



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 123–133
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-123-133

УДК 517.91, 514.742.4

О ТОЧНОЙ ОЦЕНКЕ КОЛИЧЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ СТЕПЕНИ n

© 2023 г. А. Д. УШХО, В. Б. ТЛЯЧЕВ, Д. С. УШХО

Аннотация. Показано, что полиномиальное векторное поле n -й степени, имеющее два инвариантных множества, каждое из которых состоит из $n - 1$ параллельных между собой действительных инвариантных прямых, имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых при нечетном $n \geq 3$.

Ключевые слова: полиномиальное векторное поле, инвариантная прямая, инвариантное множество, узловая точка, прямоугольник, золотое сечение.

ON AN EXACT ESTIMATE OF THE NUMBER OF REAL INVARIANT LINES OF POLYNOMIAL VECTOR FIELDS OF DEGREE n

© 2023 A. D. USHKHO, V. B. TLYACHEV, D. S. USHKHO

ABSTRACT. In this paper, we prove that a polynomial vector field of degree n that has two invariant sets, each of which consists of $n - 1$ pairwise real invariant straight lines, has at most $2n + 4$ invariant straight lines, where n is odd and $n \geq 3$.

Keywords and phrases: polynomial vector field, invariant straight line, invariant set, nodal point, rectangle, golden ratio.

AMS Subject Classification: 34C14, 34A26

1. Введение и предварительные сведения. В [3] дана оценка максимального числа $\alpha(n)$ инвариантных прямых системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n P_i(x, y) \equiv P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i=0}^n Q_i(x, y) \equiv Q(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где

$$P_i(x, y) = \sum_{r+s=i} a_{rs} x^r y^s, \quad Q_i(x, y) = \sum_{r+s=i} b_{rs} x^r y^s, \quad a_{rs}, b_{rs} \in \mathbb{R}, \quad (P, Q) = 1, \quad \deg(P^2 + Q^2) = 2n.$$

Это число удовлетворяет двойному неравенству

$$2n + 1 + \frac{1 - (-1)^n}{2} \leq \alpha(n) \leq 3n - 1.$$

А. Д. Ушко благодарен Физическому обществу Республики Адыгея.

Данный результат был использован в [4] при анализе первых интегралов и фазовых портретов кубических дифференциальных систем на плоскости. Тем не менее вопрос о более точной оценке сверху числа действительных инвариантных прямых для систем вида (1) остается открытым и поэтому представляет определенный интерес.

Введение нового понятия — инвариантного множества позволяет улучшить оценку максимального количества инвариантных прямых системы (1).

В данной работе доказано, что векторное поле n -й степени (1), имеющее два инвариантных множества, каждое из которых состоит из $n - 1$ параллельных между собой действительных инвариантных прямых, имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых при нечетном $n \geq 3$. Под инвариантным множеством понимается множество, состоящее из s параллельных между собой действительных инвариантных прямых системы (1), имеющих угловой коэффициент k . Такие множества будем обозначать символом $M_s^k(k)$.

Замечание 1. Всюду в дальнейшем нами рассматриваются только действительные инвариантные прямые. Поэтому, говоря об инвариантных прямых, будем опускать слово «действительные».

Лемма 1. Если система (1) имеет два инвариантных множества $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$ и $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq k_2$, то посредством аффинного преобразования переменных x и y система (1) может быть приведена к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-2})(Ax + By + C) \equiv \bar{P}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - \beta_1) \cdots (y - \beta_{n-2})(Mx + Ny + L) \equiv \bar{Q}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

где $0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-2}$, $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n-2}$, $BM \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что предположение $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ не уменьшает общности. Применим к системе (1) преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y}. \quad (3)$$

В результате система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{d\tau} = (\bar{x} - a_1)(\bar{x} - a_2) \cdots (\bar{x} - a_{n-1})(\bar{a}_1 \bar{x} + \bar{b}_1 \bar{y} + \bar{C}_1), \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} = (\bar{y} - b_1)(\bar{y} - b_2) \cdots (\bar{y} - b_{n-1})(\bar{a}_2 \bar{x} + \bar{b}_2 \bar{y} + \bar{C}_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-1}$, $\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_1 \neq 0$, $d\tau = (k_2 - k_1)dt$.

Заметим, что в результате преобразования (3) инвариантные прямые $M_{n-1}^{k_1}(k_1)$ и $M_{n-1}^{k_2}(k_2)$ системы (1) переходят соответственно в изоклины нуля $\bar{y} - b_i = 0$ и в изоклины бесконечности $\bar{x} - a_i = 0$ системы (4), где $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Совершим в системе (4) параллельный перенос

$$\tilde{x} = \bar{x} - a_1, \quad \tilde{y} = \bar{y} - b_1.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \tilde{x}(\tilde{x} - \alpha_1) \cdots (\tilde{x} - \alpha_{n-2})(A\tilde{x} + B\tilde{y} + C), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tau} = \tilde{y}(\tilde{y} - \beta_1) \cdots (\tilde{y} - \beta_{n-2})(M\tilde{x} + N\tilde{y} + L). \end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. $\square$

В дальнейшем будем рассматривать систему (2), имеющую два инвариантных множества

$$\begin{aligned} M_{n-1}^0(0) &= \{y = 0, y - \beta_1 = 0, \dots, y - \beta_{n-2} = 0\}, \\ M_{n-1}^\infty(\infty) &= \{x = 0, x - \alpha_1 = 0, \dots, x - \alpha_{n-2} = 0\} \end{aligned}$$

при условии

$$AN - BM \neq 0, \quad BM \neq 0. \quad (6)$$

Определение. Состояние равновесия U системы (2) будем называть узловой точкой, если через U проходят две инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Состояние равновесия V системы (2), не являющееся узловой точкой, будем называть внеузловой точкой.

Условимся обозначать символом V^0 (V^∞) внеузловую точку, расположенную на инвариантной прямой, принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0)$ (соответственно, $M_{n-1}^\infty(\infty)$).

Лемма 2. *Инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ системы (2) может содержать не более одной внеузловой точки.*

Доказательство. Если бы инвариантная прямая l проходила через две внеузловые точки V_1^0 и V_2^0 (или V_3^∞ и V_4^∞), то она совпадала бы с изоклиной бесконечности $L^\infty : Ax + By + C = 0$ (соответственно, с изоклиной нуля $L^0 : Mx + Ny + L = 0$). Это противоречит условию $(\bar{P}, \bar{Q}) = 1$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $l : y - kx - b = 0$ — инвариантная прямая системы (2), удовлетворяющей условию (6), и пусть $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Тогда прямая l пересекает главные изоклины $L^0 : Mx + Ny + L = 0$ и $L^\infty : Ax + By + C = 0$ системы (2).*

Доказательство. Пусть l — инвариантная прямая системы (2), удовлетворяющей условию (6). Согласно определению (см. [3]) имеет место равенство

$$\begin{aligned} y(y - \beta_1) \cdots (y - \beta_{n-2})(Mx + Ny + L) &\equiv \\ &\equiv kx(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-2})(Ax + By + C) + (y - kx - b)R_{n-1}(x, y), \end{aligned}$$

где $R_{n-1}(x, y)$ — многочлен степени не выше $n - 1$. Предположим, что $l \parallel L^0$. Тогда при $y = kx + b$ в левой части равенства (7) получим многочлен степени $n - 1$ относительно x , а в правой части — многочлен степени n , так как $l \cap L^\infty \neq \emptyset$. Если предположить, что $l \parallel L^\infty$, то при $y = kx + b$ в левой части равенства (7) имеем многочлен степени n , а в правой части — многочлен степени $n - 1$. В обоих случаях приходим к невыполнимому тождественному равенству. $\square$

Лемма 4. *Если $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2) и через V проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то система (2) не имеет инвариантной прямой $\bar{l}$, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V .*

Доказательство. Пусть l — инвариантная прямая системы (2), принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Для определенности полагаем, что $l \in M_{n-1}^0(0)$; если $l \in M_{n-1}^\infty(\infty)$, рассуждения аналогичны.

Предположим, что l проходит через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ и наряду с l система (2) имеет инвариантную прямую $\bar{l}$, не принадлежащую множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящую через V . Так как $\bar{l}$ пересекает все $n - 1$ инвариантных прямых множества $M_{n-1}^\infty(\infty)$, то на $\bar{l}$ расположены n состояний равновесия системы (2).

С другой стороны, состояние равновесия V является особой точкой кратности $r = 2$ изоклины нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$. Согласно [2, теорема 21] прямая $\bar{l}$ пересекает изоклину нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$ не более чем в $n - 1$ точках. Следовательно, система (2) имеет на $\bar{l}$ не более $n - 1$ состояний равновесия. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 5. *Если инвариантная прямая $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ системы (2) проходит через внеузловую точку V_1^0 (или V_1^∞), то l непременно проходит через вторую внеузловую точку V_2^∞ (соответственно, V_2^0).*

Доказательство. Пусть инвариантная прямая l системы (2) не принадлежит множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходит через внеузловую точку V_1^0 . Согласно лемме 3 прямая l пересекает прямые изоклины L^0 и L^∞ , а также прямые из множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, система (2) имеет n состояний равновесия на прямой l , причем через каждое из них проходит хотя бы одна инвариантная прямая множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Так как точка V_1^0

расположена на инвариантной прямой l , то среди $n - 1$ состояний равновесия системы (2), расположенных на l и отличных от V_1^0 , найдутся не более $n - 2$ состояний равновесия, через каждое из которых проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0)$. Это означает, что на l найдется состояние равновесия системы (2), через которое проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Таким образом, на инвариантной прямой l система (2) имеет внеузловую точку V_2^∞ . Если предположить, что l проходит через внеузловую точку V_1^∞ , то придем к выводу, что l также проходит через внеузловую точку V_2^0 . Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. *На инвариантной прямой $l \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ система (2) имеет не более двух внеузловых точек. Если их число равно 2, то одна из них является внеузловой точкой типа V^0 , а другая — типа V^∞ .*

Справедливость леммы следует из леммы 5 и того факта, что две прямые пересекаются в одной точке.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Предположим, что через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ системы (2) проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, а L_0 — инвариантная прямая этой же системы, причем $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Тогда на L_0 расположены n состояний равновесия системы (2), в том числе две внеузловые точки.*

Доказательство. Согласно лемме 3 инвариантная прямая L_0 пересекает главные изоклины L^0 и L^∞ системы (2). Это означает, что состояниями равновесия системы (2) являются точки $A = L_0 \cap L^0$ и $B = L_0 \cap L^\infty$. Очевидно, по лемме 4 точки A и B отличны от внеузловой точки V . Покажем, что хотя бы одна из точек A и B является внеузловой точкой. Предположим противное, т.е. пусть A и B — узловые точки системы (2). Тогда они являются особыми точками кратности $r = 2$ изоклины нуля $\bar{Q}(x, y) = 0$ и изоклины бесконечности $\bar{P}(x, y) = 0$ соответственно системы (2). Поэтому согласно [2, теорема 21] на каждой из прямых изоклин L^0 и L^∞ система (2) имеет не более $n - 1$ состояний равновесия.

С другой стороны, полагая, что через V проходит инвариантная прямая $l \in M_{n-1}^0(0)$, перенесем начало координат в точку V . При этом система (2) переходит в следующую систему (обозначения коэффициентов в уравнениях изоклин L^0 и L^∞ , а также фазовых переменных оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - c_1) \cdots (x - c_{n-1})(Ax + By), \\ \frac{dy}{dt} = y(y - d_1) \cdots (y - d_{n-2})(Mx + Ny), \end{cases} \quad (7)$$

где $AN - BM \neq 0$, $c_i \neq 0$ ($i \in \{1, \dots, n-1\}$), $c_i \neq c_s$, если $i \neq s$, $i, s \in \{1, \dots, n-1\}$, $d_j \neq 0$ ($j \in \{1, \dots, n-2\}$), $d_j \neq d_r$, если $j \neq r$, $j, r \in \{1, \dots, n-2\}$.

На изоклине нуля $Mx + Ny = 0$ система (7) имеет в точности n состояний равновесия. Полученное противоречие доказывает, что состояния равновесия A и B одновременно не могут быть узловыми точками. Определенности ради положим, что A — внеузловая точка. Тогда через A проходит инвариантная прямая $l^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, инвариантная прямая L_0 пересекает $n - 2$ инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^\infty(\infty)$ и отличных от l^∞ .

Так как A — внеузловая точка типа V^∞ , то по лемме 5 инвариантная прямая L_0 проходит через внеузловую точку типа V^0 , и точка B является таковой точкой. Действительно, через внеузловую точку типа V^0 проходит изоклина бесконечности L^∞ , с которой инвариантная прямая L_0 пересекается в единственной точке. Через точку B проходит инвариантная прямая $l^0 \in M_{n-1}^0(0)$. Следовательно, инвариантная прямая L_0 пересекает $n - 2$ инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0(0)$ и отличных от l^0 . Тем самым доказано, что на инвариантной прямой L_0 система (2) имеет n состояний равновесия.

Принимая во внимание лемму 6, можно утверждать, что на L_0 расположены две внеузловые точки и $n - 2$ узловых точки системы (2). Теорема доказана. $\square$

Пример 1. Главные изоклины $L^\infty : y + 2x + 2 = 0$, $L^0 : y - x - 4 = 0$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(y+2x+2), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-2)(y-4)(y-x-4) \end{cases}$$

пересекаются во внеузловой точке $V(-2; 2)$, через которую проходит инвариантная прямая $y - 2 = 0$, принадлежащая множеству $M_3^0(0) = \{y = 0; y - 2 = 0; y - 4 = 0\}$. Кроме этого, система имеет инвариантную прямую $y - 2x - 2 = 0$, не принадлежащую множеству $M_3^0(0) \cup M_3^\infty(\infty)$. Здесь $M_3^\infty(\infty) = \{x = 0; x - 1 = 0; x - 2 = 0\}$.

Лемма 7. Если $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2) и через V проходит инвариантная прямая $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_0 пересекает инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ только в узловых точках.

Доказательство. Так как L_0 проходит через внеузловую точку V , то по лемме 4 через V не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, на L_0 расположены n состояний равновесия системы (2), в том числе одна и только одна внеузловая точка V и $n - 1$ состояний равновесия, являющихся узловыми точками. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2. Если система (2) имеет внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$, через которую проходят инвариантные прямые L_1 и L_2 этой системы, то n нечетно.

Доказательство. Согласно лемме 4 и определению внеузловой точки ни одна из инвариантных прямых L_1 и L_2 не принадлежит множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Следовательно, по лемме 7 инвариантные прямые L_1 и L_2 пересекают инвариантные прямые множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ только в узловых точках. Поэтому V — точка пересечения диагоналей прямоугольника Π_1 , образованного инвариантными прямыми $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$. Для вершин прямоугольника Π_1 введем следующие обозначения: $O_1(0; 0)$, $F_1(0; \beta_{n-2})$, $H_1(\alpha_{n-2}; 0)$, $G_1(\alpha_{n-2}; \beta_{n-2})$. Для определенности положим, что L_1 проходит через вершины O_1 и G_1 прямоугольника Π_1 .

Пусть U_1 — произвольная узловая точка системы (2), расположенная на L_1 и отличная от O_1 и G_1 . Тогда $U_1 = L_1 \cap l_1^\infty$, $l_1^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$. Прямая l_1^∞ пересекает L_2 в узловой точке U_2 . Поэтому через U_2 проходит инвариантная прямая $l_2^0 \in M_{n-1}^0(0)$, которая пересекает L_1 в узловой точке U_3 . Таким образом, на инвариантной прямой L_1 , равно как и на L_2 , узловые точки встречаются парами. Следовательно, число инвариантных прямых во множестве M_{n-1}^0 или, что то же, самое в множестве $M_{n-1}^\infty(\infty)$, четно, т.е. $n - 1 = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что $n = 2m + 1$ нечетно. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть $V = L^0 \cap L^\infty$ — внеузловая точка системы (2), причем L^0 проходит через противоположные вершины O_1 и G_1 (или F_1 и H_1), а L^∞ — через противоположные вершины F_1 и H_1 (или O_1 и G_1) прямоугольника Π_1 . Тогда система (2) не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Доказательство. Согласно определению внеузловой точки возможны два предположения:

- (а) через V проходит одна инвариантная прямая множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$;
- (б) через V не проходит инвариантная прямая, принадлежащая множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Если имеет место (а), то по лемме 4 система (2) не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V . По лемме 7 система (2) также не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$ и проходящей через V , если выполняется (б).

Таким образом, если система (2) имеет инвариантную прямую $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то $V \notin L_0$. Поэтому L_0 пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$ в точке, расположенной вне области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Это невозможно, так как через любую внеузловую точку, отличную от V , должна проходить хотя бы

одна из главных изоклин L^0 и L^∞ . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Пример 2. Во внеузловой точке $V(2; 2, 5)$ пересекаются изоклины $L^0 : 4y + 5x - 20 = 0$ и $L^\infty : 4y - 5x = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-4)(4y-5x), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-3)(y-5)(4y+5x-20). \end{cases}$$

Кроме этого, L^0 проходит через противоположные вершины $(4; 0)$ и $(0; 5)$, а L^∞ — через противоположные вершины $(0; 0)$ и $(4; 5)$ прямоугольника Π_1 . Согласно теореме 3 данная система не имеет инвариантной прямой, отличной от шести очевидных инвариантных прямых.

Лемма 8. Если узловая точка $U = L^0 \cap L^\infty$ системы (2) принадлежит инвариантной прямой $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_0 проходит только через узловые точки.

Справедливость леммы следует из того, что прямая L_0 пересекается с изоклинами L^0 и L^∞ только в одной точке U .

Пример 3. Прямые изоклины $L^0 : x + y - 4 = 0$, $L^\infty : 4x - 2y - 4 = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(4x-2y-4), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(x+y-4) \end{cases}$$

пересекаются в узловой точке $U(2; 2)$. Инвариантная прямая $y - x = 0$, не принадлежащая множеству

$$M_3^0(0) \cup M_3^\infty(\infty) = \{x = 0, x - 1 = 0, x - 2 = 0, y = 0, y - 1 = 0, y - 2 = 0\}$$

проходит только через узловые точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 2)$.

Лемма 9. Пусть $U = L^0 \cap L^\infty$ — узловая точка системы (2), причем L^0 проходит через противоположные вершины O_1 и G_1 (или F_1 и H_1), а L^∞ — через противоположные вершины F_1 и H_1 (или O_1 и G_1) прямоугольника Π_1 . Тогда эта система не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Доказательство. Согласно лемме 8 инвариантная прямая $L_0 \notin M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, если она существует, не проходит через точку U . По лемме 3 прямая L_0 пересекает изоклины L^0 и L^∞ . Следовательно, L_0 пересекает хотя бы одну из инвариантных прямых: $x = 0$, $x - \alpha_{n-2} = 0$, $y = 0$, $y - \beta_{n-2} = 0$ в точке, расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Такая точка является внеузловой, и через нее должна проходить хотя бы одна из изоклин L^0 и L^∞ . Но это невозможно, так как по условию L^0 и L^∞ проходят через пары противоположных вершин прямоугольника Π_1 . Лемма доказана. $\square$

Пример 4. Главные изоклины $L^0 : y + x - 2 = 0$, $L^\infty : y - x = 0$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(y-x), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(y+x-2) \end{cases} \quad (8)$$

проходят через узловую точку $(1; 1)$. Кроме этого, изоклине L^0 принадлежит одна пара противоположных вершин, а изоклине L^∞ — другая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 . Поэтому эта система не имеет инвариантной прямой, отличной от очевидных шести инвариантных прямых.

Из теоремы 3 и леммы 9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если все вершины прямоугольника Π_1 принадлежат пересекающимся главным изоклинам L^0 и L^∞ системы (2), то эта система не имеет инвариантной прямой, не принадлежащей множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$.

Рассмотрим систему (2) в предположении, что две инвариантные прямые L_1 и L_2 этой системы, не принадлежащие множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, проходят через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$. Для удобства рассуждений перепишем систему (2) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (x - \nu_1) \cdots (x - \nu_{n-1})(Ax + By + C), \\ \frac{dy}{dt} = (y - \omega_1) \cdots (y - \omega_{n-1})(Mx + Ny + L), \end{cases} \quad (9)$$

где $0 = \nu_1 < \cdots < \nu_{n-1}$, $0 = \omega_1 < \cdots < \omega_{n-1}$.

По лемме 7 одна пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 принадлежит инвариантной прямой L_1 , а другая пара противоположных вершин прямоугольника Π_1 принадлежит инвариантной прямой L_2 . Здесь прямоугольник Π_1 образован инвариантными прямыми

$$x - \nu_1 = 0, \quad x - \nu_{n-1} = 0, \quad y - \omega_1 = 0, \quad y - \omega_{n-1} = 0.$$

Вершины прямоугольника Π_1 обозначим $O_1(\nu_1; \omega_1)$, $F_1(\nu_1; \omega_{n-1})$, $G_1(\nu_{n-1}; \omega_{n-1})$, $H_1(\nu_{n-1}; \omega_1)$. Заметим, что по теореме 2 число n нечетно. Среди прямоугольников, образованных инвариантными прямыми множества

$$M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty) = \{x - \nu_1 = 0, \dots, x - \nu_{n-1} = 0, y - \omega_1 = 0, y - \omega_{n-1} = 0\}$$

выделим прямоугольник Π_2 , образованный инвариантными прямыми

$$x - \nu_{(n-1)/2} = 0, \quad x - \nu_{(n+1)/2} = 0, \quad y - \omega_{(n-1)/2} = 0, \quad y - \omega_{(n+1)/2} = 0.$$

Обозначим вершины прямоугольника Π_2 через

$$O_2(\nu_{(n-1)/2}; \omega_{(n-1)/2}), \quad F_2(\nu_{(n-1)/2}; \omega_{(n+1)/2}), \quad G_2(\nu_{(n+1)/2}; \omega_{(n+1)/2}), \quad H_2(\nu_{(n+1)/2}; \omega_{(n-1)/2}).$$

Теорема 5. Пусть через внеузловую точку $V = L^0 \cap L^\infty$ системы (9) проходят две инвариантные прямые L_1 и L_2 , не принадлежащие множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Если при этом система (9) имеет инвариантную прямую L_3 , отличную от L_1 и L_2 , не принадлежащую множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, то L_3 проходит через одну из вершин прямоугольника Π_2 и система (9) имеет не более $2n + 4$ инвариантных прямых.

Доказательство. Так как пересекающиеся инвариантные прямые L_1 и L_2 проходят через пары противоположных вершин прямоугольника Π_1 , то одна пара противоположных вершин прямоугольника Π_2 расположена на L_1 , а другая пара противоположных вершин Π_2 расположена на L_2 .

Поэтому для определенности полагаем, что O_2 и G_2 инцидентны инвариантной прямой L_1 , а F_2 и H_2 прямой L_2 . Легко видеть, что при $n = 3$ теорема верна. При $n > 3$ (именно этот случай мы рассматриваем) инвариантная прямая L_3 не проходит через внутреннюю точку односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_2 , так как в противном случае на L_3 расположены не менее трех внеузловых точек. Это противоречит лемме 6.

Предположим, что L_3 не проходит ни через одну из вершин прямоугольника Π_2 . Согласно лемме 7 L_3 не проходит через точку V . Не уменьшая общности считаем, что угловой коэффициент k прямой L_3 положителен (случай $k < 0$ сводится к случаю $k > 0$ путем параллельного переноса начала координат в соответствующую точку равновесия системы и выбора положительных направлений осей координат). Относительно k возможны следующие предположения:

$$(1) \ k = \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}; \quad (2) \ k > \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}; \quad (3) \ 0 < k < \frac{\omega_{n-1}}{\nu_{n-1}}.$$

Обозначим точку пересечения L_3 с L_2 через U_1 . При этом точка U_1 является узловой точкой системы (9).

В случае (1) L_3 пересекает инвариантные прямые $y - \omega_1 = 0$ и $x - \nu_{n-1} = 0$ во внеузловых точках V_1^0 и V_2^∞ соответственно (см. рис. 1).

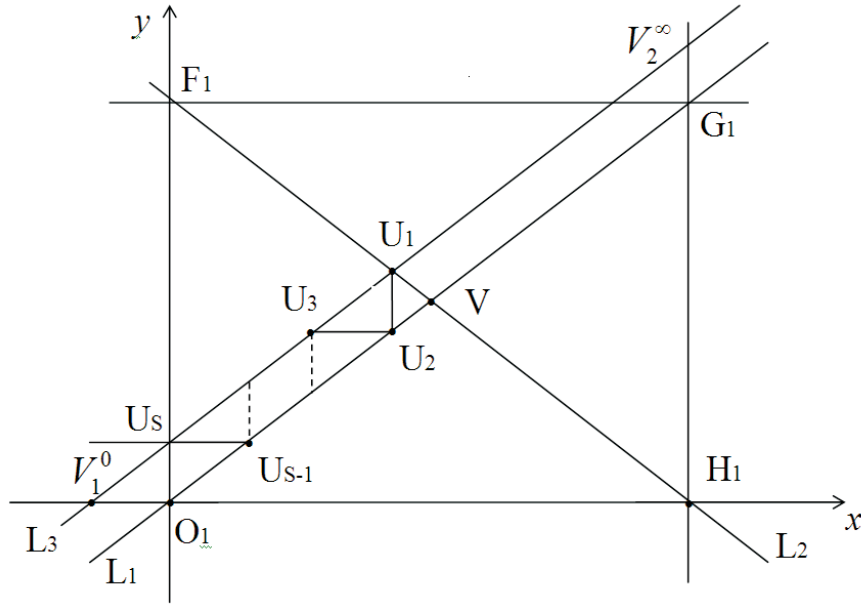


Рис. 1. Инвариантная прямая L_3 параллельна инвариантной прямой L_1 и проходит через внеузловые точки V_1^0 и V_2^∞

Так как по лемме 7 на прямых L_1 и L_2 все состояния равновесия системы (9), отличные от V , являются узловыми точками, а на L_3 являются узловыми все состояния равновесия, отличные от V_1^0 и V_2^∞ , то существует ломаная $U_1 U_2 \cdots U_{s-1} U_s$, состоящая из отрезков инвариантных прямых, принадлежащих множеству $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$. Здесь $U_s \equiv (\nu_1; \omega_2)$.

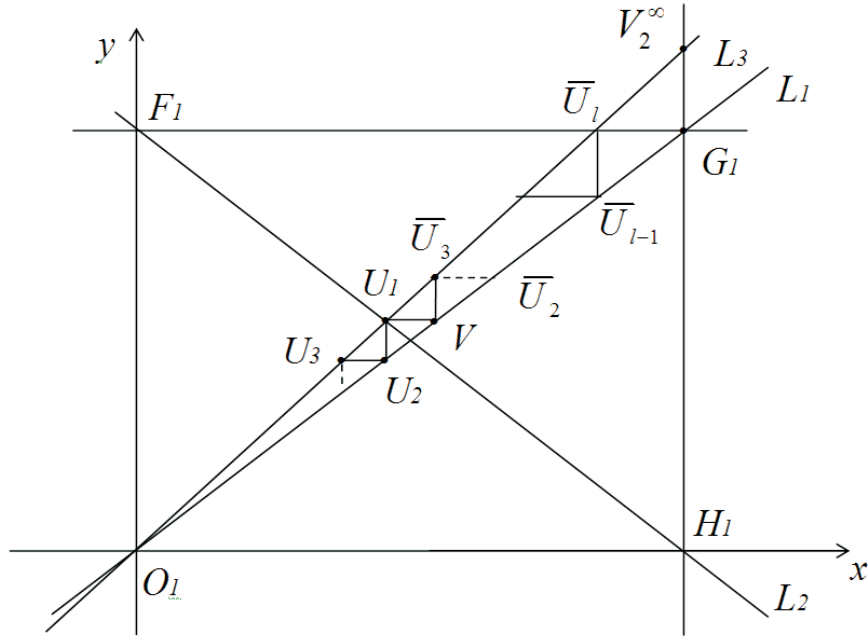
Так как по предположению точка F_2 расположена на L_2 между точками V и U_1 , то существует и вторая ломаная, звеньями которой являются отрезки прямых множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, заключенные между прямыми L_1 и L_3 . Среди звеньев этой ломаной имеется один отрезок, имеющий с инвариантной прямой $x - \nu_1 = 0$ общую точку, расположенную между точками O_1 и U_s . Это равносильно наличию на инвариантной прямой L_3 более двух внеузловых точек, что противоречит лемме 6.

Если в случае (1) абсцисса точки U_1 больше $\nu_{(n+1)/2}$, то снова приходим к противоречию с леммой 6. Пусть $k > \omega_{n-1} \nu_{n-1}$. Тогда L_3 пересекает прямую L_1 только в точке O_1 или G_1 , так как в противном случае система (9) имеет на прямой L_3 две внеузловые точки типа V^∞ , что противоречит лемме 6, либо прямая L_3 пересекается с прямой L_1 в точке W , расположенной вне односвязной области, ограниченной прямоугольником Π_1 . Прямая L_3 не может пересекаться в точке W с прямой L_1 , так как в противном случае по необходимости через W должны проходить прямые L^0 и L^∞ , а эти прямые пересекают L_1 уже в точке V .

Рассмотрим случай, когда прямая L_3 проходит через точки O_1 и U_1 (см. рис. 2). Если L_3 проходит через G_1 и U_1 , в рассуждениях ничего не изменится. Так как $V_2^\infty = L_3 \cap \bar{l}$, где $\bar{l}$ — инвариантная прямая $x - \nu_{n-1} = 0$, является внеузловой точкой типа V^∞ , то по лемме 5 на L_3 расположена внеузловая точка типа V^0 . Обозначим эту точку V_1^0 . Относительно расположения точки V_1^0 на прямой L_3 возможны предположения:

- (а) V_1^0 расположена между точками U_1 и V_2^∞ ;
- (б) V_1^0 расположена между точками O_1 и U_1 .

Если предположить, что имеет место случай (а), то на отрезке $[O_1; U_1]$ инвариантной прямой L_3 расположены только узловые точки системы (9); обозначим их $U_1, U_3, \dots, U_s$, где s нечетно. Точка U_s — ближайшая к O_1 узловая точка на прямой L_3 . Через состояние равновесия U_s проходит инвариантная прямая $l_s^\infty \in M_{n-1}^\infty(\infty)$, пересекающая инвариантную прямую L_1 во внеузловой точке V_s^∞ . Пришли к противоречию с леммой 7.

Рис. 2. Инвариантная прямая L_3 проходит через точки U_1 и O_1

Предположим, что V_1^0 расположена между точками O_1 и U_1 . Тогда существует ломаная $U_1\bar{U}_2 \cdots \bar{U}_l$, где l нечетно, $\bar{U}_l \equiv (\nu_{n-2}; \omega_{n-1})$. Так как по предположению узловая точка F_2 расположена на инвариантной прямой L_2 между точками V и U_1 , то существует ломаная с началом в точке F_2 , звеньями которой являются отрезки инвариантных прямых множества $M_{n-1}^0(0) \cup M_{n-1}^\infty(\infty)$, заключенные между прямыми L_1 и L_3 . На прямой L_1 нет состояний равновесия системы (9), расположенных между V и G_1 и имеющих абсциссу больше, чем ν_{n-2} . Поэтому последнее звено в ломаной с началом в точке F_2 является отрезком, параллельным оси ординат и имеющим с прямой L_3 общую точку с абсциссой, меньшей чем ν_{n-2} . Это противоречит лемме 6.

Случай (3) расположения инвариантной прямой сводится к рассмотренному случаю (2).

Таким образом, доказано, что L_3 проходит через одну из вершин прямоугольника Π_2 . Следовательно, количество инвариантных прямых системы (9) не превосходит $2(n-1) + 6 = 2n + 4$. Теорема доказана. $\square$

Пример 5. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)(3x-2y-2)}{x(x-1)(x-2)}$$

траекторий системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(3x-2y-2), \end{cases} \quad (10)$$

представленное в [1], имеет два инвариантных множества $M_2^0(0)$ и $M_2^1(1)$. В самом деле, применив к системе (10) преобразование

$$x = \bar{x} + \bar{y}, \quad y = \bar{y},$$

получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{x}(\bar{x}-1)(\bar{x}+3\bar{y}-2), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{y}(\bar{y}-1)(3\bar{x}+\bar{y}-2). \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) имеет два инвариантных множества

$$M_2^0(0) = \{\bar{y} = 0, \bar{y} - 1 = 0\}, \quad M_2^\infty(\infty) = \{\bar{x} = 0, \bar{x} - 1 = 0\}$$

и внеузловую точку $V(1/2, 1/2)$, через которую проходят инвариантные прямые $L_1: \bar{y} - \bar{x} = 0$ и $L_2: \bar{y} + \bar{x} - 1 = 0$. Кроме этого, данная система имеет две инвариантные прямые $\bar{y} + \bar{x} = 0$, $\bar{y} + \bar{x} - 2 = 0$.

Замечание 2. Система (11) является частным случаем системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)[(B+C)x + By + C], \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)[Bx + (B+C)y + C], \end{cases}$$

имеющей кроме очевидных четырех инвариантных прямых две пересекающиеся инвариантные прямые $y + x = 0$, $y - x = 0$.

Пример 6. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-1)(x-2)(x-3)(3x-5y+3), \\ \frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)(y-3)(-5x+3y+3) \end{cases}$$

имеет кроме очевидных восьми инвариантных прямых, образующих инвариантное множество $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$, инвариантные прямые $y - x = 0$, $y - x + 1 = 0$, $y + x - 3 = 0$. При этом инвариантные прямые $y - x = 0$ и $y + x - 3 = 0$ пересекаются во внеузловой точке $V(3/2; 3/2)$.

Отметим, что дифференциальное уравнение траекторий системы (10) и уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-1)(-3x-2y+4)}{x(x-1)(x-4)}$$

из [1], имеющие максимальное число (восемь) инвариантных прямых, принадлежат одному и тому же классу кубических дифференциальных уравнений с двумя инвариантными множествами $M_2^0(0)$ и $M_2^k(k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и внеузловой точкой, через которую не проходит ни одна из инвариантных прямых множества $M_2^0(0) \cup M_2^k(k)$.

Пример 7. Система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x-a) \left[x - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \left[x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} \right] \left[x - \sqrt{5}y + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right], \\ \frac{dy}{dt} = y(y-a) \left[y - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \left[y - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} \right] \left[-\sqrt{5}x + y + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} \right] \end{cases} \quad (12)$$

имеет инвариантные множества

$$\begin{aligned} M_4^0(0) &= \left\{ y = 0, y - a = 0, y - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0, y - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0 \right\}, \\ M_4^\infty(\infty) &= \left\{ x = 0, x - a = 0, x - \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0, x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0 \right\}, \end{aligned}$$

где $a \in (0; +\infty)$, и шесть инвариантных прямых

$$\begin{aligned} y - x = 0, \quad y + x - \frac{a(3+\sqrt{5})}{2} = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x = 0, \quad y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x + \frac{a(1+\sqrt{5})}{2} = 0, \\ y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x = 0, \quad y - \frac{2}{1+\sqrt{5}}x - a = 0, \end{aligned}$$

не принадлежащих множеству $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$.

В [3] впервые построено полиномиальное векторное поле 5-й степени, имеющее максимальное число (четырнадцать) инвариантных прямых. При помощи параллельного переноса оно приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[x - (3 - \sqrt{5})][x - (\sqrt{5} - 1)](x - 2)(x + \sqrt{5}y - \sqrt{5} - 1), \\ \frac{dy}{dt} = y[y - (3 - \sqrt{5})][y - (\sqrt{5} - 1)](y - 2)(-\sqrt{5}x + y - \sqrt{5} - 1). \end{cases} \quad (13)$$

Последняя система имеет два инвариантных множества

$$M_4^0(0) = \{y = 0, y - 3 + \sqrt{5} = 0, y - \sqrt{5} + 1 = 0, y - 2 = 0\},$$

$$M_4^\infty(\infty) = \{x = 0, x - 3 + \sqrt{5} = 0, x - \sqrt{5} + 1 = 0, x - 2 = 0\},$$

и шесть инвариантных прямых

$$\begin{aligned} y - x = 0, \quad y + x - 2 = 0, \quad y + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - 2 = 0, \quad y + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - \sqrt{5} + 1 = 0, \\ y + \frac{2}{\sqrt{5} - 1}x - \frac{4}{\sqrt{5} - 1} = 0, \quad y - \frac{2}{\sqrt{5} - 1}x - 2 = 0, \end{aligned}$$

не принадлежащих множеству $M_4^0(0) \cup M_4^\infty(\infty)$. Как отмечено в [3], точки $x = 3 - \sqrt{5}$ и $x = \sqrt{5} - 1$ производят золотое сечение отрезка $[0; 2]$. В системе (12) точки $x = a$ и $x = a(1 + \sqrt{5})/2$ также производят золотое сечение отрезка $[0; a(3 + \sqrt{5})/2]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимова Р. А. Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми// в кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 1. — Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1977. — С. 19–22.
2. Уокер Р. Алгебраические кривые. — М.: ИЛ, 1952.
3. Artes I., Grünbaum B., Llibre J. On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems// Pac. J. Math. — 1998. — 184, № 2. — P. 207–230.
4. Bujac C., Llibre J., Vulpe N. First integrals and phase portraits of planar polynomial differential cubic systems with the maximum number of invariant straight lines// Qual. Th. Dynam. Syst. — 2016. — 15, № 2. — P. 327—348.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ушхо Адам Дамирович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: uschho76@rambler.ru

Тлячев Вячеслав Бесланович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: tlyachev@adygnet.ru

Ушхо Дамир Салихович

Адыгейский государственный университет, Майкоп

E-mail: damirubych@mail.ru