ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 50–55
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-50-55

УДК 517.956

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **Ю. В. ЗАСОРИН**

Аннотация. Рассматривается проблема единственности решения для однородных уравнений в классе аналитических функционалов $Z'(\mathbb{R}^n)$ с псевдодифференциальными операторами, коммутирующими относительно сдвигов. Устанавливаются условия на символы операторов, позволяющие так разбить этот класс операторов на классы эквивалентности, что внутри каждого класса какое-либо условие регулярности решения на бесконечности, обеспечивающее единственность решения уравнения с каким-либо представителем этого класса, обеспечивает единственность решения и для уравнений со всеми остальными представителями того же класса.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, эквивалентность, единственность решения.

UNIQUENESS THEOREM FOR ONE CLASS OF PSEUDODIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **Yu. V. ZASORIN**

Abstract. The uniqueness of solutions for homogeneous equations in the class of analytic functionals $Z'(\mathbb{R}^n)$ with pseudodifferential operators commuting under shifts is discussed. We establish conditions for the symbols of operators that allow one to partition this class of operators into equivalence classes in such a way that within each class, any condition of the regularity of solutions at infinity that guarantees the uniqueness of a solution for an equation with some representative of this class, also guarantees the uniqueness of a solution for equations with all representatives of the same class.

Keywords and phrases: pseudo-differential equation, equivalence, uniqueness of solution.

AMS Subject Classification: 26A12, 30D15, 26A48

1. Введение. Одна из самых неприятных проблем, связанных с вопросами единственности дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений во всем $\mathbb{R}^n$

$$P(D)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

связана либо с выбором подходящего класса решений, либо с выбором подходящего условия регулярности решения на бесконечности, поскольку если класс слишком узок, а условие слишком жесткое, то возникают уже проблемы разрешимости уравнения (1) при простейших функциях (распределениях) $f(x)$. Так, во второй половине прошлого века было получено огромное количество универсальных условий, обеспечивающих единственность решения уравнений вида (см., например, $[1, 2, 5–7]$). Однако главным недостатком большинства из них является противоречие с разрешимостью: так, например, фундаментальное решение уравнения Лапласа в важнейшем случае $n = 3$ не удовлетворяет практически ни одному из этих условий. В то же время в случае $n \geqslant 3$ хорошо известное условие

$$u(x) = o(1), \quad x \to \infty, \tag{2}$$

обеспечивает как единственность решения уравнения (1) с оператором Лапласа в качестве $P(D)$ в весьма широких классах классах распределений (например, в шварцевском классе $S'(\mathbb{R}^n)$ распределений умеренного роста), так и разрешимость для весьма обширного множества функций (распределений) $f(x)$.

При этом возникает закономерный вопрос: для каких еще уравнений условие (2) обеспечивает единственность решения? Этот же вопрос справедлив и для других столь же мягких условий (например, условий типа Зоммерфельда и т. п.). В случае уравнений с постоянными коэффициентами в шварцевском классе $S'(\mathbb{R}^n)$ ответ на этот вопрос дан в [1, 2] в том смысле, что было получено весьма простое условие на операторы $P(D)$, позволяющее факторизовать их на так называемые *классы эквивалентности*, обладающие тем свойством, что какое-либо условие регулярности решения на бесконечности, обеспечивающее единственность решения уравнения (1) с каким-либо представителем $P(D)$ какого-либо класса эквивалентности, обеспечивает единственность решений и для уравнений со всеми прочими операторами этого же самого класса эквивалентности. Однако необходимо отметить два момента: 1) для ряда задач современной физики уже в случае уравнений с постоянными коэффициентами класс $S'(\mathbb{R}^n)$ может оказаться недостаточно широк (примеры см. в [3, 4]); 2) сам класс дифференциальных уравнений с операторами конечного порядка также может оказаться слишком узким, поэтому имеется необходимость распространить соответствующие результаты хотя бы на некоторые классы псевдодифференциальных операторов. Настоящая работа и призвана восполнить эти пробелы.

2. Постановка задачи и предварительные результаты. Перейдем к точным формулировкам. Пусть x, y, ξ — точки из $\mathbb{R}^n$, $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, $D_k = -i\partial/\partial x_k$. Через $Z(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство таких пробных аналитических функций $\varphi(x)$ (см., например, [6]), что их фурье-образы $\widehat{\varphi}(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а через $Z'(\mathbb{R}^n)$ — двойственное к $Z(\mathbb{R}^n)$ пространство так называемых *аналитических функционалов* $u(x) : Z'(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ (см. [6]), содержащее в себе пространство $S'(\mathbb{R}^n)$. Пусть, далее, $\mathcal{M}$ — пространство всех псевдодифференциальных операторов

$$P(D) : Z'(\mathbb{R}^n) \to Z'(\mathbb{R}^n),$$

коммутирующих со сдвигами, действующих по правилу

$$(P(D)u)\widehat{\ }(\xi) = P(\xi)\widehat{u}(\xi),$$

где функция $P(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, как всегда, будет называться *символом* оператора $P(D)$. (В том случае, если $P(\xi)$ представляет собой полином, оператор $P(D)$ является просто дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами).

Обозначим через

$$\mathcal{N}(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : P(\xi) = 0\} \tag{3}$$

множество всех вещественных нулей оператора $P(D) \in \mathcal{M}$. Аналогично (3), символами $\mathcal{N}(Q), \dots$ будем обозначать соответствующие множества вещественных нулей других операторов $Q(D), \dots \in \mathcal{M}$.

Определение 1. Будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *эквивалентны* (обозначение $P(D) \sim Q(D)$), если $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q)$. Если же $\mathcal{N}(P) = \varnothing$, то будем писать $P(D) \sim 0$.

Определение 2. Будем говорить, что оператор $P(D)$ *подчинен* оператору $Q(D)$ (обозначение $P(D) \prec Q(D)$), а оператор $Q(D)$ *доминирует* над оператором $P(D)$ (обозначение $Q(D) \succ P(D)$), если $\mathcal{N}(P) \subset \mathcal{N}(Q)$.

Замечание. Несложно заметить, что отношение эквивалентности превращает класс $\mathcal{M}$ в объединение непересекающихся *классов эквивалентности* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{N})$, где множество $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$ определяется любым произвольно выбранным представителем $P(D) \in \mathcal{P}$. При этом отношение подчиненности делает это множество еще и частично упорядоченным: $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, если $P(D) \prec Q(D)$ для каких-либо представителей $P(D) \in \mathcal{P}$ и $Q(D) \in \mathcal{Q}$. Кроме того, совокупность $\{P(D)\}$ обладает еще и структурой полугруппы: например, можно ввести операцию умножения классов эквивалентности $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, определив произведение классов $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ как класс эквивалентности, содержащий оператор $P(D)Q(D)$, где $P(D)$ и $Q(D)$ — произвольные представители классов $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Однако эти вопросы не представляют большого интереса для автора данной работы, тем более, что они достаточно подробно освещены в [1].

Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — какие-либо операторы из $\mathcal{M}$. Рассмотрим два уравнения:

$$P(D)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$Q(D)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $u(x)$ — распределение из $Z'(\mathbb{R}^n)$, и добавим к каждому из них одно и то же условие:

$$\Psi(D)u(x) = \theta(|x|^{-\lambda}), \quad x \to \infty, \tag{6}$$

где $\Psi(D) \in \mathcal{M}$, $\lambda \geqslant 0$, а символ $\theta(\cdot)$ может означать либо $o(\cdot)$, либо $O(\cdot)$, причем сами символы $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ могут означать как равномерные оценки, так и оценки по каждому фиксированному направлению, по нескольким фиксированным направлениям или оценку по одному-единственному направлению. Кроме того, само условие (6) может быть единственным, может представлять собой систему условий (с различными операторами $\Psi(D)$, и, наконец, семейство условий. Так, например, условие Зоммефельда

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + ik_0\right) u(x) = o\big(r^{(1-n)/2}\big), \quad r = |x| \to \infty, \tag{7}$$

можно интерпретировать как семейство условий:

$$\big(\boldsymbol{e} \cdot D - k_0\big)u(x) = o\big(r^{(1-n)/2}\big), \quad r = |x| \to \infty, \tag{8}$$

где вектор $\boldsymbol{e}$ пробегает все точки единичной сферы $\omega_1 \subset \mathbb{R}^n$. Наконец, само условие (6) следует понимать в смысле теории распределений:

$$\Psi(D)(u * \varphi)(x) = \theta(|x|^{-\lambda}), \quad x \to \infty, \tag{9}$$

для всех $\varphi(x) \in Z'(\mathbb{R}^n)$, где символ $*$ означает свертку:

$$(u * \varphi)(x) = \langle u(y); \varphi(x-y)\rangle. \tag{10}$$

Из ограничения (9) следует, в частности, что если распределение $u(x)$ удовлетворяет условию (6), то ему будут удовлетворять и все его производные.

Полагая теперь $\mathcal{N} = \mathcal{N}(P)$, обозначим через $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ подпространство всех распределений из $Z'(\mathbb{R}^n)$, носители фурье-образов которых локализованы на множестве $\mathcal{N}$:

$$Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}) = \big\{u \in Z'(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \mathcal{N}\big\}, \tag{11}$$

а через $Z'(\mathbb{R}^n, \Psi)$ — подпространство всех распределений из $Z'(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию (6). Наконец, положим

$$Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi) = Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}) \cap Z'(\mathbb{R}^n, \Psi). \tag{12}$$

Сформулируем простое утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

Предложение. *Если распределение* $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n)$ *является решением уравнения* (4)*, то* $\operatorname{supp}(\widehat{u}) \subset \mathcal{N}_P$ (*т.е.* $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_P)$).

Доказательство аналогично доказательству этого же утверждения в случае шварцевского пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ распределений умеренного роста (см., например, [5]).

3. Принципы эквивалентности и подчиненности.

Лемма. *Если задача* (4), (6) *имеет единственное* (*тривиальное*) *решение, то подпространство* $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$ *тривиально* (*т.е, содержит только нулевой функционал*).

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > 0$ и рассмотрим замкнутый шар $V_R = \{|x| \leqslant R\}$. Далее, положим $\mathcal{N}_R = \mathcal{N} \cap V_R$. Фиксируем произвольное распределение $u(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \Psi)$ и обозначим чрез $v(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_R, \Psi)$ новое распределение, фурье-образ которого $\widehat{v}(\xi)$ является сужением $\widehat{u}(\xi)$ на V_R. Поскольку распределение $\widehat{v}(\xi)$ является распределением с компактным носителем, то оно имеет конечный порядок сингулярности (см., например, [6]), а значит (см. формулы (11) и (12)) найдется такое целое положительное N, что

$$P^N(\xi)\widehat{v}(\xi)=0, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

или, что то же самое,

$$P^N(D)v(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Положим теперь $v_1(x)=P^{N-1}(D)v(x)$; тогда, в силу равенства (13),

$$P(D)v_1(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{14}$$

причем распределение $v_1(x)$ также удовлетворяет и условию

$$\Psi(D)v(x)=\theta(|x|^{-\lambda}), \quad x\to\infty \tag{15}$$

(см. (12)). Но задача (14), (15) — это, по сути дела, задача (4), (6), а значит, в силу предположения леммы, $v_1(x)$ является нулевым функционалом. Полагая теперь $v_2(x)=P^{N-2}(D)v(x)$, точно такими же рассуждениями покажем, что и распределение $v_2(x)$ является нулевым функционалом. Продолжая рассуждения, на N-м шаге устанавливаем, что и распределение $v(x)$ есть нулевой функционал. Но это означает, что сужение распределения $\widehat{u}(\xi)$ на каждый шар V_R равно нулю, откуда следует, что $\widehat{u}(\xi)$ (а вместе с ним и $u(x)$) — нулевые функционалы. □

Пусть теперь $P(D)\sim Q(D)$, и пусть одна из задач (4), (6) или (5), (6) имеет только тривиальное решение. Тогда подпространство $Z'(\mathbb{R}^n,\mathcal{N},\Psi)$ тривиально, а поскольку решение другой задачи принадлежит также этому подпространству, то и оно может быть только нулевым функционалом. Предположим теперь, что одна из задач (например, (4), (6)) имеет неединственное (нетривиальное) решение, а другая задача (в нашем случае — (5), (6)) — только тривиальное. Это невозможно, поскольку из единственности решения задачи (5), (6) следует тривиальность подпространства $Z'(\mathbb{R}^n,\mathcal{N},\Psi)$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 (принцип эквивалентности)**.** *Если $P(D)\sim Q(D)$, то обе задачи* (4), (6) *и* (5), (6) *либо* (*одновременно*) *имеют только единственное* (*тривиальное*) *решение, либо* (*одновременно*) *имеют только неединственные нетривиальные решения.*

Далее, пусть теперь $P(D)\prec Q(D)$. Поскольку теперь $Z'(\mathbb{R}^n,\mathcal{N}(P),\Psi)\subset Z'(\mathbb{R}^n,\mathcal{N}(Q),\Psi)$, то из леммы и теоремы 1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 2 (принцип подчиненности)**.** *Если $P(D)\prec Q(D)$, то из единственности решения задачи* (5), (6) *следует единственность решения задачи* (4), (6), *а из неединственности решения задачи* (4), (6) *следует неединственность задачи* (5), (6).

4. Приложение. В заключение сформулируем и докажем еще одно утверждение, которое может оказаться крайне полезным для выбора условия регулярности решения на бесконечности.

Теорема 3. *Пусть множество $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^n$ состоит из конечного числа поверхностей*:

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}_1\cup\dots\cup\mathcal{N}_N,$$

имеющих в каждой из своих точек по крайней мере одну общую фиксированную нормаль $\boldsymbol{\nu}$. Тогда для любого распределения $u(x)\in Z'(\mathbb{R}^n,\mathcal{N})$ и любой пробной функции $\varphi(x)\in Z(\mathbb{R}^n)$ выражение

$$q(t)=(u*\varphi)(t\boldsymbol{\nu}), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{16}$$

есть квазиполином скалярной переменной t, степень и коэффициенты которого, возможно, зависят от функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Несложно заметить,что множество $\mathcal{N}$ может быть локализовано в конечном объединении $(n-1)$-мерных параллельных гиперплоскостей

$$\mathcal{N}\subset\mathcal{H}_1\cup\dots\cup\mathcal{H}_m, \quad m\leqslant N, \tag{17}$$

имеющих ту же самую общую нормаль $\boldsymbol{\nu}$, о которой шла речь в формулировке теоремы. Не ограничивая общности, можно считать, что эта нормаль совпадает с направляющим ортом последней координатной оси: $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{e}_n$ (этого всегда можно добиться поворотом осей), а значит,

$$\mathcal{H}_k = \Big\{\xi = (\xi', \xi_n) : \ \xi_n = a_k\Big\}, \quad a_k \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Далее, в силу равенства (16) определения подпространств $Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ (см. формулу (11)) получаем

$$u(x) = u_1(x) + \cdots + u_m(x), \tag{19}$$

где $u_k(x) \in Z'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_k)$, $k = 1, \ldots, m$, а следовательно (см. формулы (16) и (19)),

$$q(t) = q_1(t) + \cdots + q_m(t), \tag{20}$$

где

$$q_k(t) = (u_k * \varphi)(t\boldsymbol{\nu}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Фиксируем произвольную пробную функцию $\varphi(x) \in Z(\mathbb{R}^n)$ и положим

$$\psi(\xi) = (\varphi(-x))^{\vee}(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда в силу равенства (10) и формулы Платшереля имеем

$$q_k(t) = \big\langle \widehat{u}_k(\xi); \ (\varphi(t\boldsymbol{e}_n - x))^{\vee}(\xi) \big\rangle. \tag{22}$$

Поскольку в силу свойств преобразования Фурье

$$(\varphi(t\boldsymbol{e}_n - x))^{\vee}(\xi) = \exp(it\xi_n)\psi(\xi),$$

равенство (22) принимает вид:

$$q_k(t) = \big\langle \widehat{u}_k(\xi); \exp(it\xi_n)\psi(\xi) \big\rangle. \tag{23}$$

Так как $\psi(\xi)$ — финитная функция, то носитель $\operatorname{supp}(\psi)$ локализован в некотором шаре V_R, а равенство (23) принимает вид

$$q_k(t) = \big\langle v_k(\xi); \exp(it\xi_n)\psi(\xi) \big\rangle, \tag{24}$$

где распределение $v_k(\xi)$ есть сужение $\widehat{u}_k(\xi)$ на множество $\mathcal{H}_k \cap V_R$. Поскольку, в силу равенства (18), (финитное) распределение имеет вид

$$v_k(\xi) = \sum_{j=0}^{N(k)} w_{kj}(\xi') \otimes \delta^{(j)}(\xi_n - a_k),$$

(см. [6]), где $\delta(\cdot)$ — одномерная дельта-функция Дирака, то равенство (24) может быть переписано в виде

$$q_k(t) = \sum_{j=0}^{N(k)} \Big\langle w_{kj}(\xi'); \ \big(D^j_{\xi_n}(\exp(it\xi_n)\psi(\xi))\big)\Big|_{\xi_n = a_k} \Big\rangle,$$

откуда следует, что $q_k(t)$ — квазиполином переменной t, а в силу формулы (20) — и $q(t)$ также является квазиполиномом переменной t. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Засорин Ю. В.* О теоремах единственности для уравнений в частных производных и универсальности условия регулярности решения на бесконечности// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2021. — № 3. — С. 48–58.
2. *Засорин Ю. В.* О корректной разрешимости задач Коши для нестационарных уравнений с невыделенной старшей производной по времени и определении следа распределения на гиперплоскости начальных данных// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *191*. — С. 47–73.
3. *Засорин Ю. В.* Метод перенормировки потенциала для одной модели типа Хартри—Фока—Слейтера// Теор. мат. физ. — 2002. — *130*, № 3. — С. 375–382.
4. *Засорин Ю. В.* Метод мультипольного псевдопотенциала для некоторых задач квантовой теории рассеяния// Теор. мат. физ. — 2003. — *135*, № 3. — С. 504–514.

5. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М.: ИЛ, 1959.
6. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.
7. *Hörmander L.* Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constsnt coefficients// Isr. J. Math. — 1973. — *16.* — P. 103–116.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Засорин Юрий Валентинович
Воронежский государственный университет
E-mail: `York-York-York-1960@yandex.ru`