ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 78–88
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-78-88

УДК 517.977.1

ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **Е. В. РАЕЦКАЯ**

Аннотация. Для системы управления в частных производных выведен критерий полной управляемости системы. Исследование ведется методом каскадной декомпозиции, которая заключается в пошаговом эквивалентном переходе от исходной системы к редуцированнным системам в подпространствах. Получена функция, принадлежащая подпространству минимальной размерности, определяющая вид решения задачи программного управления — функций состояния и управления в аналитическом виде. Установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции, приведена схема ее построения. Найдены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции в полиномиальном, экспоненциальном, дробно-рациональном видах; приведены формулы для построения функций такого вида. Для исходной системы построено решение задачи программного управления.

Ключевые слова: динамическая система с частными производными, полная управляемость, программное управление, метод каскадной декомпозиции.

GENERAL SCHEME FOR CONSTRUCTING THE DETERMINING FUNCTION IN A CONTROL PROBLEM FOR A DYNAMICAL SYSTEM WITH PARTIAL DERIVATIVES OF DIFFERENT ORDERS

© 2024 **E. V. RAETSKAYA**

Abstract. For a control system with partial derivatives, a criterion for the complete controllability is derived by using the cascade decomposition method based on the transition from the original system to reduced systems in subspaces. We obtain a function, which belongs to a subspace of minimal dimension and determines the type of solution of the program control problem, i.e., the state and control functions in the analytical form. Necessary and sufficient conditions for the existence of the determining function are established and a scheme of its construction is given. Necessary and sufficient conditions for the existence of a determining function in the polynomial, exponential, and fractional-rational forms are found; formulas for constructing such functions are proposed. For the original system, a solution of the program control problem is constructed.

***Keywords and phrases*:** dynamical system with partial derivatives, complete controllability, program control, cascade decomposition method.

***AMS Subject Classification*:** 93B05

1. Введение. Рассматривается динамическая система в частных производных

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = B\frac{\partial x^k(t,s)}{\partial s^k} + Du(t,s) \tag{1}$$

с условиями

$$x(0,s) = \alpha(s), \quad x(T,s) = \beta(s), \tag{2}$$

где $t \in [0,T]$, $s \in [0,S]$; $x(t,s) \in \mathbb{R}^n$; $u(t,s) \in \mathbb{R}^m$; B, D — матрицы соответствующих размеров.

Систему (1) называют полностью управляемой, если существует функция управления $u(t,x)$, под воздействием которой система переводится из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние (см. (2)) за время $[0,T]$ для любого $T > 0$.

Изучению управляемости, как одного из важнейших свойств динамической системы, посвящено огромное количество работ, например, ставшие классическими (см. [1, 2, 6–8, 12]).

Наряду с выявлением возможности управления системой актуальной задачей является именно построение функции управления и функции состояния, отвечающей заданным условиям. Однако данное направление на данный момент разработано недостаточно широко и полно. Наиболее общим подходом является применение методов, позволяющих строить искомые функции в приближенном виде, что не всегда отвечает запросам практики и затрудняет более полное исследование свойств функций состояния и управления. Потребность в развитии методов построения функций управления и состояния в аналитической форме весьма велика.

В данной работе для системы (1)–(2) ставятся следующие задачи управления:

(a) выявление свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1);
(b) установление свойств функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, в условиях (2) достаточных для реализации управляемого процесса;
(c) построение функции управления $u(t,s)$ и соответствующей функции состояния $x(t,s)$ для полностью управляемой системы. Именно процедура построения указанных функций занимает в данной работе центральное место.

Решение поставленной задачи ведется методом каскадной декомпозиции, разработанным в [9] для исследования полной управляемости классической системы управления и примененным позже в [4, 10, 13, 14] для исследования свойств робастности, инвариантности, наблюдаемости, управляемости, а также при решении задач управления для ряда динамических систем (см. [5, 11, 15–19]). Именно такой подход позволяет получить решение задачи управления в аналитическом виде.

Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матичного коэффициента при функции управления в системе (1), позволяющем проводить пошаговое расщепление функции состояния на компоненты из сужающихся подпространств. Компонента состояния из самого узкого подпространства, названная здесь определяющей функцией, будет определять вид аналитического решения задачи управления. Основной целью данной работы является выявление необходимых условий существования определяющей функции, а также разработка общей схемы ее построения в различных формах.

Каскадная декомпозиция включает три этапа:

(i) прямой ход, подразумевающий поэтапную редукцию системы (1) и выявление ее полной управляемости или неуправляемости; на данном этапе выявляются и свойств функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, достаточные для реализации управляемого процесса;
(ii) центральный этап: построение определяющей функции для полностью управляемой системы (1);
(iii) обратный ход, подразумевающий сначала пошаговое восстановление функции состояния $x(t,s)$, удовлетворяющей заданным условиям (2); затем построение соответствующей функции управления $u(t,s)$.

Таким образом, решается задача программного управления, которая, для полностью управляемой системы (1), предполагает сначала построение функции состояния $x(t,s)$; затем построение соответствующей функции $u(t,s)$, которая и будет обеспечивать такое управление системой (1), что траектория системы пройдет через заданные точки (2) за время $[0,T]$ для любого $T>0$.

2. Теоретическая база исследования. Метод каскадной декомпозиции базируется на свойстве нетеровости матричного коэффициента $D:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, которому соответствуют разложения пространств в прямые суммы

$$\mathbb{R}^m=\operatorname{Coim}D\dotplus\operatorname{Ker}D,\quad \mathbb{R}^n=\operatorname{Im}D\dotplus\operatorname{Coker}D, \tag{3}$$

где $\operatorname{Ker}D$ — ядро D; $\operatorname{Im}D$ — образ D; $\operatorname{Coker}D$ — дефектное подпространство, $n_0=\dim\operatorname{Coker}D$; $\operatorname{Coim}D$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker}D$ в $\mathbb{R}^n$; при этом сужение $\tilde D$ оператора D на $\operatorname{Coim}D$ имеет обратный $\tilde D^{-1}$. Проекторы на подпространства $\operatorname{Ker}D$ и $\operatorname{Coker}D$ обозначаются через P и Q, соответственно. Оператор $\tilde D^{-1}(I-Q)$ называется полуобратным к D и обозначается D^- (через I здесь и далее обозначен тождественный оператор в соответствующем пространстве). Здесь операторы и соответствующие им матрицы обозначаем одинаково.

Лемма 1 (см. [3])**.** *Соотношение*

$$Du=v,\quad u\in\mathbb{R}^m,\quad v\in\mathbb{R}^n \tag{4}$$

эквивалентно системе

$$u=D^-v+Pu,\quad Qv=0. \tag{5}$$

Выражения (5) суть решение уравнения (4) для u, найденное с точностью до произвольного элемента Pu из подпространства $\operatorname{Ker}D$, и условие корректности системы (4).

Следует заметить, что в случае $n=n_0$ система (1) вида

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}=B\frac{\partial x^k(t,s)}{\partial s^k}$$

является неуправляемой. Здесь рассматривается случай $n>n_0>0$.

3. Прямой ход декомпозиции. Нетеровость матричного коэффициента D позволяет расщепить коэффициенты и функции в уравнении (1) на коэффициенты и функции из подпространств. Так функция состояния $x(t,s)$ расщепляется на компоненты $Qx(t,s)\in\operatorname{Coker}D$ и $(I-Q)x(t,s)\in\operatorname{Im}D$, которые будем обозначать $x_1(t,s)$ и $u_1(t,s)$, и называть функциями псевдосостояния и псевдоуправления соответственно. Введем следующие обозначения:

$$B_1=QBQ,\quad D_1=QB(I-Q),\quad G_1=QB,$$
$$\alpha_{10}(s)=Q\alpha(s),\quad \alpha_{11}(s)=G_1\frac{\partial^k\alpha(s)}{\partial s^k},$$
$$\beta_{10}(s)=Q\beta(s),\quad \beta_{11}(s)=G_1\frac{\partial^k\beta(s)}{\partial s^k},$$
$$x_1(t,s)=Qx(t,s),\quad u_1(t,s)=(I-Q)x(t,s),$$

Описанные выше свойства нетеровости матричного коэффициента D обусловливают на первом шаге расщепления эквивалентный переход от системы (1) к иерархически структурированной совокупности систем первого и второго уровней, а именно, системе первого (верхнего) уровня — системе для построения функции управления

$$u(t,s)=D^-\left(\frac{\partial x(t,s)}{\partial t}-B\frac{\partial x^k(t,s)}{\partial s^k}\right)+Pu(t,s), \tag{6}$$

с неизвестной пока функцией состояния $x(t,s)$, с произвольным элементом $Pu(t,s)\in\operatorname{Ker}D$ и, с учетом расщепления

$$x(t,s)=x_1(t,s)+u_1(t,s), \tag{7}$$

системе второго (нижнего) уровня

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}=B_1\frac{\partial x_1^k(t,s)}{\partial s^k}+D_1\frac{\partial u_1^k(t,s)}{\partial s^k}. \tag{8}$$

Кроме того, на первом шаге декомпозиции производится эквивалентный переход от условий (2) к условиям

$$x_1(0,s) = \alpha_{10}(s), \qquad x_1(T,s) = \beta_{10}(s), \tag{9}$$

$$\frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}|_{t=0} = \alpha_{11}(s), \quad \frac{\partial x_1(t,s)}{\partial t}|_{t=T} = \beta_{11}(s). \tag{10}$$

Лемма 2. *При выполнении условий* $\alpha(s) \in C^k[0,S]$, $\beta(s) \in C^k[0,S]$, *в случае* $n > n_0$, *система* (1) *с условиями* (2) *эквивалентна иерархически структурированной совокупности соотношений первого шага*: *системе* (6) *первого уровня, выражению* (7) *и системе* (8) *второго уровня с условиями* (9)–(10).

Исследование свойств системы (8) базируется на описанных выше свойствах нетеровости матричного коэффициента $D_1 : \operatorname{Im} D \to \operatorname{Coker} D$.

Обозначим $n_1 = \dim \operatorname{Coker} D_1$. В случае $n_0 > n_1 > 0$, при выполнении условий k-кратной дифференцировании функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$, реализуется эквивалентный переход от системы (8) к иерархически структурированной совокупности систем второго шага. Следует заметить, что система нижнего уровня второго шага — система относительно функции псевдосостояния $x_2(t,s) \in \operatorname{Coker} D_1$ и функции псевдоуправления $u_2(t,s) \in \operatorname{Im} D_1$, будет иметь вид, аналогичный системе (8) с заменой индекса 1 на 2.

Кроме того, в точках $t = 0$ и $t = T$ появятся по одному дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 x_2(t,s)}{\partial t^2}|_{t=0} = \alpha_{22}(s), \quad \frac{\partial^2 x_2(t,s)}{\partial t^2}|_{t=T} = \beta_{22}(s).$$

Таким образом, в случае $n_0 > n_1 > \cdots > n_{i-1} > n_i > 0$ при выполнении условий $\alpha(s) \in C^k[0,S]$, $\beta(s) \in C^k[0,S]$, общий вид иерархически структурированной совокупности соотношений i-го шага имеет вид:

$$\frac{\partial u^k_{i-1}(t,s)}{\partial s^k} = D^-_{i-1}\left(\frac{\partial x_{i-1}(t,s)}{\partial t} - B_{i-1}\frac{\partial x^k_{i-1}(t,s)}{\partial s^k}\right) + f_{i-1}(t,s), \tag{11}$$

$$x_{i-1}(t,s) = x_i(t,s) + u_i(t,s), \tag{12}$$

$$\frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} = B_i\frac{\partial x^k_i(t,s)}{\partial s^k} + D_i\frac{\partial u^k_i(t,s)}{\partial s^k}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^j x_i(t,s)}{\partial t^j}|_{t=0} = \alpha_{ij}(s), \quad \frac{\partial^j x_i(t,s)}{\partial t^j}|_{t=T} = \beta_{ij}(s), \quad j = \overline{0,i}, \tag{14}$$

Здесь

$$B_i = Q_{i-1}B_{i-1}Q_{i-1}, \quad D_i = Q_{i-1}B_{i-1}(I - Q_{i-1}), \quad G_i = Q_{i-1}B_{i-1}, \tag{15}$$

$$\alpha_{i0}(s) = Q_{i-1}\alpha_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1Q\alpha(s), \tag{16}$$

$$\beta_{i0}(s) = Q_{i-1}\beta_{i-10}(s) = Q_{i-1}Q_{i-2}\dots Q_1Q\beta(s), \tag{17}$$

$$\alpha_{ij}(s) = G_iG_{i-1}\dots G_2G_1\frac{\partial^{j\cdot k}\alpha(s)}{\partial s^{j\cdot k}} = G_i\frac{\partial^{j\cdot k}\alpha_{i-1}(s)}{\partial s^{j\cdot k}}, \quad j = 1,2,\dots,i, \tag{18}$$

$$\beta_{ij}(s) = G_iG_{i-1}\dots G_2G_1\frac{\partial^{j\cdot k}\beta(s)}{\partial s^{j\cdot k}} = G_i\frac{\partial^{j\cdot k}\beta_{i-1}(s)}{\partial s^{j\cdot k}}, \quad j = 1,2,\dots,i, \tag{19}$$

$$x_i(t,s) = Q_{i-1}x_{i-1}(t,s), \quad u_i(t,s) = (I - Q_{i-1})x_{i-1}(t,s). \tag{20}$$

Система (11) первого уровня — это система для нахождения функции псевдоуправления $u_{i-1}(t,s)$ с неизвестной пока функцией псевдосостояния $x_{i-1}(t,s)$ и с произвольной функцией $f_{i-1}(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{i-1}$.

Система (13) второго уровня аналогична по виду системе (8) первого шага, но относительно компонент $x_i(t,s)$ из еще более узкого подпространства $\operatorname{Coker} D_{i-1}$.

В силу конечномерности исходного пространства $\mathbb{R}^n$, возможны лишь два следующих случая:

(i) $n_0 > n_1 > \cdots > n_{p-1} = n_p$;

(ii) $n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > n_p = 0$.

При выполнении условий $\alpha(s) \in C^k[0, S]$, $\beta(s) \in C^k[0, S]$ прямой ход полностью реализуется за p шагов ($n \geqslant p \geqslant 0$) переходом к иерархической структуре: системе первого уровня p-го шага

$$\frac{\partial u^k_{p-1}(t,s)}{\partial s^k} = D^-_{p-1}\left(\frac{\partial x_{p-1}(t,s)}{\partial t} - B_{p-1}\frac{\partial x^k_{p-1}(t,s)}{\partial s^k}\right) + f_{p-1}(t,s),$$

с неизвестной пока функцией псевдосостояния $x_{p-1}(t,s)$, с произвольной функцией $f_{p-1}(t,s) \in \operatorname{Ker} D_{p-1}$ и, с учетом расщепления

$$x_{p-1}(t,s) = x_p(t,s) + u_p(t,s), \tag{21}$$

к системе второго уровня p-го шага

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x^k_p(t,s)}{\partial s^k} + D_p\frac{\partial u^k_p(t,s)}{\partial s^k}, \tag{22}$$

с условиями

$$\frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \alpha_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \tag{23}$$

$$\frac{\partial^j x_p(t,s)}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \beta_{pj}(s), \quad j = 0, 1, \dots, p, \tag{24}$$

где коэффициенты и функции определяются по формулам (12), (15) –(20), с заменой индекса i на p.

Лемма 3. *При выполнении условий $\alpha(s) \in C^{p\cdot k}[0, S]$, $\beta(s) \in C^{p\cdot k}[0, S]$, в случае $n_0 > n_1 > \dots > n_{p-1} > 0$, система второго уровня первого шага* (8) *с условиями* (9), (10) *эквивалентна цепочке иерархически структурированных систем* (11)–(13), $i = 1, 2, \dots, p$, *с условиями* (23), (24).

В случае (i) $n_{p-1} = n_p$, т.е. $\dim \operatorname{Coker} D_{p-1} = \dim \operatorname{Coker} D_p$, что означает $D_p = (0)$, система (22) принимает вид

$$\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} = B_p\frac{\partial x^k_p(t,s)}{\partial s^k} \tag{25}$$

и является неуправляемой, так как функция псевдосостояния $x_p(t,s)$, найденная как решение дифференциального уравнения (25), в общем случае не будет удовлетворять всем условиям (23), (24). Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 4. *В случае $D_p = 0$ система* (22) *с условиями* (23), (24) *не является управляемой.*

Неуправляемость системы (22) с условиями (23), (24) влечет неуправляемость всех систем (13) с условиями (14) с $i = p-1, p-2, \dots, 2, 1$, что влечет и неуправляемость исходной системы (1).

Лемма 5. *В случае $D_p = (0)$ система* (1) *с условиями* (2) *не является управляемой.*

В случае (ii) $n_p = 0$, т.е. $\operatorname{Coker} D_p = 0$; таким образом, матрица D_p является сюръективной. Можно построить функцию $x_p(t,s)$, удовлетворяющую всем условиям (23), (24) в произвольной форме, например, в виде линейной комбинации линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$ с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$. Построение функции

$$x_p(t,s) = \sum_{i=1}^{2(p+1)} \varphi_{pi}(s)\cdot\psi_{pi}(t), \tag{26}$$

удовлетворяющей всем $2(p+1)$ условиям (23), (24), затем подстановка ее в выражение

$$F_p(t,s) = \frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} - B_p\frac{\partial x^k_p(t,s)}{\partial s^k}, \tag{27}$$

позволяют найти функцию $u_p(t,s)$, как решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u^k_p(t,s)}{\partial s^k} = D^-_p F_p(t,s) + f_p(t,s) \tag{28}$$

с произвольной функцией $f_p(t,s) \in \operatorname{Ker} D_p$, которая может быть взята нулевой.

Следовательно, доказано следующее утверждение.

Лемма 6. *В случае сюръективной матрицы D_p система* (22) *с условиями* (23), (24) *является полностью управляемой.*

Таким образом, прямой ход каскадной декомпозиции завершается выявлением свойства НУ или полностью управляемой системы (22). В случае сюрьективной матрицы D_p осуществляется переход ко второму этапу каскадной декомпозиции.

4. Центральный этап декомпозиции. Построение определяющей функции. Содержание центрального этапа декомпозиции составляет построение функции псевдосостояния $x_p(t,s)$ вида (26), который определяется выбором функций $\psi_{pi}(t)$. При этом функция $x_p(t,s)$ должна удовлетворять всем условиям (23), (24).

Определение 1. Минимальный набор линейно независимых функций $\psi_{pi}(t)$, выбранных для построения функции $x_p(t,s)$ вида (26), называется базисным набором

$$w(t) = \bigl(\psi_{p1}(t),\ \psi_{p2}(t),\ \dots,\ \psi_{pr}(t)\bigr). \tag{29}$$

Сами функции $\psi_{pi}(t)$, $i = 1,\dots,r$, называются базисными функциями. Число r, равное минимальному количеству базисных функций, определяется количеством условий (23), (24) и называется размерностью базисного набора: $r = \dim w(t) = 2(p+1)$.

В зависимости от вида функций $\alpha_{pj}(s)$, $\beta_{pj}(s)$ в условиях (23), (24), которые, в свою очередь, определяются видом функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ в условиях (2), или от пожеланий исследователя, возможен выбор базисных функций в виде степенных функций, в экспоненциальном виде, в виде дробно-линейных функций и т. д. Очевидно, форма функции $x_p(t,s)$ определяется видом базисного набора $w(t)$. Вид функции $x_p(t,s)$, в свою очередь, определяет вид функций состояния $x(t,s)$ и управления $u(t,s)$, т.е. определяет вид аналитического решения задачи управления для полностью управляемой системы (1) с условиями (2).

Определение 2. Построенная для выбранного базисного набора (29) функция $x_p(t,s)$ вида (26), удовлетворяющая всем условиям (23), (24), называется определяющей функцией.

4.1. Общая схема построения определяющей функции. Подстановка определяющей функции (26) в условия (23), (24) приводит к системе

$$\varphi_{pi}(s)\cdot\frac{\partial^j\psi_{pi}(t)}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \alpha_{pj}(s),\quad j = 0,1,\dots,p, \tag{30}$$

$$\varphi_{pi}(s)\cdot\frac{\partial^j\psi_{pi}(t)}{\partial t^j}\Big|_{t=T} = \beta_{pj}(s),\quad j = 0,1,\dots,p, \tag{31}$$

относительно векторных коэффициентов $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1,2,\dots,r$. Введем в рассмотрение определитель вида

$$W(t_1,t_2) = \det\begin{pmatrix} w(t_1), \\ w^{'}(t_1), \\ w^{''}(t_1), \\ \dots, \\ w^p(t_1), \\ w(t_2), \\ w^{'}(t_2), \\ w^{''}(t_2), \\ \dots, \\ w^p(t_p) \end{pmatrix} \tag{32}$$

где $w^j(t_i)$ — производные j-го порядка от компонент базисного набора $w(t)$, вычисленные в точках t_i, $j = 0,1,\dots,p$, $i = 1,2$. Определитель (32) размера $r\times r$, где $r = 2(p+1)$), состоит из двух блоков: первые $p+1$ строк — это первые $p+1$ строк вронскиана, составленного из функций базисного набора $w(t)$ в точке t_1; последние $p+1$ сторок — это первые $p+1$ строк вронскиана, составленного из функций базисного набора $w(t)$ со значениями в точке t_2.

Определение 3. Определитель $W(t_1, t_2)$ вида (32), построенный для базисного набора $w(t)$ вида (29), называется двухточечным псевдовронскианом.

Функции $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, образующие решение системы (30), (31) находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{W(0,T)} \cdot W_i(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{33}$$

где $W(0,T)$ — значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное для значений $t_1 = 0$, $t_2 = T$; $W_i(s, 0, T)$ — определитель полученный из $W(0,T)$, с заменой i-го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 1. *Для базисного набора $w(t)$ вида* (29) *существует определяющая функция $x_p(t,s)$ вида* (26) *тогда и только тогда, когда двухточечный вронскиан $W(t_1, t_2)$, определяемый выражением* (32) *удовлетворяет условию*

$$W(0,T) \neq 0. \tag{34}$$

При условии (34) *векторные коэффициенты определяющей функции $\varphi_{pi}(s)$, $i = 1, 2, \ldots, r$, находятся по формулам* (33).

Далее к рассмотрению предлагается построение определяющей функции в различных формах: полиномиальной, экспоненциальной, дробно-линейной. Верхние индексы pl, exp, dr в формулах будут соответствовать выбору базисных функций полиномиального, экспоненциального, дробно-рационального вида.

4.2. Построение определяющей функции в полиномиальном виде. В случае выбора базисных функций в форме

$$\psi_{pi}(t) = t^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

базисный набор имеет вид

$$w^{\mathrm{pl}}(t) = (1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^{r-1},\ t^{i-1}). \tag{35}$$

Разложение по формуле Тейлора функции $W(t,T)$ (в окрестности точки $t = T$) имеет вид

$$W^{\mathrm{pl}}(t_1, T) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} W^{\mathrm{pl}(j)}(t,T)\big|_{t=t_1} (T - t_1)^j \tag{36}$$

с $W^{\mathrm{pl}(j)}(t,T) = \dfrac{d^{(j)} W^{\mathrm{pl}}(t,T)}{dt^{(j)}}$, и при $t_1 = 0$ вычисляется по формуле

$$W^{\mathrm{pl}}(0,T) = (T^{(p+1)} \cdot \prod_{i=1}^{p} (i!))^2. \tag{37}$$

Векторные коэффициенты определяющей функции полиномиального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{\left(T^{(p+1)} \cdot \prod\limits_{i=1}^{p} (i!)\right)^2} \cdot W_i^{\mathrm{pl}}(s, 0, T), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{38}$$

где $W_i^{\mathrm{pl}}(s, 0, T)$ — определитель, полученный из выражения (36) для $W^{\mathrm{pl}}(0,T)$, заменой i-го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 2. *Для базисного набора* (35) *существует определяющая функция*

$$x_p(t,s) = x_p^{\mathrm{pl}}(t,s) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{pi}(s) \cdot t^{i-1},$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$ вида (38).

4.3. Построение определяющей функции в экспоненциальном виде. В случае выбора базисных функций

$$\psi_{pi}(t) = e^{(i-1)t}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

базисный набор имеет вид

$$w^{\exp}(t) = (1,\ e^{t},\ e^{2t},\ \ldots,\ e^{(r-2)t},\ e^{(r-1)t}) \tag{39}$$

и значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное при $t_1 = 0$, $t_2 = T$, определяется формулой

$$W^{\exp}(0,T) = \exp\left(T \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} k\right)\right) \cdot W^{\mathrm{pl}}(0,T), \tag{40}$$

где $W^{\mathrm{pl}}(0,T)$ вычисляется формулой (37). Векторные коэффициенты определяющей функции экспоненциального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \frac{1}{\exp\left(T \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{p} k\right)\right) \cdot \left(T^{(p+1)} \cdot \prod\limits_{i=1}^{p} (i!)\right)^2} \cdot W_i^{\exp}(s,0,T), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{41}$$

где $W_i^{\exp}(s,0,T)$ — определитель, полученный из $W^{\exp}(0,T)$ вида (40) заменой i-го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Теорема 3. *Для базисного набора экспоненциальных функций* (39) *существует определяющая функция экспоненциального вида*

$$x_p(t,s) = x_p^{\exp}(t,s) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{pi}(s) e^{(i-1)t}$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$, *определяемыми формулой* (41).

4.4. Построение определяющей функции в дробно-рациональном виде. Для базисных функций

$$\psi_{pi}(t) = \frac{1}{(t-t_0)^{(i-1)}}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

с $t_0 \in (0,T)$, базисный набор имеет вид

$$w^{\mathrm{dr}}(t) = \left(1,\ \frac{1}{(t-t_0)},\ \frac{1}{(t-t_0)^2},\ \ldots,\ \frac{1}{(t-t_0)^{(r-2)}}, \frac{1}{(t-t_0)^{(r-1)}}\right) \tag{42}$$

ddd и значение двухточечного псевдовронскиана, вычисленное при $t_1 = 0$, $t_2 = T$, определяется формулой

$$W^{\mathrm{dr}}(0,T) = \left(\frac{T^{(p+1)} \cdot \prod\limits_{i=1}^{p} (i!)}{\prod\limits_{i=2}^{p+2} (t_0(T-t_0))^{(i-1)}}\right)^2. \tag{43}$$

Векторные коэффициенты определяющей функции дробно-рационального вида находятся по формулам

$$\varphi_{pi}(s) = \left(\frac{\prod\limits_{i=2}^{p+2} \big(t_0(T-t_0)\big)^{(i-1)}}{T^{(p+1)} \cdot \prod\limits_{i=1}^{p} (i!)}\right)^2 \cdot W_i^{\mathrm{dr}}(s,0,T), \quad i = 1, 2, \ldots, r, \tag{44}$$

где $W_i^{\mathrm{dr}}(s,0,T)$ — определитель, полученный из $W^{\mathrm{dr}}(0,T)$ заменой i-го столбца на столбец правых частей системы (30), (31).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Для базисного набора* (42) *существует определяющая функция дробно-рационального вида*

$$x_p(t,s) = x_p^{\mathrm{dr}}(t,s) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_{pi}(s) \frac{1}{(t-t_0)^{(i-1)}},$$

с векторными коэффициентами $\varphi_{pi}(s)$, *определяемыми формулой* (44).

Построением определяющей функции завершается центральный этап декомпозиции. Далее реализуется этап восстановления функции состояния $x(t,s)$.

5. Обратный ход декомпозиции. Наличие определяющей функции $x_p(t,s)$ позволяет найти функцию $F_p(t,s)$ вида (27). Интегрирование k — раз правой части уравнения (28) с этой найденной функцией $F_p(t,s)$ приводит к выражению для $u_p(t,s)$ — функции псевдоуправления p-го шага

$$u_p(t,s) = D_p^- \int_0^s \int_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} F_p(t,\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \, \ldots \, d\tau_{k-2}\, d\tau_{k-1} + h_p(t,s)$$

с последним слагаемым вида

$$h_p(t,s) = \sum_{i=1}^{k} h_{pi}(t) \cdot s^{i-1}.$$

Функции $h_{pi}(t)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворялись условия

$$\frac{\partial^j h_{pi}(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=0} = (I - Q_{p-1})\alpha_{p-1j}(0), \quad j = 0,1,\ldots,p-1,$$
$$\frac{\partial^j h_{pi}(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=T} = (I - Q_{p-1})\beta_{p-1j}(0), \quad j = 0,1,\ldots,p-1.$$

Функция псевдосостояния $(p-1)$-го шага $x_{p-1}(t,s)$, с учетом выражений (21) и (26) восстанавливается в виде

$$x_{p-1}(t,s) = \sum_{i=1}^{2(p+1)} \varphi_{pi}(s) \cdot \psi_{pi}(t) + u_p(t,s). \tag{45}$$

Подстановка выражения (45) в формулу (27) с заменой индекса p на $p-1$, затем k-кратное интегрирование правой части уравнения (28) с заменой индекса p на $p-1$ с найденной функцией $F_{p-1}(t,s)$ приводит к следующему выражению для функции псевдоуправления $(p-1)$-го шага:

$$u_{p-1}(t,s) = D_{p-1}^- \int_0^s \int_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} F_{p-1}(t,\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \, \ldots \, d\tau_{k-2}\, d\tau_{k-1} + h_{p-1}(t,s),$$

с последним слагаемым вида

$$h_{p-1}(t,s) = \sum_{i=1}^{k} h_{p-1i}(t) \cdot s^{i-1}.$$

Функции $h_{p-1i}(t)$ подбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям

$$\frac{\partial^j h_{p-1i}(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=0} = (I - Q_{p-2})\alpha_{p-2j}(0), \quad j = 0,1,\ldots,p-2,$$
$$\frac{\partial^j h_{p-1i}(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=T} = (I - Q_{p-2})\beta_{p-2j}(0), \quad j = 0,1,\ldots,p-2.$$

Затем восстанавливается функция псевдосостояния $p-2$-го шага $x_{p-2}(t,s)$ и так далее.

Далее последовательно (с $i = p-1, p, \ldots, 1$) используется цепочка формул

$$\begin{gathered} x_i(t,s) = x_{i+1}(t,s) + u_{i+1}(t,s), \quad F_i(t,s) = \frac{\partial x_i(t,s)}{\partial t} - B_i \frac{\partial x_i^k(t,s)}{\partial s^k}, \\ u_i(t,s) = D_i^- \int\limits_0^s \int\limits_0^{\tau_{k-1}} \cdots \int\limits_0^{\tau_1} F_i(t,\tau)\, d\tau\, d\tau_1 \ldots d\tau_{k-2}\, d\tau_{k-1} + h_i(t,s), \end{gathered} \tag{46}$$

где функции $u_i(t,s)$ находятся из (11). Функции

$$h_i(t,s) = \sum_{l=1}^{k} h_{il}(t) \cdot s^{l-1}$$

подбираются таким образом, чтобы удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j h_i(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=0} &= (I - Q_{i-1})\alpha_{i-1j}(0), \quad j = 0, 1, \ldots, i-1, \\ \frac{\partial^j h_i(t)}{\partial s^j}\Big|_{t=T} &= (I - Q_{i-1})\beta_{i-1j}(0), \quad j = 0, 1, \ldots, i-1. \end{aligned}$$

Таким образом, за p шагов обратного хода восстанавливается функция состояния системы (1) в виде

$$x(t,s) = x_p(t,s) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t,s) \tag{47}$$

с функциями $x_p(t,s)$ и $u_i(t,s)$, построенными по формулам (46) и (26).

Завершающим этапом является построение функции управления системы (1), а именно, подстановка функции $x(t,s)$ вида (47) в правую часть равенства (6) приводит к следующему выражению для функции $u(t,s)$:

$$u(t,s) = D^- \left(\left(\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial u_i(t,s)}{\partial t} \right) - B \left(\frac{\partial x_p(t,s)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} F_i(t,s) \right) \right) + Pu(t,s). \tag{48}$$

с произвольным элементом $Pu(t,s) \in \operatorname{Ker} D$.

Теорема 5 (критерий полной управляемости системы (1))**.** *При выполнении условий $\alpha(s)$, $\beta(s) \in C^{k\cdot p}_{[0,S]}$ система* (1) *с условиями* (2) *является полностью управляемой тогда и только тогда, когда существует такое p, $0 \leqslant p \leqslant n$, что D_p — сюръективная матрица.*

6. Заключение. С применением метода каскадной декомпозиции решена задача программного управления для динамической системы (1). Выявлены свойств матричных коэффициентов B и D, влекущих полную управляемость системы (1). Выведен критерий полной управляемости системы (1).

Установлены свойств функций в условиях (2) а именно: условия $(k \cdot p)$-кратной дифференцируемости функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ достаточны для реализации управляемого процесса.

Выделена компонента функции состояния из подпространства минимальной размерности — определяющая функция $x_p(t,s) \in \operatorname{Coker} D_{p-1}$. Форма $x_p(t,s)$ определяет вид аналитического решения задачи программного управления, т.е. вид функций состояния $x(t,s)$ и управления $u(t,s)$.

Установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции $x_p(t,s)$ и разработана общая схема для ее построения.

Кроме того, установлены необходимые и достаточные условия существования определяющей функции в различных видах. Приведены формулы для построения определяющей функции в полиномиальном, экспоненциальном, дробно-рациональном видах.

В аналитическом виде построено решение задачи программного управления: рассчитана удовлетворяющая заданным условиям (2) функция состояния вида (47) с определяющей функцией $x_p(t,s)$ общего вида (26) и построена функция управления вида (48), под воздействием которого система (1) переводится из произвольного начального состояния в произвольное конечное состояние (см. (2)) за время $[0,T]$ для произвольного $T > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
3. *Зубова С. П.* Решение обратных задач для линейных динамических систем каскадным методом// Докл. РАН. — 2012. — *447*, № 6. — С. 599–602.
4. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2010. — *25*, № 6. — С. 1678–1679.
5. *Зубова С. П., Раецкая Е. В.* Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1400–1400.
6. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления. — М.: Изд-во АН СССР, 1960.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961.
9. *Раецкая Е. В.* Условная управляемость и наблюдамость линейных систем/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук — Воронеж, 2004.
10. *Раецкая Е. В.* Исследование сингулярно возмущенной системы управления// Вестн. Тамбов. ун-та. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — *23*, № 122. — С. 303–307.
11. *Раецкая Е. В.* Структурный анализ функции управления динамической системой в частных производных// Модел. сист. проц. — 2023. — *16*, № 1. — С. 93–104.
12. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980.
13. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Invariance of a nonstationary observability system under certain perturbations// J. Math. Sci. — 2013. — *188*, № 3. — P. 218–226.
14. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// J. Math. Sci. — 2015. — *208*, № 1. — P. 119–124.
15. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition// Automat. Remote Control. — 2017. — *78*, № 7. — P. 1189–1202.
16. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives// Math. Meth. Appl. Sci. — 2021. — *44*, № 15. — P. 11998–12009.
17. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* Construction of control providing the desired output of the linear dynamic system// Automat. Remote Control. — 2018. — *79*, № 5. — P. 774–791.
18. *Zubova S. P., Raetskaya E. V., Trung L. H.* Control problem for dynamical systems with partial derivatives// J. Math. Sci. — 2021. — *249*, № 6. — P. 941–953.
19. *Zubova S. P., Trung L. H., Raetskaya E. V.* On polinomial solutions of the linear stationary control system// Automat. Remote Control. — 2008. — *69*, № 11. — P. 1852–1858.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Раецкая Елена Владимировна (Raetskaya Elena Vladimirovna)
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
(Voronezh State University of Forestry and Technologies
named after G. F. Morozov, Voronezh, Russia)
E-mail: `raetskaya@inbox.ru`