundary control problems are considered: the problem of finding a control with a minimum norm for a given control time and the problem of finding a control that brings the system to a given state in a minimum time under a given constraint on the norm of the control. Various ways of specifying conditions on the final state are considered. The finite-dimensional l-problem of moments is analyzed, to which the optimal control problem can be reduced. We show that under the conditions of well-posedness and solvability of this problem, the problem of finding a control with a minimum norm always has a solution, while the problem of finding a control with a minimum transition time may not have a solution.

Keywords and phrases: optimal control, Caputo derivative, diffusion-wave equation, l-moment problem.

AMS Subject Classification: 49N05, 49J21, 34K35, 34A08

1. Введение. Задачи оптимального управления системами с распределёнными параметрами в настоящее время представляют значительный исследовательский интерес и имеют важные приложения. Относительно новое направление развития исследований в этой области составляют задачи для систем дробного порядка, в частности, для систем, поведение которых описывается уравнениями параболического или гиперболического типа с дробной производной по времени.

В настоящее время имеется ряд публикаций, посвящённых поиску оптимального управления для систем дробного порядка с распределёнными параметрами, которые описываются обобщённым уравнением диффузии или диффузионно-волновым уравнением (см., например, [4–6,10–14] и ссылки в них). В данной работе исследована задача оптимального управления с ограничением на норму управления для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения. Рассматривается граничное управление, определяемое существенно ограниченными функциями, на отрезке. Анализируется конечномерная l-проблема моментов, к которой ранее на основе приближённого решения диффузионно-волнового уравнения была сведена поставленная задача оптимального управления (см. [4,5,11,12]). Показано, что при выполнении требований корректности и разрешимости полученной проблемы моментов и существовании решения данной проблемы, имеющего минимальную норму при заданной величине времени управления, задаваемое ограничение на норму управления для рассматриваемой задачи не всегда может быть выполнено, в отличие от аналогичной задачи для уравнения диффузии целого порядка.

2. Постановка задачи. Рассматриваются системы, состояние которых описывается диффузионно-волновым уравнением, имеющим вид

$$
{}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)Q(x,t), \quad \alpha\in(0,2), \tag{1}
$$

где $Q(x,t)$ — состояние системы, $w(x)$ и $q(x)$ — некоторые функции, ${}_0^C D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования по времени, $t\geqslant 0$, $x\in[0,L]$, $(x,t)\in\Omega=[0,L]\times[0,\infty)$. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле определения Капуто (см. [9, § 2.4]):

$$
{}_0^C D_t^\alpha Q(x,t) = {}_0^{RL} D_t^\alpha \left[Q(x,t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k}\frac{t^k}{k!}\right], \tag{2}
$$

где ${}_0^{RL} D_t^\alpha$ — левосторонний оператор дробного дифференцирования Римана—Лиувилля,

$$
{}_0^{RL} D_t^\alpha Q(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial \tau^{[\alpha]+1}}\int\limits_0^t \frac{Q(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}}.
$$

Следует отметить, что определение (2) для дифференцируемых функций эквивалентно определению дробной производной, основанному на свёртке первой производной функции с дробностепенной функцией. Такое определение впервые было предложено А. Н. Герасимовым в [2], а впоследствии — в работах М. Капуто [7] и М. М. Джрбашяна [3].

Предполагается, что функция $Q(x,t)$ дифференцируема по времени (в случае $\alpha\in(0,1)$ достаточно требовать суммируемости данной функции по времени) при $t\geqslant 0$ и дважды дифференцируема по пространственной переменной на отрезке $[0,L]$. Функции $w(x)>0$ и $q(x)$ считаются непрерывными на отрезке $[0,L]$.

Начальные условия для уравнения (1) ставятся в следующем виде:

$$
\frac{\partial^k Q(x,0+)}{\partial t^k} = \varphi^k(x), \quad x\in[0,L], \quad k=0,\dots,[\alpha]. \tag{3}
$$

Граничные условия для уравнения (1):

$$
\left[b_i\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_i Q(x,t)\right]_{x=x^i} = u^i(t), \quad t\geqslant 0, \quad i=1,2, \tag{4}
$$

где a_i и b_i — коэффициенты, $b_1\leqslant 0$, $b_2\geqslant 0$; $x^1=0$, $x^2=L$. Граничные управления $u^{1,2}(t)$ считаются элементами пространства $L_\infty[0,T]$ и могут быть объединены в вектор $U(t)=(u^1(t),u^2(t))$.

Будем считать целью оптимального управления достижение системой желаемого состояния в заданный момент времени $T > 0$. Это условие может быть формально выражено виде ограничения как на состояние, так и на его производную:

$$Q(x,T) = Q^*(x), \tag{5}$$

$$\frac{\partial Q(x,T)}{\partial t} = A(x), \tag{6}$$

$x \in [0,L]$, $A(x)$ — заданная функция. Возможно и одновременно задавать условия на состояние и его производную по времени (см. [11]).

Задачу оптимального управления поставим в двух разновидностях следующим образом (см. [1]). Найти такие управления $u^{1,2}(t)$, что система, описываемая уравнением (1) с начальными условиями (3) и граничными условиями (4), достигнет при $t = T$ желаемого состояния, определяемого условиями (5) и/или (6) и при этом будет выполнено одно из условий:

(a) норма управления $U(t)$ будет минимальной при заданном T (задача А);
(b) время перехода в желаемое состояние будет минимальным при заданном ограничении на норму управления $\|U(t)\| \leqslant l$ ($l > 0$ — заданное число) (задача Б).

3. l-Проблема моментов для диффузионно-волнового уравнения. Ранее было показано, что поставленная выше задача оптимального управления для уравнения типа уравнения (1) сводится к следующей проблеме моментов (см. [4, 5, 11, 12]). Пусть задана система функций $g_n(t) \in L_{p'}[0,T]$ и набор чисел c_n, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Пусть также задано число $l > 0$. Необходимо найти такую функцию $W(t) \in L_p(0,T]$ ($1/p + 1/p' = 1$), что выполняются следующие соотношения:

$$\int\limits_0^T g_n(\tau)W(\tau)d\tau = c_n, \quad \ldots, \tag{7}$$

$$\|W(t)\| \leqslant l, \tag{8}$$

где $W(\tau)$ — функция, содержащая в общем случае линейную комбинацию граничных управлений. В рассматриваемом в данной работе случае существенно ограниченных управлений $p' = 1$, $p = \infty$ и проблема моментов (7)–(8) корректна и разрешима для $\alpha > 0$.

Следует отметить, что в [4, 5, 11, 12], вообще говоря, рассматривались более частные или, наоборот, более общие случаи уравнения (1) и граничных условий (4). Так, в [4] рассматривалось уравнение (1) при $\alpha \in (0,1)$, $q(x) = 0$, $w(x) = 1$, а в граничных условиях вместо управлений $u^i(t)$ задавалась сумма этих управлений с некоторыми известными функциями. В [5, 11, 12] использовались такие же граничные условия, а уравнение (1) рассматривалось при $\alpha \in (1,2)$; кроме того, в левой части вместо дробной производной состояния стояло произведение её на некоторую функцию $r(x)$. Также в [12] желаемое состояние задавалось условием вида (6) при $A(x) = 0$. Тем не менее, проводя рассуждения аналогично работам [4, 5, 11, 12], можно убедиться, что рассматриваемая в данной работе задача оптимального управления для уравнения (1) с начальными условиями (3), граничными условиями (4) и условиями, определяющими желаемое состояние (5)–(6), также сводится к l-проблеме моментов (7)–(8). Теми же остаются и условия корректности и разрешимости получаемой проблемы моментов (поскольку вышеописанные отклонения не влияют на вид функций $g_n(t,T)$, а сказываются только на формулах для моментов и функции $W(t)$).

Далее рассматриваем 4 случая, отличающиеся заданием параметров в уравнении (1) и способом задания желаемого состояния:

(i) в уравнении (1) $\alpha \in (0,1)$ и желаемое состояние задаётся условием (5);
(ii) в уравнении (1) $\alpha \in (1,2)$ и желаемое состояние задаётся условием (5);
(iii) в уравнении (1) $\alpha \in (1,2)$ и желаемое состояние задаётся условием (6);
(iv) в уравнении (1) $\alpha \in (1,2)$ и желаемое состояние задаётся условием (5) и (6).

Для вышеперечисленных случаев ранее была обоснована корректность и разрешимость проблемы моментов, а также были получены явные выражения для моментов и функции $g_n(t,T)$

(см. [4, 5, 11, 12]). Для случая (i) эти выражения имеют вид

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1), \tag{9}$$

$$c_n(T) = Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha), \quad \alpha \in (0,1). \tag{10}$$

Здесь и далее λ_n — собственные числа соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (1), а выражение Φ_n означает коэффициент разложения функции $\Phi(x)$ по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (1) (см. [4, 5, 11, 12]).

В случае (ii) аналогичные выражения имеют вид

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \quad \alpha \in (1,2), \tag{11}$$

$$c_n(T) = Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha). \tag{12}$$

В случае (iii) имеем формулы

$$g_n(t,T) = \frac{E_{\alpha,\alpha-1}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{2-\alpha}}, \quad \alpha \in (1,2), \tag{13}$$

$$c_n(T) = A_n + \lambda_n T^{\alpha-1} \varphi_n^0 E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha). \tag{14}$$

Наконец, в случае (iv) будут справедливы выражения

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(t,T) &= \frac{E_{\alpha,\alpha}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{1-\alpha}}, \\ g_{2n}(t,T) &= \frac{E_{\alpha,\alpha-1}[-\lambda_n(T-t)^\alpha]}{(T-t)^{2-\alpha}}, \quad \alpha \in (1,2), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} c_{2n-1}(T) &= Q_n^* - \varphi_n^0 E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha), \\ c_{2n}(T) &= A_n + \lambda_n T^{\alpha-1}\varphi_n^0 E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n T^\alpha) - \varphi_n^1 T E_\alpha(-\lambda_n T^\alpha). \end{aligned} \tag{16}$$

4. Основные результаты. В [4,5,11,12] была обоснована корректность и разрешимость конечномерной проблемы моментов, получаемой в случаях (i)–(iv). При выполнении соответствующих условий удаётся решить проблему моментов, получив тем самым решение задачи А, т.е. управление из класса допустимых, имеющее наименьшую норму. Для решения задачи Б в общем случае необходимо найти решение неравенства

$$\Lambda_N(T) \leqslant l, \tag{17}$$

где $\Lambda_N(T)$ — норма оптимального управления, найденного в результате решения задачи А, зависящая от параметра T. Решением задачи Б считается наименьшее действительное положительное число T^*, для которого справедливо неравенство (17) (см. [1, гл. 3]). Значение $\Lambda_N(T)$ при этом может быть вычислено по формуле

$$\Lambda_N(T) = \frac{1}{\min\limits_{\xi_i,\ i=1,\dots,N} \rho_\xi(T)} = \frac{1}{\rho_{\xi^*}(T)}, \tag{18}$$

(см. [1, гл. 3]), где

$$\rho_\xi = \int\limits_0^T \left| \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \left(g_i(t) - \frac{c_i(T)}{c_N(T)} g_N(t) \right) + \frac{1}{c_N(T)} g_N(t) \right| dt, \tag{19}$$

ξ_i — некоторые числа, ξ_i^* — числа, при которых достигается минимум функции $\rho_\xi(T)$ по ξ_i. Учитывая (18), можно переписать условие (17) в виде

$$\rho_{\xi^*}(T) \geqslant \frac{1}{l}. \tag{20}$$

Функция (19) неотрицательна и непрерывно зависит от аргумента T. Если подынтегральная функция в выражении (19) не зависит от T, то функция $\rho_{\xi^*}(T)$ монотонно возрастает с ростом T. Аналогичная тенденция проявляется и в случае, если функции $g_i(t)$ не зависят от параметра T, а моменты зависят достаточно слабо. Именно такая ситуация имеет место для систем целого порядка, описываемых обычным уравнением диффузии. Для них всегда можно подобрать такое значение T, что условие (20) окажется выполненным для любого заданного $l > 0$ (см. [1, гл. 4]).

В случае же, когда подынтегральная функция в выражении (19) также зависит от аргумента T, как это имеет место для рассматриваемых систем дробного порядка, функция $\rho_{\xi^*}(T)$ уже может не быть монотонно возрастающей по T. Более того, ниже будет показано, что данная функция ограничена.

Теорема 1. *Пусть функции $g_n(t,T)$ и моменты $c_n(T)$ определяются либо формулами* (9)–(10)*, либо формулами* (11)–(12) (*что соответствует рассмотрению вышеперечисленных случаев* (i) *и* (ii)) *и при этом $c_N(T) \neq 0$ для заданного N, $T > 0$. Тогда значение функции* (19) *при любом фиксированном N будет ограничено, а при $T \to \infty$ справедлива следующая оценка*:

$$\lim_{T\to\infty} \rho_{\xi^*}(T) \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\frac{1}{\lambda_i} + \left| \frac{Q_i^*}{Q_N^* \lambda_N} \right| \right) + \frac{1}{|Q_N^*| \lambda_N}. \tag{21}$$

Доказательство. Для функции (19) справедлива следующая оценка:

$$\rho_\xi \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\int_0^T g_i(t)dt + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t)dt \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \int_0^T g_N(t)dt, \tag{22}$$

где учтено, что функции $g_i(t)$ неотрицательны на интервале $(0,T)$. Используя формулы (9) или (11) и представление функции Миттаг-Леффлера в виде равномерно и абсолютно сходящегося степенного ряда

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \tag{23}$$

(см. [9, § 1.8]), можно вычислить интегралы в формуле (22) и получить следующую оценку:

$$\rho_\xi \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(\frac{1 - E_\alpha(-\lambda_i T^\alpha)}{\lambda_i} + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_N T^\alpha)}{\lambda_N} \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \frac{1 - E_\alpha(-\lambda_N T^\alpha)}{\lambda_N}. \tag{24}$$

Функции Миттаг-Леффлера в (24) монотонно убывают с ростом T, стремясь к нулю (см. [9, § 1.8]). Моменты, определяемые формулой (10), также содержат однопараметрические функции Миттаг-Леффлера, убывающие с ростом T. Моменты, определяемые формулой (12), содержат, кроме того, слагаемые вида $\varphi_n^1 T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha)$. Для оценки их поведения можно воспользоваться асимптотикой

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + O\left(|z|^{-1-p}\right), \quad z \to -\infty, \tag{25}$$

где $p = [2/\alpha]$ (см. [8]. Учитывая, что $\alpha > 1$ в случае (ii), из формулы (25) можно получить следующее соотношение:

$$T E_{\alpha,2}(-\lambda_n T^\alpha) \sim \sum_{k=1}^{p} T^{1-\alpha k} \xrightarrow{T\to\infty} 0. \tag{26}$$

Тогда из формул (10) и (12) получим, что $c_i(T) \to Q_i^*$ при $T \to \infty$, $i = 1, \ldots, N$. Подставляя полученные оценки в формулу (24), получим оценку (21).

Кроме того, из формулы (24) с учётом выражений (10) и (12) следует, что при фиксированном T, $0 < T < \infty$, выражение в правой части формулы (24) определено и ограничено сверху. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть функции $g_n(t,T)$ и моменты $c_n(T)$ определяются формулами* (13)–(14) (*что соответствует рассмотрению вышеописанного случая* (iii)) *и при этом $c_N(T) \neq 0$ для заданного N, $T > 0$. Тогда значение функции* (19) *при любом фиксированном N будет ограничено, а при $T \to \infty$ будет справедлива следующая оценка*:

$$\lim_{T\to\infty} \rho_{\xi^*}(T) \leqslant r(T), \quad r(T) \xrightarrow{T\to\infty} 0. \tag{27}$$

Доказательство. Воспользуемся, как и выше, оценкой (22), обозначив правую часть этой формулы $r(T)$, и вычислим присутствующие в ней интегралы с учётом формулы (13). Для этого воспользуемся представлением (23) и, проведя необходимые вычисления, получим:

$$r(T) = T^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{N-1} |\xi_i| \left(E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i T^\alpha) + \left| \frac{c_i(T)}{c_N(T)} \right| E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \frac{T^{\alpha-1}}{|c_N(T)|} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha). \tag{28}$$

Каждое из слагаемых в полученном выражении (с учётом выражений (14)) определено и ограничено сверху при любом фиксированном положительном значении $T < \infty$. Воспользовавшись асимптотикой (25), можно показать, что при $T \to \infty$ каждое из слагаемых в формуле (28) стремится к нулю. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. *Пусть функции* $g_n(t,T)$ *и моменты* $c_n(T)$ *определяются формулами* (15)–(16) (*что соответствует рассмотрению вышеописанного случая* (iv)) *и при этом* $c_N(T) \neq 0$ *для заданного* N, $T > 0$. *Тогда значение функции* (19) *при любом фиксированном* N *будет ограничено, а при* $T \to \infty$ *будет справедлива следующая оценка*:

$$\lim_{T\to\infty} \rho_{\xi^*}(T) \leqslant \sum_{i=1}^{N/2} \frac{|\xi_{2i-1}|}{\lambda_{2i-1}}. \tag{29}$$

Доказательство. Аналогично доказательствам теорем 1 и 2 используем оценку (22). Примем во внимание, что в данном случае количество моментов и функций $g_i(t)$ и, соответственно, число N чётное (что обусловлено двумя условиями, определяющими желаемое состояние). Поэтому перепишем формулу (22)в виде

$$\rho_\xi \leqslant \sum_{i=1}^{N/2} |\xi_{2i-1}| \left(\int_0^T g_{2i-1}(t)dt + \left| \frac{c_{2i-1}(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t)dt \right) + \\ + \sum_{i=1}^{N/2-1} |\xi_{2i}| \left(\int_0^T g_{2i}(t)dt + \left| \frac{c_{2i}(T)}{c_N(T)} \right| \int_0^T g_N(t)dt \right) + \frac{1}{|c_N(T)|} \int_0^T g_N(t)dt. \tag{30}$$

Пользуясь формулами (15) и представлением (23), проведём, как и выше, вычисления интегралов в формуле (30). В результате будем иметь:

$$\rho_\xi \leqslant \sum_{i=1}^{N/2} |\xi_{2i-1}| \left(\frac{1 - E_\alpha(-\lambda_{2i-1} T^\alpha)}{\lambda_{2i-1}} + \left| \frac{c_{2i-1}(T)}{c_N(T)} \right| T^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \\ + T^{\alpha-1} \sum_{i=1}^{N/2-1} |\xi_{2i}| \left(E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_{2i} T^\alpha) + \left| \frac{c_{2i}(T)}{c_N(T)} \right| E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha) \right) + \frac{T^{\alpha-1}}{|c_N(T)|} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_N T^\alpha). \tag{31}$$

Все слагаемые, входящие в правую часть неравенства (31) (с учётом формул (16)) при конечном положительном T и $\alpha \in (1,2)$ определены и ограничены. При $T \to \infty$, пользуясь асимптотикой (25), можно, по аналогии с доказательствами теорем 1 и 2, убедиться, что последнее слагаемое и вторая сумма в формуле (31) сходятся к нулю, а первая сумма даст оценку (29). Теорема доказана. $\square$

Следствие. *Из доказанных выше теорем* 1–3 *следует, что величина* ρ_ξ *не увеличивается монотонно с ростом* T, *а ограничена сверху на интервале* $(0,T)$ *при любом конечном* $T > 0$ *и при* $T \to \infty$. *Поэтому всегда можно указать такое число* $l > 0$, *что неравенство* (20) *не будет выполнено. Следовательно, в этом случае задача* Б *не будет иметь решения, в то время как задача* А *будет иметь решение.*

5. Заключение. В работе рассмотрено использование метода моментов для исследования задач оптимального граничного управления системами дробного порядка с распределёнными параметрами, поведение которых описывается диффузионно-волновым уравнением. Проанализировано несколько способов задания желаемого состояния и получены оценки на величину функционала, обратно пропорционального норме оптимального управления. Показано, что ограниченность данного функционала может приводить к ситуациям, когда задача поиска управления с минимальной нормой разрешима, а задача построения управления с максимальным быстродействием при заданном ограничении на норму управления не разрешима в силу невозможности выполнить упомянутое ограничение. Это отличает рассмотренные системы дробного порядка от их аналогов, описываемых обычным уравнением диффузии или волновым уравнением (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965.
2. *Герасимов А. Н.* Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения// Прикл. мат. мех. — 1948. — *12*,, № 3. — С. 251–260.
3. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН АрмССР. Мат. — 1968. — *3*, № 1. — С. 3–29.
4. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Оптимальное по быстродействию граничное управление для систем, описываемых уравнением диффузии дробного порядка// Автомат. телемех. — 2018. — № 5. — С. 137–152.
5. *Постнов С. С.* Оптимальное управление для систем, моделируемых диффузионно-волновым уравнением// Владикавказ. мат. ж. — 2022. — *24*, № 3. — С. 108–119.
6. *Azamov A. A., Bakhramov J. A., Akhmedov O. S.* On the Chernous'ko time-optimal problem for the equation of heat conductivity in a rod// Ural Math. J. — 2019. — *5*, № 1. — P. 13-–23.
7. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, II// Geophys. J. Roy. Astron. Soc. — 1967. — *13*. — P. 529–539.
8. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F. et al.* Mittag–Leffler Functions, Related Topics and Applications. — Berlin: Springer, 2014.
9. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
10. *Mophou G. M.* Optimal control of fractional diffusion equation// Comp. Math. Appl. — 2010. — *61*, № 1. — P. 68–78.
11. *Postnov S.* Optimal damping problem with additional terminal state condition in diffusion-wave processes// Proc. 2 Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. — IEEE, 2021. — P. 1–5.
12. *Postnov S.* Optimal damping problem for diffusion-wave equation// in: Stability and Control Processes (*Smirnov N., Golovkina A.*, eds.). — Cham: Springer, 2022. — P. 127–135.
13. *Tang Q., Ma Q.* Variational formulation and optimal control of fractional diffusion equations with Caputo derivatives// Adv. Differ. Equations. — 2015. — *2015*. — 283.
14. *Zhou Z., Gong W.* Finite element approximation of optimal control problems governed by time fractional diffusion equation// Comp. Math. Appl. — 2016. — *71*, № 1. — P. 301–318.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Постнов Сергей Сергеевич
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва
E-mail: `postnov.sergey@inbox.ru`