



КРИТЕРИИ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕРМИНАХ ШИРИНЫ В НАПРАВЛЕНИИ

© 2023 г. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА, А. Е. САЛИМОВА

Аннотация. Установлен критерий полноты экспоненциальной системы в пространствах функций, непрерывных на выпуклом компакте и голоморфных во внутренности этого компакта, а также в пространствах голоморфных функций в выпуклой области в терминах ширины компакта или области в направлении. Основные результаты сформулированы исключительно через соотношения между шириной в направлении, широтой или диаметром компакта или области с одной стороны и так называемыми логарифмическими субмерами или логарифмическими блок-плотностями распределения показателей экспоненциальной системы с другой.

Ключевые слова: полнота систем функций, экспоненциальная система, ширина в направлении, диаметр, целая функция экспоненциального типа, распределение корней, опорная функция.

COMPLETENESS CRITERIA OF AN EXPONENTIAL SYSTEM IN GEOMETRIC TERMS OF BREADTH IN THE DIRECTION

© 2023 B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA, A. E. SALIMOVA

ABSTRACT. In this paper, we establish criterions for the completeness of an exponential system in spaces of functions that are continuous on a convex compact set and holomorphic in the interior of this compact set and in spaces of holomorphic functions in a convex domain in terms of the directional width of a compact set or a domain. The main results are formulated exclusively in terms of the relationship between the breadth in the direction or the diameter of a compact set or a domain, on the one hand, and the so-called logarithmic submeasures or logarithmic block densities of the distribution of exponential system indicators, on the other hand.

Keywords and phrases: completeness of systems of functions, exponential system, breadth in the direction, diameter, entire function of exponential type, distribution of roots, support function.

AMS Subject Classification: 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

1. Введение. Формулировки критериев в терминах ширины множества. Одноточечные множества $\{a\}$ часто записываем без фигурных скобок, т.е. просто как a . Так, $\mathbb{N}_0 := 0 \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ для множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ натуральных чисел, а множество $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup +\infty$ — верхнее порядковое пополнение множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leq$ точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой выполнены неравенства $n \leq +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leq$ рассматриваем и как вещественную ось в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а множество всех положительных чисел $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ — как положительную полуось в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$. Порядковое пополнение множества $\mathbb{R}$ верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{R}$ и нижней гранью $-\infty := \inf \mathbb{R}$ даёт расширенные

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124) при поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := +\infty \cup \mathbb{R} \cup -\infty$ и положительную полуось $\overline{\mathbb{R}}^+ := \mathbb{R}^+ \cup +\infty$. Для *пустого* множества $\emptyset$ по определению $\sup \emptyset := -\infty$ и $\inf \emptyset := +\infty$.

Система векторов из топологического векторного пространства *полна* в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Здесь мы обсуждаем только полноту экспоненциальных систем в функциональных пространствах. Истоки нашего исследования — в следующем результате П. Мальявена и Л. А. Рубела из их совместной статьи [32] начала 1960-х гг. Для формулировки их критерия *открытую* и *замкнутую* полосы ширины $b \in \overline{\mathbb{R}}^+$ в $\mathbb{C}$, симметричные относительно вещественной оси $\mathbb{R}$ и нуля, обозначаем соответственно через

$$\text{str}_{b/2} := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < b/2\}, \quad \overline{\text{str}}_{b/2} := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq b/2\}. \quad (1)$$

Критерий Мальявена – Рубела (см. [32, теорема 9.1]). Пусть $0 < b \in \mathbb{R}^+$ и $Z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — *возрастающая последовательность положительных попарно различных чисел*, для которой *последовательность* $(n/z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ограничена*, т.е. Z — *последовательность конечной верхней плотности*. Экспоненциальная система Exp^Z , состоящая из функций $z \mapsto e^{z_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, *полна* в пространстве непрерывных на $\overline{\text{str}}_{b/2}$ и голоморфных на $\text{str}_{b/2}$ функций, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах из $\overline{\text{str}}_{b/2}$, если и только если не существует числа $C \in \mathbb{R}$, для которого

$$\sum_{r < z_n \leq R} \frac{1}{z_n} \leq \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} + C \quad \text{при всех } 0 < r < R < +\infty. \quad (2)$$

Замечание 1. Оригинальная формулировка [32, теорема 9.1] — это критерий *неполноты* экспоненциальной системы Exp^{-Z} из функций $z \mapsto e^{-z_n z}$, $n \in \mathbb{N}$, для полос (1) ширины $2\pi b$ вместо b . Она эквивалентна сформулированному нами критерию полноты Мальявена–Рубела.

Для компакта K в $\mathbb{C}$ через $C(K)$ обозначим банахово пространство (алгебру) непрерывных функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup*-нормой

$$\|f\|_{C(K)} := \sup \left\{ |f(z)| \mid z \in K \right\}. \quad (3)$$

Для открытого подмножества $O \subset \mathbb{C}$ через $\text{Hol}(O)$ обозначаем пространство голоморфных функций $f: O \rightarrow \mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости на всех компактах $K \subset O$, определяемой полунормами (3). Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ с *внутренностью* $\text{int } K$ через $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ обозначаем банахово пространство непрерывных на K и голоморфных на *внутренности* $\text{int } K$ функций $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ с *sup*-нормой (3). Очевидно, если $\text{int } K = \emptyset$, то $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K) = C(K)$.

Всюду далее через Z обозначаем *распределение точек* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, среди которых могут быть повторяющиеся и, вообще говоря, даже бесконечное количество раз. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{N}}_0$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в распределении точек Z . Для такой функции, которую часто называют *функцией кратности*, или *дивизором* распределения точек Z (см. [22, пп. 0.1.2–0.1.3]), сохраняем то же обозначение Z . Другими словами, $Z(z)$ — это количество вхождений точки $z \in \mathbb{C}$ в Z ; пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$. Два распределения точек Z и W *совпадают* (обозначение $Z = W$), если $Z(z) \equiv W(z)$ $\stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} W(z)$. Будем писать $Z \subset W$, если $Z(z) \leq W(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. *Объединение* $Z \cup W$ определяется тождеством $(Z \cup W)(z) \stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} Z(z) + W(z)$, а *разность* $Z \setminus W$ при условии $W \subset Z$ — тождеством $(Z \setminus W)(z) \stackrel{z \in \mathbb{C}}{=} Z(z) - W(z)$. Распределение точек Z можно эквивалентным образом трактовать и как меру со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0$ с тем же обозначением

$$Z(S) := \sum_{z \in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \quad (4)$$

При такой трактовке пересечение $Z \cap S$ однозначно определяется сужением меры Z на S , а для положительной функции $f: S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ можно корректно определить суммы

$$\sum_{\substack{z \in Z \\ z \in S}} f(z) := \int_S f dZ =: \sum_{z \in Z \cap S} f(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (5)$$

Произведение числа $w \in \mathbb{C} \setminus 0$ на распределению точек Z определяет распределение точек wZ через функцию кратности $(wZ)(z) \stackrel{\text{def}}{=} Z(z/w)$. В частности, $-Z := (-1)Z$. Для числа $\theta \in \mathbb{R}$ распределение точек $e^{i\theta}Z$ с функцией кратности $(e^{i\theta}Z)(z) \stackrel{\text{def}}{=} Z(e^{-i\theta}z)$ называем *поворотом распределения точек Z на угол θ* .

При $z \in \mathbb{C}$ и $r \in \mathbb{R}^+$ через

$$D_z(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| < r\}, \quad \overline{D}_z(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z' - z| \leq r\}$$

обозначаем соответственно *открытый и замкнутый круги*, а через $\partial \overline{D}_z(r) := \overline{D}_z(r) \setminus D_z(r)$ — *окружность с центром $z \in \mathbb{C}$ радиуса r* .

Простейшая характеристика распределение точек Z на $\mathbb{C}$ — это его *верхняя p -плотность*, определяемая в (4) как величина

$$p\text{-}\overline{\text{dens}}(Z) := \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{Z(\overline{D}_0(r))}{r^p} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (6)$$

В дальнейшем при $p = 1$ в (6) порядок p не упоминаем и вместо $1\text{-}\overline{\text{dens}}(Z)$ пишем просто $\overline{\text{dens}}(Z)$; в случае $\overline{\text{dens}}(Z) \in \mathbb{R}^+$ называем Z распределением точек *конечной верхней плотности*, а при $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ — распределением точек *бесконечной верхней плотности*.

Левая часть неравенства (2), использованная в [32] и [34, гл. 22] в качестве основной, так называемой логарифмической характеристики распределения точек Z на $\mathbb{R}^+$, была распространена на произвольные распределения точек Z в $\mathbb{C}$ первоначально в статьях Б. Н. Хабибуллина [16, 17] 1988 г. с дальнейшим развитием и применениями в его же работах [18, 19] 1989–91 гг. и в последние годы в совместных статьях О. А. Кривошеевой, А. Ф. Кужаева, А. И. Рафикова [4, 5] 2017 г., а также А. Е. Салимовой и Б. Н. Хабибуллина [11–13] 2020–21 гг. Обзор по состоянию тематики вплоть до 2012 г. содержится в книге Б. Н. Хабибуллина [22, п. 3.2]. Определим развития упомянутой логарифмической характеристики распределения точек Z , расположенного произвольным образом на $\mathbb{C}$.

Для величины $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и функции $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ их *положительные части* обозначаем соответственно через $a^+ := \max\{a, 0\}$ и $f^+: x \mapsto (f(x))^+$. К примеру, $\text{Re}^+ z = \max\{\text{Re } z, 0\}$ — положительная часть действительной части $\text{Re } z$. Произвольное число $\theta \in \mathbb{R}$ будем трактовать и как *направление*, определяемое единичным радиус-вектором числа $e^{i\theta} \in \partial \overline{D}_0(1)$. При такой трактовке для направления θ направления $\theta \pm \pi$ *противоположны*, направления $\theta \pm \pi/2$ *ортогональны*, направление $-\theta$ — *сопряжённое*, а направление $\pi/2 - \theta$ — *ортогональное сопряжённое*.

Правую логарифмическую меру интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ определяем как величину

$$\ell_Z(r, R) \stackrel{(5)}{:=} \sum_{\substack{z \in Z \\ r < |z| \leq R}} \text{Re}^+ \frac{1}{z} \stackrel{(5)}{=} \sum_{z \in Z \cap (\overline{D}_0(R) \setminus \overline{D}_0(r))} \text{Re}^+ \frac{1}{z} \in \overline{\mathbb{R}}^+; \quad (7)$$

левая логарифмическая мера интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для Z на $\mathbb{C}$ — это величина $\ell_{-Z}(r, R)$ из (7) для $-Z$, а логарифмическую субмеру интервала $(r, R] \subset \mathbb{R}^+ \setminus 0$ для Z на $\mathbb{C}$ задаём как

$$\mathcal{L}_Z(r, R) := \max\{\ell_Z(r, R), \ell_{-Z}(r, R)\} \in \overline{\mathbb{R}}^+. \quad (8)$$

Ширина подмножества $S \subset \mathbb{C}$ в направлениях $\theta \in \mathbb{R}$ (см. [1, п. 33], [28, п. 4.1.1], [14, гл. I, § 4], [24, п. 3.2], [22, п. 3.2]) — это функция

$$\text{breadth}_S: \theta \mapsto \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left\{ \text{Re}((z - w)e^{-i\theta}) \mid z \in S, w \in S \right\} \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty, \quad (9)$$

которая, очевидно, π -периодична, равна $-\infty$ лишь при $S = \emptyset$, а при $S \neq \emptyset$ — величина из $\overline{\mathbb{R}}^+$, равная наименьшей ширине замкнутых полос в $\mathbb{C}$, содержащих S и какую-нибудь прямую, ортогональную прямой $\{te^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Пример 1. Ширина любого круга в любом направлении равна его диаметру. Полосы (1) имеют ширину b в направлениях $\pi/2 + \pi k$ при любом целом $k \in \mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N})$, а в любом другом

направлении — ширину $+\infty$. Для $S \subset \mathbb{C}$ и числа $a \in \mathbb{C}$ полагаем $aS := \{az \mid z \in S\} \subset \mathbb{C}$. При таком обозначении $e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2}$ — полоса ширины b в направлении θ .

Теорема 1. Для любых числа $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 0$, направления $\theta \in \mathbb{R}$ и произвольного распределения точек Z на $\mathbb{C}$ следующие четыре утверждения равносильны:

I. Для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ ширины $\text{breadth}_D(\theta) \leq b$ в направлении θ система

$$\text{Exp}^Z := \left\{ w \mapsto w^p e^{zw} \mid z \in Z, Z(z) - 1 \geq p \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

полна в пространстве $\text{Hol}(D)$ с топологией равномерной сходимости на компактах.

II. Для любого выпуклого компакта K ширины $\text{breadth}_K(\theta) < b$ в направлении θ экспоненциальная система Exp^Z полна в банаховом пространстве $C(\overline{K}) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ с нормой (3).

III. Распределение точек Z бесконечной верхней плотности с $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ или же логарифмическая субмера $\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(r, R)$ для поворота $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$ удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{1 < s \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln s} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(r, sr) \geq \frac{b}{2\pi}. \quad (10)$$

IV. Система Exp^Z полна в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)} \text{str}_{b/2})$.

Если при $N \subset \mathbb{N}$ и некоторой нумерации $Z = (z_n)_{n \in N}$ распределения точек Z на $\mathbb{C}$, в которой каждое число $z \in \mathbb{C}$ встречается ровно $Z(z)$ раз, можно так подобрать последовательность $(m_n)_{n \in N}$ попарно различных целых чисел $m_n \in \mathbb{Z}$ и число $c \in \mathbb{R}^+$, что

$$\sum_{n \in N} \left| \frac{1}{z_n} - \frac{c}{m_n} \right| < +\infty, \quad (11)$$

то внешняя плотность Редхеффера распределения точек Z на $\mathbb{C}$ конечна и не превышает числа c (см. [3, 20, 33], а также [22, 2.1.1]), а сама она равна точной нижней грани таких $c \in \mathbb{R}^+$.

Пример 2. Если распределение попарно различных точек Z является разделённым в том смысле, что $\inf\{|z - z'| \mid z \in Z, z' \in Z, z \neq z'\} > 0$ и целиком лежит в какой-нибудь полосе (1) конечной ширины $b \in \mathbb{R}^+$, то Z имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера.

Будем говорить, что распределение точек Z на $\mathbb{C}$ имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ , если найдётся число $a \in (0, \pi/2]$, для которого часть

$$Z_a^\theta := \left\{ z \in Z \mid |\arg z - \theta| < a \right\} \quad (12)$$

распределения точек Z после её поворота $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ на угол $-\theta$ является распределением точек $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ конечной внешней плотности Редхеффера.

Пример 3. Если при некотором $a \in (0, \pi/2]$ для распределения точек Z_a^θ из (12) сумма

$$\sum_{z \in Z_a^\theta} \frac{1}{|z|} < +\infty$$

конечна, то при выборе $c := 0$ ряд (11), очевидно, сходится, откуда следует, что распределение точек Z на $\mathbb{C}$ имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ . Согласно примеру 2, если для распределения точек Z_a^θ из (12) при некотором $a \in (0, \pi/2]$ его поворот $e^{-i\theta} Z_a^\theta$ на угол $-\theta$ является разделённым и полностью лежит в какой-нибудь полосе (1) конечной ширины $b \in \mathbb{R}^+$, то Z имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера вблизи направления θ .

Следующий, существенно более тонкий, чем теорема 1, результат значительно обобщает критерий полноты Мальявена—Рубела и даже неумлучшаем, если использовать в критерии лишь логарифмическую субмеру распределения точек Z на $\mathbb{C}$.

Теорема 2. Для любых числа $b \in \mathbb{R}^+$, направления $\theta \in \mathbb{R}$ и распределения точек Z на $\mathbb{C}$ конечной внешней плотности Редхеффера вблизи противоположных направлений θ и $\theta - \pi$ следующие четыре утверждения равносильны:

- I. Для любого выпуклого компакта K ширины $\text{breadth}_K(\theta) \leq b$ экспоненциальная система Exp^Z полна в банаховом пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ с нормой (3).
- II. Логарифмическая субмера $\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}$ для поворота $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$ удовлетворяет равенству

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(r, R) - \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \right) = +\infty. \quad (13)$$

- III. При значениях n и N , пробегающих соответственно $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$, имеем

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq n < N} \left(\mathcal{L}_{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}(e^n, e^N) - \frac{b}{2\pi}(N - n) \right) = +\infty. \quad (14)$$

- IV. Система Exp^Z полна в пространстве $C(e^{i(\theta-\pi/2)}\overline{\text{str}}_{b/2}) \cap \text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2})$, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах из замкнутой полосы $e^{i(\theta-\pi/2)}\overline{\text{str}}_{b/2}$.

2. Доказательства критериев.

Доказательство теоремы 1. Эквивалентность утверждений I и II, верная для любых систем целых функций, а не только экспоненциальных, — простое следствие определений полноты в функциональных пространствах и топологии равномерной сходимости на компактах.

Докажем эквивалентность утверждений IV и II. Неполнота системы Exp^Z в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2})$ в топологии равномерной сходимости на компактах по теореме Хана—Банаха эквивалентна существованию ненулевого линейного непрерывного функционала на $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2})$, который обращается в нуль на каждой экспоненциальной функции из Exp^Z (см. [22, теорема 1.1.1]). Такой функционал может быть продолжен как ненулевой линейный непрерывный функционал на $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для некоторого выпуклого компакта $K \subset e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2}$, который по-прежнему равен нулю на каждой экспоненциальной функции из Exp^Z . Вновь по теореме Хана—Банаха (см. [22, теорема 1.1.1]) это означает, что система Exp^Z не полна в $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$, в то время как ширина компакта $K \subset e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2}$ в направлении θ строго меньше b .

Докажем эквивалентность утверждений III и IV. Если Z имеет конечную верхнюю плотность, т.е. $\overline{\text{dens}}(Z) < +\infty$, то левая часть (10) — это один из вариантов определения *логарифмической блок-плотности распределения точек* $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$ (см. [18], [22, определение (3.2.4)]); согласно [18, теорема 2], [22, теорема 3.2.2] условие (10) означает, что система $\text{Exp}^{e^{i(\pi/2-\theta)}Z}$ полна в пространстве $\text{Hol}(\text{str}_{b/2})$. Используя обратный поворот на угол $\theta - \pi/2$ к распределению точек $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$, получаем полноту системы Exp^Z в пространстве $\text{Hol}(e^{i(\theta-\pi/2)}\text{str}_{b/2})$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Эквивалентность утверждений I и IV обосновывается практически так же, как выше доказывалась эквивалентность утверждений II и IV теоремы 1 на основе следствий из теоремы Хана—Банаха по схеме, изложенной в [22, п. 1.1.1].

При доказательстве эквивалентности $\text{II} \Leftrightarrow \text{IV}$ после соответствующих поворотов $\mathbb{C}$ и распределения точек Z достаточно рассмотреть случай $\theta = \pi/2$. Выделим в этом случае из Z определённую в (12) часть $Z_a^{\pi/2}$ конечной внешней плотности Редхеффера вблизи направления $\pi/2$. Это означает, что распределение точек $e^{-i\pi/2}Z_a^{\pi/2}$ имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера, из определения которой в соответствии с $\check{\text{E}}$ (11) легко видеть, что конечна сумма

$$\sum_{z \in Z_a^{\pi/2}} \left| \text{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty.$$

Точно так же для части $Z_a^{-\pi/2}$, определённой в (12), имеем

$$\sum_{z \in Z_a^{-\pi/2}} \left| \text{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty.$$

Таким образом, для распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2} := Z_a^{\pi/2} \cup Z_a^{-\pi/2}$ сходится сумма

$$\sum_{z \in Z_a^{\pm\pi/2}} \left| \operatorname{Re} \frac{1}{z} \right| < +\infty. \quad (15)$$

По построению часть $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ распределения точек отделена от мнимой оси $i\mathbb{R}$ в том смысле, что она лежит вне пары открытых вертикальных углов, содержащих $i\mathbb{R} \setminus 0$, и при выполнении (13) и (15) точная верхняя грань

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}(r, R) - \frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \right) \quad (16)$$

равна $+\infty$. Отсюда согласно [19, следствие 4.2] для отделённого от мнимой оси распределения точек $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ следует, что экспоненциальная система $\operatorname{Exp}^{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}$ полна в пространстве $C(\overline{\operatorname{str}}_{b/2}) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{str}_{b/2})$, снабжённом топологией равномерной сходимости на компактах. Тем более экспоненциальная система Exp^Z с бóльшим распределением показателей $Z \supset Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$ полна в этом пространстве. Таким образом, доказана импликация $\Pi \Rightarrow \text{IV}$.

Теперь из отрицания утверждения Π выведем отрицание утверждения IV . Если не выполнено (13) при $\theta = \pi/2$, то ввиду (15) конечна точная верхняя грань из (16). Рассмотрим целую функцию

$$g: z \mapsto \sin \frac{bz}{2} \quad (17)$$

экспоненциального типа. Легко подсчитать, что найдётся число $C_b \in \mathbb{R}^+$, с которым

$$\frac{b}{2\pi} \ln \frac{R}{r} \leq \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{\ln |g(iy)g(-iy)|}{y^2} dy + C_b \quad \text{при всех } 1 \leq r < R < +\infty.$$

Исходя из последнего согласно предполагаемой конечности (16) для функции g из (17) имеем

$$\sup_{1 \leq r < R < +\infty} \left(\mathcal{L}_{Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}}(r, R) - \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{\ln |g(iy)g(-iy)|}{y^2} dy \right) < +\infty.$$

При этом условии для целой функции g экспоненциального типа с распределением нулей, лежащим вне пары открытых вертикальных углов, содержащих мнимую ось, а точнее, для (17) на $\mathbb{R}$, найдётся (см. [19, основная теорема]) такая целая функций $f_b \neq 0$ экспоненциального типа с распределением нулей $\operatorname{Zero}_{f_b}$, рассматриваемым с учётом кратности, что $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_{f_b}$ и в то же время $|f_b(iy)| \leq |g(iy)|$ при всех $y \in \mathbb{R}$. Учитывая явный вид функции g из (17), получаем

$$\ln |f_b(iy)| \leq \frac{b}{2} |y| + c_b \quad \text{для некоторого } c_b \in \mathbb{R}^+ \text{ при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_{f_b}. \quad (18)$$

Поворот $e^{-i\pi/2} Z_a^{\pm\pi/2}$ распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2}$ на угол $-\pi/2$ по условию имеет конечную внешнюю плотность Редхеффера. Для такого распределения точек из сочетания теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты с классической теоремой Пэли—Винера (см., например, [20, 33]) следует, что найдётся целая функция $q \neq 0$ экспоненциального типа с распределением корней $\operatorname{Zero}_q \supset e^{-i\pi/2} Z_a^{\pm\pi/2}$, для которой $|q(x)| \leq (1+x^2)^{-1}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Обратный поворот на угол $\pi/2$ даёт целую функцию $h \neq 0$ экспоненциального типа, определяемую тождеством $h(z) \equiv q(e^{-i\pi/2} z)$, для которой

$$|h(iy)| \leq \frac{1}{1+y^2} \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z_a^{\pm\pi/2} \subset \operatorname{Zero}_h.$$

Отсюда согласно (18) следует, что целая функция $f := f_b h \neq 0$ экспоненциального типа для некоторой постоянной $C \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условиям

$$|f(iy)| \leq \frac{C}{1+y^2} \exp \frac{b|y|}{2} \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}, \quad Z \subset \operatorname{Zero}_f.$$

Это значит (см. [8, гл. IV, § 1, п. 3]), что найдётся прямоугольник $Q \subset \text{str}_{b/2}$ и ненулевая непрерывная функция p на его границе ∂Q , для которых имеет место представление функции f через преобразование Фурье—Лапласа

$$f(w) = \int_{\partial Q} e^{zw} p(z) dz.$$

Таким образом, найден линейный непрерывный функционал на $C(\overline{\text{str}_{b/2}}) \cap \text{Hol}(\text{str}_{b/2})$ (см. [22, гл. 1; п. 3.2.2]), который равен нулю на каждой функции из экспоненциальной системы Exp^Z . Следовательно, система Exp^Z не полна в $C(\overline{\text{str}_{b/2}}) \cap \text{Hol}(\text{str}_{b/2})$; импликация $\text{IV} \Rightarrow \text{II}$ тоже доказана.

Импликация $\text{II} \Rightarrow \text{III}$ получается при выборе значений $r = e^n$ и $R = e^N$, когда n и N пробегает соответственно $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$. Если же II неверно и левая часть (13) конечна, то, переходя к случаю $\theta = \pi/2$ и разбирая рассмотренные выше распределения точек $Z_a^{\pm\pi/2}$ и $Z \setminus Z_a^{\pm\pi/2}$, нетрудно убедиться, что каждое из этих распределений точек конечной верхней плотности. Следовательно, их объединение Z тоже имеет конечную верхнюю плотность, и тогда величины $\mathcal{L}_Z(e^n, e^{n+1})$ согласно определениям (7)–(8) равномерно ограничены по $n \in \mathbb{N}_0$. Отсюда при конечности левой части (13) нетрудно удостовериться в конечности левой части в (14), что даёт импликацию $\text{III} \Rightarrow \text{II}$. $\square$

Замечание 2. Более разнообразные результаты могут быть получены из электронной публикации [29], принятой к печати в существенно расширенной форме в журнал «Известия РАН. Серия математическая» [25]. Частично они доложены на Международных конференциях по комплексному анализу памяти А. А. Гончара и А. Г. Витушкина в Москве в 2021 г., а также на Международных конференциях «Понтрягинские чтения—XXXIII» в Воронеже (см. [26]) и «Комплексный анализ и смежные вопросы» в Казани (см. [30]) в 2022 г.

3. Условия полноты в иных терминах, выражаемых через ширину.

3.1. Широта и диаметр. *Широтой* (см. [14, гл. I, § 4], [24, п. 3.2]), или *толщиной* (см. [28, 4.1.1]), множества S называется наименьшее значение его ширины по направлениям:

$$\text{width}(S) := \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \text{breadth}_S(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty; \quad (19)$$

оно равно $-\infty$ тогда и только тогда, когда S пусто, и $+\infty$, если и только если нет полосы конечной ширины, содержащей S . *Диаметр*

$$\text{diam}(S) := \sup\{|z - w| \mid z \in S, w \in S\}$$

равен наибольшему значению его ширины по направлениям (см. [14, гл. I, § 4], [27, § 11, предложение 11.1]):

$$\text{diam}(S) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \text{breadth}_S(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}^+ \cup -\infty. \quad (20)$$

Возможно определение ширины множества $S \subset \mathbb{C}$ в направлении и через его *опорную функцию*, которую по традиции (см. [6, 31]) можно определить как 2π -периодическую функцию

$$\text{spf}_S: \theta \mapsto \sup_{s \in S} \text{Re } s e^{-i\theta} \in \overline{\mathbb{R}} \quad (21)$$

на $\mathbb{R}$, хотя в теории выпуклости и её применениях более уместно опорной функцией множества $S \subset \mathbb{C}$ называть положительно однородную выпуклую функцию

$$\text{Spf}_S: z \mapsto \sup_{s \in S} \text{Re } s \bar{z} \stackrel{(21)}{\equiv} |z| \text{spf}_S(\arg z) \quad (22)$$

(см. [1, 7, 9, 10, 15], а также [24, п. 1.1]), где для последнего равенства и всюду далее используем соглашение $0 \cdot x = 0$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$. В терминах опорных прямых к $S \subset \mathbb{C}$ (см. [1, п. 33], [28, п. 4.1.1], [14, гл. I, § 4]) ширина $\text{breadth}_S(\theta)$ в направлении $\theta \in \mathbb{R}$ равна расстоянию между двумя опорными прямыми к S , ортогональными радиус-вектору точки $e^{i\theta}$, что в терминах опорных функций (21)–(22) означает тождества

$$\text{breadth}_S(\theta) \stackrel{(22)}{\equiv} \text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi) \stackrel{(22)}{\equiv} \frac{1}{r} (\text{Spf}_S(r e^{i\theta}) + \text{Spf}_S(-r e^{i\theta})) \quad \text{при всех } r \in \mathbb{R}^+ \setminus 0. \quad (23)$$

Таким образом, согласно (23) широта и диаметр множества $S \subset \mathbb{C}$ определяются через опорные функции spf_S и Spf_S из (21) и (22) по формулам

$$\text{width}(S) \stackrel{(19)}{=} \inf_{\theta \in \mathbb{R}} (\text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi)) \stackrel{(19)}{=} \inf_{0 \neq z \in \mathbb{C}} \frac{\text{Spf}_S(z) + \text{Spf}_S(-z)}{|z|}, \quad (24)$$

$$\text{diam}(S) \stackrel{(20)}{=} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\text{spf}_S(\theta) + \text{spf}_S(\theta + \pi)) \stackrel{(20)}{=} \sup_{0 \neq z \in \mathbb{C}} \frac{\text{Spf}_S(z) + \text{Spf}_S(-z)}{|z|}, \quad (25)$$

3.2. *Логарифмическая блок-плотность и следствия из теоремы 1.* Пусть ℓ — функция интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ со значениями из $\overline{\mathbb{R}}$ и $\ell(r, R) := \ell((r, R])$. Определим окончательно введённые в [2] четыре логарифмические блок-плотности:

$$\ln\overline{\text{dens}}(\ell) := \limsup_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26^-)$$

$$\ln\underline{\text{dens}}(\ell) := \liminf_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26_-)$$

$$\ln\text{-dens}_{\inf}(\ell) := \inf_{a > 1} \frac{1}{\ln a} \limsup_{r \rightarrow +\infty} \ell(r, ar); \quad (26i)$$

$$\ln\text{-dens}_b(\ell) := \inf \left\{ b \in \mathbb{R}^+ : \sup_{0 < r < R < +\infty} \left(\ell(r, R) - b \ln \frac{R}{r} \right) < +\infty \right\}. \quad (26b)$$

(см. [17], [18, формула (1.9)], [32, определения 3.4, 3.5], [11, определение 4]). Положительную функцию интервалов $\ell \geq 0$ называем *логарифмической субмерой интервалов*, если выполнены следующие два условия:

(i) $\sup_{0 < r \in \mathbb{R}^+} \ell(r, 2r) < +\infty$ (*логарифмический рост*);

(ii) $\ell(r_1, r_3) \leq \ell(r_1, r_2) + \ell(r_2, r_3)$ для всех $0 < r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ (*субаддитивность*).

Если в неравенстве из (ii) знак неравенства $\leq$ можно заменить на знак равенства $=$ для любых значений $0 < r_1 < r_2 < r_3 < +\infty$ (*аддитивность*), то функцию интервалов ℓ называем *логарифмической мерой интервалов*. Очевидно, класс всех логарифмических субмер интервалов — выпуклый конус над $\mathbb{R}^+$, замкнутый относительно операции максимума.

Предложение 1 (см. [2, теорема 1], [18, § 1], [11, предложение 6]). *Для логарифмической субмеры интервалов $\ell \geq 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из (26) конечны и совпадают, а верхний предел $\limsup_{a \rightarrow +\infty}$ в (26⁻) и нижний предел $\liminf_{a \rightarrow +\infty}$ в (26₋) можно заменить на обычный предел $\lim_{a \rightarrow +\infty}$. Далее, для логарифмической субмеры интервалов $\ell \geq 0$ все четыре логарифмические блок-плотности из (26) обозначаем единообразно символом $\ln\text{-dens}(\ell)$.*

Пример 4. Для распределения точек Z на $\mathbb{C}$ конечной верхней плотности примерами логарифмической меры и субмеры интервалов могут служить соответственно определённая в (7) правая логарифмическая мера ℓ_Z для этого распределения точек Z , а также логарифмическая субмера $\mathcal{L}_Z$ из (8). В таком случае логарифмическую блок-плотность $\ln\text{-dens}(\mathcal{L}_Z)$ будем обозначать через $\ln\text{-dens}(Z)$ и называть её *логарифмической блок-плотностью распределения точек Z* . В частности, левая часть в (10) — это в точности логарифмическая блок-плотность поворота $e^{i(\pi/2-\theta)}Z$ распределения точек Z на угол $\pi/2 - \theta$.

Следующие два следствия теоремы 1 иллюстрируют возможности её применения в случае геометрических характеристик области, отличных от ширины в направлении, хотя и тесно связанных с ней через формулы (19), (24), (20), (25).

Следствие 1. *Пусть Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ конечной верхней плотности, а также $0 < b \in \mathbb{R}^+$. Тогда следующие четыре утверждения равносильны:*

- I. *Для любой выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ широты $\text{width}(D) \leq b$ система Exp^Z полна в $\text{Hol}(D)$.*
- II. *Для любого выпуклого компакта K широты $\text{width}(K) < b$ система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$.*
- III. *Выполнено неравенство $\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta}Z) \geq b/2\pi$.*

IV. Для любого $\theta \in \mathbb{R}$ система Exp^Z полна в $\text{Hol}(e^{i\theta} \text{str}_{b/2})$.

Доказательство. Согласно определениям широты (19) и (24) эквивалентности теоремы 1 сразу следуют из соответствующих эквивалентностей теоремы 1, применённых по всем $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

Следующий результат даёт лишь достаточные условия полноты в терминах диаметра.

Следствие 2. Пусть Z — распределение точек на $\mathbb{C}$ и $0 < b \in \mathbb{R}^+$. Если $\overline{\text{dens}}(Z) = +\infty$ или $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta} Z) \geq b/2\pi$, то экспоненциальная система Exp^Z полна в пространстве $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для любого выпуклого компакта K диаметра $\text{diam}(K) < b$ и в $\text{Hol}(D)$ для всякой выпуклой области D диаметра $\text{diam}(D) \leq b$.

Доказательство. По формуле (20) или (25) для диаметра это достаточное условие полноты системы Exp^Z в $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ для любого выпуклого компакта K диаметра $\text{diam}(K) < b$ следует из импликации $\text{III} \Rightarrow \text{II}$ теоремы 1, что влечёт за собой полноту Exp^Z в $\text{Hol}(D)$ для всех выпуклых областей D диаметра $\text{diam}(D) \leq b$ по определению топологии равномерной сходимости на компактах в $\text{Hol}(D)$. $\square$

Замечание 3. Одна наша конструкция (см. [21, § 5, теорема 6]) позволяет для любого сколь угодно большого числа $b > 0$ построить разделённое распределение попарно различных точек Z на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, для которого $\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \ln\text{-dens}(e^{i\theta} Z) = 0$ и в то же время система Exp^Z полна в любом $C(K) \cap \text{Hol}(\text{int } K)$ при $\text{diam}(K) < b$. Таким образом, логарифмическая блок-плотность даже разделённого распределения точек на луче не может полностью характеризовать полноту экспоненциальной системы в терминах диаметра $\text{diam}(K)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боннезен Т., Фенхель В. Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н. Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций // Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. III. Анализ и дифференциальные уравнения». — Уфа: Ин-т мат. с вычисл. центром УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Интерпретация теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты // Мат. сб. — 1989. — 180, № 3. — С. 397–423.
4. Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. Об одной теореме Леонтьева—Левина // Уфим. мат. ж. — 2017. — 9, № 3. — С. 89–101.
5. Кужаев А. Ф., Рафиков А. И., Кривошеева О. А. Об одном соотношении для логарифмической блок-плотности // Вестн. Башкир. ун-та. — 2017. — 22, № 1. — С. 25–27.
6. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
7. Лейтвейс К. Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985.
8. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1978.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
10. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
11. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфим. мат. ж. — 2020. — 12, № 2. — С. 35–48.
12. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой // Мат. заметки. — 2020. — 108, № 4. — С. 588–600.
13. Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н. Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфим. мат. ж. — 2021. — 13, № 3. — С. 116–128.
14. Сантало Л. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука, 1983.
15. Тихомиров В. М. Выпуклый анализ // Итоги науки техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фундам. направл. — 1987. — 14. — С. 5–101.
16. Хабибуллин Б. Н. О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Мат. заметки. — 1988. — 43, № 5. — С. 644–650.

17. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси// Докл. АН СССР. — 1988. — 302, № 2. — С. 270–273.
18. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси// Мат. сб. — 1989. — 180, № 5. — С. 706–719.
19. Хабибуллин Б. Н. О росте целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль прямой// Anal. Math. — 1991. — 17, № 3. — С. 239–256.
20. Хабибуллин Б. Н. Неконструктивные доказательства теоремы Бёрлинга—Мальявена о радиусе полноты и теоремы неединственности для целых функций// Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — 58, № 4. — С. 125–148.
21. Хабибуллин Б. Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции// Мат. сб. — 2009. — 200, № 2. — С. 129–158.
22. Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа, 2012.
23. Хабибуллин Б. Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. I// Уфим. мат. ж. — 2014. — 6, № 3. — С. 98–111.
24. Хабибуллин Б. Н. Теорема Хелли и сдвиги множеств. II. Опорная функция, системы экспонент, целые функции// Уфим. мат. ж. — 2014. — 6, № 4. — С. 125–138.
25. Хабибуллин Б. Н. Распределения корней и масс целых и субгармонических функций с ограничениями на их рост вдоль полосы// Изв. РАН. Сер. мат. — 2024. — 88, № 1.
26. Хабибуллин Б. Н., Мурясов Р. Р. Геометрические условия полноты экспоненциальных систем// Мат. Междунар. конф. Воронеж. весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения—XXXIII. Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 3–9 мая 2022 г.). — Воронеж, 2022. — С. 251–253.
27. Хабибуллин Б. Н., Хабибуллин Ф. Б., Чередникова Л. Ю. Подпоследовательности нулей для классов голоморфных функций, их устойчивость и энтропия линейной связности. II// Алгебра и анализ. — 2008. — 20, № 1. — С. 190–236.
28. Хадвигер Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.
29. Khabibullin B. N. The Malliavin–Rubel theorem on small entire functions of exponential type with given zeros: 60 years later/ arXiv: <https://arxiv.org/abs/2204.11603v1>.
30. Khabibullin B. N. Distribution of zeros for entire functions// Proc. Int. Conf. “Complex Analysis and Related Topics” (Kazan, June 30 – July 4, 2022). — Kazan. — P. 30–31.
31. Levin B. Ya. Lectures on Entire Functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.
32. Malliavin P., Rubel L. A. On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France. — 1961. — 89, № 2. — P. 175–201.
33. Redheffer R. M. Completeness of sets of complex exponentials// Adv. Math. — 1977. — 24. — P. 1–62.
34. Rubel L. A., Colliander J. E. Entire and Meromorphic Functions. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124) при поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич

Институт математики с вычислительным центром,

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

E-mail: lena_kudashева@mail.ru

Салимова Анна Евгениевна

Уфимский государственный нефтяной технический университет

E-mail: anegorova94@bk.ru