ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 37–49
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-37-49

УДК 517.956.35

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2024 г. **В. И. КОРЗЮК, Я. В. РУДЬКО**

Посвящается академику Е. И. Моисееву

Аннотация. Для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом, заданного в первом квадранте, рассматривается смешанная задача, в которой на пространственной полуоси задаются условия Коши, а на временной полуоси — условие третьего рода (условие Робина). Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегральных уравнений. Проводится исследование разрешимости этих уравнений, а также зависимости от начальных данных и гладкости их решений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и устанавливаются условия, при выполнении которых существует её классическое решение. При невыполнении условий согласования строится задача с условиями сопряжения, а при недостаточно гладких данных — слабое решение.

Ключевые слова: классическое решение, смешанная задача, условия третьего рода, условия согласования, нелинейное волновое уравнение.

CLASSICAL SOLUTION OF THE THIRD MIXED PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH NONLINEAR POTENTIAL

© 2024 **V. I. KORZYUK, J. V. RUDZKO**

Dedicated to Academician E. I. Moiseev

Abstract. For a telegraph equation with a nonlinear potential specified in the first quadrant, we consider a mixed problem with Cauchy conditions on the spatial semi-axis and a condition of the third kind (Robin's condition) on the temporal semi-axis. The solution is constructed by the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of some integral equations. The solvability of these equations and the dependence of their solutions on the initial data are examined. For the problem considered, the uniqueness of the solution is proved and existence conditions for classical solutions are obtained. If the matching conditions are not fulfilled, the problem with matching conditions is constructed, and if the data is not sufficiently smooth, a weak solution is constructed.

Keywords and phrases: classical solution, mixed problem, conditions of the third kind, matching conditions, nonlinear wave equation.

AMS Subject Classification: 35A01, 35A02, 35A09, 35C15, 35D99, 35L20, 35L71

1. Введение. Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведёт к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. Даже если линеаризация нелинейных уравнений математической физики возможна, с точки зрения физики исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства (см. [12]).

Уравнения гиперболического типа занимают особое место среди нелинейных уравнений с частными производеыми второго порядка. «Потеря одной производной» при обращении гиперболического оператора второго порядка приводит к принципиальным трудностям при исследовании нелинейных гиперболических уравнений. Даже для создания локальной теории нелинейных гиперболических уравнений и систем потребовалось развитие специальной теории о неявных функциях в нелинейном функциональном анализе, так как классическая теорема о неявной функции из функционального анализа оказалась здесь неприменимой.

Для (существенно) квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка с числом независимых переменных больше двух вопрос о разрешимости в целом не исследован даже для задачи Коши.

Разрешимость в некоторых классах функций в целом задачи Коши, а также некоторых краевых задач установлена для шикорого класса слабо нелинейных гиперболических уравнений вида

$$(\partial_t^2 - \Delta)u(t,\boldsymbol{x}) = f\big(t,\boldsymbol{x},u(t,\boldsymbol{x}),\partial_t u(t,\boldsymbol{x}),\nabla u(t,\boldsymbol{x})\big), \quad t>0, \quad \mathbf{x}\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$$

(см. [10]). Но в отличие от первой и второй смешанных задач, третьей смешанной задаче посвящено не так много работ, даже в случае достаточно хорошо изученного линейного волнового уравнения (см. [2, 18, 19, 24]), не говоря уже про нелинейные уравнения. Однако в ряде работ, посвященных третьей смешанной задаче для нелинейного уравнения (см., например [16, 20, 21, 23, 25]), строятся слабые решения, а не классические. Отметим работы [21] и [25], в первой из которых изучается задача управления для классического решения, а во второй — третья смешанная задача в классе бесконечно дифференцируемых начальных данных.

Отметим также, что нелинейные уравнения трудно изучать: почти не существует общих методов, работающих для всех таких уравнений, и обычно каждое отдельное уравнение приходится изучать как отдельную задачу.

В данной статье, используя способ, предложенный ранее в [5, 6], и представляющий собой сочетание метода характеристик с методом последовательных приближений, мы строим решение третьей смешанной задачи для неоднородного гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказываем единственность и непрерывную зависимость решения от начальных данных, а также выводим условия гладкости данных задачи и необходимые и достаточные условия согласования, при которых решение смешанной задачи будет классическим. При невыполнении однородных условий согласования строится задача с условиями сопряжения на характеристике, причем одно из которых, в отличие от первой смешанной задачи (см. [5, 6]), содержит некоторую произвольную постоянную, обеспечивающую наперед заданный разрыв решения. Это означает, что одной третьей смешанной задаче в обычной формулировке будет соответствовать бесконечное множество третьих смешанных задач с условиями сопряжения на характеристике. Но в каждом конкретном случае будет существовать единственное классическое решение. Если же в задаче присутствуют недостаточно гладкие функции, то строится обобщенное слабое решение. В случае нелипшицевой нелинейности отыскивается локальное решение и доказывается его единственность.

2. Постановка задачи. В области $Q=(0,\infty)\times(0,\infty)$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box u(t,x) - f(t,x,u(t,x)) = F(t,x), \tag{1}$$

где $\Box=\partial_t^2-a^2\partial_x^2$ — оператор Д'Аламбера ($a>0$ для определённости), F — функция, заданная на множестве $\overline{Q}$, а f — функция, заданная на множестве $[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует измеримая функция k, заданная на множестве $\overline{Q}$, что

$$\big|f(t,x,z_1) - f(t,x,z_2)\big| \leqslant k(t,x)|z_1 - z_2| \tag{2}$$

и такая, что ее вторая степень локально суммируема. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(0,x) = \psi(x), \quad x \in [0,\infty), \tag{3}$$

и граничное условие

$$\partial_x u(t,0) + \beta(t)u(t,0) = \mu(t), \quad t \in [0,\infty), \tag{4}$$

где φ, ψ, μ и β — функции, заданные на полуоси $[0,\infty)$.

3. Интегральное уравнение. Область Q характеристикой $x - at = 0$ разделим на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t,x)|(-1)^j(at-x) > 0\}$, $j = 1,2$.

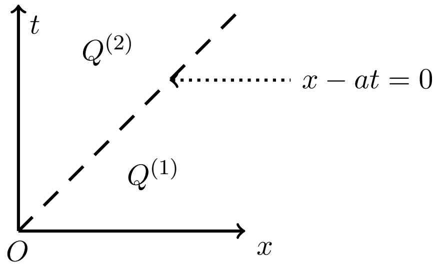

Рис. 1. Разделение области Q характеристикой $x - at = 0$ на две подобласти $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$.

В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t,x) = g^{(1,j)}(x-at) + g^{(2)}(x+at) -$$
$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{(-1)^j(at-x)}^{x+at} \left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(j)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right] dz,$$
$$(t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, j = 1,2, \tag{5}$$

где $g^{(1,1)}$, $g^{(2)}$ и $g^{(1,2)}$ — некоторые функции, первые две из которых заданы на множестве $[0,\infty)$, а последняя — на $(-\infty,0]$.

Определим на замыкании $\overline{Q}$ области Q функцию u как совпадающую на замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ области $Q^{(j)}$ с решением $u^{(j)}$ интегрального уравнения (5):

$$u(t,x) = u^{(j)}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1,2. \tag{6}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. Функция $u^{(1)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(1)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (5) при $j = 1$, функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ в котором из класса $C^2([0,\infty))$.*

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. Функция $u^{(2)}$ принадлежит классу $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ и удовлетворяет уравнению (1) в $\overline{Q^{(2)}}$ тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением уравнения (5), $j = 2$, функции $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором из классов $C^2((-\infty,0])$ и $C^2([0,\infty))$ соответственно.*

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$. Функция u принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$ и удовлетворят уравнению (1) тогда и только тогда, когда она для каждого $j = 1,2$ является непрерывным решением уравнения (5), функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ в котором* *из классов* $C^2([0,\infty))$, $C^2((-\infty,0])$ *и* $C^2([0,\infty))$ *соответственно и выполняются условия согласования*

$$\begin{gathered} g^{(1,1)}(0)-g^{(1,2)}(0)=0, \quad Dg^{(1,1)}(0)-Dg^{(1,2)}(0)=0, \\ D^2g^{(1,1)}(0)-D^2g^{(1,2)}(0)+\frac{1}{a^2}\left(F(0,0)+f(0,0,g^{(1,1)}(0)+g^{(2)}(0))\right)=0. \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство лемм 3.1, 3.2 и теоремы 3.1 представлено в [6].

Теорема 3.2. *Пусть* $F\in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $f\in C(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, *функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2), *и заданы непрерывные функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$. *Тогда решения уравнений* (5) *существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Замечание 3.1. В теореме 3.1 вместо условия $f\in C(\overline{Q}\times\mathbb{R})$ можно потребовать выполнение трех условий:

(i) функция $f_1\colon \overline{Q}\ni(t,x)\mapsto f(t,x,z)\in\mathbb{R}$ измерима при любом фиксированном $z\in\mathbb{R}$;
(ii) функция $f_2\colon \mathbb{R}\ni z\mapsto f(t,x,z)\in\mathbb{R}$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}$ для при почти любой фиксированной точки $(t,x)\in\overline{Q}$;
(iii) верно неравенство $|f(t,x,z)|\leqslant\alpha(t,x)+\beta|z|$, где $\alpha\in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Доказательства теоремы 3.2 и замечания 3.1 представлены в [5].

4. Построение решения смешанной задачи. Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (3). Подставляя соотношение (5) при $j=1$ в условия (3) получим систему уравнений относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$:

$$u^{(1)}(0,x)=\varphi(x)=g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x), \quad x\geqslant 0,$$

$$\begin{gathered} \partial_t u^{(1)}(0,x)=\psi(x)=-aDg^{(1,1)}(x)+aDg^{(2)}(x)- \\ -\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\left[f\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right]dy, \quad x\geqslant 0. \end{gathered}$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до x, получим

$$g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\varphi(x), \quad x\geqslant 0,$$

$$\begin{gathered} -g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\frac{1}{a}\int\limits_0^x\psi(z)dz+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\right. \\ \left.+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+2C, \quad x\geqslant 0. \end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered} g^{(1,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)dz-C- \\ -\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy, \quad x\geqslant 0, \end{gathered}$$

$$g^{(2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^x\psi(z)dz+C+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^x dz\int\limits_0^z \left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\quad x\geqslant 0,\quad (8)$$

где C — произвольная константа из множества действительных чисел. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия (4). Подставляя соотношение (5) при $j=2$ в условия (4) получим уравнение

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{-at}\left[f\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{at-y}{2a},\frac{at+y}{2}\right)\right]dy+$$
$$+\beta(t)\left(g^{(1,2)}(-at)+g^{(2)}(at)\right)+Dg^{(1,2)}(-at)+Dg^{(2)}(at)=\mu(t),\quad t\geqslant 0,$$

относительно функции $g^{(1,2)}$. Сделав замену $t=-z/a$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для отыскания функции $g^{(1,2)}$

$$-\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{z}\left[f\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2},u^{(2)}\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-y-z}{2a},\frac{y-z}{2}\right)\right]dy+$$
$$+\beta\left(-\frac{z}{a}\right)\left(g^{(1,2)}(z)+g^{(2)}(-z)\right)+Dg^{(1,2)}(z)+Dg^{(2)}(-z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right),\quad z\leqslant 0.\quad (9)$$

Уравнения (9) относительно $g^{(1,2)}$ вместе с первым условием (7) рассматриваем как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Решая эту задачу, получим:

$$g^{(1,2)}(x)=\exp\left(-\int\limits_0^x\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(\frac{\varphi(0)}{2}-C+\int\limits_0^x\exp\left(\int\limits_0^\xi\beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\left\{\mu\left(\frac{\xi}{a}\right)-\right.\right.$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2},u^{(1)}\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy-$$
$$-\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)\left(C+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}dz\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{y+z}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{y+z}{2}\right)\right)+F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{y+z}{2}\right)\right]dy+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{-\xi}\psi(z)\,dz+\frac{\varphi(-\xi)}{2}\right)-\frac{\psi(-\xi)}{2a}-\frac{\varphi'(-\xi)}{2}+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2},u^{(2)}\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy\right\}d\xi\right).$$

Заметим, что, поскольку,

$$\exp\left(-\int\limits_0^x\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(-C-\int\limits_0^x C\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)\exp\left(\int\limits_0^\xi\beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)d\xi\right)=$$
$$=-C\exp\left(-\int\limits_0^x\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(1+\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\exp\left(\int\limits_0^\xi\beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\right]d\xi\right)=$$
$$=-C\exp\left(-\int\limits_0^x\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(1+\exp\left(\int\limits_0^x\beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)-1\right)=-C,$$

и

$$\int\limits_0^x \exp\left(\int\limits_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\varphi'(-\xi)\,d\xi = \varphi(0) - \varphi(-x)\exp\left(\int\limits_0^x \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right) + \\ + \int\limits_0^x \exp\left(\int\limits_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)\varphi(-\xi)\,d\xi,$$

то функция $g^{(1,2)}$ может быть представлена в виде

$$g^{(1,2)}(x) = -C + \frac{\varphi(-x)}{2} + \exp\left(-\int\limits_0^x \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(\int\limits_0^x \exp\left(\int\limits_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\left\{\mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - \right.\right. \\ - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(1)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy - \\ - \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)\left(\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}dz\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) + F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right]dy + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-\xi}\psi(z)\,dz + \varphi(-\xi)\right) - \frac{\psi(-\xi)}{2a} + \\ \left.\left. + \frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(2)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy\right\}d\xi\right). \quad (10)$$

Подставив формулы (8) и (10) в исходные интегральные уравнения (5), получим

$$u^{(1)}(t,x) = K^{(1)}[u^{(1)}](t,x) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz + \\ + \frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) + f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy, \quad (t,x) \in \overline{Q^{(1)}},$$

$$u^{(2)}(t,x) = K^{(2)}[u^{(1)}, u^{(2)}](t,x) = \exp\left(-\int\limits_0^{x-at}\beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)d\xi\right)\left(\int\limits_0^{x-at}\exp\left(\int\limits_0^\xi \beta\left(-\frac{\theta}{a}\right)d\theta\right)\times\right. \\ \times\left\{\mu\left(\frac{\xi}{a}\right) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}, u^{(1)}\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right) + F\left(\frac{-\xi-y}{2a}, \frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy - \right. \\ - \beta\left(-\frac{\xi}{a}\right)\left(\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-\xi}dz\int\limits_0^z\left[f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}, u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right) + F\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{y+z}{2}\right)\right]dy + \\ + \varphi(-\xi) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{-\xi}\psi(z)\,dz\right) - \frac{\psi(-\xi)}{2a} +$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\limits_0^{\xi}\left[f\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2},u^{(2)}\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right)+F\left(\frac{-\xi-y}{2a},\frac{y-\xi}{2}\right)\right]dy\Bigg\}d\xi\Bigg)+$$

$$+\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(z)dz+$$

$$+\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x+at}dz\int\limits_0^{z}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy-$$

$$-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x-at}dy\int\limits_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz,\quad (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}. \tag{11}$$

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия* $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$, $\beta\in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Тогда решения* $u^{(j)}$ $(j=1,2)$ *уравнений* (11) *существуют, единственны в классе* $C^2(\overline{Q^{(j)}})$ *и непрерывно зависят от функций* φ, ψ *и* μ.

Лемма 4.1 доказывается аналогично теореме 3.2.

Таким образом, построено кусочно гладкое решение задачи (1) — (4), которое определятся формулами (11) и (6).

5. Анализ решения смешанной задачи. Чтобы функция u принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций f, F, необходимо и достаточно выполнение равенств (7), согласно теореме 3.1. Вычисляя величины, которые входят в выражения (7), получаем следующие условия согласования

$$\beta(0)\varphi(0)-\mu(0)+\varphi'(0)=0, \tag{12}$$

$$f(0,0,\varphi(0))+F(0,0)+a\left(\varphi(0)\beta'(0)+\beta(0)\psi(0)-\mu'(0)+\psi'(0)\right)=0. \tag{13}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^1([0,\infty))$, $\beta\in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k\in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное решение* u, *определенное формулами* (6) *и* (11), *из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (12) *и* (13).

Доказательство теоремы 5.1 вытекает из теоремы 3.1, леммы 4.1 и проведенных выше рассуждений.

6. Неоднородные условия согласования. Теперь, подобно тому как это было сделано в [3–6, 8, 9, 11], рассмотрим задачу (1)–(4) вЁслучае, когда условия согласования (12) и (13) частично или полностью не выполняются. Но в отличие от первой смешанной задачи в третьей смешанной задаче условия согласования можно задать таким образом, что решение будет иметь произвольный наперед заданный разрыв на характеристике $x-at=0$.

Согласно теореме 3.1 присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность частных производных функции u. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение 6.1. *Если для заданных функций* μ, φ, ψ *не выполняются однородные условия согласования* (12) *и* (13), *то какими бы гладкими ни были функции* f, F, β, μ, φ *и* ψ, *задача* (1)–(4) *не имеет классического решения, определенного на* $\overline{Q}$.

Доказательство утверждения вытекает из теоремы 3.1.

Пусть заданные функции уравнения (1), граничных условий (3), (4) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 5.1: $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ и $\beta \in C^1([0,\infty))$. Так как условия согласования (12) и (13), вообще говоря, не выполнены, то получим разрывными производные функции u согласно следующим выражениям:

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = C^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
&\big[(\partial_t u)^+ - (\partial_t u)^-\big](t, x = at) = \\
&\qquad = -a\big[(\partial_x u)^+ - (\partial_x u)^-\big](t, x = at) = a\big(\mu(0) - \beta(0)\varphi(0) - \varphi'(0)\big) + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{4a}\int\limits_0^{2at}\left[f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\right]dz,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big[(\partial_t^2 u)^+ - (\partial_t^2 u)^-\big](t, x = at) = \frac{1}{2}\big(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))\big) - \\
&\quad - a\Big(a\beta(0)\big(\beta(0)\varphi(0) - \mu(0) + \varphi'(0)\big) + \varphi(0)\beta'(0) + \beta(0)\psi(0) - \mu'(0) + \psi'(0)\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{8a}\int\limits_0^{2at}\Bigg\{\Bigg[\left((\partial_t u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \\
&\qquad - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^+\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\Bigg] - \\
&\qquad - \Bigg[\left((\partial_t u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right) - a(\partial_x u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\partial_y f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, y = (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) - \\
&\qquad - a\partial_x f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right) + \partial_t f\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}, (u)^-\left(\frac{z}{2a}, \frac{z}{2}\right)\right)\Bigg]\Bigg\}dz = \\
&\quad = a^2[(\partial_x^2 u)^+ - (\partial_x^2 u)^-](t, x = at) + \big(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))\big) = \\
&\quad = -a\big[(\partial_t\partial_x u)^+ - (\partial_t\partial_x u)^-\big](t, x = at) + \frac{1}{2}\big(f(t, at, (u)^+(t, at)) - f(t, at, (u)^-(t, at))\big), \qquad (14)
\end{aligned}$$

где $C^{(1)} = 0$. В дальнейшем при рассмотрении задачи с условиями сопряжения будем полагать, что $C^{(1)}$ — некоторая произвольная наперед заданная константа из множества действительных чисел, вообще говоря, не обязательно равная нулю. Здесь было использовано обозначение $()^{\pm}$ — предельные значения функции u и ее частных производных с разных сторон на характеристике $x - at = 0$, т.е.

$$(\partial_t^p u)^{\pm}(t, x = at) = \lim_{\delta \to 0+} \partial_t^p u(t, at \pm \delta).$$

Введем обозначение $\widetilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t,x) \mid x - at = 0\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, $\beta \in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное решение* $\widetilde{u}$ *из класса* $C^2(\widetilde{Q})$, *которое представляется в виде*

$$\widetilde{u}(t,x) = \begin{cases} u^{(1)}(t,x) = K^{(1)}[u^{(1)}](t,x), & (t,x) \in Q^{(1)} \cup \{(0,x) \mid x \in (0,\infty)\}, \\ u^{(2)}(t,x) = K^{(2)}[u^{(1)}, u^{(2)}](t,x) - C^{(1)}, & (t,x) \in Q^{(2)} \cup \{(t,0) \mid t \in (0,\infty)\}, \end{cases} \qquad (15)$$

где функции $u^{(1)}$ *и* $u^{(2)}$ *заданы формулой* (11), *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (14).

Для доказательства теоремы 6.1 следует повторить рассуждения, которые ранее привели нас к теореме 5.1.

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, $\beta \in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное решение* $\widetilde{u}$, *определенное формулой* (15), *из класса* $C^2(\widetilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (14) *и* $C^{(1)} = 0$.

Доказательство. Теорема 6.2 следует фактически из теоремы 6.1 и формул (14). Действительно, если $C^{(1)} = 0$, то решение $\widetilde{u}$ на множестве $\{(t,x) \mid x - at = 0\}$ является непрерывным в силу (14). Следовательно, кроме того, что решение $\widetilde{u} \in C^2(\widetilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\overline{Q}$, $\widetilde{u} \in C(\overline{Q})$. □

Теорема 6.3. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$, $\beta \in C^1([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное решение* $\widetilde{u}$, *определенное формулой* (15), *из класса* $C^2(\widetilde{Q}) \cap C^1(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (14), $C^{(1)} = 0$ *и* (12).

Доказательство. Теорема 6.3 легко следует из теорем 6.1, 6.2 и формул (14), так как в этом случае $\widetilde{u}$ является непрерывным на множестве $\overline{Q}$, но в силу (14) имеет непрерывные производные первого порядка. □

Замечание 6.1. Если заданные функции задачи (1)–(4) не удовлетворяют однородным условиям согласования (12) и (13), то решение задачи (1)–(4) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристике $x - at = 0$.

В качестве условий сопряжения могут быть условия (14). Теперь задачу (1)–(4) можно сформулировать, используя условия сопряжения (14) следующим образом.

Задача (1)–(4) **с условиями сопряжения на характеристиках.** Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (3), граничным условиям (4), условиям сопряжения (14).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

7. Слабое решение.

Рассмотрим теперь задачу (1)–(4) в случае, когда функции β, f, F, μ, φ и ψ не обладают достаточной степенью гладкости.

Определение 1. Функцию u, представимую в виде (6), (11) назовем слабым решение задачи (1)–(4).

Замечание 7.1. Любое классическое решение задачи (1)–(4) является также слабым решением этой задачи.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *Пусть выполняются условия* $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\varphi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\beta \in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ *и функция* f *удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори по третьей переменной, т.е. существует такая функция* $k \in L_2^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, *что выполняется неравенство* (2). *Третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное слабое решение* u *из класса* $C(\overline{Q})$.

Доказательство. Разрешимость интегральных уравнений (11) и принадлежность их решений классу непрерывных функций фактически следует из теоремы 3.2. Корректность представления (6) следует из того факта, что $u^{(1)}(t, x = at) = u^{(2)}(t, x = at)$ исходя из формул (11). □

Замечание 7.2. Аналогично предыдущему пункту, можно строить слабое решение задачи с условиями сопряжения.

8. Локальное решение. В предыдущих разделах настоящей работы третья смешанная задача (1) — (4) рассматривалась в предположении, что нелинейность удовлетворяет условию типа Липшица—Каратеодори. С одной стороны, во многих разделах теоретической физики нелинейные уравнения часто имеют степенные или экспоненциальные нелинейности (см. [13, 22, 26]). Поэтому весьма важен вопрос о существовании и единственности решений таких уравнений. С другой стороны, известно, что условие типа Липшица—Каратеодори

$$\big|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)\big|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|$$

нельзя ослабить до условия типа Гёльдера

$$|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)|\leqslant k(t,x)|z_1-z_2|^{\alpha},$$

где $\alpha\in(0,1)$, сохранив при этом однозначную разрешимость задачи (см. [17]). Однако условие типа Липшица—Каратеодори не является единственным допустимым условием для существования и единственности классических решений смешанных задач для нелинейных уравнений. Например, в [14] с помощью априорных оценок и принципа Лере—Шаудера построено классическое решение задачи Коши для обобщенного уравнения Лиувилля (нелинейность экспоненциального роста).

В этом разделе для любой непрерывно дифференцируемой нелинейности покажем, что третья смешанная задача (1)–(4) допускает единственное локальное классическое решение.ввв

Введем обозначения

$$\Omega_T^{(1)}=\operatorname{Conv}\big\{(0,0),(T,a^{-1}T),(0,2a^{-1}T)\big\},\quad \Omega_T^{(2)}=\operatorname{Conv}\big\{(0,0),(T,a^{-1}T),(2T,0)\big\},$$
$$\Omega_{T,T'}=\Omega_T^{(1)}\cup\Omega_{T'}^{(2)}.$$

Лемма 8.1. *Пусть выполняются условия $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\varphi\in C([0,\infty))$, $\psi\in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu\in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ и $\beta\in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$. Тогда решения $u^{(j)}$ $(j=1,2)$ уравнений* (11) *существуют, единственны в классах $C(\Omega_T^{(1)})$ и $C(\Omega_{T'}^{(2)})$, где $0<T'\leqslant T<\infty$, соответственно и непрерывно зависят от функций φ, ψ и μ.*

Доказательство. Данную теорему докажем, следуя схеме, изложенной в [7, 15]. Для определённости рассмотрим уравнение (11) для отыскания функции $u^{(1)}$. Введем множество

$$X_{m,T}=\big\{u\ \big|\ u\in C(\Omega_T^{(1)})\wedge\|u\|_{C(\Omega_T^{(1)})}\leqslant m\big\}.$$

Утверждается, что если m достаточно велико, а T достаточно мало, то $K^{(1)}\colon X_{m,T}\mapsto X_{m,T}$. В самом деле, поскольку f непрерывная функция, то она ограничена и равномерно непрерывна на компакте $\Omega_{m,T}^{(1)}=\Omega_T^{(1)}\times[-m,m]$. Пусть $\Phi=\|f\|_{C(\Omega_{m,T}^{(1)})}$. Легко видеть, что для любых $T'<T$ и $m'<m$ верно неравенство

$$\|f\|_{C(\Omega_{m',T'}^{(1)})}\leqslant\Phi.$$

Введем обозначение

$$G_T=\sup_{(t,x)\in\Omega_T^{(1)}}\left|\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{4a^2}\int\limits_{x-at}^{x+at}dz\int\limits_{x-at}^{z}F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)dy\right|.\qquad(16)$$

При уменьшении T без изменения величины G_T в предыдущей формуле знак $=$ заменяется на $\geqslant$.

Теперь для $u\in X_{m,T}$ рассмотрим оценку

$$\|K^{(1)}[u^{(1)}]\|_{C(\Omega_T^{(1)})}\leqslant G_T+\frac{\Phi T^2}{2}.$$

Нам необходимо выполнение неравенства

$$\|K^{(1)}[u^{(1)}]\|_{C(\Omega_T^{(1)})}\leqslant G_T+\frac{\Phi T^2}{2}\leqslant m,\qquad(17)$$

чтобы $K^{(1)}[u^{(1)}]\in X_{m,T}$. Параметры T и m, таковы, что неравенство (17) будет верным, могут быть найдены согласно следующему алгоритму:

(i) Присвоить T равным любому действительному положительному числу.
(ii) Вычислить G_T по формуле (16).
(iii) Присвоить $m = 2G_T$ и вычислить $\Phi = \|f\|_{C(\Omega^{(1)}_{m,T})}$.
(iv) Уменьшить T, так чтобы было верно неравенство $\leqslant G_T + \Phi T^2/2 \leqslant m = 2G_T$. Заметим, что уменьшение T оставляет в силе предыдущие неравенства.

Поскольку числа T и m выбраны такими, что неравенство (17) выполняется, то $K^{(1)}[u] \in X_{m,T}$, если, например, $u \in X_{m,T}$.

Так как f — непрерывно дифференцируемая функция, то ее частные производные ограничены на компакте $\Omega^{(1)}_{m,T}$, а тогда f удовлетворяет на этом компакте условию Липшица с некоторой постоянной L, и в таком случае верно неравенство

$$\left\|K^{(1)}[u_1] - K^{(1)}[u_2]\right\|_{C(\Omega^{(1)}_T)} \leqslant \frac{LT^2}{2}\|u_1 - u_2\|_{C(\Omega^{(1)}_T)}, \quad u_1 \in C(\Omega^{(1)}_T), \quad u_2 \in C(\Omega^{(1)}_T).$$

Снова уменьшаем T так, чтобы для любых $u_1, u_2 \in X_{m,T} \subset C(\Omega^{(1)}_T)$ выполнялось неравенство

$$\left\|K^{(1)}[u_1] - K^{(1)}[u_2]\right\|_{C(\Omega^{(1)}_T)} \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{C(\Omega^{(1)}_T)}. \tag{18}$$

При этом неравенство (17) останется в силе.

Выберем любое $u_0 \in X_{m,T}$. Если мы рекуррентно определим

$$u_j = K^{(1)}[u_{j-1}], \quad j \in \mathbb{N},$$

то согласно доказательству теоремы Банаха о неподвижной точке (см. [15]) $u_j \to u$ в пространстве $C(\Omega^{(1)}_T)$ и $u = K^{(1)}[u]$. Более того, поскольку $\|u_j\|_{C(\Omega^{(1)}_T)} \leqslant m$, получаем $u \in X_{m,T}$. Единственность следует из неравенства (18).

Непрерывная зависимость решения от начальных данных исследуется аналогично работе [6].

Существование единственного непрерывного и непрерывно зависящего от начальных данных решения уравнения (11) относительно функции $u^{(2)}$ доказывается аналогично.

Неравенство $T' \leqslant T$, указанное в формулировке данной теоремы, следует из структуры оператора $K^{(2)}$, так как для определения функции $u^{(2)}$ на множестве $\Omega^{(2)}_{T'}$ необходимо задать функцию $u^{(1)}$ на множестве $\Omega^{(1)}_T$, где $T \geqslant T'$. $\square$

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^1(\overline{Q})$, $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\mu \in C^1([0,\infty))$ *и* $\beta \in C^1([0,\infty))$. *Тогда существуют такие числа* $0 < T' \leqslant T < \infty$, *что третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное решение* u, *заданное на множестве* $\Omega_{T,T'}$ *и определенное формулами* (6) *и* (11), *из класса* $C^2(\Omega_{T,T'})$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (12) *и* (13).

Доказательство теоремы 8.1 следует из теоремы 3.1 и леммы 8.1.

Теорема 8.2. *Пусть выполняются условия* $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in L_1^{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\varphi \in C([0,\infty))$, $\psi \in L_1^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\mu \in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, $\beta \in L_\infty^{\mathrm{loc}}([0,\infty))$. *Тогда существуют такие числа* $0 < T' \leqslant T < \infty$, *что третья смешанная задача* (1)–(4) *имеет единственное слабое решение* u, *заданное на множестве* $\Omega_{T,T'}$ *и определенное формулами* (6) *и* (11), *из класса* $C(\Omega_{T,T'})$.

Доказательство теоремы 8.2 следует из теоремы 7.1 и леммы 8.1.

Отметим, что условия гладкости, указанные в теореме 8.2 о существовании и единственности локального слабого решения, сильнее, чем в теореме 7.1 о существовании и единственности глобального слабого решения. Во-первых, это происходит из-за того, что теорема 8.2 не требует выполнения условия типа Липшица—Каратеодори (см. (2)), которое обеспечивает единственность решения. Вместо этого мы пользуемся фактом, что непрерывно дифференцируемая функция на компактном подмножестве евклидова пространства удовлетворяет условию Липшица. Поэтому мы вынуждены полагать $f \in C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$. Но с другой стороны, для существования (но не единственности) локального слабого решения не обязательно считать функцию f непрерывно дифференцируемой. Для построения локального слабого можно воспользоваться теоремой Шаудера, как это сделано в [1], и в таком случае функцию f можно полагать непрерывной, но остальные условия гладкости, указанные в теореме 8.2, должны быть усилены: $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi \in C^1([0,\infty))$, $\psi \in C([0,\infty))$, $\mu \in C([0,\infty))$, $\beta \in C([0,\infty))$. Это связано с тем, что теорема Шаудера требует, чтобы оператор был вполне непрерывным, чего можно добиться, например, потребовав, чтобы операторы $K^{(1)}$ и $K^{(2)}$ переводили непрерывные функции в непрерывно дифференцируемые. Кроме того, в [17] показано, что, вообще говоря, в случае $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}) \wedge f \notin C^1(\overline{Q} \times \mathbb{R})$ смешанная задача вида (1)–(4) не имеет единственного локального решения.

Замечание 8.1. Аналогично п. 6, можно строить локальное классическое решение задачи с условиями сопряжения.

9. Заключение. В статье были сформулированы достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение третьей смешанной задачи в четверти плоскости для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом. Показано, что нарушение условий согласования приводит к невозможности построения классического решения во всей четверти плоскости. В случае невыполнения данных условий рассмотрена задача с условиями сопряжения на характеристиках. В случае недостаточной гладкости исходных данных построено слабое решение начальной задачи и доказана его единственность. Если нелинейность уравнения не является липшицевой, то построено локальное классическое и слабое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джохадзе О. М.* Смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 5. — С. 591–606.
2. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций. — Минск: БГУ, 2017.
3. *Корзюк В. И., Козловская И. С. Наумовец С. Н.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2015. — № 1. — С. 7–21.
4. *Корзюк В. И., Наумовец С. Н., Сериков В. П.* Смешанная задача для одномерного волнового уравнения с условиями сопряжения и производными второго порядка в граничных условиях// Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. — 2020. — *56*, № 3. — С. 287–297.
5. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое и слабое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Мат. — 2023. — *43*. — С. 48–63.
6. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Классическое решение первой смешанной задачи для телеграфного уравнения с нелинейным потенциалом// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 2. — С. 174–184.
7. *Корзюк В. И., Рудько Я. В.* Локальное классическое решение задачи Коши для полулинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных// Мат. Междунар. науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа». Т. 2 (Уфа, 28 сентября—1 октября 2022). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 48–50.
8. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами// Диффер. уравн. — 2017. — *53*, № 1. — С. 77–88.
9. *Корзюк В. И., Столярчук И. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения типа Клейна—Гордона—Фока с неоднородными условиями согласования// Докл. НАН Беларуси. — 2019. — *63*, № 1. — С. 7–13.
10. Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1982.
11. *Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 10. — С. 1373–1385.
12. *Прохоров А. М.* Физическая энциклопедия. Т. 3. — М., 1992.
13. *Фущич В. И.* Симметрия в задачах математической физики// в кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике (Фущич В. И., ред.). — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1981. — С. 6–28.
14. *Харибегашвили С. С., Джохадзе О. М.* 2011// Диффер. уравн.. — *47*, № 12. — С. 1741–1753.
15. *Evans L. C.* Partial Differential Equations. — Providence: Am. Math. Soc., 2010.
16. *Giai Giang Vo.* A semilinear wave equation with a boundary condition of many-point type: Global existence and stability of weak solutions// Abstr. Appl. Anal. — 2015. — *2015*. — 531872.
17. *Korzyuk V. I., Rudzko J. V.* On the absence and non-uniqueness of classical solutions of mixed problems for the telegraph equation with a nonlinear potential/ `arXiv: 2303.17483 [math.AP]`.

18. *Nesterenko Yu. R.* Mixed problem for the wave equation with Robin boundary conditions// Dokl. Math. — 2009. — *79*, № 3. — P. 322–324.
19. *Nikitin A. A.* On the mixed problem for the wave equation with the third and first boundary conditions// Differ. Equations. — 2007. — *43*, № 12. — P. 1733–1741.
20. *Le Thi Phuong Ngoc, Le Huu Ky Son, Nguyen Thanh Long* Existence, blow-up and exponential decay estimates for the nonlinear Kirchhoff–Carrier wave equation in an annular with Robin–Dirichlet conditions// Kyungpook Math. J. — 2021. — *61.* — P. 859–888.
21. *Li T.* Exact boundary controllability for quasilinear wave equations// J. Comput. Appl. Math. — 2006. — *190.* — P. 127–135.
22. *Nakayama Y.* Liouville field theory: A decade after the revolution// Int. J. Mod. Phys. A. — 2004. — *19*, № 17–18. — P. 2771–2930.
23. *Nguyen Huu Nhan, Le Thi Phuong Ngoc, Tran Minh Thuyet, Nguyen Thanh Long* A Robin–Dirichlet problem for a nonlinear wave equation with the source term containing a nonlinear integral// Lithuan. Math. J. — 2017. — *57*, № 1. — P. 80–108.
24. *Van Horssen W. T., Wang Y., Cao G.* On solving wave equations on fixed bounded intervals involving Robin boundary conditions with time-dependent coefficients// J. Sound Vibr. — 2018. — *424.* — P. 263–271.
25. *Wu X., Mei L., Liu C.* An analytical expression of solutions to nonlinear wave equations in higher dimensions with Robin boundary conditions// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *426*, № 2. — P. 1164–1173.
26. *Xie Y., Tang J.* A unified method for solving sinh-Gordon-type equations// Nuovo Cim. — 2006. — *121*, № 2. — P. 1373–1385.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Корзюк Виктор Иванович (Korzyuk Viktor Ivanovich)
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь;
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
(Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus;
Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `korzyuk@bsu.by`

Рудько Ян Вячеславович (Rudzko Jan Viaczaslavavicz)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь;
(Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)
E-mail: `janycz@yahoo.com`