



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 99–121
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-99-121

УДК 517.958, 517.956.32,

ОБОБЩЁННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ПОТЕНЦИАЛОМ ОБЩЕГО ВИДА

© 2024 г. В. С. РЫХЛОВ

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача в полуполосе для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с ненулевым потенциалом. Рассматриваемое уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматриваются общие начальные условия (ненулевой профиль струны и ненулевая начальная скорость точек струны) и закреплённые концы (условия Дирихле). Сформулированы теоремы о существовании и единственности решения и получены формулы для решения.

Ключевые слова: уравнение с частными производными, ненулевой потенциал, волновое уравнение, гиперболическое уравнение, смешанная производная, обобщённое решение.

GENERALIZED SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE WAVE EQUATION WITH A MIXED DERIVATIVE AND A GENERAL POTENTIAL

© 2024 V. S. RYKHLOV

ABSTRACT. We study the initial-boundary-value problem in a half-strip for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation with constant coefficients and a nonzero potential containing a mixed derivative. The equation considered is the equation of transverse vibrations of a moving finite string. The problems with general initial conditions (nonzero string profile and nonzero initial velocity of string points) and fixed ends (Dirichlet conditions) are examined. Theorems on the existence and uniqueness of a solution are formulated and formulas for the solution are obtained.

Keywords and phrases: partial differential equation, nonzero potential, wave equation, hyperbolic equation, mixed derivative, generalized solution.

AMS Subject Classification: 35L20

1. Постановка задачи, история вопроса, определения и вспомогательные результаты. Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, все функции, входящие в (1.1)–(1.3), комплекснозначные.

Рассматривается случай волнового или гиперболического уравнения (1.1), т.е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т.е. на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад (см. [50–52]).

Излагаемые в данной статье результаты получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [38, 39]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [1, 2, 4–7, 9, 28–35, 40–48]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [49] о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

В зависимости от того, как будет пониматься решение задачи (1.1)–(1.3), накладываются различные требования на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$.

Далее будем говорить, что функция $f(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, если $f(x, t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$, и будем кратко писать $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Определение 1.1. Классическим решением задачи (1.1)–(1.3) называется функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая

- (а) непрерывна вместе с частными производными $\partial u(x, t)/\partial x$ и $\partial u(x, t)/\partial t$, при этом $\partial u(x, t)/\partial x$ и $\partial u(x, t)/\partial t$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x}; \quad (1.4)$$

- (б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (1.4) обусловлена тем, что в случае, когда $\partial^2 u(x, t)/\partial x \partial t$ и $\partial^2 u(x, t)/\partial t \partial x$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры (см. [36]).

Определение 1.2. Задачу (1.1)–(1.3), в которой ищется классическое решение, будем называть *классической начально-граничной задачей*.

Для классической задачи (1.1)–(1.3) по необходимости должны выполняться следующие условия (условия (N)):

- (N_1) гладкость: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны, функция $f(x, t)$ класса $\mathcal{Q}$;
- (N_2) согласование: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Если условия (N) не выполняются, то речь о классическом решении уже не может идти. Возникает вопрос, как понимать эту задачу и ее решение.

Определение 1.3. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, а $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, будем называть обобщённой начально-граничной задачей.

Определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3) будет дано далее в разделе 2.

Обобщённая начально-граничная задача (1.1)–(1.3) является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи. Внешний вид ее такой же, как и у классической задачи, но смысл совсем другой. В случае, когда $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально, так как ни о каком удовлетворении решения уравнению (1.1), граничным условиям (1.2) и начальным условиям (1.3) речь уже не может идти.

С задачей (1.1)–(1.3) тесно связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \quad (1.5)$$

порожденная оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой следующим дифференциальным выражением с параметром λ :

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \quad (1.6)$$

и краевыми условиями типа Дирихле:

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \quad (1.7)$$

Пусть R_λ — резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda \omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ (см. [23]) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda \omega_1} & e^{\lambda \omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda \omega_2} - e^{\lambda \omega_1}; \quad (1.8)$$

его корни, очевидно, равны

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.9)$$

и $\lambda_0 = 0$. Эти числа, кроме точки λ_0 , являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число λ_0 , как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (1.10)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (1.11)$$

В случае (1.10) соответствующая спектральная задача (1.5) является регулярной по Биркгофу (см. [23, с. 66–67]), а в случае (1.11) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.10). Нерегулярный случай рассмотрен, в частности, в [25, 26].

2. Определение обобщённого решения и формула для него. Для того, чтобы дать определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), сформулируем теорему о единственности классического решения и представлении решения в виде ряда (см. [27]).

Теорема 2.1. Если $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1.1)–(1.3), выполняются условия (N), (1.10) и дополнительное условие: $u_{tt}(x, t) \in \mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (2.1)$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Так как ряд справа в формуле (2.1) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, 1]$, то этот ряд равен сумме рядов, соответствующих каждому слагаемому суммы, стоящей во внутренних круглых скобках. Ряды в формуле (2.1), соответствующие первому и второму слагаемым, обозначим $u_{11}(x, t)$ и $u_{12}(x, t)$ соответственно. Пусть $u_1(x, t) = u_{11}(x, t) + u_{12}(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\psi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд, соответствующий третьему слагаемому во внутренних скобках формулы (2.1), обозначим $u_2(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $f(x, t) \equiv 0$. Ряд в формуле (2.1), соответствующий четвертому слагаемому, обозначим $u_3(x, t)$. Этот ряд соответствует задаче (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Следовательно, классическое решение $u(x, t)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t). \quad (2.2)$$

Из теоремы 2.1 следует, что задача (1.1)–(1.3) и ряд справа в (2.1) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (2.1). При этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны удовлетворять условиям (N). Следуя методу, используемому в [38, 39], расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (2.1) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$, хотя теперь он может и не быть сходящимся, т.е., вообще говоря, расходящимся. Будем считать, что он является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), но понимаемой теперь чисто формально. Эта задача (1.1)–(1.3) в случае $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, в определении 1.3 была названа обобщенной начально-граничной задачей. Введём понятие обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3).

Определение 2.1. В случае $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ будем называть ряд справа в (2.1) обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3).

Найти обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) — значит найти «сумму» ряда справа в (2.1) (слово «сумма» в кавычках означает, что это сумма понимается именно как сумма расходящегося ряда).

Трактуя ряд справа в формуле (2.1) изначально как расходящийся и соответствующим образом определяя (или, другими словами, назначая) «сумму» этого ряда можно, как и в [38, 39], значительно сократить выкладки при получении конечных формул для обобщенного решения и при этом не накладывать никаких дополнительных ограничений на $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x, t)$, предполагая лишь, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Понятия, касающиеся расходящихся рядов, а именно, как понимать их суммы (можно их определять по-разному), каким естественным свойствам эти суммы должны удовлетворять, чтобы с их помощью можно было получать «правильные» результаты, как использовать расходящиеся ряды в математике и приложениях, а также другие связанные с этим явлением понятия активно обсуждали еще во времена Эйлера (см. [49]), который является основоположником теории суммирования таких рядов. Сведения об этом можно найти в [37].

Для получения конечных формул для обобщённого решения важнейшую роль играют введенные в [37, с. 19] естественные аксиомы для преобразования расходящихся рядов:

- (A) $\sum a_n = s \implies \sum k a_n = k s$;
- (B) $\sum a_n = s, \sum b_n = t \implies \sum (a_n + b_n) = s + t$;
- (C) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$.

В [33] показано, что с использованием этих аксиом ряд справа в (2.1) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где} \quad a_k = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi, \quad (2.3)$$

а функция $f(x) \in L_1[0, 1]$ выражается по простым формулам через функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x, t)$ и суммируема в том и только в том случае, когда суммируемы функция $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщённого решения, необходимо определить «сумму» ряда (2.3). Наиважнейшую роль в этом играет [24, теорема 3] об интегрировании тригонометрического ряда. Эта теорема потребуется далее в следующей формулировке.

Теорема 2.2. Пусть на промежутке $[0, 1]$ задана суммируемая функция $f(x)$, имеющая ряд (2.3) своим рядом Фурье. Если $[A, B] \subset [0, 1]$, то

$$\int_A^B f(x) dx = \sum_k \int_A^B a_k e^{2k\pi i x} dx.$$

После формулировки этой теоремы в [24, с. 277] отмечено: «Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно почленно интегрировать. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться».

По сути эта теорема разрешает для тригонометрического ряда переставлять суммирование и интегрирование, даже если ряд расходится. Ввиду этого, в [38, 39] было предложено дополнить сформулированные выше три аксиомы для расходящихся рядов ещё одной аксиомой:

(D) $\int \sum = \sum \int$, где $\int$ — определенный интеграл.

Используя теорему 2.2 (или иначе аксиому (D)), можно определить «сумму» расходящегося ряда (2.3). Справедливо следующее простое утверждение, полученное в [38, 39].

Теорема 2.3. Если (2.3) — ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ и его сумма есть функция $g(x) \in L_1[0, 1]$, то п.в. на $[0, 1]$ $g(x) = f(x)$.

Как указано в [37, с. 6-7], расходящиеся ряды не имеют суммы в обычном смысле (по Коши, как предела его частичных сумм), однако можно дать новое определение «суммы» ряда (иными словами, назначить «сумму»), применимое как ко всем сходящимся рядам, так и к некоторым расходящимся рядам. При этом от определения нужно требовать, чтобы для сходящихся рядов новая «сумма» совпадала с обычной (по Коши), т.е. определение «суммы» должно быть *регулярным*.

Из теоремы 2.3 следует, что функцию $f(x)$ можно назначить «суммой» ряда (2.3), которая очевидно является регулярной. Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение 2.2. Если (2.3) — ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$, то эту функцию будем называть «суммой» ряда (2.3).

Это вполне согласуется с идеей Л. Эйлера (см. [49, с. 101]), что «сумма» некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого вытекает этот ряд.

На основании аксиом (A), (B) получаем, что для обобщённого решения (2.1) справедливо представление (2.2). Более того, для каждого ряда в сумме справа в (2.2) можно найти его «сумму» и, тем самым, получить конечную формулу для обобщённого решения (2.1).

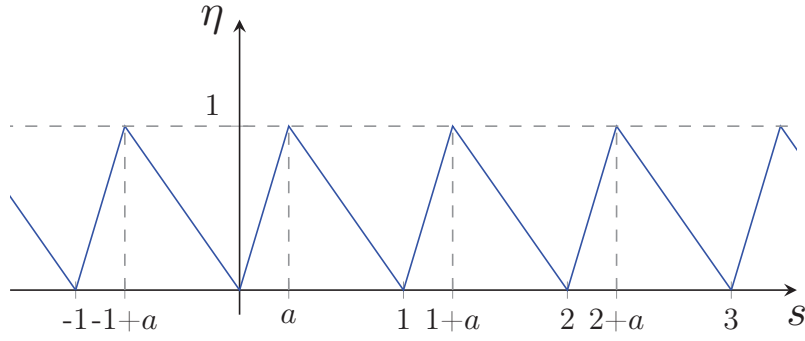
Приведем конечную формулу для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), полученную в [33, 34], которая потребуется в дальнейшем изложении. Чтобы сформулировать этот результат, введем необходимые обозначения:

$$\Psi(x) := \int_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad F(x, t) := \int_0^x f(\xi, t) d\xi, \quad (2.4)$$

$$a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \alpha \equiv \alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta \equiv \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1},$$

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \omega_1 \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} \quad \widetilde{\Psi}(\xi) := \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} \quad (2.5)$$

$$v(x, t) := \zeta(\{\alpha(x, t)\}) - \zeta(\{\beta(x, t)\}), \quad \zeta(x) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\widehat{\varphi}(x) - \omega_1 \omega_2 \widetilde{\Psi}(x) \right); \quad (2.6)$$

Рис. 1. Функция $\eta(s)$.

здесь $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$.

Теперь можно сформулировать теорему о конечной формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3). Формула для решения дана в удобном для дальнейшего применения виде.

Теорема 2.4. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $f(x, t) \in \mathcal{Q}$ и пусть выполняется условие (1.10). Тогда для обобщённого решения $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) имеет место следующая формула для п.в. $(x, t) \in Q$:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (2.7)$$

где

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a} \chi(a - \{s\}) + \frac{1 - \{s\}}{1 - a} \chi(\{s\} - a) \quad (2.8)$$

является непрерывной кусочно линейной функцией при $s \in (-\infty, +\infty)$ (см. рис. 1) и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \eta(s) \leq 1. \quad (2.9)$$

3. Обобщённые решения в случае ненулевого потенциала. В данном разделе будут рассмотрены две начально-граничные задачи с потенциалом q . Первая задача с потенциалом $q = q(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x)u(x, t), \quad (3.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; функции, входящие в (3.1)–(3.3), комплекснозначные, $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, а вторая задача с потенциалом $q = q(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t)u(x, t), \quad (3.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (3.5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (3.6)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; функции, входящие в (3.4)–(3.6), комплекснозначные, $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Как понимается обобщённое решение задач (3.1)–(3.3) и (3.4)–(3.6), будет пояснено далее.

3.1. Обобщённое решение в случае потенциала $q(x)$. В этом разделе будем рассматривать начально-граничную задачу (3.1)–(3.3). Применим к решению задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x)$ в [5, 38, 39] (в случае $p_1 = 0$), и обобщённый затем в [31, 33] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [5, 31, 33, 38, 39], будем считать правую часть $q(x)u(x, t)$ в уравнении (3.1) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.4 от задачи (3.1)–(3.3) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.7)$$

Отметим, что такой подход к построению обобщённого решения задачи (3.1)–(3.3) при наших предположениях относительно исходных данных задачи, состоящий в сведении задачи (3.1)–(3.3) к интегральному уравнению типа (3.7) и затем решения этого уравнения методом последовательных подстановок, был впервые использован в [5].

Таким образом, задача (3.1)–(3.3) и интегральное уравнение (3.7) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (3.7) функции $v(x, t)$ и $q(x)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x, t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0, 1]$, и функция $q(x)$ также может быть самого общего вида, т.е. $q(x) \in L_1[0, 1]$, но при условии, что произведение $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение.

Определение 3.1. Будем называть решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (3.7), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0, 1]$, но при этом $q(x)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (3.1)–(3.3), а саму задачу (3.1)–(3.3) — *обобщённой начально-граничной задачей*.

Решим уравнение (3.7). Для этого введем оператор

$$(\mathcal{B}f)(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.8)$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{B}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно оператор $\mathcal{B}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ будем обозначать B . С использованием этого оператора уравнение (3.7) кратко можно записать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + (Bu)(x, t). \quad (3.9)$$

Лемма 3.1. *Оператор B является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки*

$$|(B^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0, 1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!} \quad \forall (x, t) \in Q_T; \quad (3.10)$$

$$\|(B^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q(x)\|_{L_1[0, 1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}, \quad (3.11)$$

где $\omega_* = \min\{|\omega_1|, \omega_2\}$.

Доказательство. Линейность оператора B очевидна. Далее, если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора $\mathcal{B}$ и его сужения на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Bf)(x, t)$ также непрерывна.

Неравенства (3.11) являются прямым следствием неравенств (3.10). Поэтому, достаточно установить лишь неравенства (3.10). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора B будем иметь

$$|(Bf)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$ и определение ω_* , далее получим при $(x, t) \in Q_T$

$$|(Bf)(x, t)| \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{1!}.$$

Это и есть оценка (3.10) при $n = 1$, из которой непосредственно вытекает оценка (3.11) при $n = 1$, а это означает, что оператор B является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.10) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(B^{n+1}f)(x, t)| &= |B(B^n f)(x, t)| = \\ &= \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) (B^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |(B^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \int_0^t \frac{\tau^n}{n!} d\tau \int_0^1 |q(\xi)| d\xi = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.10) в случае $n + 1$. Тем самым, оценка (3.10), а следовательно, и оценка (3.11), установлены для всех $n \geq 1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.2. Если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, то и $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$ и выполняется оценка

$$\|\zeta(x)\|_{L_1[0,1]} \leq C_T \left(\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]} \right), \quad (3.12)$$

где постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. На основании формулы (2.6) имеет место оценка

$$\|\zeta(x)\| \leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\|\widehat{\varphi}(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\widetilde{\Psi}(x)\|_{L_1[0,1]} \right). \quad (3.13)$$

Далее, из определений (2.5) функции $\widehat{\varphi}(x)$ и функции $\widetilde{\Psi}(x)$ получаем соотношения

$$\|\widehat{\varphi}(x)\|_{L_1[0,1]} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_2 - \omega_1} \|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]}, \quad \|\widetilde{\Psi}(x)\|_{L_1[0,1]} = \|\Psi(x)\|_{L_1[0,1]} \leq \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.14)$$

Из (3.13)–(3.14) тогда следует утверждение леммы (3.13). Тем самым лемма 3.2 установлена. $\square$

Введем теперь пока чисто формально функцию

$$w(x, t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) v(\xi, \tau) d\xi (= (Bv)(x, t)). \quad (3.15)$$

Ввиду специальной структуры этой функции справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3. Если $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$, то $w(x, t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$ и выполняется оценка

$$\|w(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0, 1]} \left(\|\varphi(x)\|_{L_1[0, 1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0, 1]} \right), \quad (3.16)$$

где постоянная C_T не зависит от $q(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Из леммы 3.2 в случае, если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, следует, что $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$. Далее, с учетом формулы (2.6) для $v(x, t)$ можно получить следующее представление для $w(x)$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &:= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) \left(\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) - \zeta(\{\beta(\xi, \tau)\}) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} (K_1(x, t) - K_2(x, t)). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Проведем дальнейшие рассуждения только для $K_1(x, t)$, так как для $K_2(x, t)$ рассуждения аналогичны. Итак, докажем непрерывность функции

$$K_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) d\xi \quad (3.18)$$

в области Q_T . Так как $\eta(s)$ — непрерывная функция (теорема 2.4), а $\alpha(x, t - \tau)$ и $\beta(x, t - \tau)$ — линейные функции своих аргументов, то область интегрирования $Q(x, t)$ в интеграле (3.18) является измеримым множеством при всех $(x, t) \in Q_T$ и ее мера Лебега есть непрерывная функция по x и t . Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]), чтобы доказать непрерывность функции $K_1(x, t)$, достаточно установить суммируемость функции $q(\xi) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T .

Лемма 3.4. Функция $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ есть измеримая функция в Q_T .

Доказательство. Обозначим $\check{\zeta}(s) := \zeta(\{s\})$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) \equiv \check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau)).$$

Так как $(\xi, \tau) \in Q_T$, то

$$0 \leq \alpha(\xi, \tau) \leq \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \leq \frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} =: b_T.$$

Поскольку из определения (2.6) видно, что $\zeta(s)$ — измеримая функция на $[0, 1]$ (ввиду измеримости функций $\hat{\varphi}(x)$ и $\tilde{\Psi}(x)$), то и функция $\check{\zeta}(s)$ также будет измеримой функцией на любом конечном отрезке, в частности на $[0, b_T]$. Это следует из того, что $\check{\zeta}(s)$ есть 1-периодическая функция на всей вещественной оси и на каждом промежутке $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, совпадает с измеримой функцией $\zeta(s - k)$. Следовательно, по определению измеримой по Лебегу функции измеримыми будут линейные (или, что то же самое, одномерные) множества

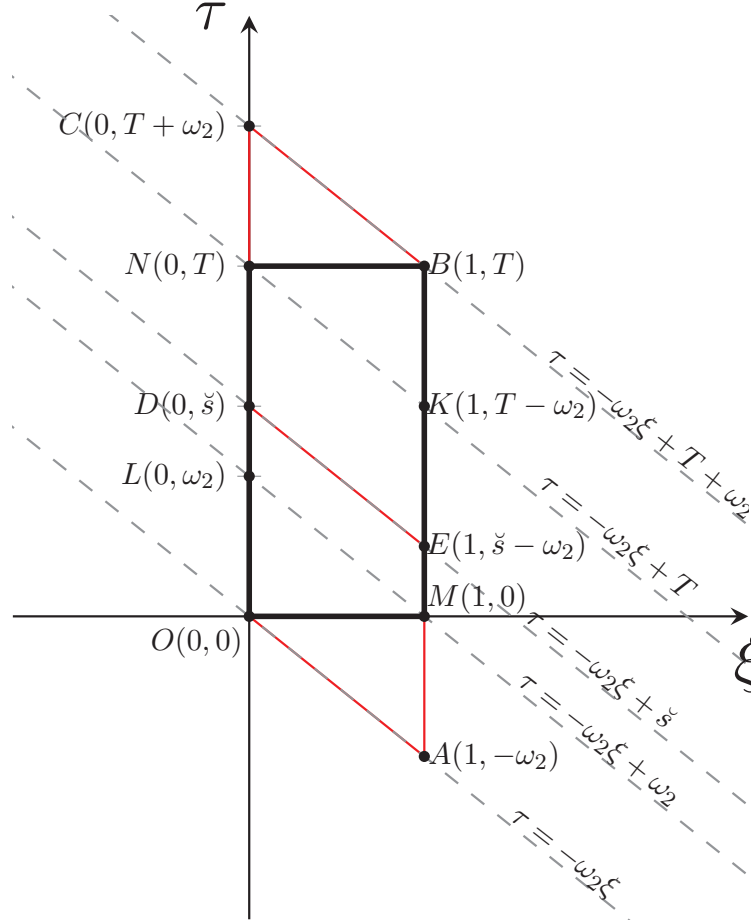
$$Y_{Tc} := \{s \in [0, b_T] \mid \check{\zeta}(s) < c\} \quad (3.19)$$

при любом $c > 0$. Зафиксируем T и c и для краткости обозначим $Y := Y_{Tc}$. Таким образом, для доказательства измеримости по Лебегу в Q_T функции двух переменных $\check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau))$ нужно доказать измеримость по Лебегу плоского (или, что то же самое, двумерного) множества

$$\mathcal{Y} := \mathcal{Y}_{Tc} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) < c \right\}.$$

С учетом (3.19) это множество можно представить в виде

$$\mathcal{Y} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} = s, s \in Y \right\} = \left\{ (\xi, \tau) \in Q_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in \check{Y} := (\omega_2 - \omega_1)Y \right\}.$$

Рис. 2. Множества Q_T и $\check{Q}_T$.

Ясно, что множество $\check{Y} \subset [0, T + \omega_2]$ есть измеримое линейное множество, так как измеримо множество Y .

Докажем прежде измеримость не множества $\mathcal{Y}$, а множества

$$\check{Y} = \{(\xi, \tau) \in \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in \check{Y}\},$$

где множество $\check{Q}_T$ — параллелограмм $OABC$ на рис. 2. На этом же рисунке изображено множество Q_T — прямоугольник $OMBN$.

По определению измеримого по Лебегу линейного множества (см. [24, с. 68]) и определения внутренней меры μ_{1*} , внешней меры μ_1^* и просто линейной меры Лебега μ_1 (см. [24, с. 65]) справедливы соотношения

$$\sup_{F \subset \check{Y}} \mu_1 F = \mu_{1*} \check{Y} = \mu_1 \check{Y} = \mu_1^* \check{Y} = \inf_{G \supset \check{Y}} \mu_1 G, \quad (3.20)$$

где $\inf$ берется по всевозможным замкнутым ограниченным множествам F , а $\inf$ — по всевозможным открытым ограниченным множествам G . Следовательно, существуют такие последовательность замкнутых множеств

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \subset \check{Y}$$

и последовательность открытых множеств

$$G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots \supset \check{Y}$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 F_n = \mu_1 \check{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 G_n. \quad (3.21)$$

Введем множества

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \{(\xi, \tau) \in \text{cl } \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in F_n\}, \\ \mathcal{G}_n &= \{(\xi, \tau) \in \text{int } \check{Q}_T \mid \tau + \omega_2 \xi = \check{s}, \check{s} \in G_n\}, \end{aligned}$$

которые являются соответственно замкнутыми и открытыми и для которых справедливы вложения

$$\check{\mathcal{F}}_1 \subset \check{\mathcal{F}}_2 \subset \dots \subset \check{\mathcal{F}}_n \subset \dots \subset \check{\mathcal{Y}}, \quad \check{\mathcal{G}}_1 \supset \check{\mathcal{G}}_2 \supset \dots \supset \check{\mathcal{G}}_n \supset \dots \supset \check{\mathcal{Y}}.$$

Ясно (см. рис. 2), что наряду с точкой $\check{s} \in \check{Y} \subset [0, T + \omega_2]$ плоскому множеству $\check{\mathcal{Y}}$ принадлежит и весь отрезок DE прямой $\tau = -\omega_2 \xi + \check{s}$, для точек которого $(\xi, \tau) \in \check{Q}_T$. Аналогично обстоит дело и для плоских множеств $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{G}_n$, определяемых линейными множествами F_n и G_n соответственно.

Учитывая формулу для подсчета площади параллелограмма и тот факт, что по построению замкнутые множества $\mathcal{F}_n$ и открытые множества $\mathcal{G}_n$ суть объединения некоторого количества замкнутых и открытых параллелограммов, имеющих единичные высоты, получим

$$\mu_2 \mathcal{F}_n = \mu_1 F_n \cdot 1 = \mu_1 F_n, \quad \mu_2 \mathcal{G}_n = \mu_1 G_n \cdot 1 = \mu_1 G_n,$$

где μ_2 обозначает плоскую меру Лебега. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{F}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 F_n = \mu_1 \check{Y}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{G}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1 G_n = \mu_1 \check{Y}.$$

Но тогда

$$\mu_1 \check{Y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \mathcal{F}_n \leq \sup_{\mathcal{F} \subset \check{\mathcal{Y}}} \mu_2 \mathcal{F} = \mu_2^* \check{\mathcal{Y}} \leq \mu_2^* \check{\mathcal{Y}} = \inf_{\mathcal{G} \supset \check{\mathcal{Y}}} \mu_2 \mathcal{G} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2 \check{\mathcal{G}}_n = \mu_1 \check{Y};$$

следовательно, $\check{\mathcal{Y}}$ есть измеримое по Лебегу плоское множество.

Измеримость множества $\mathcal{Y}$ является следствием того, что $\mathcal{Y} = \check{\mathcal{Y}} \cap Q_T$, т.е. является пересечением измеримых множеств (см. [3, с. 257]). Итак, измеримость функции $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T установлена и лемма 3.4 доказана. $\square$

Если $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ измерима в Q_T , то произведение $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ — также измеримая функция в Q_T как произведение измеримых функций (см. [3, с. 283]).

Справедливы неравенства

$$|K_1(x, t)| \leq \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \right| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi =: K'_{1T}. \quad (3.22)$$

Далее, имеют место равенства

$$\begin{aligned} K''_{1T} &:= \int_0^1 d\xi \int_0^T |q(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \\ &= \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^T |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^T \left| \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Делая в интеграле по τ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\tau = (\omega_2 - \omega_1) ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$,

$$\begin{aligned}
K_{1T}'' &= (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_{\frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\
&\leq 2\omega^* \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq 2\omega^* \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \\
&= 2\omega^* \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \int_0^1 |\check{\zeta}(s)| ds \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} \|\check{\zeta}(x)\|_{L_1[0,1]}, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

где $\omega^* := \max\{|\omega_1|, \omega_2\}$, а $[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$. Используя полученную в лемме 3.2 оценку (3.12), будем иметь

$$K_{1T}'' \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.24)$$

Отсюда на основании теоремы Фубини (см. [24, теорема 2, с. 235]) следует суммируемость функции $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T и справедливость равенства $K_{1T}' = K_{1T}''$. С учетом (3.22) и (3.24), получим

$$|K_1(x, t)| \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.25)$$

Следовательно, функция $q(\xi)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ суммируема в Q_T , а из этого следует непрерывность функции $K_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]). Аналогичными рассуждениями устанавливается непрерывность функции $K_2(x, t)$ и аналогичная (3.25) оценка

$$|K_2(x, t)| \leq C_T \|q(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.26)$$

Следовательно, на основании представления (3.17) отсюда получаем непрерывность функции $w(x, t)$ в любом Q_T .

Из оценок (3.25)–(3.26) на основании формулы (3.17) вытекает оценка (3.16). Лемма 3.3 полностью доказана. $\square$

Так как $w(x, t) \in C(Q_T)$ по лемме 3.3, то можно образовать ряд

$$W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n w)(x, t). \quad (3.27)$$

Определение 3.2. Будем говорить, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится не медленнее γ -экспоненциального ряда ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \leq C^n / (n!)^\gamma$. 1-экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Теорема 3.1. Если $\varphi(x), \psi(x), q(x) \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (1.10), то ряд (3.27) сходится абсолютно и равномерно в пространстве $C(Q_T)$ к непрерывной функции $W(x, t)$, при этом сходимость ряда не медленнее экспоненциального, и функция

$$u(x, t) = v(x, t) + W(x, t) \quad (3.28)$$

является единственным обобщённым решением задачи (3.1)–(3.3).

Доказательство. В доказательстве используются основные идеи доказательства аналогичного результата (см. [39, теорема 5]). Из оценок (3.11) следует, что ряд (3.27) с непрерывными членами абсолютно и равномерно сходится в Q_T , причем сходимость ряда не медленнее экспоненциального. Следовательно, $W(x, t)$ есть непрерывная функция в Q_T .

Рассмотрим функцию (3.28). Учитывая определение (3.27) функции $W(x, t)$, определение (3.15) функции $w(x, t)$, линейность операторов $\mathcal{B}$ и B , а также ограниченность B на основании леммы 3.1, получим

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = v + w + \sum_{n=1}^{\infty} B^n w = v + \mathcal{B}v + B \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = \\ &= v + \mathcal{B}v + \mathcal{B} \sum_{n=0}^{\infty} B^n w = v + \mathcal{B} \left(v + \sum_{n=0}^{\infty} B^n w \right) = v + \mathcal{B}(v + W) = v + \mathcal{B}u, \end{aligned}$$

т.е. функция $u(x, t)$ вида (3.28) является решением уравнения (3.9).

Уравнение (3.9) нельзя рассматривать в пространстве $C(Q_T)$, так как $v(x, t)$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией. Удобнее перейти к эквивалентному уравнению, действующему в $C(Q_T)$.

Лемма 3.5. *Функция $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (3.9) в том и только том случае, когда функция $r(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$ является решением интегрального уравнения*

$$r(x, t) := w(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t). \quad (3.29)$$

Доказательство. Докажем необходимость утверждения леммы. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (3.9). Положим $r(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$. Тогда справедливо представление

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x, t). \quad (3.30)$$

С учетом (3.30) уравнение (3.9) можно записать в виде

$$r(x, t) := (\mathcal{B}(v + r))(x, t),$$

а учитывая (3.15), отсюда получим, что $r(x, t)$ является решением уравнения (3.29).

Докажем теперь достаточность утверждения леммы. Пусть $r(x, t)$ — решение уравнения (3.29). Прибавим к обеим частям этого уравнения функцию $v(x, t)$ и, учитывая (3.30), в результате получим

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t),$$

или

$$u(x, t) = v(x, t) + (\mathcal{B}v)(x, t) + (\mathcal{B}r)(x, t),$$

В силу линейности оператора $\mathcal{B}$ отсюда найдем

$$u(x, t) = v(x, t) + (\mathcal{B}(v + r))(x, t).$$

Учитывая теперь представление (3.30), получим, что функция $u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$ является решением уравнения (3.9). Таким образом, лемма (3.5) доказана. $\square$

Так как $w(x, t) \in C(Q_T)$ в силу леммы (3.3), то рассматриваем уравнение (3.29) в пространстве $C(Q_T)$. Иными словами, $r(x, t)$ является решением уравнения

$$r(x, t) := w(x, t) + (Br)(x, t). \quad (3.31)$$

Это уравнение имеет решение $W(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n w$. В самом деле, поскольку B есть линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$, то

$$(BW)(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^n w)(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $W(x, t)$ является решением уравнения (3.31).

Покажем, что решение уравнения (3.31) единственно. Допустим, что кроме $W(x, t)$ есть еще другое решение $\check{W}(x, t)$ этого уравнения. Тогда $z(x, t) := W(x, t) - \check{W}(x, t)$ — решение уравнения

$z(x, t) = (Bz)(x, t)$, а, значит, $z(x, t) = (B^n z)(x, t)$ при любом натуральном n . Тогда из (3.11) следует оценка

$$\|z(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n z)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|z(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T\|q(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получим $\|z(x, t)\|_{C(Q_T)} = 0$ или $W(x, t) \equiv \check{W}(x, t)$, т.е. единственным решением уравнения (3.31) является функция $W(x, t)$. Учитывая лемму 3.5, получаем, что уравнение (3.9) имеет единственное решение (3.28). Теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

3.2. Обобщённое решение в случае потенциала $q(x, t)$. В этом разделе будем рассматривать начально-граничную задачу (3.4)–(3.6). Применим к решению этой задачи подход, предложенный в [7] для потенциала $q = q(x, t)$ (в случае $p_1 = 0$). Излагаемый далее результат анонсирован в [35]. Так же, как и в [7], будем считать правую часть $q(x, t)u(x, t)$ в уравнении (3.4) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.4 от задачи (3.4)–(3.6) приходим к интегральному уравнению

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi. \quad (3.32)$$

Таким образом, задача (3.4)–(3.6) и интегральное уравнение (3.32) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (3.32) функции $v(x, t)$ и $q(x, t)$ могут быть самого общего вида, а именно, $v(x, t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях относительно $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0, 1]$, и функция $q(x, t)$ также может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, но при условии, что произведение $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$. Естественнее дать следующее определение по аналогии с определением 3.1.

Определение 3.3. Будем называть решение $u(x, t)$ интегрального уравнения (3.32), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$, но при этом $q(x, t)u(x, t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (3.4)–(3.6), а саму задачу (3.4)–(3.6) — *обобщённой начально-граничной задачей*.

Решим уравнение (3.32). Для этого введем оператор

$$(\mathcal{D}f)(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.33)$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$. Очевидно, оператор $\mathcal{D}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ будем обозначать D . С использованием этого оператора уравнение (3.32) кратко можно записать в виде

$$u(x, t) = v(x, t) + (\mathcal{D}u)(x, t). \quad (3.34)$$

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x, t)$ для п.в. $(x, t) \in Q_T$ при любом фиксированном $T > 0$:

$$(i) \quad |q(x, t)| \leq q_T(x) \in L_1[0, 1]; \quad (ii) \quad |q(x, t)| \leq \check{q}(t) \in L_p[0, T], \quad p > 1. \quad (3.35)$$

Лемма 3.6. В случае выполнения условия (i) оператор D является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки

$$|(D^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t\|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!} \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad (3.36)$$

$$\|(D^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T\|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!}. \quad (3.37)$$

Доказательство. Линейность оператора D очевидна. Далее, если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора $\mathcal{D}$ и его сужения D на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Df)(x, t)$ также непрерывна. Неравенства (3.37) являются прямым следствием неравенств (3.36). Поэтому достаточно установить лишь неравенства (3.36). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора D будем иметь

$$|(Df)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$, предположение (i) в (3.35) для $q(x, t)$ и определение ω_* , получим при $(x, t) \in Q_T$

$$\begin{aligned} |(Df)(x, t)| &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 q_T(\xi) d\xi \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{1!}. \end{aligned}$$

Это и есть оценка (3.36) при $n = 1$. Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (3.37) при $n = 1$, а это означает, что оператор D является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.36) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(D^{n+1}f)(x, t)| &= |D(D^n f)(x, t)| = \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) (D^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 q_T(\xi) |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \int_0^t \frac{\tau^n}{n!} d\tau \int_0^1 q_T(\xi) d\xi = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.36) в случае $n + 1$. Тем самым оценка (3.36) установлена для всех $n \geq 1$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.7. В случае выполнения условия (ii) оператор D является линейным ограниченным оператором из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ и при $n \geq 1$ имеют место оценки

$$|(D^n f)(x, t)| \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}, \quad \forall (x, t) \in Q_T; \quad (3.38)$$

$$\|(D^n f)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}, \quad (3.39)$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Доказательство. Линейность оператора D очевидна. Если $f(x, t) \in C(Q_T)$, то из формулы для оператора $\mathcal{D}$ и его сужения D на $C(Q_T)$ непосредственно следует, что функция $(Df)(x, t)$ также непрерывна. Неравенства (3.39) являются прямым следствием неравенств (3.38). Поэтому достаточно установить лишь неравенства (3.38). Воспользуемся принципом математической индукции.

При $n = 1$ из определения оператора D будем иметь

$$|(Df)(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \right|.$$

Учитывая неравенства (2.9) для функции $\eta(s)$, предположения (ii) в (3.35) для $q(x, t)$ и определение ω_* , далее получим при $(x, t) \in Q_T$, применив в конце неравенство Коши—Буняковского,

$$\begin{aligned} |(Bf)(x, t)| &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t d\tau \int_0^1 |\check{q}(\tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \int_0^t 1 \cdot \check{q}(\tau) d\tau \leq \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|q(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right) \frac{1}{(1!)^{1/p'}}, \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.38) при $n = 1$. Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (3.39) при $n = 1$, а это означает, что оператор D является ограниченным в $C(Q_T)$.

Предположим, что оценка (3.38) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что она выполняется и при $n + 1$. В самом деле, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |(D^{n+1}f)(x, t)| &= |D(D^n f)(x, t)| = \frac{1}{\omega_2 + |\omega_1|} \left| \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) (D^n f)(\xi, \tau) d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |(D^n f)(\xi, \tau)| d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}} \int_0^t \tau^{n/p'} \check{q}(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{\|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} t^{(n+1)/p'} \frac{1}{(n+1)^{1/p'}} = \\ &= \|f(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{t^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]}}{2\omega_*} \right)^{n+1} \frac{1}{((n+1)!)^{1/p'}}; \end{aligned}$$

это и есть оценка (3.36) в случае $n + 1$. Тем самым оценка (3.36) установлена для всех $n \geq 1$. Лемма 3.7 доказана. $\square$

Введем пока чисто формально функцию

$$\mathfrak{w}(x, t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) v(\xi, \tau) d\xi = (\mathcal{D}v)(x, t). \quad (3.40)$$

Ввиду специальной структуры функции $\mathfrak{w}(x, t)$, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.8. Если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и выполняется условие (i) или (ii) в (3.35), то $\mathfrak{w}(x, t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$. При этом в случае (i) выполняется оценка

$$\|\mathfrak{w}(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0, 1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0, 1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0, 1]}), \quad (3.41)$$

где постоянная C_T не зависит от $q_T(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а в случае (ii) — оценка

$$\|\mathfrak{w}(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0, 1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0, 1]}), \quad (3.42)$$

где постоянная C_T не зависит от $\check{q}(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство. Доказательство леммы повторяет во многом доказательство аналогичной леммы 3.4. Из леммы 3.2 в случае, если $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, следует, что $\zeta(x) \in L_1[0, 1]$. Далее, с учетом формулы (2.6) можно получить следующее представление функции $\mathfrak{w}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}(x, t) &:= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) \left(\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) - \zeta(\{\beta(\xi, \tau)\}) \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} (L_1(x, t) - L_2(x, t)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Проведем дальнейшие рассуждения только для $L_1(x, t)$, так как для $L_2(x, t)$ рассуждения аналогичны. Итак, докажем непрерывность функции

$$L_1(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\}) d\xi \quad (3.44)$$

в области Q_T . Так как $\eta(s)$ есть непрерывная функция (теорема 2.4), а $\alpha(x, t - \tau)$ и $\beta(x, t - \tau)$ — линейные функции своих аргументов, то область интегрирования $Q(x, t)$ в интеграле (3.44) является измеримым множеством при всех $(x, t) \in Q_T$ и ее мера Лебега есть непрерывная функция по x и t . Таким образом, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301], чтобы доказать непрерывность функции $L_1(x, t)$, достаточно установить суммируемость функции $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T .

В лемме 3.4 установлено, что функция $\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ измерима в Q_T . Следовательно, $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ — также измеримая функция в Q_T как произведение измеримых функций (см. [3, с. 283]). Справедлива оценка

$$|L_1(x, t)| \leq \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} |q(\xi, \tau)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \right| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi, \tau)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi. \quad (3.45)$$

Далее рассмотрим по отдельности два случая (i) и (ii) (см. (3.35)).

Пусть имеет место случай (i). Тогда из (3.45) получим

$$|L_1(x, t)| \leq \int_0^T d\tau \int_0^1 |q_T(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi =: L'_{1T}. \quad (3.46)$$

Кроме того, имеют место равенства

$$\begin{aligned} L''_{1T} &:= \int_0^1 d\xi \int_0^T |q_T(\xi)| |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \\ &= \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^T |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\tau = \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^T \left| \zeta\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\tau, \end{aligned}$$

где, как и раньше, $\check{\zeta}(s) := \zeta(\{s\})$, $s \in \mathbb{R}$. Делая в интеграле по τ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\tau = (\omega_2 - \omega_1) ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$,

$$\begin{aligned} L''_{1T} &= (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_{\frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\ &\leq 2\omega^* \int_0^1 |q_T(\xi)| d\xi \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq 2\omega^* \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \\ &= 2\omega^* \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \right] + 1 \right) \int_0^1 |\check{\zeta}(s)| ds \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} \|\zeta(x)\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.47) \end{aligned}$$

С учетом оценки (3.12) из (3.47) следует

$$L''_{1T} \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.48)$$

Применяя теперь теорему Фубини (см. [24, теорема 2, с. 235]), отсюда получим, что функция $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ при выполнении условия (i) суммируема в Q_T и справедливо равенство $L'_{1T} = L''_{1T}$. На основании (3.46) и (3.47), будем иметь оценку

$$|L_1(x, t)| \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0,1]}). \quad (3.49)$$

Из суммируемости функции $q(\xi, \tau) \zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ в Q_T следует непрерывность функции $L_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [3, теорема 5, с. 301]). Аналогичными рассуждениями устанавливаются оценка (3.49) для функции $L_2(x, t)$ и непрерывность $L_2(x, t)$ в Q_T . Таким образом, на основании представления (3.43) отсюда следует непрерывность функции $\mathfrak{w}(x, t)$ в любом Q_T .

Пусть теперь имеет место случай (ii). Тогда из (3.45) получим

$$\begin{aligned} |L_1(x, t)| &\leq \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})| d\xi \leq \\ &\leq \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 |\check{\zeta}(\alpha(\xi, \tau))| d\xi = \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^1 \left| \check{\zeta}\left(\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}\right) \right| d\xi. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Делая в интеграле по ξ замену переменной интегрирования

$$s = \frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \longrightarrow d\xi = \frac{1}{a} ds,$$

получим, учитывая 1-периодичность функции $\check{\zeta}(s)$, предположение $\check{q}(x) \in L_p[0, T]$ и неравенство Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned}
|L_1(x, t)| &\leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_{\frac{\tau}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{\tau + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\check{\zeta}(s)| ds \leq \\
&\leq \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \int_0^{\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1} |\check{\zeta}(s)| ds = \frac{1}{a} \int_0^T \check{q}(\tau) d\tau \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \int_0^1 |\zeta(s)| ds \leq \\
&\leq \frac{T^{1/p'}}{a} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} \left(\left[\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\right] + 1 \right) \|\zeta(s)\|_{L_1[0, 1]} \leq C_T \|\check{q}(t)\|_{L_p[0, T]} \|\zeta(s)\|_{L_1[0, 1]}, \quad (3.51)
\end{aligned}$$

где постоянная C_T не зависит от $\check{q}(t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Учитывая оценку (3.12) в (3.51), получим для всех $(x, t) \in Q_T$

$$|L_1(x, t)| \leq C_T \|q_T(x)\|_{L_1[0, 1]} (\|\varphi(x)\|_{L_1[0, 1]} + \|\psi(x)\|_{L_1[0, 1]}). \quad (3.52)$$

На основании теоремы Фубини отсюда следует, что функция $q(\xi, \tau)\zeta(\{\alpha(\xi, \tau)\})$ при выполнении условия (ii) суммируема в Q_T . Из суммируемости этой функции следует непрерывность функции $L_1(x, t)$, как уже было отмечено, в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Аналогичными рассуждениями устанавливаются оценка (3.52) для функции $L_2(x, t)$ и непрерывность $L_2(x, t)$ в Q_T . Следовательно, на основании представления (3.43) отсюда получаем непрерывность функции $\mathbf{w}(x, t)$ в любом Q_T и при выполнении условия (ii). Лемма 3.8 полностью доказана. $\square$

Так как $\mathbf{w}(x, t) \in C(Q_T)$ согласно лемме 3.8, то можно образовать ряд

$$\mathcal{W}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n \mathbf{w})(x, t). \quad (3.53)$$

Теорема 3.2. *Предположим, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0, 1]$, выполняется условие (1.10), $q(x, t) \in \mathcal{Q}$ и удовлетворяет условиям (i) или (ii). Тогда ряд (3.53) сходится абсолютно и равномерно в пространстве $C(Q_T)$ к непрерывной функции $\mathcal{W}(x, t)$, при этом сходимость ряда в случае (i) не медленнее экспоненциального, а в случае (ii) не медленнее $1/p'$ -экспоненциального, и функция*

$$u(x, t) = v(x, t) + \mathcal{W}(x, t) \quad (3.54)$$

является единственным обобщённым решением задачи (3.4)–(3.6).

Доказательство. Повторяем рассуждения, которые использовались в доказательстве теоремы (3.1) в случае потенциала $q(x)$ с небольшими изменениями. Из оценок (3.37) и (3.39) следует, что ряд (3.53) с непрерывными членами абсолютно и равномерно сходится в Q_T , причем сходимость ряда в случае (i) не медленнее экспоненциального, а в случае (ii) не медленнее $1/p'$ -экспоненциального. Следовательно, $\mathcal{W}(x, t)$ — непрерывная функция в Q_T .

Рассмотрим функцию (3.54). Учитывая определение (3.53) функции $\mathcal{W}(x, t)$, определение (3.40) функции $\mathbf{w}(x, t)$, линейность операторов $\mathcal{D}$ и D , а также ограниченность D в $C(Q_T)$ на основании лемм 3.6 и 3.7, получим и в случае (i), и в случае (ii)

$$\begin{aligned}
u &= v + \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathbf{w} = v + \mathbf{w} + \sum_{n=1}^{\infty} D^n \mathbf{w} = v + \mathcal{D}v + D \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathbf{w} = \\
&= v + \mathcal{D}v + \mathcal{D} \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathbf{w} = v + \mathcal{D} \left(v + \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathbf{w} \right) = v + \mathcal{D}(v + \mathcal{W}) = v + \mathcal{D}u,
\end{aligned}$$

т.е. функция $u(x, t)$ вида (3.54) является решением уравнения (3.34).

Уравнение (3.34) нельзя рассматривать в пространстве $C(Q_T)$, так как $v(x, t)$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией. Удобнее перейти к эквивалентному уравнению, действующему в $C(Q_T)$.

Лемма 3.9. Функция $u(x, t)$ является решением интегрального уравнения (3.34) в том и только том случае, когда функция $\mathfrak{r}(x, t) := u(x, t) - v(x, t)$ является решением интегрального уравнения

$$\mathfrak{r}(x, t) := \mathfrak{w}(x, t) + (D\mathfrak{r})(x, t). \quad (3.55)$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 3.5. $\square$

Так как $\mathfrak{w}(x, t) \in C(Q_T)$ согласно лемме (3.8), то рассматриваем уравнение (3.55) в пространстве $C(Q_T)$. Иными словами, $\mathfrak{r}(x, t)$ является решением уравнения

$$\mathfrak{r}(x, t) := \mathfrak{w}(x, t) + (D\mathfrak{r})(x, t). \quad (3.56)$$

Это уравнение имеет решение $\mathcal{W}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D^n \mathfrak{w}$. В самом деле, поскольку D есть линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$, то

$$(D\mathcal{W})(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (D^n \mathfrak{w})(x, t).$$

Отсюда следует, что функция $\mathcal{W}(x, t)$ является решением уравнения (3.56).

Покажем, что решение уравнения (3.56) единственно. Допустим, что кроме $\mathcal{W}(x, t)$ есть еще другое решение $\dot{\mathcal{W}}$ этого уравнения. Тогда $\mathfrak{z}(x, t) := \mathcal{W}(x, t) - \dot{\mathcal{W}}(x, t)$ — решение уравнения $\mathfrak{z}(x, t) = (D\mathfrak{z})(x, t)$, а, значит, $\mathfrak{z}(x, t) = (D^n \mathfrak{z})(x, t)$ при любом натуральном n . Тогда в случае (i) из оценки (3.37) следует неравенство

$$\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n \mathfrak{z})(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T \|q_T(x)\|_{L_1[0,1]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{n!},$$

а в случае (ii) из оценки (3.39) следует неравенство

$$\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^n \mathfrak{z})(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} \left(\frac{T^{1/p'} \|\check{q}(t)\|_{L_p[0,T]}}{2\omega_*} \right)^n \frac{1}{(n!)^{1/p'}}.$$

Отсюда в силу произвольности n и в случае (i), и в случае (ii) будем иметь $\|\mathfrak{z}(x, t)\|_{C(Q_T)} = 0$ или $\mathcal{W}(x, t) \equiv \dot{\mathcal{W}}(x, t)$, т.е. единственным решением уравнения (3.56) является функция $\mathcal{W}(x, t)$. Учитывая лемму 3.9, получаем, что уравнение (3.56) имеет единственное решение (3.54). Теорема 3.2 полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 2. — С. 138–140.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 229–241.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
4. Корнев В. В. О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения—XXXIII» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
5. Корнев В. В., Хромов А. П. О классическом и обобщённом решении смешанной задачи для волнового уравнения // Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач», посв. 90-летию акад. В. А. Ильина. Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения—XXIX» (Москва, 3-5 мая 2018 г.). — М., 2018. — С. 132–133.
6. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2019. — 172. — С. 119–133.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач // в кн.: Математика. Механика. Т. 23. — Изд-во Саратов. ун-та, 2021. — С. 18–24.

8. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2020. — 20, № 4. — С. 444–456.
10. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
11. Ломов И. С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 199. — С. 66–79.
12. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратов. зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 178–180.
13. Ломов И. С. Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы// Диффер. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1471–1483.
14. Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
15. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — № 3. — С. 38–52.
16. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інфарм. Выліч. тэхн. кіраванне. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
17. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Ж. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — 1. — С. 18–38.
18. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ. мат. техн. — 2022. — 1, № 50. — С. 62–73.
19. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н. Весн. МДУ імя Куляшова А. А. Сер. В. Природ. навукі: Мат. Фіз. Біялогія. — 2021. — 2, № 58. — С. 28–55.
20. Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косо́й производной в граничном условии// Докл. РАН. — 2014. — 459, № 5. — С. 544–549.
21. Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485.
22. Муравей Л. А., Романенков А. М. Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна// Сб. мат. Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (Белгород, 25–29 октября 2021 г.). — Белгород, 2021. — С. 194–196.
23. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. Рылов В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — 200. — С. 95–104.
26. Рылов В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 124–134.
27. Рылов В. С. Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2023. — 23, № 2. — С. 183–194.
28. Рылов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Мат. 21 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: Изд-во Саратоа. ун-та, 2022. — С. 252–255.

29. Рыхлов В. С. О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXIII» (Воронеж, 3-9 мая 2022 г.). — Воронеж: ВГУ, 237–240.
30. Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// в кн.: Математика. Механика. Т. 24. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2022. — С. 53–58.
31. Рыхлов В. С. Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXXIV» (Воронеж, 3-9 мая 2023 г.). — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 343–345.
32. Рыхлов В. С. О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 226. — С. 89–107.
33. Рыхлов В. С. Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной// Совр. мат. Фундам. напр. — 2023. — 69, № 2. — С. 342–363.
34. Рыхлов В. С. Обобщенное решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// Тез. докл. XVII Междунар. науч. конф. «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (Владикавказ, 14–20 июля 2013 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2023. — С. 207–208.
35. Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// Сб. трудов XVI Междунар. Казанской школы-конф. «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 22–27 августа 2023 г.). — Казань, 2023. — С. 205–207.
36. Толстов Г. П. О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — 24 (66), № 1. — С. 27–51.
37. Харди Г. Расходящиеся ряды.. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951.
38. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// Мат. 21 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 31 января — 4 февраля 2022 г.). — Саратов: СГУ, 2022. — С. 319–324.
39. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2022. — 22, № 3. — С. 322–331.
40. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251.
41. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: Математика. Механика. — 2019. — 21. — С. 62–67.
42. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288.
43. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения-XXX» (Воронеж, 3-9 мая 2019 г.). — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
44. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// Мат. 20 Междунар. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 28 января — 1 февраля 2020 г.). — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
45. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача// в кн.: Математика. Механика. Т. 23. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та., 2021. — С. 63–67.
46. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — 59, № 2. — С. 286–300.
47. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 215–238.
48. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — 60. — С. 325–328.
49. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — М., Л.: ГИТТЛ, 1949.

50. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — P. 347–348.
51. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — P. 145–148.
52. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — P. 224–226.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рыхлов Виктор Сергеевич (Rykhlov Viktor Sergeevich)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
(Saratov State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia)
E-mail: rykhlovvs@yandex.ru