



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 56–74
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-56-74

УДК 517.51, 517.53

ОБ УТОЧНЕННОЙ ФУНКЦИИ РОСТА ОТНОСИТЕЛЬНО МОДЕЛЬНОЙ

© 2023 г. М. В. КАБАНКО, К. Г. МАЛЮТИН, Б. Н. ХАБИБУЛЛИН

Посвящается академику Л. С. Понтрягину

Аннотация. Понятие уточненного порядка широко используется в теориях целых, мероморфных, субгармонических и плюрисубгармонических функций. В статье приводится общая трактовка этого понятия как уточненной функции роста относительно модельной функции роста. Классический уточненный порядок — это уточненный порядок в смысле Валирона. Наше определение использует лишь одно условие. Такая форма определения новая и для классического уточненного порядка. В данном обзоре показано, что для любой функции, определенной на положительном луче, рост которой определяется модельной функцией роста, существует собственная уточненная функция роста относительно данной модельной функции роста.

Ключевые слова: проблема Адамара, модельная функция роста, уточненный порядок, выпуклая функция, целая функция, субгармоническая функция.

ON THE PROXIMATE GROWTH FUNCTION RELATIVE TO THE MODEL GROWTH FUNCTION

© 2023 M. V. KABANKO, K. G. MALYUTIN, B. N. KHABIBULLIN

ABSTRACT. The concept of proximate order is widely used in the theories of integer, meromorphic, subharmonic, and plurisubharmonic functions. In this paper, we provide a general interpretation of this concept as a proximate growth function relative to the model growth function. The classical proximate order is the proximate order in the sense of Valiron. Our definition uses only one condition. This form of definition is new for the classical proximate order. In this review, we show that for any function defined on a positive ray whose growth is determined by a model growth function, there is a proximate growth function relative to the model growth function.

Keywords and phrases: Hadamard problem, model growth function, proximate order, convex function, entire function, subharmonic function.

AMS Subject Classification: 26A12, 30D15, 26A48

1. Введение. В теории целых и субгармонических функций одной из важнейших проблем является проблема связи между ростом целой или субгармонической функции и распределением нулей целой или распределением риссовской меры субгармонической функции. А. Пуанкаре в своём мемуаре [22] выделил две проблемы наибольшей важности, указав, с одной стороны, на связь между ростом целой функции и её жанром, с другой стороны, — на связь между ростом целой функции и её коэффициентами Тейлора. Начало разработке методов исследования поставленных

Работа К. Г. Малютина выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00012). Работа Б. Н. Хабибуллина выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

проблем положили труды Э. Бореля [17] и Ж. Адамара [19]. В дальнейшем их идеи получили развитие в работах П. Бутру, А. Вимана, Д. Пойа, Ж. Валирона, Э. Линделефа, А. Принсгейма, А. Данжуа, Э. Майе, Дж. Литтлвуда и других математиков. Простейшая характеристика роста целой функции f — это максимум её модуля $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, а для субгармонической функции v на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — её максимум $\mathcal{M}_v(r) = \max_{|z|=r} v(z)$ по $r \geq 0$.

Начиная с работ Ж. Адамара и Э. Бореля математиков интересовал вопрос о нахождении возможно более узких классов функций H , в которых для любой целой функции f нашлась бы возрастающая неограниченная функция h , $r > 0$, с условием

$$\sigma_f := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h(r)} \in (0, +\infty) \quad (1)$$

и с возможностью вычислить эту величину, называемую *типом f относительно h* , по тейлоровским коэффициентам или по распределению нулей функции f . Для подкласса целых функций конечного порядка эту задачу решил Ж. Валирон (см. [25]), введя понятие уточнённого порядка. Он показал, что каждая целая функция конечного порядка имеет свой уточнённый порядок $\rho(r)$, $r > 0$, для которого тип функции f относительно функции $h(r) := r^{\rho(r)}$ нормален, т.е. выполняется (1). Более общая теорема доказана Б. Я. Левиным [8, гл. I, теорема 16]. Напомним классическое определение уточнённого порядка.

Абсолютно непрерывная функция ρ на некотором луче $(a, +\infty)$ называется *уточнённым порядком в смысле Валирона*, если одновременно существуют два предела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \rho'(r) \ln r = 0. \quad (2)$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число в точке r .

Накладывая дополнительные требования (такие как монотонность, дифференцируемость достаточное число раз или бесконечная дифференцируемость, аналитичность в некотором угле и др.), классы уточнённых порядков, применяемых для изучения роста целых функций, постоянно сужали (см., например, [7–10, 12, 15, 16]). Универсальной шкалы роста целых и субгармонических функций, конечно, не существует, но возможность использовать достаточно узкий класс эталонных функций, с которыми можно сравнивать в том или ином смысле рост произвольной целой или субгармонической функции, имеет большое значение. А. Ю. Попов нашел узкие плотные классы функций сравнения роста из целых функций, коэффициенты которых обладают тем свойством, что их обратные величины являются моментами положительной меры, аналитической на $(0, +\infty)$ (см. [11]).

Проблему Адамара (точнее, Бореля—Адамара) на современном математическом языке можно сформулировать как проблему нахождения таких узких плотных классов функций, с помощью которых можно описывать рост целых и субгармонических функций (или специальных подмножеств целых и субгармонических функций). Из сказанного видно, что решение задач, связанных с проблемой Адамара, возникшей более ста лет назад, остается актуальным и в настоящее время. Условие (1) дает точную асимптотическую оценку логарифма максимума модуля целой или максимума модуля субгармонической функции сверху, но во многих вопросах современного анализа важное значение приобрели и нижние оценки целых функций.

В связи с этим замечанием Г. Г. Брайчев (см. [1–3]) расширил задачу Адамара, понимая под ее решением нахождение возможно более узких классов функций H , таких, что для любой целой функции f дополнительно к (1) найдется функция $h_1 \in H$, удовлетворяющая условию

$$\underline{\sigma}_f := \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{h_1(r)} \in (0, \infty) \quad (3)$$

и с возможностью вычисления и этой величины по коэффициентам ряда Тейлора функции f . Такие классы функций он называет плотными классами двустороннего сравнения роста (верхнего и нижнего) во множестве всех целых функций. Более того, оценки относительного роста максимума модуля целой или субгармонической функции, определяемые формулами (1) и (3), можно

уточнять и находить такие классы эталонных функций, в которых для любой целой функции f нашлись бы функции $\bar{h}$ и $\bar{h}_1$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (\ln M_f(r) - \bar{h}(r)) = 0, \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} (\ln M_f(r) - \bar{h}_1(r)) = 0.$$

Таким образом, под обобщенной проблемой Адамара в смысле Г. Г. Брайчева мы понимаем отыскание возможно более узких классов функций, в которых для любой целой функции f нашлись бы функции, дающие точные двусторонние асимптотические оценки $\ln M_f(r)$ и тейлоровских коэффициентов $f(z)$, удовлетворяющих таким оценкам.

Обсуждаемые выше проблемы свидетельствуют о сложности и многогранности задач, восходящих к Адамару. Аналогичные проблемы возникают не только в пространствах целых функций, а также и в классах субгармонических, мероморфных функций в различных областях (ограниченных и неограниченных) комплексной плоскости и в многомерном комплексном анализе. В настоящей статье мы ограничиваемся рассмотрением классов эталонных функций, введенных в [13]. Результаты из [13] приводятся и доказываются ниже в следующем разделе 2 в несколько модифицированной форме в полном объеме с целью автономности изложения в настоящем обзоре исходных для исследования утверждений. Введенное в [13] понятие модельной функции роста охватывает весьма широкий класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю, т.е.

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(r)}{\ln r} = \begin{cases} \infty, \\ 0. \end{cases}$$

Например, к модельным функциям роста относятся функции от $r > 0$ вида $\exp^{on} r$, где $\exp^{on}$ — n -кратная суперпозиция ($n = 1, 2, \dots$) показательной функции $\exp$, степени логарифмической функции $\ln^p(e + r)$ при любом $p \geq 1$, и вообще любая дифференцируемая функция $M(r) > 0$ при всех $r > 0$ с возрастающей функцией $rM'(r) > 0$ при всех $r > 0$.

Далее $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, а $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ и $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ — множества соответственно положительных и строго положительных чисел. Функция f с областью значений в $\mathbb{R}$ и областью определения $R \subset \mathbb{R}$ называется *положительной* (обозначение $f \geq 0$) (соответственно *строго положительной*, $f > 0$), если $f(R) \subset \mathbb{R}^+$ (соответственно, $f(R) \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$). Функция f на $R \subset \mathbb{R}$ называется *возрастающей* (соответственно, *строго возрастающей*), если для любых пар точек $x_1, x_2 \in R$ из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) \leq f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$). Аналогично для отрицательности и убывания. Действия над функциями на R поточечные.

Из классических свойств *выпуклых функций* M на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}$ отметим следующие: функция M непрерывна и в каждой точке $r \in I$ имеет производные слева $M'_-(r)$ и справа $M'_+(r)$, которые равны между собой вне некоторого счетного множества E , а функции $r \mapsto rM'_-(r)$ и $r \mapsto rM'_+(r)$ — возрастающие (см. [14, гл. I], [20, гл. I]). Другими словами, в случае $I = (r_0, +\infty)$ с $r_0 \in \mathbb{R}^+$ функция $z \mapsto M(|z|)$ по переменной $z \in \mathbb{C}$ является *субгармонической радиальной функцией* вне замкнутого круга радиуса r_0 с центром в нуле (см. [20, гл. III]).

Функция M на открытом интервале $I \subset \mathbb{R}^+$ называется *выпуклой относительно $\ln$* , если функция $m: x \mapsto M(e^x)$ выпукла. Далее под *производной* $M'(r)$ в точке r выпуклой относительно $\ln$ функции M вне исключительного множества E будем понимать одну из производных $M'_-(r)$ или $M'_+(r)$, доопределяя ее в точках множества E равенством $M'(r) = \overline{\lim}_{r > x \rightarrow r} M'_-(x)$.

В данном кратком обзоре будет показано, что для любой функции, определенной на $\mathbb{R}^+$, рост которой определяется модельной функцией роста M , существует собственная уточненная функция роста относительно модельной функции роста M и собственная миноранта. Таким образом, рассматривается вариант проблемы Адамара в версии, близкой к подходу Г. Г. Брайчева, для широких классов целых и субгармонических функций. Доказательства носят конструктивный характер. Для построения уточненной функции роста используются идеи и конструкции из диссертации А. Ф. Гришина [4] и его работ с соавторами [5, 6].

2. Обобщение уточненного порядка. Следуя [13], введем следующие определения.

Определение 1. Функция M на открытом луче $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, строго положительная и выпуклая относительно $\ln$, для которой $M'(r) > 0$ при всех $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ и $\lim_{r \rightarrow +\infty} M(r) = +\infty$, называется *модельной функцией роста*.

Определение 2. Строго положительная дифференцируемая функция V на некотором луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$ называется *уточненной функцией роста относительно модельной функции роста M* , если существует хотя бы один из равных между собой пределов

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln m(x))'} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(x)v'(x)}{m'(x)v(x)} \in \mathbb{R}^+, \quad (4)$$

где функция $m: x \mapsto M(e^x)$ по определению 1 выпукла на $\mathbb{R}$, а функция $v: x \mapsto V(e^x)$ дифференцируема на $(\ln r_0, +\infty)$.

Замечание 1. Легко видеть, что при существовании хотя бы одного из пределов в (4) все остальные пределы в (4) существуют и равенства в (4) верны.

Замечание 2. Использование в (4) вместе с $M(r)$ и $V(r)$ пары функций $m(\ln r) = M(r)$ и $v(\ln r) = V(r)$ для $r \in \mathbb{R}_*^+$ обусловлено связью нашего подхода к функциям роста с общей идеологией по этому направлению, разработанной К. Кизельманом в [21].

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится версия обобщённого правила Лопиталя, которое достаточно детально изложено и обсуждается в [3, гл. 2, § 1].

Лемма 1 (см. [24, теорема 1]). Пусть функции f и g дифференцируемы на некотором открытом луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Если существуют пределы

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |g(r)| = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)} := L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}, \quad (5)$$

то существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{g(r)} = L = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f'(r)}{g'(r)}. \quad (6)$$

Замечание 3. Специфика приведенного варианта обобщённого правила Лопиталя в том, что в условиях (5) не требуется традиционного условия существования бесконечного предела $\lim_{r \rightarrow +\infty} |f(r)| = +\infty$ для функции f из числителей в (5) и (6).

Теорема 1. Пусть M — модельная функция роста, а V — строго положительная дифференцируемая функция на некотором открытом луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$. Тогда эквивалентны следующие два утверждения:

- (i) Функция V — уточненная функция роста относительно функции M .
- (ii) Для функции

$$\rho_M(r) := \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)}, \quad r \in (r_0, +\infty), \quad (7)$$

существуют два конечных предела

$$\varrho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} \in \mathbb{R}^+, \quad (8)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \ln M(r) \rho'_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r)}{(\ln M(r))'} \rho'_M(r) = 0. \quad (9)$$

При выполнении любого из двух утверждений (i) или (ii) справедливы равенства

$$\varrho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)}. \quad (10)$$

Доказательство. Вычисляя производную функции (7), получим

$$\rho'_M(r) = \frac{(V'(r)/V(r)) \ln M(r) - (M'(r)/M(r)) \ln V(r)}{(\ln M(r))^2} = \frac{M'(r)}{M(r) \ln M(r)} \left(\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} - \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} \right),$$

откуда по определению (7) функции ρ_M имеем

$$\frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} + \frac{M(r) \ln M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) = \rho_M(r) + \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r). \quad (11)$$

Отсюда, если выполнено утверждение (ii) теоремы и существуют пределы (8)–(9), то

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) + \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = \varrho + 0 = \varrho \in \mathbb{R}^+.$$

Таким образом, существуют пределы (4), справедливо равенство (10), и по определению функции V выполнено утверждение (i) теоремы.

Обратно, пусть выполнено утверждение (i) теоремы, т.е. существует предел

$$\varrho := \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln M(r))'} \in \mathbb{R}^+. \quad (12)$$

По обобщённому правилу Лопиталя из леммы 1, применённому к паре функций $g := \ln M$ и $f := \ln V$ при значении $L := \varrho$ из (12), по свойствам модельной функции роста M из определения функции ρ_M в обозначении (7) существует

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln V(r)}{\ln M(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{f(r)}{g(r)} = L = \varrho.$$

Таким образом, доказано существование предела (8) из утверждения (ii) теоремы, а также установлено равенство (10). Наконец, из равенств (10) и (11) получаем

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) - \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M(r)V'(r)}{M'(r)V(r)} = \varrho - \varrho = 0,$$

что дает существование предела (9), равного нулю, и завершает вывод утверждения (ii) из утверждения (i). Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть положительная на луче $(r_0, +\infty) \subset \mathbb{R}^+$ функция ρ дифференцируема. Тогда эквивалентны следующие три утверждения:

- (i) Функция ρ — уточнённый порядок в смысле Валирона и $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \varrho \in \mathbb{R}^+$.
- (ii) Функция $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r \in (r_0, +\infty)$, — уточнённая функция роста относительно тождественной модельной функции роста $M := \text{id}: r \mapsto r$, что означает существование хотя бы одного предела из (4), а значит, и каждого в (4):

$$\varrho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rV'(r)}{V(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(\ln V(r))'}{(\ln r)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln v(x))'}{(\ln e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v'(x)}{v(x)} \in \mathbb{R}^+, \quad (13)$$

где, как и выше, $v(x) := V(e^x)$ при $x \in (\ln r_0, +\infty)$.

- (iii) Существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\rho(r) + r\rho'(r) \ln r) = \varrho. \quad (14)$$

Доказательство. Утверждение (i) следствия — это, ввиду определения уточнённого порядка в смысле Валирона, в точности утверждение (ii) теоремы 1 при $M := \text{id}$, где соотношения (8) и (9) — это соответственно первое и второе соотношения в (13).

Утверждение (ii) следствия в случае тождественной функции $M := \text{id}$ совпадает с утверждением (i) теоремы 1. Величина ϱ в (13) совпадает с величиной $\varrho := \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) \in \mathbb{R}^+$ из утверждения (i) следствия согласно равенству (10) теоремы 1.

Наконец, равенство (14) утверждения (iii) следствия — это в точности первое равенство в (13) из утверждения (ii) следствия, поскольку в данном случае

$$\frac{rV'(r)}{V(r)} = \frac{r(r^{\rho(r)})'}{r^{\rho(r)}} = r(\rho(r) \ln r)' = r\rho'(r) \ln r + \rho(r) \quad \text{при } r \in (r_0, +\infty).$$

Тем самым, следствие доказано. $\square$

Замечание 4. Эквивалентность утверждений (i) и (iii) следствия 1 показывает, что при определении дифференцируемого уточнённого порядка в смысле Валирона достаточно одного условия-предела (14), а не двух условий-пределов из определения (2) (см. Введение).

Определение 3. Функция ρ_M , определяемая равенством (7), называется *уточнённым порядком относительно модельной функции роста M* .

Замечание 5. В силу определения (7) уточненная функция роста V относительно модельной функции роста M представляется в виде

$$V(r) = M^{\rho_M(r)}(r), \quad r \in (r_0, +\infty). \quad (15)$$

Далее, если из контекста понятно, о какой модельной функции роста M идет речь, в обозначении ρ_M уточнённого порядка относительно M нижний индекс M часто будем опускать и писать $\rho(r) := \rho_M(r)$. Кроме того, в теореме 8 в конце статьи встретится обозначение $V_1(r) = M^{\rho_1(r)}(r)$, где у ρ_1 индекс M не указан.

Пример 1. Широкий класс модельных функций роста предоставляют важнейшие характеристики роста субгармонических функций $v \not\equiv -\infty$ на $\mathbb{C}$, а именно: её максимум $\mathcal{M}_v(r)$ на окружностях из введения, а также

$$\mathcal{C}_v(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(re^{i\theta}) d\theta, \quad \mathcal{B}_v(r) := \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r \mathcal{C}_v(s) s ds$$

— соответственно *интегральное среднее по окружности* и *по кругу радиуса r с центром в нуле* (см. [23, определение 2.6.7, теорема 2.6.8]).

3. Операторы J_0^i и J_∞^i .

Определение 4. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$ и ограничены снизу на любом отрезке $[a, N]$, причем $\varphi(r) > 0$. Определим оператор $J_0^i(\varepsilon, \varphi)$ равенством

$$\varepsilon_0^i(r) = J_0^i(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t) \varphi(t).$$

Так как $\inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t) \varphi(t) \leq \varepsilon(r) \varphi(r)$, то $\varepsilon_0^i \leq \varepsilon$. Очевидно, что $\varepsilon_0^i \varphi$ — убывающая функция.

Определение 5. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$, $\varphi(r) > 0$, и пусть функция $\varepsilon \varphi$ ограничена снизу. Определим оператор $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$ равенством

$$\varepsilon_\infty^i(r) = J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \inf_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t) \varphi(t).$$

Аналогично, из неравенства $\inf_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t) \varphi(t) \leq \varepsilon(r) \varphi(r)$ следует, что $\varepsilon_\infty^i \leq \varepsilon$. Очевидно, что $\varepsilon_\infty^i \varphi$ — возрастающая функция.

Докажем две теоремы о свойствах операторов $J_0^i(\varepsilon, \varphi)$ и $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$. Для доказательства используем идеи работы [4].

Теорема 2. Пусть φ — непрерывная, возрастающая, неограниченная функция на полуоси $[a, \infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а функция ε на $[a, \infty)$ возрастающая и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_0^i = J_0^i(\varepsilon, \varphi)$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\varepsilon_0^i \leq \varepsilon$;

- (ii) произведение $\varepsilon_0^i \varphi$ — убывающая функция на $[a, \infty)$;
- (iii) ε_0^i — возрастающая функция на $[a, \infty)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_0^i(r) = 0$;
- (iv) ε_0^i — непрерывная функция на $[a, \infty)$;
- (v) если произведение $\varepsilon_0^i \varphi$ не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a, \infty)$, для которой $\varepsilon(r_n + h) - \varepsilon(r_n - 0) > 0$ при любом значении $h > 0$ и одновременно $\varepsilon_0^i(r_n) = \varepsilon(r_n - 0)$;
- (vi) если φ — дифференцируемая функция, то

$$\frac{1}{|\varepsilon_0^i(r)|} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon_0^i(r+h) - \varepsilon_0^i(r)}{h} \right| \leq \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Справедливость утверждений (i) и (ii) была отмечена ранее. При выборе значения $r_2 > r_1$ получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^i(r_2) &= \frac{1}{\varphi(r_2)} \min \left\{ \inf_{t \in [a, r_1]} \varepsilon(t) \varphi(t), \inf_{t \in [r_1, r_2]} \varepsilon(t) \varphi(t) \right\} \geq \\ &\geq \frac{\min \{ \varepsilon_0^i(r_1) \varphi(r_1), \varepsilon(r_1) \varphi(r_2) \}}{\varphi(r_2)} = \min \left\{ \frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} \varepsilon_0^i(r_1), \varepsilon(r_1) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как $\varepsilon(r_1) \geq \varepsilon_0^i(r_1)$, $\varphi(r_2) \geq \varphi(r_1)$, $\varepsilon_0^i(r_1) \leq 0$, то $\varepsilon_0^i(r_2) \geq \varepsilon_0^i(r_1)$, и мы доказали, что функция ε_0^i является возрастающей.

Кроме того, пусть ϵ — произвольное отрицательное число. Найдем такое r_1 , что $\varepsilon(r_1) > \epsilon$. Затем мы можем выбрать число R таким образом, чтобы при $r_2 > R$ и фиксированном r_1 выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} \varepsilon_1(r_1) > \epsilon.$$

Тогда из неравенства (16) следует, что при $r_2 > R$ выполняется неравенство $\varepsilon_0^i(r_2) > \epsilon$. Утверждение (iii) теоремы доказано.

Далее из неравенства (16) и свойств (ii) и (iii) следует, что

$$\varepsilon_0^i(r_1) \left(\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} - 1 \right) \geq \varepsilon_0^i(r_2) - \varepsilon_0^i(r_1) \geq 0. \quad (17)$$

Из этого неравенства и непрерывности функции φ следует непрерывность функции ε_0^i , и утверждение (iv) теоремы доказано.

Если теперь предположить, что функция φ дифференцируема, то из неравенства (17) следует утверждение (vi) теоремы.

Далее, пусть T есть значение функции $\varepsilon_0^i \varphi$ и $T \neq \varepsilon_0^i(a) \varphi(a)$. Пусть

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_0^i(t) \varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \inf E.$$

Из непрерывности функции $\varepsilon_0^i \varphi$ следует, что $r(T) > a$ и $\varepsilon_0^i(r(T)) \varphi(r(T)) = T$.

Докажем, что для любого $\sigma \in (0, r - a]$ имеет место равенство

$$\varepsilon_0^i(r) \varphi(r) = \inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t) \varphi(t) = \inf_{t \in (r - \sigma, r]} \varepsilon(t) \varphi(t). \quad (18)$$

Предположим противное, а именно, пусть существует такое $\sigma_0 \in (0, r - a]$, что

$$\inf_{t \in (r - \sigma_0, r]} \varepsilon(t) \varphi(t) > \inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t) \varphi(t),$$

т.е.

$$\inf_{t \in [a, r - \sigma_0]} \varepsilon(t) \varphi(t) = \inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t) \varphi(t).$$

В этом случае выполняется равенство

$$\varepsilon_0^i(r - \sigma_0) \varphi(r - \sigma_0) = \varepsilon_0^i(r) \varphi(r) = T,$$

что противоречит определению числа $r = r(T)$. Тем самым, равенство (18) доказано.

Из (18) следует, что для любого $\sigma \in (0, r - a]$ найдется такая точка $\bar{t} \in (r - \sigma, r]$, что

$$\varepsilon(r - \sigma)\varphi(\bar{t}) \leq \varepsilon(\bar{t})\varphi(\bar{t}) < \varepsilon_0^i(r)\varphi(r) + \sigma.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, получим, с учетом п. (i),

$$\varepsilon(r - 0)\varphi(r) \leq \varepsilon_0^i(r)\varphi(r), \quad \varepsilon(r - 0) = \varepsilon_0^i(r).$$

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r - 0) - \varepsilon(r + h) < 0$, то положим

$$\bar{r} = \bar{r}(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r - 0) - \varepsilon(r + h) = 0$, то положим

$$\text{barr}(T) = \sup\{t: \varepsilon(t) = \varepsilon(r - 0)\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar{r} - 0) - \varepsilon(\bar{r} + h) < 0$. Пусть $\bar{r} > r$. Функция ε_0^i есть возрастающая миноранта функции ε . Поскольку $\varepsilon_0^i(r) = \varepsilon(r - 0) = \varepsilon(\bar{r} - 0)$, то

$$\varepsilon_0^i(\bar{r}) \geq \varepsilon_0^i(r) = \varepsilon(\bar{r} - 0), \quad \varepsilon_0^i(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r} - 0).$$

Таким образом, мы показали, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^i(\bar{r}(T)) &= \varepsilon(\bar{r}(T) - 0), \\ \varepsilon(\bar{r}(T) - 0) - \varepsilon(\bar{r}(T) + h) &< 0 \quad \text{для любого } h > 0, \\ \varepsilon_0^i(r(T))\varphi(r(T)) &= T. \end{aligned}$$

Предположим, что функция $\varepsilon_0^i\varphi$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда можно выбрать строго возрастающую последовательность T_n значений функции $\varepsilon_0^i\varphi$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_0^i(t)\varphi(t).$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}(T_n) = \infty$, и в качестве последовательности r_n в п. 5) можно взять $r_n = \bar{r}(T_n)$.

Утверждение (v) доказано. Теорема 2 полностью доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть φ — непрерывная возрастающая неограниченная функция на $[a, \infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а функция ε — убывающая на $[a, \infty)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$. Тогда для $\varepsilon_\infty^i := J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$ справедливы следующие утверждения:

- (i) $\varepsilon_\infty^i \leq \varepsilon$;
- (ii) произведение $\varepsilon_\infty^i\varphi$ — возрастающая функция на $[a, \infty)$;
- (iii) ε_∞^i — убывающая функция на $[a, \infty)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_\infty^i(r) = 0$;
- (iv) ε_∞^i — непрерывная функция на $[a, \infty)$;
- (v) если произведение $\varepsilon_\infty^i\varphi$ не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a, \infty)$, для которой $\varepsilon_\infty^i(r_n) = \varepsilon(r_n + 0)$, $\varepsilon(r_n + 0) - \varepsilon(r_n - h) < 0$ для любого $h > 0$;
- (vi) если φ — дифференцируемая функция, то

$$\frac{1}{\varepsilon_\infty^i(r)} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon_\infty^i(r + h) - \varepsilon_\infty^i(r)}{h} \right| \leq \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Справедливость первых двух утверждений теоремы была отмечена при определении оператора $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$. Далее при $r_2 > r_1$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty^i(r_1) &= \frac{1}{\varphi(r_1)} \min \left\{ \inf_{t \in [r_1, r_2]} \varepsilon(t)\varphi(t), \inf_{t \in (r_2, \infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) \right\} \geq \\ &\geq \frac{1}{\varphi(r_1)} \min \left\{ \varepsilon(r_2)\varphi(r_1), \varepsilon_\infty^i(r_2)\varphi(r_2) \right\} = \min \left\{ \varepsilon(r_2), \frac{\varphi(r_2)}{\varphi(r_1)} \varepsilon_\infty^i(r_2) \right\}. \end{aligned}$$

С помощью этого неравенства способом, указанным в предыдущей теореме, доказываются утверждения (iii), (iv), (vi) теоремы.

Далее, пусть T — значение функции $\varepsilon_\infty^i \varphi$,

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_1(t)\varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \sup E.$$

Тогда для любого $\sigma > 0$ выполняется равенство

$$\varepsilon_\infty^i(r)\varphi(r) = \inf_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) = \inf_{t \in [r, r+\sigma)} \varepsilon(t)\varphi(t). \quad (19)$$

Предположим противное: пусть существует такое $\sigma_0 > 0$, что

$$\inf_{t \in [r, r+\sigma_0)} \varepsilon(t)\varphi(t) > \inf_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t)\varphi(t),$$

т.е.

$$\inf_{t \in [a, r+\sigma_0]} \varepsilon(t)\varphi(t) = \inf_{t \in [a, r]} \varepsilon(t)\varphi(t).$$

Из этого равенства следует, что

$$\varepsilon_\infty^i(r + \sigma_0)\varphi(r + \sigma_0) = \varepsilon_\infty^i(r)\varphi(r) = T,$$

что противоречит определению числа T . Тем самым, равенство (19) доказано.

Из (19) следует, что для любого $\sigma > 0$ найдется такая точка $\bar{t} \in [r, r + \sigma)$, что

$$\varepsilon(r + \sigma)\varphi(\bar{t}) \leq \varepsilon(\bar{t})\varphi(\bar{t}) < \varepsilon_\infty^i(r)\varphi(r) + \sigma.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\sigma \rightarrow +0$, в силу п. (i) получим

$$\varepsilon(r + 0) \leq \varepsilon_\infty^i(r), \quad \varepsilon_\infty^i(r) = \varepsilon(r + 0).$$

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r + 0) - \varepsilon(r - h) < 0$, то положим

$$\bar{r} = \bar{r}(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r + 0) - \varepsilon(r - h) = 0$, то положим

$$\bar{r}(T) = \inf\{t : \varepsilon(t) = \varepsilon(r + 0)\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ либо выполняется неравенство $\varepsilon(\bar{r} + 0) - \varepsilon(\bar{r} - h) < 0$, и в этом случае полагаем $\varepsilon(t) = \varepsilon(a)$ при $t < a$, либо $\bar{r} = a$. Так как ε_∞^i — убывающая миноранта функции ε , то

$$\varepsilon_\infty^i(\bar{r}) \geq \varepsilon_\infty^i(r) = \varepsilon(r + 0) = \varepsilon(\bar{r} + 0).$$

Отсюда следует, что $\varepsilon_\infty^i(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r} + 0)$. Таким образом, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty^i(\bar{r}(T)) &= \varepsilon(\bar{r}(T) + 0), \\ \varepsilon(\bar{r}(T) + 0) - \varepsilon(\bar{r}(T) - h) &< 0 \quad \text{для любого } h > 0, \text{ либо } \bar{r}(T) = a, \\ \varepsilon_\infty^i(r(T))\varphi(r(T)) &= T. \end{aligned}$$

Далее, повторяя рассуждения предыдущей теоремы, получаем, что справедливо утверждение (v) теоремы. Теорема 3 полностью доказана. $\square$

4. Операторы J_0 и J_∞ . Операторы J_0 и J_∞ были введены А. Ф. Гришиным (см. [4]).

Определение 6. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$ и ограничены сверху на любом отрезке $[a, N]$, причем $\varphi(r) > 0$ при всех $r \in [a, \infty)$. Оператор $J_0(\varepsilon, \varphi)$ определяется равенством

$$J_0(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \sup_{t \in [a, r]} \varepsilon(t)\varphi(t), \quad r \in [a, \infty).$$

Теорема 4. Пусть φ — непрерывная, возрастающая, неограниченная функция на полуоси $[a, \infty)$ и $\varphi(a) > 0$, а ε — убывающая функция на $[a, \infty)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_0 := J_0(\varepsilon, \varphi)$ при $r \in [a, \infty)$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\varepsilon_0 \geq \varepsilon$ на $[a, \infty)$;
- (ii) произведение $\varepsilon_0 \varphi$ — возрастающая функция на $[a, \infty)$;
- (iii) ε_0 — убывающая функция на $[a, \infty)$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_0(r) = 0$;
- (iv) произведение $\varepsilon_0 \varphi$ — непрерывная функция на $[a, \infty)$;

- (v) если произведение $\varepsilon_0\varphi$ не постоянная функция ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a, \infty)$, для которой $\varepsilon(r_n - 0) - \varepsilon(r_n + h) > 0$ при любом значении $h > 0$ и одновременно $\varepsilon_0(r_n) = \varepsilon(r_n - 0)$;
- (vi) если φ — дифференцируемая функция, то

$$\frac{1}{\varepsilon_0(r)} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon_0(r+h) - \varepsilon_0(r)}{h} \right| \leq \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Теорема 4 доказана А. Ф. Гришиным в [4]. Её доказательство аналогично доказательству теоремы 2, поэтому приведём только некоторые рассуждения, не претендуя на авторство.

- (i) Так как $\sup_{t \in [a, r]} \varepsilon(t)\varphi(t) \geq \varepsilon(r)\varphi(r)$, то $\varepsilon_0 \geq \varepsilon$.

Утверждение (ii) следует из неравенства $\sup_{t \in E} f(t) \leq \sup_{t \in E'} f(t)$, если $E \subset E'$.

- (iii) Пусть $r_1 < r_2$. Так как $\varepsilon_0(r_1) \geq \varepsilon(r_1)$, $\varphi(r_2) \geq \varphi(r_1)$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(r_1) &= \max\{\varepsilon_0(r_1), \varepsilon(r_1)\} \geq \\ &\geq \max\left\{\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1), \varepsilon(r_1)\right\} = \frac{1}{\varphi(r_2)} \max\left\{\varphi(r_1)\varepsilon_0(r_1), \varepsilon(r_1)\varphi(r_2)\right\} \geq \\ &\geq \frac{1}{\varphi(r_2)} \max\left\{\sup_{t \in [a, r_1]} \varepsilon(t)\varphi(t), \sup_{t \in [r_1, r_2]} \varepsilon(t)\varphi(t)\right\} = \frac{1}{\varphi(r_2)} \sup_{t \in [a, r_2]} \varepsilon(t)\varphi(t) = \varepsilon_0(r_2). \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует, что ε_0 — убывающая функция.

Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное фиксированное число, а $r_1 > 0$ выбрано так, что $\varepsilon(r_1) < \epsilon$. Выберем число $R > 0$ таким, чтобы при $r_2 > R$ и фиксированном r_1 выполнялось неравенство

$$\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1) < \epsilon.$$

Тогда из неравенства (20) получаем

$$\varepsilon_0(r_2) \leq \max\left\{\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)}\varepsilon_0(r_1), \varepsilon(r_1)\right\} < \epsilon$$

при $r_2 > R$. Свойство (iii) доказано.

- (iv) Непрерывность функции ε_0 следует из непрерывности φ и неравенства

$$\varepsilon_0(r_1) \left(\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} - 1 \right) \leq \varepsilon_0(r_2) - \varepsilon_0(r_1) \leq 0.$$

Если φ — дифференцируемая функция, то отсюда следует утверждение (vi) теоремы.

- (v) Далее, пусть T — значение функции $\varepsilon_0\varphi$,

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_0(t)\varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \inf E.$$

Для любого $\sigma \in (0, r - a]$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in [a, r]} \varepsilon(t)\varphi(t) = \sup_{t \in (r-\sigma, r]} \varepsilon(t)\varphi(t),$$

которое доказывается аналогично равенству (18). Из него следует, что $\varepsilon(r - 0) = \varepsilon_0(r)$.

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r - 0) - \varepsilon(r + h) > 0$, то положим

$$\bar{r} = \bar{r}(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r - 0) - \varepsilon(r + h) = 0$, то положим

$$\bar{r}(T) = \sup \{t : \varepsilon(t) = \varepsilon(r - 0)\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar{r}-0) - \varepsilon(\bar{r}+h) > 0$. Функция ε_0 — убывающая мажоранта функции ε . Поскольку $\varepsilon_0(r) = \varepsilon(r-0) = \varepsilon(\bar{r}-0)$, то

$$\varepsilon_0(\bar{r}) \leq \varepsilon_0(r) = \varepsilon(\bar{r}-0), \quad \varepsilon_0(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r}-0).$$

Таким образом, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\bar{r}(T)) &= \varepsilon(\bar{r}(T)-0), \\ \varepsilon(\bar{r}(T)-0) - \varepsilon(\bar{r}(T)+h) &> 0 \quad \text{для любого } h > 0, \\ \varepsilon_0(\bar{r}(T)) \varphi(\bar{r}(T)) &= T. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что функция $\varepsilon_0 \varphi$ не является постоянной ни в какой окрестности бесконечности. Тогда мы можем выбрать такую строго возрастающую последовательность T_n значений функции $\varepsilon_0 \varphi$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_0(t) \varphi(t).$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{r}(T_n) = \infty$, и в качестве последовательности r_n в п. (v) теоремы можно взять $r_n = \bar{r}(T_n)$. Утверждение (v) доказано. $\square$

Определение 7. Пусть функции ε и φ определены на полуоси $[a, \infty)$, причем $\varphi(r) > 0$ при всех $r \in [a, \infty)$, а функция-произведение $\varepsilon \varphi$ ограничена сверху. Оператор $J_\infty(\varepsilon, \varphi)$ определяется равенством

$$J_\infty(\varepsilon, \varphi)(r) := \frac{1}{\varphi(r)} \sup_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t) \varphi(t), \quad r \in [a, \infty).$$

Теорема 5. Пусть φ — возрастающая, непрерывная, неограниченная функция на полуоси $[a, \infty)$, $\varphi(a) > 0$, а ε — возрастающая на $[a, \infty)$ функция и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$. Положим $\varepsilon_\infty = J_\infty(\varepsilon, \varphi)$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $\varepsilon_\infty \geq \varepsilon$ на $[a, \infty)$;
- (ii) произведение $\varepsilon_\infty \varphi$ — убывающая функция на $[a, \infty)$;
- (iii) ε_∞ — возрастающая функция на $[a, \infty)$ с $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_0(r) = 0$;
- (iv) произведение $\varepsilon_\infty \varphi$ — непрерывная функция на $[a, \infty)$;
- (v) если произведение $\varepsilon_\infty \varphi$ не является постоянной функцией ни в какой окрестности бесконечности, то существует возрастающая неограниченная последовательность точек r_n на $[a, \infty)$, для которой $\varepsilon(r_n+0) - \varepsilon(r_n-h) > 0$ при любом значении $h > 0$ и одновременно $\varepsilon_\infty(r_n) = \varepsilon(r_n+0)$;
- (vi) если φ — дифференцируемая функция, то

$$\frac{1}{\varepsilon_\infty(r)} \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varepsilon_\infty(r+h) - \varepsilon_\infty(r)}{h} \right| \leq \frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}.$$

Доказательство. Теорема 5 доказана А. Ф. Гришиным в [4]. Её доказательство аналогично доказательству теорем 2, 3, 4, поэтому приведём только некоторые рассуждения.

- (i) Так как $\sup_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t) \varphi(t) \geq \varepsilon(r) \varphi(r)$, то $\varepsilon_\infty \geq \varepsilon$.

Утверждение (ii) следует из неравенства $\sup_{t \in E} f(t) \geq \sup_{t \in E'} f(t)$, если $E' \subset E$.

- (iii) Пусть $r_2 > r_1$. Так как $\varepsilon_\infty(r) \geq \varepsilon(r)$, $\varphi(r_2) \geq \varphi(r_1)$, $\varepsilon \leq 0$, $\varepsilon_\infty \leq 0$, то

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty(r_1) &= \frac{1}{\varphi(r_1)} \max \left\{ \sup_{t \in [r_1, r_2]} \varepsilon(t) \varphi(t), \sup_{t \in (r_2, \infty)} \varepsilon(t) \varphi(t) \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \varepsilon(r_2), \frac{\varphi(r_2)}{\varphi(r_1)} \varepsilon_\infty(r_2) \right\} \leq \max \{ \varepsilon(r_2), \varepsilon_\infty(r_2) \} \leq \varepsilon_\infty(r_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ε_∞ — возрастающая функция. Из последней цепочки неравенств способом, указанным в теоремах 2, 3, 4, доказываются утверждения (iii), (iv), (vi) теоремы.

(v) Далее пусть T — значение функции $\varepsilon_\infty \varphi$,

$$E := E(T) = \{t : \varepsilon_1(t)\varphi(t) = T\}, \quad r = r(T) = \sup E.$$

Для любого $\sigma > 0$ имеет место равенство

$$\sup_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t)\varphi(t) = \sup_{t \in [r, r+\sigma)} \varepsilon(t)\varphi(t),$$

которое доказывается аналогично равенству (19). Из него следует, что $\varepsilon(r+0) = \varepsilon_\infty(r)$.

Если для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) > 0$, то положим

$$\bar{r} = \bar{r}(T) = r = r(T).$$

Если для некоторого $h > 0$ выполняется равенство $\varepsilon(r+0) - \varepsilon(r-h) = 0$, то положим

$$\bar{r}(T) = \inf \{t : \varepsilon(t) = \varepsilon(r+0)\}.$$

Тогда для любого $h > 0$ выполняется неравенство $\varepsilon(\bar{r}+0) - \varepsilon(\bar{r}-h) > 0$ (считаем, что $\varepsilon(t) = \varepsilon(a)$ при $t < a$), либо $\bar{r} = a$.

Функция ε_∞ — возрастающая мажоранта функции ε . Поскольку

$$\varepsilon_\infty(\bar{r}) \leq \varepsilon_\infty(r) = \varepsilon(r+0) = \varepsilon(\bar{r}+0),$$

то $\varepsilon_\infty(\bar{r}) = \varepsilon(\bar{r}+0)$. Таким образом, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty(\bar{r}(T)) &= \varepsilon(\bar{r}(T)+0), \\ \varepsilon(\bar{r}(T)+0) - \varepsilon(\bar{r}(T)-h) &> 0 \quad \text{для любого } h > 0, \text{ либо } \bar{r} = a, \\ \varepsilon_\infty(\bar{r}(T))\varphi(\bar{r}(T)) &= T. \end{aligned}$$

Далее, повторяя рассуждения теорем 2, 3, 4, получаем, что справедливо утверждение (v) теоремы. Это завершает схему доказательства теоремы. $\square$

5. Собственная уточненная функция роста. Применим теоремы 4 и 5 при построения собственной уточненной функции роста для возрастающей строго положительной функции A конечного порядка относительно модельной функции роста M .

Теорема 6. Пусть M — модельная функция роста, A — возрастающая строго положительная функция конечного порядка относительно модельной функции роста M в том смысле, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} = \varrho \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует такая уточнённая функция роста $V : r \mapsto (M(r))^{\varrho + \psi(r)}$ относительно модельной функции роста M , что

- (i) $\rho(r) = \varrho + \psi(r)$ — абсолютно непрерывная монотонная функция;
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0$, $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1$;
- (iii) если $\psi \not\equiv 0$, то функции ψ и $\psi \ln^2 M$ монотонны при $r \geq r_0$, где $M(r_0) \geq e$, и имеют различные направления роста. В частности,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} \right| \leq \frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r) \ln M(r)} \quad \text{при } r \geq r_0.$$

Кроме того, в этом случае $A \leq V$, а также существуют такие последовательности $r_n \rightarrow \infty$ и $t_{k,n}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

Доказательство. Положим

$$\psi_1(r) = \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} - \varrho.$$

Тогда $\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \psi_1(r) = 0$. Рассмотрим два случая с вариантами.

1. Сперва предположим, что существует такая последовательность $r_n \rightarrow +\infty$, что $\psi_1(r_n) \geq 0$. В этом случае положим

$$\psi_2(r) = \sup_{u \in [r, +\infty)} \psi_1(u).$$

Тогда ψ_2 — убывающая функция, $\psi_2 \geq \psi_1$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_2(r) = 0$. Причем, если для некоторого r неравенство $\psi_2(r-0) > \psi_2(r+h)$ выполняется для любого $h > 0$, то существует последовательность t_n , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(t_n) = \psi_2(r-0). \quad (21)$$

Действительно, так как $\psi_1 \leq \psi_2$, то

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow r} \psi_1(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow r} \psi_2(t) = \psi_2(r-0).$$

Поэтому, если равенство (21) не выполнено, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r-\delta, r+\delta]$ имеет место неравенство $\psi_1(t) < \psi_2(r-0) - \epsilon$. Тогда при $x \in (r-\delta, r+\delta)$ получаем соотношения

$$\psi_2(x) = \sup_{t \in [x, \infty)} \psi_1(t) = \max \left\{ \sup_{t \in [x, r+\delta]} \psi_1(t), \psi_2(r+\delta) \right\} \leq \max \{ \psi_2(r-0) - \epsilon, \psi_2(r+\delta) \}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \rightarrow r-0$, имеем

$$\psi_2(r-0) \leq \max \{ \psi_2(r-0) - \epsilon, \psi_2(r+\delta) \} < \psi_2(r-0).$$

Получили противоречие и, тем самым, равенство (21) доказано.

Далее рассмотрим два альтернативных предположения.

Вариант 1.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство

$$\psi_2(r)(\ln M(r))^{3/2} \leq 1. \quad (22)$$

Положим в этом случае $\psi(r) \equiv 0$. Тогда выполняются соотношения $A(r_n) \geq M^e(r_n)$ на последовательности $r_n \rightarrow +\infty$ и

$$A(r) \leq (M(r))^e e^{1/\sqrt{\ln r}} \quad \text{при } r \in U.$$

Отсюда получаем

$$\frac{A(r)}{M^e(r)} \leq e^{1/\sqrt{\ln r}} \quad \text{при } r \in U, \quad \frac{A(r_n)}{M^e(r_n)} \geq 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{M^e(r)} = 1.$$

В этом варианте $V = M^e$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 1.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 1.1 неверно, то есть неравенство (22) не выполняется ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r' , что

$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} > 1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^2 > \sqrt{\ln M(r')}. \quad (23)$$

Положим тогда $\psi(r) = J_0(\psi_2, \ln^2 M)(r)$. В качестве числа a , участвующего в определении оператора J_0 , можно взять число r_0 , для которого $M(r_0) \geq e$. В этом случае $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \leq V(r) = M(r)^{e+\psi(r)}$ при $r \geq r_0$. Кроме того, из неравенства (23) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда согласно п. (v) теоремы 4 существует последовательность $r'_n \rightarrow +\infty$, для которой

$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n-0), \quad \psi_2(r'_n-0) - \psi_2(r'_n+h) > 0 \quad \text{для любого } h > 0.$$

При этом из соотношения (21) следует, что существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n-0) = \psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k) = M^{e+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^{e+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n),$$

а оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 4, если в определении оператора $J_0(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Таким образом, теорема в этом случае доказана.

2. Пусть теперь существует число a , для которого $\psi_1(r) < 0$ при $r \geq a$. В этом случае обозначим

$$\psi_2(r) = \sup_{x \in [a, r]} \psi_1(x).$$

Тогда ψ_2 — возрастающая функция, причем $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_2(r) = 0$ и $\psi_1 \leq \psi_2$. Кроме того, если для некоторого r выполняется неравенство $\psi_2(r+0) - \psi_2(r-h) > 0$ для достаточно малых $h > 0$, то существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(t_k) = \psi_2(r+0). \quad (24)$$

Это утверждение доказывается аналогично соотношению (21). Действительно, ввиду неравенства $\psi_1 \leq \psi_2$ имеем соотношения

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow r} \psi_1(t) \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow r} \psi_2(t) = \psi_2(r+0).$$

Поэтому, если равенство (24) не верно, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r - \delta, r + \delta]$ будет выполняться неравенство $\psi_1(t) < \psi_2(r+0) - \epsilon$. Тогда при $x \in (r - \delta, r + \delta)$ имеют место соотношения

$$\psi_2(x) = \sup_{t \in [a, x]} \psi_1(t) = \max \left\{ \psi_2(r - \delta), \sup_{t \in [r - \delta, x]} \psi_1(t) \right\} \leq \max \{ \psi_2(r - \delta), \psi_2(r+0) - \epsilon \}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \rightarrow r+0$, имеем

$$\psi_2(+0) \leq \max \{ \psi_2(r - \delta), \psi_2(r+0) - \epsilon \} < \psi_2(r+0).$$

Получили противоречие; тем самым, равенство (24) доказано.

Рассмотрим два варианта.

Вариант 2.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство

$$\psi_2(r)(\ln M(r))^{3/2} \geq -1 \quad (25)$$

в некоторой окрестности бесконечности. Положим тогда $\psi(r) \equiv 0$. В этом случае в некоторой окрестности бесконечности выполняются неравенства

$$\exp \left(-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}} \right) M^e(r) \leq A(r) < M^e(r).$$

Тогда $V(r) = M^e(r)$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 2.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 2.1 неверно, т.е. неравенство (25) не выполнено ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r' , что

$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} < -1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^2 < -\sqrt{\ln M(r')}. \quad (26)$$

Положим тогда $\psi(r) = J_\infty(\psi_2, \ln^2 M)(r)$. В этом случае $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \leq V(r) = M(r)^{\rho + \psi(r)}$. Кроме того, из неравенства (26) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда по п. (v) теоремы 5 существует последовательность $r'_n \rightarrow +\infty$, для которой

$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n + 0), \quad \psi_2(r'_n + 0) - \psi_2(r'_n - h) > 0 \quad \text{для любого } h > 0.$$

При этом из соотношения (24) следует, что существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(t_k) = \psi_2(r'_n + 0) = \psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k) = M^{e + \psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^{e + \psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n).$$

Оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 5, если в определении оператора $J_\infty(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Тем самым теорема полностью доказана. $\square$

6. Собственная миноранта. Применим теоремы 2 и 3 при построения собственной миноранты для возрастающей строго положительной функции A конечного порядка относительно модельной функции роста M , которая оценивает функцию A снизу.

Теорема 7. Пусть M — модельная функция роста, A — возрастающая строго положительная функция конечного нижнего порядка относительно модельной функции роста M в том смысле, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} = \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Тогда существует уточнённая функция роста $V : r \mapsto (M(r))^{\alpha + \psi(r)}$ относительно модельной функции роста M , обладающая следующими свойствами:

- (i) $\rho(r) = \alpha + \psi(r)$ — абсолютно непрерывная монотонная функция;
- (ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 1$;
- (iii) если $\psi \not\equiv 0$, то функции ψ и $\psi \ln^2 M$ — монотонные при $r \geq r_0$, где $M(r_0) \geq e$, и имеют различные направления роста. В частности,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| \frac{\psi(r+h) - \psi(r)}{h} \right| \leq \frac{2|\psi(r)|M'(r)}{M(r) \ln M(r)} \quad \text{при } r \geq r_0.$$

Кроме того, в этом случае $A \geq V$, а также существуют такие последовательности $r_n \rightarrow \infty$ и $t_{k,n}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{k,n} = r_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A(t_{k,n}) = V(r_n).$$

Доказательство. Положим

$$\psi_1(r) = \frac{\ln A(r)}{\ln M(r)} - \alpha.$$

Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_1(r) = 0$. Рассмотрим два случая с вариантами.

1. Сперва предположим, что существует такая последовательность $r_n \rightarrow +\infty$, что $\psi_1(r_n) \leq 0$. В этом случае положим

$$\psi_2(r) = \inf_{u \in [r, +\infty)} \psi_1(u).$$

Тогда ψ_2 — возрастающая функция, $\psi_2 \leq \psi_1$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_2(r) = 0$. Причем, если для некоторого r неравенство $\psi_2(r+0) < \psi_2(r+h)$ выполняется для любого $h > 0$, то существует последовательность t_n , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = r, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_1(t_n) = \psi_2(r+0). \quad (27)$$

Действительно, так как $\psi_2 \leq \psi_1$, то

$$\psi_2(r+0) = \lim_{t \rightarrow r} \psi_2(t) \leq \lim_{t \rightarrow r} \psi_1(t).$$

Поэтому, если равенство (27) не выполнено, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r - \delta, r + \delta]$ имеет место неравенство $\psi_1(t) > \psi_2(r+0) + \epsilon$. Тогда при $x \in (r - \delta, r + \delta)$ получаем соотношения

$$\psi_2(x) = \inf_{t \in [x, \infty)} \psi_1(t) = \min \left\{ \inf_{t \in [x, r+\delta]} \psi_1(t), \psi_2(r+\delta) \right\} \geq \min \{ \psi_2(r+0) + \epsilon, \psi_2(r+\delta) \}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \rightarrow r+0$, имеем

$$\psi_2(r+0) \geq \min \{ \psi_2(r+0) + \epsilon; \psi_2(r+\delta) \} > \psi_2(r+0).$$

Получили противоречие и, тем самым, равенство (27) доказано.

Далее рассмотрим два альтернативных предположения.

Вариант 1.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство

$$\psi_2(r)(\ln M(r))^{3/2} \geq -1. \quad (28)$$

Положим тогда $\psi(r) \equiv 0$. В этом случае выполняются неравенства $A(r_n) \leq M^\alpha(r_n)$ на последовательности $r_n \rightarrow +\infty$ и

$$A(r) \geq (M(r))^\alpha e^{-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}} \quad \text{при } r \in U.$$

Отсюда получаем

$$\frac{A(r)}{M^\alpha(r)} \geq e^{-\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}} \quad \text{при } r \in U, \quad \frac{A(r_n)}{M^\alpha(r_n)} \leq 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{M^\alpha(r)} = 1.$$

В этом варианте $V = M^\alpha$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 1.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 1.1 неверно, т.е. неравенство (28) не выполняется ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r' , что

$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} < -1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^2 < -\sqrt{\ln M(r')}. \quad (29)$$

Положим тогда $\psi(r) = J_0^i(\psi_2, \ln^2 M)(r)$. В качестве числа a , участвующего в определении оператора J_0^i , можно взять число r_0 , для которого $M(r_0) \geq e$. В этом случае $\psi_1 \geq \psi_2 \geq \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \geq V(r) = M(r)^{\alpha+\psi(r)}$ при $r \geq r_0$. Кроме того, из неравенства (29) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не постоянна ни в какой окрестности бесконечности. Тогда по п. (v) теоремы 2 существует последовательность $r'_n \rightarrow +\infty$, для которой

$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n - 0), \quad \psi_2(r'_n + h) - \psi_2(r'_n - 0) > 0$$

для любого $h > 0$. При этом из соотношения (27) следует, что существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n + 0) = \psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k) = M^{\alpha+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^{\alpha+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n),$$

а оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 2, если в определении оператора $J_0^i(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Теорема в этом случае доказана.

2. Пусть теперь существует число a , для которого $\psi_1(r) > 0$ при $r \geq a$. В этом случае обозначим

$$\psi_2(r) = \inf_{x \in [a, r]} \psi_1(x).$$

Тогда ψ_2 — убывающая функция, $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_2(r) = 0$ и $\psi_1 \geq \psi_2$. Причем, если для некоторого r выполняется неравенство, $\psi_2(r - h) > \psi_2(r - 0)$ для достаточно малых $h > 0$, то существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(t_k) = \psi_2(r - 0). \quad (30)$$

Это утверждение доказывается аналогично соотношению (27). Действительно, в силу $\psi_1 \geq \psi_2$

$$\liminf_{t \rightarrow r} \psi_1(t) \geq \liminf_{t \rightarrow r} \psi_2(t) = \psi_2(r - 0).$$

Поэтому, если равенство (30) не верно, то существуют числа $\epsilon > 0$ и $\delta > 0$, для которых при $t \in [r - \delta, r + \delta]$ будет выполняться неравенство $\psi_1(t) > \psi_2(r - 0) + \epsilon$. Тогда при $x \in (r - \delta, r + \delta)$ имеют место соотношения

$$\psi_2(x) = \inf_{t \in [a, x]} \psi_1(t) = \min \left\{ \psi_2(r - \delta), \inf_{t \in [r - \delta, x]} \psi_1(t) \right\} \geq \min \{ \psi_2(r - \delta), \psi_2(r - 0) + \epsilon \}.$$

Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \rightarrow r - 0$, имеем

$$\psi_2(r - 0) \geq \min \{ \psi_2(r - \delta), \psi_2(r - 0) + \epsilon \} > \psi_2(r - 0).$$

Получили противоречие; тем самым, равенство (30) доказано.

Рассмотрим два варианта.

Вариант 2.1. Предположим, что существует такая окрестность бесконечности $U = (N, \infty)$, что для $r \in U$ выполняется неравенство

$$\psi_1(r)(\ln M(r))^{3/2} \leq 1 \quad (31)$$

в некоторой окрестности бесконечности. Положим тогда $\psi(r) \equiv 0$. В этом случае в некоторой окрестности бесконечности выполняются равенства

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{\ln M(r)}}\right) M^\alpha(r) \geq A(r) > M^\alpha(r).$$

Тогда $V = M^\alpha$ — необходимая уточненная функция роста.

Вариант 2.2. Рассмотрим случай, когда предположение варианта 2.1 неверно, т.е. неравенство (31) не выполнено ни в какой окрестности бесконечности. В этом случае в любой окрестности бесконечности найдется такая точка r' , что

$$\psi_2(r')(\ln M(r'))^{3/2} > 1 \quad \text{или} \quad \psi_2(r')(\ln M(r'))^2 > \sqrt{\ln M(r')}. \quad (32)$$

Положим тогда $\psi = J_\infty^i(\psi_2, \ln^2 M)$. В этом случае $\psi_1 \geq \psi_2 \geq \psi$. Отсюда следует неравенство $A(r) \geq V(r) = M(r)^{\alpha+\psi(r)}$. Кроме того, из неравенства (32) следует, что функция $\psi \ln^2 M$ не является постоянной ни в какой окрестности бесконечности. Тогда согласно п. (v) теоремы 3 существует последовательность $r'_n \rightarrow +\infty$, для которой

$$\psi(r'_n) = \psi_2(r'_n + 0), \quad \psi_2(r'_n + 0) - \psi_2(r'_n - h) < 0$$

для любого $h > 0$. При этом из соотношения (30) следует, что существует такая последовательность t_k , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = r'_n, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_1(t_k) = \psi_2(r'_n - 0) = \psi(r'_n).$$

Тогда

$$A(t_k) = M^{\alpha+\psi_1(t_k)}(t_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M^{\alpha+\psi(r'_n)}(r'_n) = V(r'_n).$$

Оценка производной в п. (iii) следует из п. (vi) теоремы 3, если в определении оператора $J_\infty^i(\varepsilon, \varphi)$ положить $\varepsilon = \psi_2$, $\varphi = \ln^2 M$. Теорема полностью доказана. $\square$

7. Промежуточная функция роста. В теории роста целых и субгармонических функций для $M = \text{id}$ находит применение следующая теорема, которую мы докажем в общем случае.

Теорема 8. Пусть A — положительная функция на $\mathbb{R}^+$ и $V(r) = M^{\rho(r)}(r)$ — уточненная функция роста относительно модельной функции роста M , для которой

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V(r)} = 0.$$

Тогда существует такой уточненный порядок ρ_1 относительно модельной функции роста M , что для функции $V_1(r) = M^{\rho_1(r)}(r)$ имеют место равенства

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(r)}{V(r)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A(r)}{V_1(r)} = 0.$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon(r) = \frac{A(r)}{V(r)}, \quad \varepsilon_1(r) = \sup_{t \in [r, \infty)} \varepsilon(t).$$

Тогда ε_1 — убывающая функция, $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon_1(r) = 0$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Положим

$$\varepsilon_2(r) = J_0(\varepsilon_1, \ln M)(r).$$

Тогда по теореме 4 функция ε_2 является убывающей и $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$, а $\varepsilon_2 \ln M$ — возрастающая функция; в частности, существует такое число $K > 0$, что

$$\varepsilon_2(r) \geq \frac{K}{\ln M(r)}, \quad |\varepsilon_2'(r)| \leq \frac{M'(r)}{M(r) \ln M(r)} \varepsilon_2(r), \quad (33)$$

где под $\varepsilon_2'(r)$ понимается нижнее производное число в точке r .

Пусть теперь функция ρ_1 определяется из равенства

$$(M(r))^{\rho_1(r)} = \sqrt{\varepsilon_2(r)} (M(r))^{\rho(r)}. \quad (34)$$

Тогда

$$\rho_1(r) = \frac{1}{2} \frac{\ln \varepsilon_2(r)}{\ln M(r)} + \rho(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r), \quad (35)$$

а также, логарифмируя (34), получаем $\rho_1 \ln M = \frac{1}{2} \ln \varepsilon_2 + \rho \ln M$. Дифференцирование этого соотношения даёт равенство

$$\frac{\rho_1'(r) M(r) \ln M(r)}{M'(r)} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2'(r)}{\varepsilon_2(r)} \cdot \frac{M(r)}{M'(r)} + \frac{\rho'(r) M(r) \ln M(r)}{M'(r)} + \rho(r) - \rho_1(r). \quad (36)$$

Для первого слагаемого в правой части согласно второму неравенству из (33) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{|\varepsilon_2'(r)|}{\varepsilon_2(r)} \cdot \frac{M(r)}{M'(r)} \leq \frac{1}{\ln M(r)} \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

а второе слагаемое в правой части (36) также стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ согласно равенству (9) теоремы 1. Таким образом, согласно второму равенству в (35) левая часть в (36) стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, и согласно утверждению (ii) теоремы 1 функция ρ_1 является уточненным порядком относительно модельной функции роста M . При этом

$$\frac{V_1(r)}{V(r)} = \sqrt{\varepsilon_2(r)}, \quad \frac{A(r)}{V_1(r)} = \varepsilon(r) \frac{V(r)}{V_1(r)} = \frac{\varepsilon(r)}{\sqrt{\varepsilon_2(r)}} \leq \sqrt{\varepsilon_2(r)},$$

где $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{\varepsilon_2(r)} = 0$. Теорема полностью доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 2018.
2. *Брайчев Г. Г.* Об одной проблеме Адамара и сглаживании выпуклых функций// Владикавказ. мат. ж. — 2005. — 7, № 3. — С. 11–25.
3. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
4. *Гришин А. Ф.* Субгармонические функции конечного порядка/ Дисс. на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук. — Харьков: ХГУ, 1992.
5. *Гришин А. Ф., Малютин Т. И.* Об уточненном порядке// в кн.: Комплексный анализ и математическая физика (Кытманов А. М., ред.). — Красноярск: КГУ, 1998. — С. 10–24.
6. *Гришин А. Ф., Поединцева И. В.* Абелевы и тауберовы теоремы для интегралов// Алгебра и анализ. — 2014. — 26, № 3. — С. 1–88.
7. *Казьмин Ю. А.* Сравнения функции// в кн.: Математическая энциклопедия. — М.: Советская энциклопедия, 1985.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
9. *Маергойз Л. С.* Индикаторная диаграмма целой функции уточненного порядка и ее обобщенные преобразования Бореля—Лапласа// Алгебра и анализ. — 2000. — 12, № 2. — С. 1–63.
10. *Осколков В. А.* О некоторых вопросах теории целых функций// Мат. сб. — 1993. — 184, № 1. — С. 129–148.
11. *Попов А. Ю.* Об обращении обобщенного преобразования Бореля// Фундам. прикл. мат. — 1999. — 5, № 3. — С. 817–841.
12. *Таров В. А.* Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 2. — С. 258–264.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Обобщение уточненного порядка// Докл. Башкир. ун-та. — 2020. — 5, № 1. — С. 1–5.

14. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
15. Шеремета М. Н. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения// Изв. вузов. Мат. — 1967. — 2. — С. 100–108.
16. Шеремета М. Н. О связи между ростом целых или аналитических в круге функций нулевого порядка и коэффициентами их степенных разложений// Изв. вузов. Мат. — 1968. — 6. — С. 115–121.
17. Borel E. *Lessons sur les fonctions entières.* — Paris: Gauthier-Vilars, 1921.
18. Earl J. P., Hayman W. K. Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid growth// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1991. — 109, № 3. — P. 565–569.
19. Hadamard J. Essai d'étude des fonctions données par leur développement de Taylor// J. Math. Pure Appl. — 1892. — 8, № 2. — P. 154–186.
20. Hörmander L. *Notions of Convexity.* — Boston: Birkhäuser, 1994.
21. Kiselman C. O. Order and type as measures of growth for convex or entire functions// Proc. London Math. Soc. (3). — 1993. — 66, № 1. — P. 152–186.
22. Poincaré H. Theorie spectrale pour des operateurs elliptiques// Bull. S.M.F. — 1883. — 11. — P. 136–144.
23. Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane.* — Cambridge: Cambrige Univ. Press, 1995.
24. Taylor A. E. L'Hospital's Rule// Am. Math. Month. — 1952. — 59, № 1. — P. 20–24.
25. Valiron G. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 1913. — 5, № 3. — P. 117–257.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа К. Г. Малютина выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00012). Работа Б. Н. Хабибуллина выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кабанко Михаил Владимирович
Курский государственный университет
E-mail: kabankom@gmail.com

Малютин Константин Геннадьевич
Курский государственный университет
E-mail: malyutinkg@gmail.com

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа
E-mail: khabib-bulat@mail.ru