ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 88–95
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-88-95

УДК 51-72, 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВНЕШНИМИ НАГРУЗКАМИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ СОСТАВНОГО ТЕЛА, КОНТАКТИРУЮЩЕГО С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С ОСТРОЙ КРОМКОЙ

© 2023 г. **Н. П. ЛАЗАРЕВ, Г. М. СЕМЕНОВА, Е. С. ЕФИМОВА**

Аннотация. Рассмотрена неклассическая математическая модель, описывающая механический точечный контакт композитного тела с препятствием специальной геометрии. Нелинейность модели обусловлена условиями типа неравенства в рамках соответствующей вариационной задачи. Сформулирована задача оптимального управления, в которой управлением служат функции внешних нагрузок, а функционал стоимости задается с помощью слабо полунепрерывного сверху функционала, определенного на пространстве Соболева. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Для последовательности решений, соответствующей максимизирующей последовательности, доказана сильная сходимость в соответствующем пространстве Соболева.

***Ключевые слова*:** жесткое включение, условие непроникания, вариационная задача.

OPTIMAL CONTROL OF EXTERNAL LOADS IN THE EQUILIBRIUM PROBLEM FOR A COMPOSITE BODY CONTACTING WITH A RIGID INCLUSION WITH A SHARP EDGE

© 2023 **N. P. LAZAREV, G. M. SEMENOVA, E. S. EFIMOVA**

Abstract. In this paper, we consider a nonclassical mathematical model that describes the mechanical point contact of a composite body with an obstacle of special geometry. The nonlinearity of the model is due to inequality-type conditions within the framework of the corresponding variational problem. An optimal control problem is formulated in which the controls are functions of external loads, and the cost functional is specified using a weakly upper semi-continuous functional defined on the Sobolev space. The solvability of the optimal control problem is proved. For the sequence of solutions corresponding to the maximizing sequence, the strong convergence in the corresponding Sobolev space is proved.

***Keywords and phrases*:** rigid inclusion, non-penetration condition, variational problem.

***AMS Subject Classification*:** 35A15, 49J40, 74B99

Введение. Один из широко известных подходов в моделировании контактных задач механики деформируемого твердого тела использует граничные условия типа неравенств. Данный подход, предполагающий условия непроникания был впервые предложен А. Синьорини в 1933 г. Одна из особенностей задач подобного вида связана с тем, что зона контакта заранее неизвестна. Нелинейные задачи с такими односторонними ограничениями, приводят к исследованию вариационных формулировок (см. [10, 19, 24]). К настоящему времени изучен широкий класс контактных задач для упругих, вязкоупругих тел для различных случаев возможных контактных взаимодействий.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-947, соглашение от 16.02.2023).

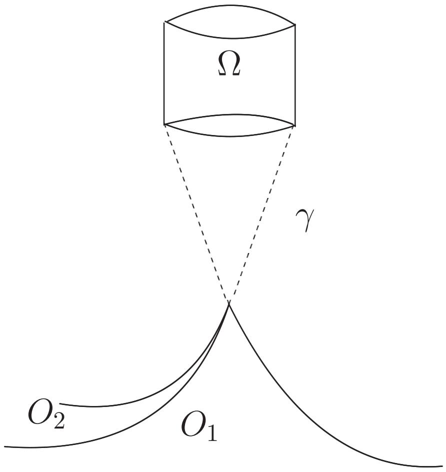

Рис. 1

Для упругих тел исследованы следующие контактные задачи: о контакте пластины со штампом (см. [8]), с тонким упругим препятствием (см. [5–7, 16]), с приклеенной другой пластиной по одному краю трещины (см. [23]). С контактными задачами для термоупругих тел и вязкоупругих тел можно ознакомиться, например, в [4, 12], соответственно. Условия непроникания нашли широкое применение для класса задач о составных телах и композитах, содержащих жесткие и упругие включения (см. [3, 18, 21]). Асимптотическое разложение перемещений в окрестности вершины жесткого включения в случаях как с отслоением, т.е. при наличии трещины, так и без отслоения получено в [13]. В отличие от контактной задачи Синьорини с заданным неподвижным препятствием (см. [2, 11]), в недавней статье [20] исследована задача, описывающая квазистатическое вдавливание твердого штампа в деформируемое тело, в которой глубина вдавливания штампа заранее неизвестна.

Задачи о точечном контакте для тел с жесткими включениями впервые были предложены и изучены в 2022 г. (см. [1, 22]). Их особенность, в отличие от классических задач Синьорини с односторонними условиями на множестве положительной меры, состоит в том, что условие непроникания ставится в отдельных точках, или для более общего случая — на множествах меры нуль.

В настоящей работе для трехмерной задачи о точечном контакте исследовано оптимальное управление внешними нагрузками. Кроме того, для максимизирующей последовательности последовательности функций нагрузок, доказана сильная сходимость соответствующей последовательности решений контактных задач в пространстве Соболева.

1. Постановка задачи равновесия. Сформулируем контактную задачу для упругого тела, содержащего жесткое включение на внешней границе. Такая модель может описывать композитные тела со специальными жесткими покрытиями. Рассмотрим ограниченную односвязную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из двух поверхностей Γ_1, Γ_2: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{meas}(\Gamma_1) > 0$. Конус

$$\gamma = \big\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2 x_3^2,\ x_3 \in [0,1]\big\}, \quad 0 < \alpha,$$

является частью Γ_2, причем $\gamma \subset \operatorname{int}(\Gamma_2)$ (см. рис. 1).

Будем считать, что тонкое жесткое включение задается с помощью конуса γ, а жесткое недеформируемое препятствие — поверхностью

$$O = \bigcup_{l=1}^{4} O_l,$$

составленной из четырех частей:

$$O_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = \psi_1(x_1, x_2)\},$$
$$O_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = \psi_2(x_1, x_2)\},$$
$$O_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 = \psi_3(x_1, x_2)\},$$
$$O_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 = \psi_4(x_1, x_2)\},$$

где $\psi_l(0,0) = 0$, $l = 1,2,3,4$. При этом функции $\psi_l(x_1, x_2)$, $l = \overline{1,4}$, являются непрерывными выпуклыми вверх (на соответствующих квадрантах) функциями относительно оси Ox_3, совпадающими на координатных осях плоскости Ox_1x_2, так чтобы функция

$$\psi(x_1, x_2) = \begin{cases} \psi_1(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \\ \psi_2(x_1, x_2), & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ \psi_3(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0, \\ \psi_4(x_1, x_2), & x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

была непрерывной на плоскости и дифференцируемой на каждом квадранте плоскости Ox_1x_2 и удовлетворяющей свойствам $\left|\partial\psi(0,0)/\partial\mu\right| \leqslant \alpha$, для произвольного единичного вектора μ плоскости Ox_1x_2. Кроме того, считаем, что функция $\psi(x_1, x_2)$ убывает вдоль любого луча плоскости Ox_1x_2, выходящего из начала координат.

Обозначим через $W = (w_1, w_2, w_3)$ вектор перемещений. Предположим, что тело, занимающее область Ω, закреплено на границе Γ_1, т.е.

$$W = (0,0,0) \quad \text{на } \Gamma_1. \tag{1}$$

Введем следующее пространство Соболева:

$$H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}, \quad H(\Omega) = H^{1,0}_{\Gamma_1}(\Omega)^3.$$

Выпишем определяющие соотношения для трехмерной теории упругости в рамках тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i,j = 1,2,3, \tag{2}$$

где запятая в первой формуле (2) обозначает соответствующую производную, по повторяющимся индексам ведется суммирование (соглашение Эйнштейна). Тензор коэффициентов упругости задается элементами c_{ijkl}, которые предполагаются симметричными и положительно определенными:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i,j,k,l = 1,2,3,$$
$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant c_0|\xi|^2 \ \forall\xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i,j = 1,2,3, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Чтобы привести вариационную формулировку, описывающую состояние равновесия тела с жестким тонким включением γ на границе, введем функционал энергии

$$\Pi(W) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) - \int\limits_\Omega FW,$$

где вектор $F = (f_1, f_2, f_3) \in L^2(\Omega)^3$ описывает внешние силы, действующие на тело, $FW = f_iw_i$. Коэрцитивность функционала $\Pi(W)$, обеспечивается известным неравенством Корна:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W) \geqslant c\|W\|^2_{H(\Omega)} \quad \forall W \in H(\Omega), \tag{3}$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от W.

Замечание 1. Неравенство (3) дает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega)$ и полунормы, определяемой левой частью (3).

Пространство инфинитезимальных жестких перемещений $R(Z)$ состоит из аффинных функций и задает линейную структуру перемещений на некотором подмножестве $Z \subset \overline{\Omega}$ (см. [14]):

$$R(Z) = \big\{\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3) \;\big|\; \rho(x) = Bx^t + C;\ x \in Z\big\}, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ -b_{13} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c_1, c_2, c_3), \quad x^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где b_{12}, b_{13}, b_{23}, c_1, c_2, c_3 — некоторые вещественные числа. В частности, для поверхности γ имеем пространство $R(\gamma)$.

В рамках линейной теории упругости, рассуждая для бесконечно малых перемещений, выпишем условие непроникания для перемещений композитного тела относительно препятствия O. С учетом заданной структуры перемещений точек жесткого включения γ мы можем записать данное условие в виде системы следующих неравенств:

$$\begin{cases} c_3 \geqslant \psi_1(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_2(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \geqslant 0,\ c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \leqslant 0,\ c_2 \leqslant 0, \\ c_3 \geqslant \psi_4(c_1, c_2,), & \text{если } c_1 \leqslant 0,\ c_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

В соответствии с этими ограничениями рассмотрим следующие множества допустимых перемещений:

$$K_1 = \Big\{W \in H(\Omega):\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_1(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0,\ c_2 \geqslant 0\Big\},$$
$$K_2 = \Big\{W \in H(\Omega):\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_2(c_1, c_2,),\ c_1 \geqslant 0,\ c_2 \leqslant 0\Big\},$$
$$K_3 = \Big\{W \in H(\Omega):\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0,\ c_2 \leqslant 0\Big\},$$
$$K_4 = \Big\{W \in H(\Omega):\ W|_\gamma = \rho,\ \rho(x) \in R(\gamma),\ c_3 \geqslant \psi_3(c_1, c_2,),\ c_1 \leqslant 0,\ c_2 \geqslant 0\Big\}.$$

Обозначим объединение всех четырех множеств K_l, $l = \overline{1,4}$ через K_s: $K_s = \bigcup\limits_{l=1}^{4} K_l$.

Рассмотрим следующую задачу минимизации:

$$\text{найти такую функцию } U \in K_s, \text{ что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_s} \Pi(W). \tag{5}$$

В силу свойств функций ψ_l, $l = \overline{1,4}$ очевидно, что каждое из множеств K_l, $l = \overline{1,4}$, выпукло и замкнуто (см. [1]). В то же время можно заметить, что объединение K_s этих множеств замкнуто, но не выпукло (это нетрудно установить, следуя примеру для двумерных множеств в [22]).

Наряду с исходной задачей (5) рассмотрим следующие четыре вспомогательные задачи:

$$\text{найти такую функцию } U_l \in K_l, \text{ что } \Pi(U_l) = \inf_{W \in K_l} \Pi(W),\ l = \overline{1,4}. \tag{6}$$

Коэрцитивность и слабая полунепрерывность снизу $\Pi(W)$ на гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ гарантирует, что $\Pi(W)$ достигает своих минимумов над K_l, $l = \overline{1,4}$, на некоторых функциях $U_1 \in K_1$, $U_2 \in K_2$, $U_3 \in K_3$, $U_4 \in K_4$ соответственно. Кроме того, ввиду строгой выпуклости функционала энергии, для каждого фиксированного $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ соответствующая вспомогательная задача (6) имеет единственное решение U_l, $l = 1, 2, 3, 4$. Искомую функцию U можно найти как функцию, обеспечивающую минимум по четырем оптимальным значениям, т.е.

$$\Pi(U) = \min\{\Pi(U_1), \Pi(U_2), \Pi(U_3), \Pi(U_4)\}, \tag{7}$$

где U_l — решения вспомогательных задач (6) (см. [1]).

Отметим, что каждая из четырех вспомогательных задач допускает дифференциальную формулировку при условии достаточной гладкости. Не нарушая общности, выберем задачу минимизации для множества K_1. Итак, предположим, что $U_1 \in K_1$ обладает дополнительной гладкостью.

Для начала заметим, что задача (6) минимизации функционала энергии над множеством K_1 эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$U_1 \in K_1, \quad \int\limits_{\Omega} \sigma_{ij}(U_1)\varepsilon_{ij}(W - U_1) \geqslant \int\limits_{\Omega} F(W - U_1) \quad \forall W \in K_1. \tag{8}$$

В рамках предположения о гладкости решения задача (6) эквивалентна следующей краевой задаче (см. [1]), состоящей из уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{в } \Omega,\ i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

и следующих граничных условий:

$$\sigma_\tau(U_1) = 0, \quad \sigma_\nu(U_1) = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \setminus \gamma, \tag{10}$$

$$\int\limits_{\gamma} \Big(\sigma_\nu(U_1)(W - \rho^1)\nu + \sigma_\tau(U_1)(W_\tau - \rho^1_\tau)\Big) \geqslant 0 \quad \forall W \in K_1, \quad \rho^1 = U_1 \quad \text{на } \gamma, \tag{11}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор нормали к Γ,

$$\sigma_\nu(V) = \sigma_{ij}(V)\nu_i\nu_j, \quad \overline{V}\nu = \overline{v}_i\nu_i,$$
$$\sigma_\tau(V) = \big(\sigma^1_\tau(V), \sigma^2_\tau(V), \sigma^3_\tau(V)\big) = \big(\sigma_{1j}(V)\nu_j, \sigma_{2j}(V)\nu_j, \sigma_{3j}(V)\nu_j\big) - \sigma_\nu(V)\nu,$$
$$\overline{V}_\tau = (\overline{V}_{\tau 1}, \overline{V}_{\tau 2}, \overline{V}_{\tau 3}), \quad \overline{V}_{\tau i} = \overline{v}_i - (\overline{V}\nu)\nu_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Неравенство (11), представляет собой соотношение, выражающее принцип виртуальных перемещений (ср. [15]).

2. Задача оптимального управления. Наряду с основной задачей равновесия (5) рассмотрим семейство задач о равновесии, сформулированных относительно множества $\mathcal{F}$, элементами которого являются функции F, описывающие внешние нагрузки. Предположим, что $\mathcal{F}$ — ограниченное, замкнутое и выпуклое множество в $L^2(\Omega)^3$. Заметим, что данные свойства $\mathcal{F}$ гарантируют слабую замкнутость $\mathcal{F}$. Для постановки задачи оптимального управления рассмотрим слабо полунепрерывный сверху функционал $G : H(\Omega) \to \mathbb{R}$. В качестве примеров можно указать функционал

$$G_1(W) = \|W - W_0\|_{L^2(\Omega)^3}$$

с ясным физическим смыслом, характеризующий отклонение вектора смещения от заданной функции W_0, или функционал $G_2(W) = c_1$ (или $G_2(W) = c_2$), отражающий положение вершины конуса жесткого включения. Другой тип возможных функционалов может быть связан с величиной напряжений; при этом можно рассматривать, например, интеграл

$$G_3 = -\left|\int\limits_{V\cap\Omega} \sigma_{kl}(W)\right|$$

с фиксированными $k, l \in \{1, 2, 3\}$, где V — окрестность кривой $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 1,\ x_1^2 + x_2^2 = \alpha^2\}$, ограничивающей жесткое включение.

Определим функционал качества $J_G : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ равенством

$$J_G(F) = G(U_F),$$

где функции $F \in \mathcal{F}$ служат контролем для данной задачи. С учетом отмеченных особенностей сформулируем следующую задачу оптимального управления:

$$\text{найти такую функцию } F^* \in \mathcal{F}, \text{ что } J_G(F^*) = \sup_{F\in\mathcal{F}} J_G(F). \tag{12}$$

Следует отметить, что задача о наиболее желательном положения вершины конуса включения для равновесного состояния составного тела может быть интересной с точки зрения приложений.

Теорема 1. *Существует решение задачи оптимального управления* (12).

Доказательство. Пусть $\{F_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности и слабой замкнутости множества $\mathcal{F}$ можно выделить такую сходящуюся подпоследовательность (обозначаемую тем же индексом) $\{F_n\}$, что

$$F_n \to F^* \text{ в } L^2(\Omega)^3 \text{ при } n \to \infty,\ F^* \in \mathcal{F}.$$

Поскольку каждой последовательности F_n, $n \in \mathbb{N}$, соответствует решение U_{F_n}, которое далее мы обозначаем через U_n, существует хотя бы одна подпоследовательность $\{F_{n_k}\}$, $F_{n_k} \to F^*$, для которой соответствующие решения U_{n_k} принадлежат K_l для всех $k \in \mathbb{N}$, где l — это выбранное число из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Зафиксируем выбранное значение l, так как в противном случае последовательность $\{F_n\}$ не сходится к F^* при $n \to \infty$. Теперь рассмотрим для $\{U_{n_k}\} \subset K_l$ следующие неравенства с $k \in \mathbb{N}$ и фиксированным значением l:

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(W - U_{n_k}) \geqslant \int\limits_\Omega F_{n_k}(W - U_{n_k}) \quad \forall W \in K_l. \tag{13}$$

После подстановки $W = 0$ в (13) получим

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) \leqslant \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} \leqslant \|F_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^3}\|U_{n_k}\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

Так как множество $\mathcal{F}$ ограничено, последние неравенства вместе с (3) дают равномерную оценку

$$\|U_{n_k}\|_{H(\Omega)} \leqslant C.$$

Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{U_{n_k}\}$ (по-прежнему обозначаемую тем же индексом), слабо сходящуюся к некоторому U^* в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$. Заметим, что K_l слабо замкнуто, так как оно выпукло и замкнуто. Это означает, что $U^* \in K_l$. При помощи теорем вложения заключаем, что $U_{n_k} \to U^*$ сильно в $L^2(\Omega)^3$ при $k \to \infty$.

Теперь приступим к анализу (13) при произвольной фиксированной функции $W \in K_l$. Имея в виду соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} = \int\limits_\Omega F^*U^*,$$

а также слабую полунепрерывность снизу билинейной формы

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(\cdot)\varepsilon_{ij}(\cdot),$$

обосновываем предельный переход при $k \to \infty$ в (13). В результате имеем

$$U_{n_k} \in K_l, \quad \int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(W - U^*) \geqslant \int\limits_\Omega F^*(W - U^*) \quad \forall W \in K_l. \tag{14}$$

Ввиду произвольности $W \in K_l$ в вариационном неравенстве (14) получаем, что $U^* = U_{F^*}$. Наконец, учитывая слабую сходимость $\{F_{n_k}\}$ и слабую полунепрерывность сверху функционала G, получаем

$$\sup_{F\in\mathcal{F}} J_G(F) = \limsup_{n\to\infty} J_G(F_{n_k}) \leqslant J_G(F^*) = G(U_{F^*}) \leqslant \sup_{F\in\mathcal{F}} J_G(F).$$

Теорема доказана. □

Следующий результат позволяет улучшить качество сходимости $\{U_{n_k}\}$ к U^* при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Подпоследовательность решений $\{U_{n_k}\}$, выбранная при доказательстве теоремы 1, сходится к U^* сильно в $H(\Omega)$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Можно показать, что U_{n_k} обладает следующим свойством:

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) = \int\limits_\Omega F_{n_k}U_{n_k} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Действительно, для этого достаточно сравнить два неравенства, полученные подстановкой в (13) тестовых функций двух типов, а именно, $W = 0$ и $W = 2U_{n_k}$. Аналогичное равенство выполняется для U^*:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(U^*) = \int_\Omega F^* U^*. \tag{16}$$

Учитывая, что $F_{n_k} \to F^*$ слабо в $L^2(\Omega)^3$ и $U_{n_k} \to U^*$ сильно в $L^2(\Omega)^3$, можем перейти к пределу в (15). В результате имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \sigma_{ij}(U_{n_k})\varepsilon_{ij}(U_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega F_{n_k} U_{n_k} = \int_\Omega F^* U^* = \int_\Omega \sigma_{ij}(U^*)\varepsilon_{ij}(U^*). \tag{17}$$

Вспоминая замечание (1), приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 2. Заметим, что в формулировке основной задачи вместо разбиения плоскости на четыре сектора (квадранты плоскости) можно рассмотреть, вообще говоря, любое конечное разбиение плоскости осями на n секторов ($n \geqslant 3$), проходящими через начало координат. При этом количество вспомогательных задач также будет n. В этом случае можно сформулировать аналогичную задачу оптимального управления, доказать ее разрешимость и установить соответствующий результат о сильной сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарев Н. П., Федотов Е. Д.* Трёхмерная задача типа Синьорини для композитных тел, контактирующих острыми гранями жёстких включений// Челяб. физ.-мат. ж. — 2022. — *7*, № 4. — С. 412–423.
2. *Намм Р. В., Цой Г. И.* Решение контактной задачи теории упругости с жестким включением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 4. — С. 699–706.
3. *Николаева Н. А.* О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 4. — С. 68–80.
4. *Попова Т. С.* Задача о контакте вязкоупругой пластины с упругой балкой// Сиб. ж. индустр. мат. — 2016. — *19*, № 3. — С. 41–54.
5. *Рудой Е. М., Хлуднев А. М.* Односторонний контакт пластины с тонким упругим препятствием// Сиб. ж. индустр. мат. — 2009. — *12*, № 2. — С. 120–130.
6. *Фурцев А. И.* О контакте тонкого препятствия и пластины, содержащей тонкое включение// Сиб. ж. чист. прикл. мат. — 2017. — *17*, № 4. — С. 94–111.
7. *Фурцев А. И.* Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — *22*, № 2. — С. 105–117.
8. *Хлуднев А. М.* Оптимальное управление пластиной над препятствием// Сиб. мат. ж. — 1990. — *31*, № 1. — С. 172–178.
9. *Хлуднев А. М., Попова Т. С.* Об иерархии тонких включений в упругих телах// Мат. заметки СВФУ. — 2016. — *23*, № 1. — С. 87–107.
10. *Andersson L. E., Klarbring A.* A review of the theory of elastic and quasistatic contact problems in elasticity// Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. — 2001. — *359*. — P. 2519–2539.
11. *Fichera G.* Existence Theorems in Elasticity// in: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity (*Truesdell C.*, eds.). — Berlin–Heidelberg: Springer, 1973. — P. 347—389.
12. *Homberg D., Khludnev A.* A thermoelastic contact problem with a phase transition// IMA J. Appl. Math. — 2006. — *71*, № 4. — P. 479–495.
13. *Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A.* Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity// Z. Angew. Math. Mech. — 2012. — *92*, № 9. — P. 716–730.
14. *Khludnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions// Eur. J. Mech. A. Solids. — 2010. — *29*, № 3. — P. 392–399.
15. *Khludnev A. M.* Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies// Arch. Appl. Mech. — 2013. — *83*. — P. 1493–1509.
16. *Khludnev A. M., Hoffmann K. H., Botkin N. D.* The variational contact problem for elastic objects of different dimensions// Sib. Math. J. — 2006. — *47*. — P. 584–593.

17. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. — Southampton–Boston: WIT-Press, 2000.
18. *Khludnev A., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks// Math. Meth. Appl. Sci. — 2010. — *33.* — P. 1955–1967.
19. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact Problems in Elasticity: Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. — Philadelphia: SIAM, 1988.
20. *Kovtunenko V. A.* Quasi-variational inequality for the nonlinear indentation problem: a power-law hardening model// Phil. Trans. Roy. Soc. A. — 2022. — *380*, № 2236. — 20210362.
21. *Lazarev N.* Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff-Love plate with two hinged rigid inclusions// Boundary-Value Probl. — 2021. — № 1. — P. 88.
22. *Lazarev N. P., Kovtunenko V. A.* Signorini-type problems over non-convex sets for composite bodies contacting by sharp edges of rigid inclusions// Mathematics. — 2022. — *10*, № 2. — P. 250.
23. *Pyatkina E. V.* A contact problem for two plates of the same shape glued along one edge of a crack// J. Appl. Ind. Math. — 2018. — *12*, № 2. — P. 334–346.
24. *Rademacher A., Rosin K.* Adaptive optimal control of Signorini's problem// Comput. Optim. Appl. — 2018. — *70.* — P. 531–569.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-947, соглашение от 16.02.2023).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: `nyurgun@ngs.ru`

Семенова Галина Михайловна
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: `sgm.08@yandex.ru`

Ефимова Елена Сергеевна
Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск
E-mail: `oslame@mail.ru`