



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 96–130
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-96-130

УДК 517.9; 531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ,
ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ.
IV. СИСТЕМЫ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ
 n -МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2023 г. М. В. ШАМОЛИН

Аннотация. В работе предъявлены тензорные инварианты (первые интегралы, дифференциальные формы) для динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, а также при любом конечном n . Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Первая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 227. — С. 100–128. Вторая часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 228. — С. 92–118. Третья часть работы: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2023. — 229. — С. 90–119.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC,
POTENTIAL AND DISSIPATIVE SYSTEMS.
IV. SYSTEMS ON TANGENTS BUNDLES
OF n -DIMENSIONAL MANIFOLDS

© 2023 M. V. SHAMOLIN

ABSTRACT. In this paper, we present tensor invariants (first integrals and differential forms) for dynamical systems on the tangent bundles of smooth n -dimensional manifolds separately for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and for any finite n . We demonstrate the connection between the existence of these invariants and the presence of a full set of first integrals that are necessary for integrating geodesic, potential, and dissipative systems. The force fields acting in systems considered make them dissipative (with alternating dissipation).

The first part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **227** (2023), pp. 100–128. The second part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **228** (2023), pp. 92–118. The third part of the paper: Itogi Nauki Tekhn. Sovr. Mat. Prilozh. Temat. Obzory, **229** (2023), pp. 90–119.

Keywords and phrases: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form.

AMS Subject Classification: 34Cxx, 70Cxx

СОДЕРЖАНИЕ

4. Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении n -мерного многообразия	97
Введение	97
4.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к n -мерному многообразию	98
4.2. Инварианты систем на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле	108
4.3. Инварианты систем на касательном расслоении к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной диссипацией	112
Список литературы	127

4. ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ n -МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Введение. В данном разделе представлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Как показано ранее, задача о движении $(n + 1)$ -мерного маятника на обобщенном сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, которое можно образно описать, как «поток набегающей среды, заполняющей объемлющее $(n + 1)$ -мерное пространство», приводит к динамической системе на касательном расслоении к n -мерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, полный список первых интегралов состоит из трансцендентных (т.е. имеющих существенно особые точки) функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Такое же фазовое пространство естественно возникает в задаче о движении точки по n -мерной сфере с индуцированной метрикой объемлющего $(n + 1)$ -мерного пространства. Отметим также задачи о движении точки по более общим n -мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского (например, в модели Клейна) и т. д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Важные частные случаи систем с n степенями свободы с неконсервативным полем сил рассматривались в работах автора [72, 73]. Настоящее исследование распространяет результаты этих работ на более широкий класс динамических систем.

В данной работе для рассматриваемого класса динамических систем представлены полные наборы инвариантных дифференциальных форм фазового объема для однородных систем на касательных расслоениях к гладким n -мерным многообразиям (об аналогичных исследованиях для систем меньшей размерности см. [57, 58]). Показана связь наличия данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля вносят в рассматриваемые системы диссипацию разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Сначала изучается задача геодезических, включающая, в частности, геодезические на сфере и других поверхностях вращения, n -мерного пространства Лобачевского. Указаны достаточные условия интегрируемости уравнений геодезических. Затем рассмотрены системы с потенциальными полями сил специального вида, указаны достаточные условия интегрируемости рассматриваемых уравнений, на классах задач, аналогичных рассмотренным ранее. В заключение рассмотрено усложнение задачи, возникающее в результате добавления неконсервативного поля сил со знакопеременной диссипацией, и указаны достаточные условия интегрируемости.

4.1. Инварианты систем геодезических на касательном расслоении к n -мерному многообразию.

4.1.1. *Координаты на касательном расслоении и коэффициенты связности.* Рассмотрим гладкое n -мерное риманово многообразие $M^n\{\alpha, \beta\}$ с координатами (α, β) , $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, римановой метрикой $g_{ij}(\alpha, \beta)$, порождающей аффинную связность $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$, и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ при изменении координат на нем. Для этого рассмотрим далее достаточно общий случай задания новых кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = z_n f_n(\alpha), \quad (4.1.1a)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} f_1(\alpha), \quad (4.1.1b)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2} f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad (4.1.1c)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3} f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2), \quad (4.1.1d)$$

$$\dots \dots \dots \quad (4.1.1e)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}), \quad (4.1.1f)$$

где $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ — достаточно гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты $z_1, \dots, z_n$, в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических, например, с $n(n-1)+1$ ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на расслоении n -мерных поверхностей вращения, пространства Лобачевского и т. д.):

$$\ddot{\alpha} + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (4.1.2a)$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (4.1.2b)$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (4.1.2c)$$

$$\ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 + \dots + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (4.1.2d)$$

$$\dots \dots \dots \quad (4.1.2e)$$

$$\ddot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-2} + \dots + \Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-3} \dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \quad (4.1.2f)$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-1} + \dots + \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) \dot{\beta}_{n-2} \dot{\beta}_{n-1} = 0; \quad (4.1.2g)$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

В случае кинематических соотношений (4.1.1) необходимые соотношения, их дополняющие на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] z_1 z_n - \\ & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] z_1 z_{n-1} - \\ & - f_2(\alpha) g_1(\beta_1) \left[2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2) \right] z_1 z_{n-2} - \dots - \\ & - f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] z_1 z_2, \end{aligned} \quad (4.1.3a)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_2 = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha) \right] z_2 z_n - \\
 & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1) \right] z_2 z_{n-1} - \dots - \\
 & - f_{n-3}(\alpha) g_{n-4}(\beta_1) h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) \left[2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3}) \right] z_2 z_3 - \\
 & - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) z_1^2, \quad (4.1.3b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_{n-1} = & -f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] z_{n-1} z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots - \\
 & - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) z_1^2, \quad (4.1.3c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_n = & -f_n(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha) \right] z_n^2 - \\
 & - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-1}^2 - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) z_{n-2}^2 - \dots - \\
 & - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2; \quad (4.1.3d)
 \end{aligned}$$

здесь, как и далее, $DQ(q) = d \ln |Q(q)|/dq$, и уравнения геодезических (4.1.2) после соответствующего выбора кинематических соотношений (4.1.1) почти всюду эквивалентны составной системе (4.1.1), (4.1.3) на многообразии $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ с новой частью координат $z_1, \dots, z_n$ на касательном пространстве.

Отметим ряд задач, приводящих к уравнениям (4.1.2) (к системе (4.1.1), (4.1.3)).

- (а) Системы на касательном расслоении к n -мерной сфере. Здесь необходимо выделить два случая метрик на сфере. Один случай — метрика, индуцированная евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$ -мерного пространства; такая метрика естественна для изучения задачи о движении точки по сфере. Второй случай — приведенная метрика, индуцированная группами симметрий, характерных для движения динамически симметричного $(n+1)$ -мерного твердого тела.
- (б) Системы на касательных расслоениях более общих n -мерных поверхностей вращения.
- (с) Системы на касательном расслоении n -мерного пространства Лобачевского в модели Клейна.

Отметим также, что в [50] рассмотрены примеры систем геодезических на касательном расслоении n -мерной сферы с различными метриками, а в [7] — примеры систем геодезических на расслоении n -мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского.

4.1.2. О количествах «неизвестных» функций и условий, на них накладываемых. Если рассматривать общие уравнения геодезических на касательном расслоении n -мерного гладкого многообразия, то количество разных ненулевых коэффициентов связности, вообще говоря, будет равно $n^2(n+1)/2$. Ясно, что общая задача интегрирования уравнений геодезических весьма сложна. К данному количеству коэффициентов связности добавляются еще функции, определяющие координаты на касательном расслоении (в нашем случае $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ из (4.1.1)).

Поэтому, как было отмечено ранее, ограничимся лишь ненулевыми коэффициентами связности, формирующей уравнения геодезических (4.1.2); их количество равно $n(n-1)+1$. По этому числу выбирается и количество функций, определяющих координаты на касательном расслоении: их число равно $n(n-1)/2+1$. Таким образом, имеем $3n(n-1)/2+2$ функций, характеризующих исключительно геометрию фазового многообразия и координаты на нем.

Определим количество алгебраических и дифференциальных условий ($B(n)$), накладываемых на имеющиеся $A(n) = 3n(n-1)/2+2$ функций и достаточных для полного интегрирования уравнений геодезических. Количество таких функциональных условий должно быть меньше $A(n)$,

что говорит об увеличении количества «произвольных» функций по сравнению с условиями, накладываемыми на них, ровно на n — размерность рассматриваемого риманова многообразия.

Замечание 4.1. Пусть выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), при этом реализуется система дифференциальных равенств (4.1.6). Тогда справедливы следующие тождества (их число равно $n(n-1)/2+1$):

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{11}^\alpha(\alpha), \quad \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1), \quad \dots, \quad (4.1.7a)$$

$$\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.1.7b)$$

$$\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^1(\beta_1), \quad \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2), \quad \dots, \quad (4.1.7c)$$

$$\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.1.7d)$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) = \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2}), \quad (4.1.7e)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha), \quad (4.1.7f)$$

а также тождества (их число равно $(n-1)(n-2)/2$)

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv \\ &\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \end{aligned} \quad (4.1.8a)$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.1.8b)$$

$$\dots\dots\dots \quad (4.1.8c)$$

$$\Gamma_{n-2, n-2}^{n-3}(\beta_{n-3}) \equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-3}(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}). \quad (4.1.8d)$$

Доказательство. В условиях замечания первая группа из первых $n-1$ равенств из (4.1.6) переписывается в виде

$$f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (4.1.9a)$$

$$f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (4.1.9b)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (4.1.9c)$$

Из (4.1.9) следуют тождества (4.1.7a) и (4.1.7b) и тождества (4.1.8a). Далее, в условиях замечания вторая группа из $n-2$ равенств (4.1.6) переписывается в виде

$$[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (4.1.10a)$$

$$[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \equiv 0, \quad (4.1.10b)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$[2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1)] + g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (4.1.10c)$$

Из (4.1.10) следуют тождества (4.1.7c) и (4.1.7d) и тождества (4.1.8b) и т. д. Наконец, в условиях замечания $(n-1)$ -я группа, состоящая из одного равенства (4.1.6e), переписывается в виде

$$[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2})] + i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \equiv 0. \quad (4.1.11)$$

Отсюда следует тождество (4.1.7e), а из (4.1.6f) следует (4.1.7f). $\square$

Следующее замечание является в некотором смысле обратным к замечанию 4.1.

Замечание 4.2. Пусть выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), при этом реализуются $(n-1)^2+1$ тождеств (4.1.7) и (4.1.8). Тогда система дифференциальных равенств (4.1.6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\alpha(\alpha) &\equiv g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta_1) \equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv \\ &\equiv g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) =: \Gamma_n(\alpha), \end{aligned} \quad (4.1.12a)$$

$$\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv h^2(\beta_2)\Gamma_{33}^1(\beta_1, \beta_2) \equiv \dots \equiv h^2(\beta_2) \dots i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.1.12b)$$

$$\Gamma_{n-2, n-2}^{n-3}(\beta_{n-3}) \equiv i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-3}(\beta_{n-3}, \beta_{n-2}), \quad \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \quad (4.1.12c)$$

$$f_n^2(\alpha) [2\Gamma_1(\alpha) + Df(\alpha)] + f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \equiv 0, \quad (4.1.12d)$$

$$2\Gamma_2(\beta_1) + Dg(\beta_1) + g^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\beta_1) \equiv 0, \quad (4.1.12e)$$

$$2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + Di(\beta_{n-2}) + i^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\beta_{n-2}) \equiv 0. \quad (4.1.12f)$$

Таким образом, при выполнении $(n-1)^2$ условий (4.1.4), (4.1.5) условия (4.1.6) (в количестве $n(n-1)/2 + 1$) и условие (4.1.12) (в количестве $n(n-1)/2 + 1$) эквивалентны в упомянутом смысле.

4.1.3. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы порядка $2n$ достаточно знать, вообще говоря, $2n-1$ независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (4.1.1), (4.1.3) достаточно знать $n+1$ независимых тензорных инвариантов: или $n+1$ первых интегралов, или $n+1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинацию из интегралов и форм общим количеством $n+1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из $n+1$, а не из $2n-1$ тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже.

Как известно, первым интегралом уравнений геодезических (4.1.2), записанных в виде

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1.13)$$

является гладкая функция

$$\Phi(\dot{x}; x) = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k, \quad (4.1.14)$$

но мы представим его в более простой форме, нужным образом подобрав координаты на касательном расслоении, тем самым «выпрямив» квадратичную форму на фазовом многообразии. Подчеркнем, что в следующей теореме 4.1 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n-1)^2 + n(n-1)/2 + 1$ алгебраических и дифференциальных соотношений (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12) на $3n(n-1)/2 + 1$ функций: на $n(n-1)/2 + 1$ функций $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n-2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n-3, \dots, i_1(\beta_{n-2})$ из (4.1.1) и на $n(n-1) + 1$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ из (4.1.2).

Теорема 4.1. Если выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12), то система (4.1.1), (4.1.3) обладает полным набором, состоящим из $n+1$ первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_n, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_n^2 = C_1^2 = \text{const}, \quad (4.1.15)$$

$$\Phi_2(z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (4.1.16)$$

$$\Phi_3(z_{n-2}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1) = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (4.1.17)$$

$$\Phi_n(z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = C_n = \text{const}, \quad (4.1.18)$$

$$\Phi_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const}, \quad (4.1.19)$$

где

$$\Phi_0(\alpha) = f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad (4.1.20)$$

$$\Psi_1(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{1,0}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}, \quad \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) = i(\beta_{n-2}) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \Gamma_{n-1}(b) db \right\}. \quad (4.1.21)$$

Более того, после замен независимой переменной

$$\frac{d}{dt} = f_n(\alpha) \frac{d}{d\tau} \quad (4.1.22)$$

и фазовых переменных

$$\begin{aligned} w_n &= z_n, \quad w_{n-1}^* = \ln |w_{n-1}|, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, \\ w_s^* &= \ln \left| w_s + \sqrt{1 + w_s^2} \right|, \quad s = 1, \dots, n-2, \\ w_{n-2} &= \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}} \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

фазовый поток системы (4.1.1), (4.1.3) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^n\{w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма

$$dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}. \quad (4.1.24)$$

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 4.1, а именно, сделаем замены (4.1.22) независимой переменной и (4.1.23) фазовых переменных. Тогда система (4.1.1), (4.1.3) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n, \\ \dot{w}_n = -\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) e^{2w_{n-1}^*}, \\ \dot{w}_{n-1}^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_n, \end{cases} \quad (4.1.25)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s^* = e^{w_{n-1}^*} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = e^{w_{n-1}^*} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \frac{W_s(w_s^*)}{\sqrt{1 + W_s^2(w_s^*)}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.1.26)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm \frac{e^{w_{n-1}^*}}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{n-2}^2(w_{n-2}^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (4.1.27)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots j(\beta_{s-1}) \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{s-1}^2(w_{s-1}^*))}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

и $w_s = W_s(w_s^*)$ в силу замены (4.1.23); при этом в составной системе (4.1.25)–(4.1.27) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . При этом $j(\beta_s)$ — функция

от соответствующего угла β_s (например, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $\dots$, $i(\beta_{n-2})$). В явном виде

$$\begin{aligned}
 \Xi_1(\alpha) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \\
 \Xi_2(w_1^*; \alpha, \beta_1) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \frac{1}{\sqrt{1 + W_1^2(w_1^*)}}, \\
 \Xi_3(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*))(1 + W_2^2(w_2^*))}}, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \Xi_{n-2}(w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{\sqrt{(1 + W_1^2(w_1^*)) \dots (1 + W_{n-3}^2(w_{n-3}^*))}}.
 \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

Видно, что дивергенция правой части составной системы (4.1.25)–(4.1.27) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании $n + 1$ первых интегралов. Дифференцирование функции (4.1.15) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) дает

$$\begin{aligned}
 &-2f_n(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_n^3 - 2 \left[f_n^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_{n-1}^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &-2 \left[f_n^2(\alpha) [2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha)] + \right. \\
 &\quad \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \\
 &\quad -2 \left[f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1)] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_{n-2}^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &-2 \left[f_1^2(\alpha) [2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1)] + \right. \\
 &\quad \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &-2 \left[f_{n-2}^2(\alpha) g_{n-3}^2(\beta_1) h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) [2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2})] + \right. \\
 &\quad \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta) \right] \times \\
 &\quad \times \frac{z_1^2 z_2}{f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3})} \equiv 0,
 \end{aligned}$$

если выполнена система дифференциальных равенств (4.1.6). Но, как указано выше, при выполнении $(n-1)^2$ условий (4.1.4), (4.1.5) $n(n-1)/2 + 1$ условий (4.1.6) и $n(n-1)/2 + 1$ условий (4.1.12) в известном смысле эквивалентны.

Далее, дифференцирование функции (4.1.16) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$-f_n(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_n \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}.$$

Но функция $\Phi_0(\alpha)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.16).

Дифференцирование функции (4.1.17) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} -f_n(\alpha) \left\{ \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right\} z_n \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Psi_1(\beta_1) - \\ - \left\{ \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) - \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right\} z_{n-1} f(\alpha) \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Phi_0(\alpha). \end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$ и $\Psi_1(\beta_1)$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} = \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha), \quad \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} = \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1),$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.17).

В дальнейшем по предположению индукции считаем, что в условиях теоремы доказано существование первого интеграла вида

$$\Phi_{n-1}(z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) = C_{n-1} = \text{const}. \quad (4.1.30)$$

Дифференцирование функции (4.1.18) в силу системы (4.1.1), (4.1.3) в условиях теоремы дает

$$\begin{aligned} -f_n(\alpha) z_1 z_n \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) \left[\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha) - \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} \right] + \\ + z_1 z_{n-1} f(\alpha) \Phi_0(\alpha) \Psi_2(\beta_2) \dots \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) \left[- \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1) + \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} \right] + \\ \dots \dots \dots + z_1 z_2 f(\alpha) g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3}) \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \dots \Psi_{n-3}(\beta_{n-3}) \times \\ \times \left[(-1)^n \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}) + (-1)^{n+1} \frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} \right]. \end{aligned}$$

Но функции $\Phi_0(\alpha)$, $\Psi_1(\beta_1) \dots, \Psi_{n-2}(\beta_{n-2})$ удовлетворяют соответственно обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0(\alpha)}{d\alpha} &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] \Phi_0(\alpha), \\ \frac{d\Psi_1(\beta_1)}{d\beta_1} &= \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] \Psi_1(\beta_1), \\ &\dots \dots \dots, \\ \frac{d\Psi_{n-2}(\beta_{n-2})}{d\beta_{n-2}} &= \left[2\Gamma_{n-1}(\beta_{n-2}) + \frac{d \ln |i(\beta_{n-2})|}{d\beta_{n-2}} \right] \Psi_{n-2}(\beta_{n-2}), \end{aligned}$$

что и доказывает наличие первого интеграла (4.1.18).

Наконец, рассмотрим два уровня C_{n-1} и C_n первых интегралов (4.1.30) и (4.1.18) соответственно. На этих уровнях справедливо равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \mp \frac{C_n}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(\beta_{n-2}) - C_n^2}}. \quad (4.1.31)$$

Будем искать угол β_{n-1} из следующего уравнения, полученного из двух последних уравнений исследуемой системы:

$$\frac{d\beta_{n-1}}{d\beta_{n-2}} = \frac{z_1}{z_2} i(\beta_{n-2}).$$

Используя равенство (4.1.31), получаем требуемое утверждение о наличии первого интеграла (4.1.19). Теорема доказана. $\square$

Заметим также, что систему равенств (4.1.6) (или (4.1.12)) можно трактовать как возможность преобразования квадратичной формы метрики многообразия к каноническому виду с законом сохранения энергии (4.1.15) (или см. ниже (4.2.2)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работу [3, 7]). Поиск первого интеграла (4.1.15) и интегралов (4.1.16)–(4.1.19) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий.

Пример 4.1. В случае обобщенных сферических координат $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, когда метрика на n -мерной сфере S^n индуцирована евклидовой метрикой объемлющего $(n+1)$ -мерного пространства (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dots + \right. \\ \left. + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \alpha \cos \alpha = 0, \quad (4.1.32a)$$

$$\ddot{\beta}_1 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \left[\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2 \beta_3 + \dots + \right. \\ \left. + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \quad (4.1.32b)$$

$$\ddot{\beta}_2 + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \left[\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3 + \dot{\beta}_5^2 \sin^2 \beta_3 \sin^2 \beta_4 + \dots + \right. \\ \left. + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_3 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \quad (4.1.32c)$$

$$\dots, \\ \ddot{\beta}_{n-2} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + \\ + 2\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_{n-3}}{\sin \beta_{n-3}} - \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2} = 0, \quad (4.1.32d)$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 2\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}} = 0 \quad (4.1.32e)$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \quad (4.1.33a)$$

$$\dot{z}_n = -(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (4.1.33b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-1} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (4.1.33c)$$

$$\dot{z}_{n-2} = z_{n-2} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_{n-2} z_{n-1} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \\ - (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2) \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (4.1.33d)$$

$$\dots, \\ \dot{z}_1 = z_1 z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + \\ + z_1 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^{s+1} z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\}, \quad (4.1.33e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (4.1.33f)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1}, \quad (4.1.33g)$$

$$\dots\dots\dots \dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.1.33h)$$

если первое уравнение и группу последних $n - 1$ уравнений системы (4.1.33) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 4.2. В обобщенных сферических координатах $(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, если метрика на n -мерной сфере $\mathbb{S}^n$ индуцирована метрикой специального силового поля при наличии некоторой группы симметрий (задача класса (а)), однопараметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \left[\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \sin^2 \beta_1 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_1 \sin^2 \beta_2 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_1 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0, \quad (4.1.34a)$$

$$\ddot{\beta}_1 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \left[\dot{\beta}_2^2 + \dot{\beta}_3^2 \sin^2 \beta_2 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_2 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_1 \cos \beta_1 = 0, \quad (4.1.34b)$$

$$\ddot{\beta}_2 + \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - \left[\dot{\beta}_3^2 + \dot{\beta}_4^2 \sin^2 \beta_3 + \dots + \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin^2 \beta_3 \dots \sin^2 \beta_{n-2} \right] \sin \beta_2 \cos \beta_2 = 0, \quad (4.1.34c)$$

$$\dots\dots\dots \ddot{\beta}_{n-2} + \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-2} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2 \dot{\beta}_{n-3} \dot{\beta}_{n-2} \frac{\cos \beta_{n-3}}{\sin \beta_{n-3}} - \dot{\beta}_{n-1}^2 \sin \beta_{n-2} \cos \beta_{n-2} = 0, \quad (4.1.34d)$$

$$\ddot{\beta}_{n-1} + \dot{\alpha} \dot{\beta}_{n-1} \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + 2 \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} + \dots + 2 \dot{\beta}_{n-2} \dot{\beta}_{n-1} \frac{\cos \beta_{n-2}}{\sin \beta_{n-2}} = 0 \quad (4.1.34e)$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = -z_n, \quad (4.1.35a)$$

$$\dot{z}_n = -(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}, \quad (4.1.35b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-1} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + (z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1}, \quad (4.1.35c)$$

$$\dot{z}_{n-2} = z_{n-2} z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} - z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta_1} - (z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_2}, \quad (4.1.35d)$$

$$\dots\dots\dots \dot{z}_1 = z_1 z_n \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha} + z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^{s+1} z_{n+1-s} \frac{\cos \beta_{s-1}}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{s-1}} \right\}, \quad (4.1.35e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}}, \quad (4.1.35f)$$

$$\dot{\beta}_2 = -z_{n-2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1}, \quad (4.1.35g)$$

.....

$$\dot{\beta}_{n-1} = (-1)^n z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \nu_1 \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sin \beta_1 \dots \sin \beta_{n-2}}, \quad \nu_1 \in \mathbb{R}, \quad (4.1.35h)$$

если первое и группу последних $n - 1$ уравнений системы (4.1.35) рассматривать как новые кинематические соотношения.

Пример 4.3. В случае n -мерного пространства Лобачевского (с координатами $x_1 = \beta_1, \dots, x_{n-1} = \beta_{n-1}, y = \alpha$, задача класса (с)) n -параметрическая система, эквивалентная почти всюду уравнениям геодезических

$$\ddot{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}_1^2 - \dots - \dot{\beta}_{n-1}^2) = 0, \quad \ddot{\beta}_1 - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 = 0, \quad \dots, \quad \ddot{\beta}_{n-1} - \frac{2}{\alpha}\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} = 0 \quad (4.1.36)$$

и имеющая первые интегралы (4.1.15)–(4.1.19), примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = z_n \nu_1 \alpha, \quad (4.1.37a)$$

$$\dot{z}_n = -z_{n-1}^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2} - \dots - z_1^2 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_n}, \quad (4.1.37b)$$

$$\dot{z}_{n-1} = z_{n-1} z_n \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_2}, \quad (4.1.37c)$$

.....

$$\dot{z}_1 = z_1 z_n \frac{\nu_1 \alpha^2}{\alpha^2 + \nu_n}, \quad (4.1.37d)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1} \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_2}}, \quad (4.1.37e)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1 \frac{\nu_1 \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \nu_n}}, \quad \nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}, \quad (4.1.37f)$$

если первое и группу последних $n - 1$ уравнений системы (4.1.37) рассматривать как новые кинематические соотношения.

4.2. Инварианты систем на касательном расслоении к n -мерному многообразию в потенциальном силовом поле.

4.2.1. Введение внешнего потенциального силового поля. Теперь несколько модифицируем составную динамическую систему (4.1.1), (4.1.3) и получим систему *консервативную*. Именно, внесем с систему гладкое (внешнее) консервативное силовое поле со следующими проекциями на оси $\dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n$:

$$\tilde{F}(z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = \begin{pmatrix} F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}) \\ F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \\ \vdots \\ F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) \\ F_n(\alpha)f_n(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^n\{z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\beta}_{n-2} - F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}^2(\alpha)g_{n-3}^2(\beta_1)h_{n-4}^2(\beta_2) \dots r_1^2(\beta_{n-3}) + \\
& + 2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-2} + 2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-2} + \dots + \\
& + \Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-3}\dot{\beta}_{n-2} + \Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\
& \ddot{\beta}_{n-1} - F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}^2(\alpha)g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) + \\
& + 2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_{n-1} + 2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_{n-1} + \dots + \\
& + \Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-2}\dot{\beta}_{n-1} = 0
\end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^n\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_{n-1}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$.

4.2.2. Достаточные условия интегрируемости. Для полного интегрирования системы (4.2.1) порядка $2n$ достаточно знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых инвариантов. Далее будет показано, что для полного интегрирования системы (4.2.1) достаточно знать $n + 1$ независимых тензорных инвариантов: или $n + 1$ первых интегралов, или $n + 1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации из интегралов и форм общим количеством $n + 1$. При этом, конечно, инварианты (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее. Тот факт, что полный набор состоит из $n + 1$, а не из $2n - 1$, тензорных инвариантов (помимо упомянутого тривиального), будет доказан ниже. Кроме того, подчеркнем, что в следующей теореме 4.2 (которая справедлива и при более общих условиях) накладываются $(n - 1)^2 + n(n - 1)/2 + 1$ алгебраических и дифференциальных соотношений (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12) на $3n(n - 1)/2 + 1$ функций: на $n(n - 1)/2 + 1$ функций $f_k(\alpha)$, $k = 1, \dots, n$, $g_l(\beta_1)$, $l = 1, \dots, n - 2$, $h_m(\beta_2)$, $m = 1, \dots, n - 3$, ..., $i_1(\beta_{n-2})$ и на $n(n - 1) + 1$, вообще говоря, ненулевых коэффициентов связности $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$.

Теорема 4.2. Если выполнены условия (4.1.4), (4.1.5), (4.1.12), то система (4.2.1) обладает полным набором, состоящим из $n + 1$ первых интегралов

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_n, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) &= z_1^2 + \dots + z_n^2 + V(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = C_1 = \text{const}, \\
V(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) &= V_n(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} V_{n-k}(\beta_k) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a) da - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\beta_{k,0}}^{\beta_k} F_{n-k}(b) db,
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

а также, для простоты, при $F_{n-k}(\beta_k) \equiv 0$, $k = 1, \dots, n - 1$, — первых интегралов (4.1.16)–(4.1.19). Более того, после замен независимой переменной (4.1.22) и фазовых неперменных (4.1.23) — фазовый поток системы (4.2.1) сохраняет фазовый объем с постоянной плотностью на касательном расслоении $TM^n\{w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$, т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма (4.1.24).

Доказательство. Докажем сначала вторую часть теоремы 4.2, а именно, сделаем замены независимой переменной (4.1.22) и фазовых переменных (4.1.23). Тогда система (4.2.1) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n, \\ \dot{w}_n = F_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_4(\alpha) e^{2w_{n-1}^*}, \\ \dot{w}_{n-1}^* = \frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)} \Gamma_n(\alpha) w_n, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s^* = e^{w_{n-1}^*} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = e^{w_{n-1}^*} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) \frac{W_s(w_s^*)}{\sqrt{1 + W_s^2(w_s^*)}}, \quad s = 1, \dots, n - 2, \end{cases} \tag{4.2.4}$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \pm \frac{e^{w_{n-1}^*}}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*)) \dots (1+W_{n-2}^2(w_{n-2}^*))}} \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (4.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Xi_s(w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) = & \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots j(\beta_{s-1}) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*)) \dots (1+W_{s-1}^2(w_{s-1}^*))}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

и $w_s = W_s(w_s^*)$ в силу замены (4.1.23); при этом в составной системе (4.2.3)–(4.2.5) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ . При этом $j(\beta_s)$ — функция от соответствующего угла β_s (например, $f(\alpha)$, $g(\beta_1)$, $\dots$, $i(\beta_{n-2})$). При этом, более явно,

$$\begin{aligned} \Xi_1(\alpha) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \\ \Xi_2(w_1^*; \alpha, \beta_1) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \frac{1}{\sqrt{1+W_1^2(w_1^*)}}, \\ \Xi_3(w_2^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2) &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*))(1+W_2^2(w_2^*))}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Xi_{n-2}(w_{n-3}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-3}) &= \\ &= \pm \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}) \frac{1}{\sqrt{(1+W_1^2(w_1^*)) \dots (1+W_{n-3}^2(w_{n-3}^*))}}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Видно, что дивергенция правой части составной системы (4.2.3)–(4.2.5) тождественно равна нулю, что и доказывает вторую часть теоремы.

Докажем первую часть теоремы о существовании $n+1$ первого интеграла; при этом доказательство существования интегралов (4.1.16)–(4.1.19) проводится так же, как в теореме 4.1. Дифференцирование функции (4.2.2) в силу системы (4.2.1) дает

$$\begin{aligned} & 2z_n F_n(\alpha) f_n(\alpha) + 2z_{n-1} F_{n-1}(\beta_1) f_1(\alpha) + \\ & + 2z_{n-2} F_{n-2}(\beta_2) f_2(\alpha) g_1(\beta_1) + 2z_{n-3} F_{n-3}(\beta_3) f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h_1(\beta_2) + \dots + \\ & + 2z_2 F_2(\beta_{n-2}) f_{n-2}(\alpha) g_{n-3}(\beta_1) h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) + \\ & + 2z_1 F_1(\beta_{n-1}) f_{n-1}(\alpha) g_{n-2}(\beta_1) h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}) - 2f_n(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_n(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_n^3 - \\ & - 2 \left[f_n^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] + f_1^2(\alpha) \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_{n-1}^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \\ & \dots\dots\dots \\ & - 2 \left[f_n^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] + \right. \\ & \left. + f_{n-1}^2(\alpha) g_{n-2}^2(\beta_1) h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2}) \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta) \right] \frac{z_1^2 z_n}{f_n(\alpha)} - \\ & - 2 \left[f_1^2(\alpha) \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + Dg_1(\beta_1) \right] + f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \right] \frac{z_{n-2}^2 z_{n-1}}{f_1(\alpha)} - \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_{n-1} = & F_{n-1}(\beta_1)f_1(\alpha) - \\ & - f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha) \right] z_{n-1}z_n - \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1)\Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)z_{n-2}^2 - \dots - \\ & - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_{n-2}^2(\beta_1)h_{n-3}^2(\beta_2) \dots i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)z_1^2 + z_{n-1}F_{n-1}^1(\alpha), \end{aligned} \quad (4.3.1c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & F_2(\beta_{n-2})f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) - \\ & - f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Df_{n-2}(\alpha) \right] z_2z_n - \\ & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dg_{n-3}(\beta_1) \right] z_2z_{n-1} - \dots - \\ & - f_{n-3}(\alpha)g_{n-4}(\beta_1)h_{n-5}(\beta_2) \dots s_1(\beta_{n-4}) \left[2\Gamma_{n-3, n-2}^{n-2}(\alpha, \beta) + Dr_1(\beta_{n-3}) \right] z_2z_3 - \\ & - \frac{f_{n-1}^2(\alpha)}{f_{n-2}(\alpha)} \frac{g_{n-2}^2(\beta_1)}{g_{n-3}(\beta_1)} \frac{h_{n-3}^2(\beta_2)}{h_{n-4}(\beta_2)} \dots \frac{r_2^2(\beta_{n-3})}{r_1(\beta_{n-3})} i_1^2(\beta_{n-2})\Gamma_{n-1, n-1}^{n-2}(\alpha, \beta)z_1^2 + z_2F_2^1(\alpha), \end{aligned} \quad (4.3.1d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & F_1(\beta_{n-1})f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}) - \\ & - f_n(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Df_{n-1}(\alpha) \right] z_1z_n - \\ & - f_1(\alpha) \left[2\Gamma_{1, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dg_{n-2}(\beta_1) \right] z_1z_{n-1} - \\ & - f_2(\alpha)g_1(\beta_1) \left[2\Gamma_{2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Dh_{n-3}(\beta_2) \right] z_1z_{n-2} - \dots - \\ & - f_{n-2}(\alpha)g_{n-3}(\beta_1)h_{n-4}(\beta_2) \dots r_1(\beta_{n-3}) \left[2\Gamma_{n-2, n-1}^{n-1}(\alpha, \beta) + Di_1(\beta_{n-2}) \right] z_1z_2 + z_1F_1^1(\alpha), \end{aligned} \quad (4.3.1e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f_1(\alpha), \quad (4.3.1f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f_2(\alpha)g_1(\beta_1), \quad (4.3.1g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f_3(\alpha)g_2(\beta_1)h_1(\beta_2), \quad (4.3.1h)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1f_{n-1}(\alpha)g_{n-2}(\beta_1)h_{n-3}(\beta_2) \dots i_1(\beta_{n-2}), \quad (4.3.1i)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} - \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_n^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] \right\} \dot{\alpha} - \\ - F_n(\alpha)f_n^2(\alpha) + b\delta(\alpha)F_n^1(\alpha) + b^2\delta^2(\alpha) [\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + Df_n(\alpha)] + \\ + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\alpha}^2 + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - \left\{ F_{n-1}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + Df_1(\alpha)] \right\} \dot{\beta}_1 - F_{n-1}(\beta_1)f_1^2(\alpha) + \\ + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - \left\{ F_{n-2}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + Df_2(\alpha)] \right\} \dot{\beta}_2 - \\ - F_{n-2}(\beta_2)f_2^2(\alpha)g_1^2(\beta_1) + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \\ + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - \left\{ F_{n-3}^1(\alpha) + b\delta(\alpha) [2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + Df_3(\alpha)] \right\} \dot{\beta}_3 - \\ - F_{n-3}(\beta_3)f_3^2(\alpha)g_2^2(\beta_1)h_1^2(\beta_2) + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + \\ + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 + \Gamma_{44}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_4^2 + \dots + \Gamma_{n-1, n-1}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_{n-1}^2 = 0, \\ \dots, \end{aligned}$$

$$\dot{\beta}_1 = z_{n-1}f(\alpha), \quad (4.3.3f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_{n-2}f(\alpha)g(\beta_1), \quad (4.3.3g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_{n-3}f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2), \quad (4.3.3h)$$

.....

$$\dot{\beta}_{n-2} = z_2f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots r(\beta_{n-3}), \quad (4.3.3i)$$

при наличии также последнего уравнения

$$\dot{\beta}_{n-1} = z_1f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}). \quad (4.3.4)$$

Далее, наложим определенные ограничения на силовое поле, которое, как отмечалось, в явном виде вводит в систему диссипацию разного знака. Поэтому предположим, что выполнены следующие равенства:

$$F_1^1(\alpha) \equiv \dots \equiv F_{n-1}^1(\alpha) =: F^1(\alpha). \quad (4.3.5)$$

Для полного интегрирования (по Якоби) рассматриваемой системы (4.3.3), (4.3.4) при условии (4.3.5) необходимо знать, вообще говоря, $2n - 1$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{aligned} w_n = z_n, \quad w_{n-1} = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}, \quad w_{n-2} = \frac{z_2}{z_1}, \\ w_{n-3} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \quad \dots, \quad w_1 = \frac{z_{n-1}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

система (4.3.3), (4.3.4) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F_n(\alpha)f_n(\alpha) - \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2 + w_n F_n^1(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \frac{f^2(\alpha)}{f_n(\alpha)}\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n + w_{n-1}F^1(\alpha), \end{cases} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = Z_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} f(\alpha)g(\beta_1) \widetilde{\dots} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = Z_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha)g(\beta_1) \widetilde{\dots}, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.3.8)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = Z_1(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha)g(\beta_1)h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}), \quad (4.3.9)$$

где в системах (4.3.8) символом $\widetilde{\dots}$ показаны одинаковые члены, а функция $j(\beta_s)$ — одна из функций $g, h, \dots$, зависящая от соответствующего угла β_s , при этом

$$Z_k(w_1, \dots, w_{n-1}) \equiv z_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

— функции в силу замены (4.3.6).

Видно, что для полной интегрируемости системы (4.3.7)–(4.3.9) достаточно указать два независимых тензорных инварианта системы (4.3.7), по одному — для систем (4.3.8) (после соответствующих замен независимого переменного в них, таких систем $n - 2$ штуки) и дополнительный тензорный инвариант, «привязывающий» уравнение (4.3.9) (т.е. всего $n + 1$ инвариантов).

Наложим определенные ограничения на силовое поле. Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\frac{f^2(\alpha)}{f_n^2(\alpha)}\Gamma_n(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)| = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}, \quad (4.3.10)$$

где $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$, $\Delta(\alpha) = \delta(\alpha)/f_n(\alpha)$, а для некоторых $\lambda_n^0, \lambda_k^1 \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$, должны выполняться равенства

$$\begin{aligned} F_n(\alpha) &= \lambda_n^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2} = \lambda_n^0 \tilde{\Delta}(\alpha) \Delta(\alpha), \\ F_k^1(\alpha) &= \lambda_k^1 f_n(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha) = \lambda_k^1 \tilde{\Delta}(\alpha) f_n(\alpha), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Условие (4.3.10) назовем «геометрическим», а условия из группы (4.3.11) — «энергетическими». При этом $\lambda_1^1 = \dots = \lambda_{n-1}^1 =: \lambda^1$ в силу (4.3.5). Условие (4.3.10) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_n(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$ при участии функции $f(\alpha)$, входящей в кинематические соотношения. Условия группы (4.3.11) названы энергетическими в том числе потому, что (внешние) силы становятся, в некотором смысле «потенциальными» по отношению к «силовой» функции $\Delta^2(\alpha)/2$ (или $\Delta(\alpha)$), приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду (опять же относительно функции $\Delta(\alpha)$). При этом функция $\Delta(\alpha)$ вносит в систему диссипацию разных знаков или так называемую (*знако*)переменную диссипацию.

Теорема 4.3. Пусть выполняются условия (4.3.10) и (4.3.11). Тогда система (4.3.7)–(4.3.9) обладает $n+1$ независимыми, вообще говоря, трансцендентными (см. [24]) (т.е. имеющими существенно особые точки) первыми интегралами.

Схема доказательства. Для доказательства теоремы 4.3 для начала сопоставим системе третьего порядка (4.3.7) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}^2/f_n(\alpha) + w_n F_n^1(\alpha)}{w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)w_{n-1}w_n/f_n(\alpha) + w_{n-1} F^1(\alpha)}{w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_n = u_2 \Delta(\alpha), \quad w_{n-1} = u_1 \Delta(\alpha), \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_n(\alpha)}, \quad (4.3.13)$$

приводим систему (4.3.12) к следующему виду:

$$\begin{cases} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha) u_2 = \frac{F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1^2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F_n^1(\alpha)u_2}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} + \tilde{\Delta}(\alpha) u_1 = \frac{f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha)\Delta^2(\alpha)u_1u_2/f_n(\alpha) + \Delta(\alpha)F^1(\alpha)u_1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (4.3.14)$$

что, учитывая (4.1.12), почти всюду эквивалентно

$$\begin{cases} \Delta(\alpha) \frac{du_2}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left[F_n(\alpha)f_n(\alpha) - f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \frac{\Delta^2(\alpha)u_1^2}{f_n(\alpha)} - \right. \\ \left. - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)u_2^2 + [\Delta(\alpha)F_n^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_2 \right], \\ \Delta(\alpha) \frac{du_1}{d\alpha} = \frac{1}{u_2\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)} \left[\left[f^2(\alpha)\Gamma_n(\alpha) \frac{\Delta^2(\alpha)}{f_n(\alpha)} - \tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha) \right] u_1u_2 + \right. \\ \left. + [\Delta(\alpha)F^1(\alpha) - b\tilde{\Delta}(\alpha)\delta(\alpha)]u_1 \right]; \end{cases} \quad (4.3.15)$$

напомним, что $\tilde{\Delta}(\alpha) = d\Delta(\alpha)/d\alpha$.

Теперь для интегрирования системы (4.3.15) потребуется выполнение геометрического и энергетических условий (4.3.10) и (4.3.11). Действительно, после их выполнения система (4.3.15) приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 + (\lambda_n^1 - b)u_2}{(\kappa - 1)u_1 u_2 + (\lambda^1 - b)u_1}. \quad (4.3.16)$$

Уравнение (4.3.16) имеет вид уравнения Абеля (см. [10]); его общее решение имеет достаточно громоздкий вид. В частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ данное уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{-u_2^2 - u_1^2 + (\lambda^1 - b)u_2 + \lambda_n^0}{u_1} = C_1 = \text{const}, \quad (4.3.17)$$

который в прежних переменных выглядит следующим образом:

$$\Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \frac{f_n^2(\alpha)(w_n^2 + w_{n-1}^2) + (b - \lambda^1)w_n \delta(\alpha) f_n(\alpha) - \lambda_n^0 \delta^2(\alpha)}{w_{n-1} \delta(\alpha) f_n(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (4.3.18)$$

Замечание 4.3. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (4.3.7) (как часть системы (4.3.7)–(4.3.9)) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним. Если же α не является периодической координатой, то в данном случае имеем систему со знакопеременной диссипацией. При этом она превращается в систему консервативную при выполнении условия (4.1.12), геометрического и энергетических условий (4.3.10), (4.3.11) (но при любой гладкой функции $F_n(\alpha)$) и, в частности, при $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, $\kappa = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n f_n(\alpha) + b \delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = F_n(\alpha) f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}^2 - b w_n f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1} w_n - b w_{n-1} f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (4.3.19)$$

Действительно, система (4.3.19) обладает двумя гладкими первыми интегралами вида

$$\Phi_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1}^2 + w_n^2 + 2b w_n \Delta(\alpha) + V(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad (4.3.20)$$

$$\Phi_2(w_{n-1}; \alpha) = w_{n-1} \Delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (4.3.21)$$

где

$$V(\alpha) = -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_n(a) da.$$

В самом деле, в силу предыдущих свойств первых интегралов имеем

$$\begin{aligned} \Phi_2(w_{n-1}; \alpha) &= w_{n-1} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} = \\ &= w_{n-1} f(\alpha) \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \left[\Gamma_n(b) \frac{f^2(b)}{f_n^2(b)} + \frac{d \ln |f(b)|}{db} \right] db \right\} \cong w_{n-1} \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_n(b) \frac{f^2(b)}{f_n^2(b)} db \right\}, \end{aligned}$$

где $\cong$ означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной. В силу (4.3.10), (4.3.11) последняя величина, в частности, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1 = -b$, перепишется в виде

$$w_{n-1} \exp \left\{ \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d}{db} \ln |\Delta(b)| db \right\} \cong w_{n-1} \Delta(\alpha) \quad (4.3.22)$$

с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (4.3.20), (4.3.21) также является первым интегралом системы (4.3.19). Но при $\lambda^1 = \lambda_n^1 \neq -b$ каждая из функций

$$w_n^2 + w_{n-1}^2 + (b - \lambda^1)w_n\Delta(\alpha) - \lambda_n^0\Delta^2(\alpha) \quad (4.3.23)$$

и (4.3.21) по отдельности не является первым интегралом системы (4.3.7). Однако отношение функций (4.3.23), (4.3.21) является первым интегралом системы (4.3.7) (при $\kappa = -1$) при любых $\lambda^1 = \lambda_n^1$ и b .

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (4.3.7) при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$. Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (4.3.17) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{-\lambda^1 + b}{2}\right)^2 + \left(u_1 + \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2}{4} + \lambda_n^0. \quad (4.3.24)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0 \geq 0, \quad (4.3.25)$$

и фазовое пространство системы (4.3.7) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (4.3.24).

Таким образом, в силу соотношения (4.3.17) первое уравнение системы (4.3.15) при условиях (4.3.10) и (4.3.11) и при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ примет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta(\alpha)}{\bar{\Delta}(\alpha)} \frac{du_2}{d\alpha} &= \frac{2(-\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 U_1(C_1, u_2)}{u_2 + b}, \\ U_1(C_1, u_2) &= \frac{1}{2} \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)} \right\}; \end{aligned}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (4.3.25). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (4.3.7) примет вид

$$-\int \frac{d\Delta(\alpha)}{\Delta(\alpha)} = \int \frac{(b + u_2)du_2}{2(-\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)u_2 + u_2^2) + C_1 \left\{ -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - (\lambda^1 - b)u_2 - \lambda_n^0)} \right\}/2}. \quad (4.3.26)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна $-\ln |\Delta(\alpha)|$. Если

$$u_2 - \frac{\lambda^1 - b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = (\lambda^1 - b)^2 + C_1^2 + 4\lambda_n^0,$$

то правая часть равенства (4.3.26) примет вид

$$-\frac{1}{4} \int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} + b \int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1 \right| \mp \frac{b}{2} I_1,$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \quad (4.3.27)$$

При вычислении интеграла (4.3.27) возможны три случая.

I: $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_n^0$. В этом случае

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \text{const}. \end{aligned}$$

II: $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_n^0$. В этом случае

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

III: $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_n^0$. В этом случае

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \text{const}.$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)} - \frac{\lambda^1 - b}{2},$$

получаем окончательный вид для величины I_1 :

I. При $(\lambda^1 - b)^2 > -4\lambda_n^0$

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \ln \left| \frac{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{(\lambda^1 - b)^2 + 4\lambda_n^0}} \right| + \text{const}.$$

II. При $(\lambda^1 - b)^2 < -4\lambda_n^0$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{-4\lambda_n^0 - (\lambda^1 - b)^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

III. При $(\lambda^1 - b)^2 = -4\lambda_n^0$

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}.$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (4.3.7) при вышеперечисленных условиях (в том числе, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$): предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных (см. [24]).

Замечание 4.4. В выражение найденного дополнительного первого интеграла формально можно вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (4.3.17). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = G\left(\Delta(\alpha), \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const}. \quad (4.3.28)$$

Выражение первого интеграла (4.3.28) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$ (которая может быть функцией неэлементарной).

Таким образом, для интегрирования системы (4.3.7)–(4.3.9) порядка $2n$ при некоторых условиях уже найдены два независимых первых интеграла системы (4.3.7). Для полной же ее интегрируемости достаточно найти по одному первому интегралу — для систем (4.3.8) (меняя в них независимые переменные), становящихся независимыми подсистемами после соответствующих замен независимого переменного, а также еще один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.3.9).

Первые интегралы для систем (4.3.8) будут иметь следующий вид:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \dots, n-2; \quad (4.3.29)$$

функции $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, определены в (4.1.21).

В предыдущих переменных z первые интегралы (4.3.29) таковы:

$$\begin{aligned}\Theta'_3(z_{n-1}, \dots, z_1; \beta_1) &= \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2} \Psi_1(\beta_1)} = C'_3 = \text{const}, \\ \Theta'_4(z_{n-2}, \dots, z_1; \beta_2) &= \frac{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \dots + z_{n-3}^2} \Psi_2(\beta_2)} = C'_4 = \text{const}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Theta'_n(z_2, z_1; \beta_{n-2}) &= \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \Psi_{n-2}(\beta_{n-2})} = C'_n = \text{const}.\end{aligned}\tag{4.3.30}$$

Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (4.3.9), находится по аналогии с (4.1.19):

$$\Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \beta_{n-1} \pm \int_{\beta_{n-2,0}}^{\beta_{n-2}} \frac{C_n i(b)}{\sqrt{C_{n-1}^2 \Psi_{n-2}^2(b) - C_n^2}} db = C_{n+1} = \text{const},\tag{4.3.31}$$

где, после взятия интеграла (4.3.31), вместо постоянных C_{n-1} , C_n можно формально подставить левые части равенств (4.3.29) (или (4.3.30)) при $s = n - 3, n - 2$ соответственно.

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (4.3.7)–(4.3.9) имеет $n + 1$ первых интегралов, которые являются, вообще говоря, трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа, имеющих существенно особые точки). Теорема 4.3 доказана. $\square$

4.3.3. Инвариантные дифференциальные формы систем со знакопеременной диссипацией.

Теорема 4.4. Если для системы вида (4.3.7)–(4.3.9) выполняются геометрическое и энергетические свойства (4.3.10), (4.3.11), то у нее также существуют $n + 1$ функционально независимых между собой инвариантных дифференциальных форм с трансцендентными, вообще говоря, коэффициентами (т.е. имеющими существенно особые точки; ср. [24]). Эти дифференциальные формы, для простоты, при $\kappa = -1$, $\lambda^1 = \lambda_n^1$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) &dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha, \\ \rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) &dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha, \\ \rho_{2+s}(w_s; \beta_s) &= \frac{1}{\sqrt{1 + w_s^2}} dw_s \wedge d\beta_s, \quad s = 1, \dots, n - 2, \\ \rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}) &dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha \wedge d\beta_{n-2} \wedge d\beta_{n-1},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)} \right\} \cdot \frac{u_n^2 + u_{n-1}^2 + (b - \lambda^1)u_n - \lambda_n^0}{u_{n-1}}, \\ u_k &= \frac{w_k}{\Delta(\alpha)}, \quad k = n - 1, n, \\ \rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) &= \Delta(\alpha) \cdot \exp \left\{ \int \frac{(2b + \lambda^1 + u_n)du_n}{U_2(C_1, u_n)} \right\}, \\ \rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}) &= \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_n}{U_2(C_1, u_n)} \right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1});\end{aligned}$$

вообще говоря, они зависят с первыми интегралами (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.31).

Доказательство. I. Система (4.3.7) составной рассматриваемой системы (4.3.7)–(4.3.9) при выполнении свойств (4.3.10), (4.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = \lambda_n^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}^2 + \lambda_n^1 w_n f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1} w_n + \lambda^1 w_{n-1} f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (4.3.32)$$

После замен независимой и фазовой переменных

$$\frac{d}{dt} = f_n(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \quad w_{n-1}^* = \ln |w_{n-1}| \quad (4.3.33)$$

система (4.3.32) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = w_n + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \lambda_n^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_{n-1}^*} + \lambda_n^1 w_n \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_n + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha); \end{cases} \quad (4.3.34)$$

при этом в системе (4.3.34) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

В принципе замена фазовой переменной (4.3.33) носит технический характер, и при этом можно использовать как переменную w_{n-1}^* , так и переменную w_{n-1} .

Для системы (4.3.34) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge d\alpha$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} \left[\rho(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \right] = 0, \quad (4.3.35)$$

где

$$X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \left\{ X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \right\} \quad (4.3.36)$$

— векторное поле рассматриваемой системы (4.3.34) в координатах $(w_n, w_{n-1}^*; \alpha)$. Уравнение (4.3.35) переписывается в виде

$$\begin{aligned} X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_\alpha + X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_{w_n} + X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_{w_{n-1}^*} = \\ = -\rho \operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = (b + \lambda_n^1) \tilde{\Delta}(\alpha). \quad (4.3.38)$$

Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_\alpha(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot{w}_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot{w}_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \\ \dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_n^1) \tilde{\Delta}(\alpha). \end{cases} \quad (4.3.39)$$

У системы, состоящей из первых трех уравнений системы (4.3.39), уже найдены два первых интеграла (4.3.18) и (4.3.28). Найдем третий независимый первый интеграл системы (4.3.39) уравнений характеристик.

Сопоставим системе (4.3.39) следующую неавтономную систему:

$$\begin{cases} \frac{dw_n}{d\alpha} = \frac{\lambda_n^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_{n-1}^2 / \Delta(\alpha) + \lambda_n^1 w_n \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\kappa \tilde{\Delta}(\alpha) w_{n-1} w_n / \Delta(\alpha) + \lambda^1 w_{n-1} \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b \Delta(\alpha)}, \\ \frac{d\rho}{d\alpha} = -\frac{(b + \lambda_n^1) \rho \tilde{\Delta}(\alpha)}{w_n + b \Delta(\alpha)} \end{cases} \quad (4.3.40)$$

или

$$\begin{cases} \frac{dw_n}{d\Delta} = \frac{\lambda_n^0 \Delta - \kappa w_{n-1}^2 / \Delta + \lambda_n^1 w_n}{w_n + b \Delta}, \\ \frac{dw_{n-1}}{d\Delta} = \frac{\kappa w_{n-1} w_n / \Delta + \lambda^1 w_{n-1}}{w_n + b \Delta}, \\ \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_n^1) \rho}{w_n + b \Delta}. \end{cases} \quad (4.3.41)$$

После введения однородных переменных

$$w_n = u_2 \Delta, \quad w_{n-1} = u_1 \Delta, \quad (4.3.42)$$

похожих на соответствующие переменные в замене (4.3.13), система (4.3.41) переписется в виде

$$\begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} + u_2 = \frac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 + \lambda_n^1 u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} + u_1 = \frac{\kappa u_1 u_2 + \lambda^1 u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_n^1) \rho}{u_2 + b} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta \frac{du_2}{d\Delta} = \frac{\lambda_n^0 - \kappa u_1^2 - u_2^2 - (b - \lambda_n^1) u_2}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{du_1}{d\Delta} = \frac{(\kappa - 1) u_1 u_2 - (b - \lambda^1) u_1}{u_2 + b}, \\ \Delta \frac{d\rho}{d\Delta} = -\frac{(b + \lambda_n^1) \rho}{u_2 + b}. \end{cases} \quad (4.3.43)$$

Из первых двух уравнений системы (4.3.43) получается первый интеграл (4.3.18). Из квадратуры

$$-\frac{d\Delta}{\Delta} = \frac{(u_2 + b) du_2}{U_2(C_1, u_2)}, \quad (4.3.44)$$

где

$$U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - \frac{C_1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda^1) u_2 - \lambda_n^0, \quad C_1 \neq 0,$$

получается первый интеграл (4.3.28) (здесь учитывается, что $\kappa = -1$ и $\lambda^1 = \lambda_n^1$). Наконец, из квадратуры

$$\frac{d\rho}{(b + \lambda^1) \rho} = \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \quad (4.3.45)$$

получается первый интеграл, содержащий неизвестную функцию ρ .

Вычислим квадратуру (4.3.45). Справедливо инвариантное соотношение

$$\rho \cdot \exp \left\{ -(b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} = C_\rho = \text{const}, \quad (4.3.46)$$

которое является третьим, недостающим, первым интегралом системы уравнений характеристик (4.3.39).

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.3.37) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2], \quad (4.3.47)$$

где $\mathcal{F}[\Theta_1, \Theta_2]$ — произвольная гладкая функция двух аргументов, при этом Θ_1, Θ_2 — два первых интеграла (4.3.18), (4.3.28) соответственно.

В частности, за два функционально независимых решения линейного уравнения (4.3.37) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha), \quad (4.3.48)$$

$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha), \quad (4.3.49)$$

где $u_2 = w_n / \Delta(\alpha)$, $u_1 = w_{n-1} / \Delta(\alpha)$.

II. Рассмотрим далее системы (4.3.8). После замен независимых переменных

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \pm w_{n-1} f(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \\ \frac{d}{dt} &= \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{1+w_1^2}} f(\alpha) g(\beta_1) \frac{d}{d\tau}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d}{dt} &= \pm \frac{w_{n-1}}{\sqrt{(1+w_1^2) \dots (1+w_{n-3}^2)}} f(\alpha) g(\beta_1) \dots r(\beta_{n-3}) \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.3.50)$$

при $s = n-2, \dots, 1$ соответственно системы (4.3.8) примут следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{w}_s &= X_{w_s}(w_s; \beta_s) = \sqrt{1+w_s^2} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s &= X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, \dots, n-2, \quad j = r, \dots, h, g; \end{aligned} \right\} \quad (4.3.51)$$

при этом в системах (4.3.51) точкой обозначена также производная по новым независимым переменным τ .

Для систем (4.3.51) будем искать интегральные инварианты с плотностями $\rho(w_s; \beta_s)$, соответствующие дифференциальным формам площади $\rho(w_s; \beta_s) dw_s \wedge d\beta_s$, $s = 1, \dots, n-2$, из следующих линейных дифференциальных уравнений:

$$\operatorname{div} [\rho(w_s; \beta_s) X(w_s; \beta_s)] = 0, \quad (4.3.52)$$

где

$$X(w_s; \beta_s) = \left\{ X_{w_s}(w_s; \beta_s), X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) \right\} \quad (4.3.53)$$

— векторные поля рассматриваемых систем (4.3.51) в координатах $(w_s; \beta_s)$. Уравнения (4.3.52) перепишутся в виде

$$X_{w_s}(w_s; \beta_s) \rho_{w_s} + X_{\beta_s}(w_s; \beta_s) \rho_{\beta_s} = -\rho \operatorname{div} X(w_s; \beta_s), \quad (4.3.54)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_s; \beta_s) = \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \quad (4.3.55)$$

Тогда системы уравнений характеристик линейных дифференциальных уравнений (4.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{w}_s = X_{w_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_s; \beta_s), \\ \dot{\rho} = -\rho \frac{w_s}{\sqrt{1+w_s^2}} \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right]. \end{cases} \quad (4.3.56)$$

У систем, состоящих из первых двух уравнений систем (4.3.56), уже найдены первые интегралы (4.3.29). Найдем второй независимый первый интеграл для каждой из систем (4.3.56) уравнений

характеристик. Сопоставим двум последним уравнениям систем (4.3.56) следующие неавтономные уравнения:

$$\frac{d\rho}{d\beta_s} = -\rho \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \quad s = 1, \dots, n-2. \quad (4.3.57)$$

Последние уравнения дают следующие инвариантные соотношения:

$$\Theta_{\rho_{s+2}}(\beta_s; \rho) = \rho \cdot \Psi_s(\beta_s) = C_{\rho_{s+2}} = \text{const}, \quad (4.3.58)$$

которые являются вторыми, недостающими, первыми интегралами систем уравнений характеристик (4.3.56); функции $\Psi_s(\beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, определены в (4.1.21).

Таким образом, общие решения линейных уравнений (4.3.54) в частных производных примут следующий вид:

$$\rho = \frac{\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]}{\Psi_s(\beta_s)}, \quad (4.3.59)$$

где $\mathcal{G}[\Theta_{s+2}]$ — произвольные гладкие функции одного аргумента, при этом Θ_{s+2} — первые интегралы (4.3.29), $s = 1, \dots, n-2$.

В частности, если выбрать

$$\mathcal{G}[\Theta_{s+2}] = \frac{1}{\Theta_{s+2}} = \frac{\Psi_s(\beta_s)}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad (4.3.60)$$

то в качестве решений линейных уравнений (4.3.54) в частных производных можно взять

$$\rho_{2+s}(w_s; \beta_s) = \frac{1}{\sqrt{1+w_s^2}}, \quad s = 1, \dots, n-2. \quad (4.3.61)$$

III. Итак, инвариантные дифференциальные формы с функциями $\rho_p(w_n, w_{n-1}; \alpha)$, $p = 1, 2$, а также $\rho_{2+s}(w_s; \beta_s)$, $s = 1, \dots, n-2$, были получены выше через исследования отдельных систем (4.3.7), (4.3.8), которые сами составляют общую рассматриваемую составную систему (4.3.7)–(4.3.9). Возникает естественный вопрос: как связано нахождение инвариантных форм для отдельных систем с нахождением инвариантных форм для общей составной системы? Ответ на этот вопрос позволит, в частности, ответить и на вопрос о нахождении инвариантной формы, «привязывающей» уравнение (4.3.9).

Составная рассматриваемая система (4.3.7)–(4.3.9) при выполнении свойств (4.3.10), (4.3.11) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = w_n f_n(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = \lambda_n^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) f_n(\alpha) - \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1}^2 + \lambda_n^1 w_n f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1} = \kappa f_n(\alpha) \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_{n-1} w_n + \lambda^1 w_{n-1} f_n(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (4.3.62)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) \frac{1+w_s^2}{w_s} f(\alpha) g(\beta_1) \dots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = \mathcal{Z}_{n-s}(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.3.63)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = \mathcal{Z}_1(w_1, \dots, w_{n-1}) f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2) \dots i(\beta_{n-2}). \quad (4.3.64)$$

После замен независимой и фазовых переменных

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= f_n(\alpha) \frac{d}{d\tau}, \\ w_{n-1}^* &= \ln |w_{n-1}|, \quad w_s^* = \ln \left| w_s + \sqrt{1+w_s^2} \right|, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

составная система (4.3.62)–(4.3.64) примет вид

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = w_n + b\Delta(\alpha), \\ \dot{w}_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \lambda_n^0 \Delta(\alpha) \tilde{\Delta}(\alpha) - \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} e^{2w_{n-1}^*} + \lambda_n^1 w_n \tilde{\Delta}(\alpha), \\ \dot{w}_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) = \kappa \frac{\tilde{\Delta}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} w_n + \lambda^1 \tilde{\Delta}(\alpha), \end{cases} \quad (4.3.66)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_s^* = X_{w_s^*}(w_{n-1}^*, w_{s-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_s) = \\ = P_s(w_{n-1}^*, w_{s-1}^*, \dots, w_1^*) \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \dots \left[2\Gamma_{s+1}(\beta_s) + \frac{d \ln |j(\beta_s)|}{d\beta_s} \right], \\ \dot{\beta}_s = X_{\beta_s}(w_{n-1}^*, w_s^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{s-1}) = \\ = Q_s(w_{n-1}^*, w_s^*, \dots, w_1^*) \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \dots, \quad s = 1, \dots, n-2, \end{cases} \quad (4.3.67)$$

$$\dot{\beta}_{n-1} = X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \dots, \beta_{n-2}) = R_s(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*) \frac{f(\alpha)}{f_n(\alpha)} g(\beta_1) \dots i(\beta_{n-2}); \quad (4.3.68)$$

при этом в составной системе (4.3.66)–(4.3.68) точкой обозначена также производная по новой независимой переменной τ .

В принципе, замена (4.3.65) носит технический характер, и при этом можно использовать как группу переменных $w_{n-1}^*, \dots, w_1^*$, так и группу переменных $w_{n-1}, \dots, w_1$.

Для составной системы (4.3.66)–(4.3.68) будем искать интегральные инварианты с плотностью $\rho(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$, соответствующие дифференциальным формам объема $\rho(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) dw_n \wedge dw_{n-1}^* \wedge \dots \wedge dw_1^* \wedge d\alpha \wedge d\beta_1 \wedge \dots \wedge d\beta_{n-1}$, из следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\operatorname{div} \left[\rho(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) X(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \right] = 0, \quad (4.3.69)$$

где

$$\begin{aligned} X(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = \\ = \left\{ X_{\alpha}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \dots, \right. \\ \left. X_{w_2^*}(w_3^*, w_1^*; \alpha, \beta_1, \beta_2), \dots, X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.70)$$

— векторное поле рассматриваемой составной системы (4.3.66)–(4.3.68) в координатах $(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})$. Уравнение (4.3.69) перепишется в виде

$$\begin{aligned} X_{\alpha}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_{\alpha} + X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_{w_n} + \\ + X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha) \rho_{w_{n-1}^*} + \dots + X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}) \rho_{\beta_{n-1}} = \\ = -\rho \operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}); \end{aligned} \quad (4.3.71)$$

при этом

$$\operatorname{div} X(w_n, w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) = (b + \lambda_n^1) \tilde{\Delta}(\alpha), \quad (4.3.72)$$

как и в случае (4.3.38) для «отдельной» системы (4.3.34)! Тогда система уравнений характеристик линейного дифференциального уравнения (4.3.71) в частных производных примет следующий вид:

$$\dot{\alpha} = X_{\alpha}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (4.3.73a)$$

$$\dot{w}_n = X_{w_n}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (4.3.73b)$$

$$\dot{w}_{n-1}^* = X_{w_{n-1}^*}(w_n, w_{n-1}^*; \alpha), \quad (4.3.73c)$$

.....

$$\dot{\beta}_{n-1} = X_{\beta_{n-1}}(w_{n-1}^*, \dots, w_1^*; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}), \quad (4.3.73d)$$

$$\dot{\rho} = -\rho(b + \lambda_n^1) \tilde{\Delta}(\alpha); \quad (4.3.73e)$$

она включает в себя систему уравнений характеристик (4.3.39) для уравнения в частных производных (4.3.37).

У системы, состоящей из первых $2n$ уравнений системы (4.3.73), уже найдены $n + 1$ первых интегралов (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29) и (4.3.31) (полный набор). Более того, найден и дополнительный первый интеграл (4.3.46), «привязывающий» уравнение (последнее уравнение системы (4.3.73)) на функцию ρ .

Таким образом, общее решение линейного уравнения (4.3.71) в частных производных примет следующий вид:

$$\rho = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \mathcal{H}[\Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}], \quad (4.3.74)$$

где $\mathcal{H}[\Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}]$ — произвольная гладкая функция $n + 1$ аргументов, при этом $\Theta_1, \dots, \Theta_{n+1}$ — $n + 1$ первых интегралов (4.3.18), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.31) соответственно. В частности, в качестве $n + 1$ функционально независимых решений линейного уравнения (4.3.71) в частных производных можно взять следующие функции:

$$\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_1(w_n, w_{n-1}; \alpha), \quad (4.3.75)$$

$$\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_2(w_n, w_{n-1}; \alpha), \quad (4.3.76)$$

$$\rho_3(w_n, \dots, w_1; \alpha, \beta_1) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_3(w_1; \beta_1), \quad (4.3.77)$$

.....

$$\rho_n(w_n, \dots, w_1; \alpha, \beta_{n-2}) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_n(w_{n-2}; \beta_{n-2}), \quad (4.3.78)$$

$$\rho_{n+1}(w_n, w_{n-1}; \alpha, \beta_{n-2}, \beta_{n-1}) = \exp \left\{ (b + \lambda^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \cdot \Theta_{n+1}(\beta_{n-2}, \beta_{n-1}); \quad (4.3.79)$$

здесь

$$u_2 = \frac{w_n}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{w_{n-1}}{\Delta(\alpha)},$$

Видно, что в разделе III данного доказательства рассмотрен наиболее общий случай поиска инвариантных форм для составной системы (4.3.66)–(4.3.68). Также ясно, что найденные дифференциальные формы $\rho_1(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha$ и $\rho_2(w_n, w_{n-1}; \alpha)dw_n \wedge dw_{n-1} \wedge d\alpha$ будут инвариантными формами не только для системы (4.3.7), но и для составной системы (4.3.7)–(4.3.9). При этом для интегрирования составной системы (4.3.7)–(4.3.9) можно использовать как более громоздкие формы с функциями (4.3.77), (4.3.78), так и формы с функциями (4.3.61), имеющие более простой наглядный вид, поскольку составная система (4.3.7)–(4.3.9) распалась известным образом. Теорема 4.3 доказана. $\square$

Итак, для полной интегрируемости системы (4.3.7)–(4.3.9) можно использовать или $n + 1$ первых интегралов, или $n + 1$ независимых дифференциальных форм, или какие-либо комбинации (только независимых элементов) из интегралов и форм общим количеством $n + 1$.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. [61, 62]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (т.е. наличие у них существенно особых точек) как тензорных инвариантов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств.

В заключение укажем на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном расслоении к n -мерной сфере, а также более общих систем на расслоении n -мерных поверхностей вращения и пространства Лобачевского (см. [3, 7]). При этом из

всего колоссального множества работ по геометрическим и топологическим аспектам, связанным с рассматриваемым интегрированием систем, выделим работы [21, 22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.
2. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
3. Вейль Г. Симметрия. — М.: URSS, 2007.
4. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — 380, № 1. — С. 47–50.
5. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщенные динамические уравнения Эйлера для твердого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 5. — С. 635–637.
6. Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщенного гироскопа в $\mathbb{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2003. — 5. — С. 37–41.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.
8. Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. Мех. жидк. газа. — 1995. — № 3. — С. 23–27.
9. Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Мат. заметки. — 1992. — 52, № 2. — С. 43–51.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
11. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. — М.: URSS, 2017.
12. Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Усп. мат. наук. — 1983. — 38, № 1. — С. 3–67.
13. Козлов В. В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. мат. мех. — 2015. — 79, № 3. — С. 307–316.
14. Козлов В. В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 1 (445). — С. 117–148.
15. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. — 1953. — 93, № 5. — С. 763–766.
16. Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — 9, № 100. — С. 136–150.
17. Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — 9/1, № 110. — С. 35–41.
18. Походня Н. В., Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2014. — 7, № 118. — С. 60–69.
19. Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. мех. — 1989. — № 3. — С. 51–54.
20. Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — 44, № 5. — С. 1191–1199.
21. Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1984. — № 6. — С. 31–33.
22. Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Докл. АН СССР. — 1980. — 254, № 6. — С. 1349–1353.
23. Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1987.
25. Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
26. Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 1999. — 364, № 5. — С. 627–629.
27. Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. — 2000. — 375, № 3. — С. 343–346.

28. Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 1. — С. 169–170.
29. Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $so(4) \times \mathbf{R}^4$ // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 6. — С. 233–234.
30. Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 6. — С. 1003–1010.
31. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 5. — С. 169–170.
32. Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2009. — 425, № 3. — С. 338–342.
33. Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Усп. мат. наук. — 2010. — 65, № 1. — С. 189–190.
34. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
35. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 187–190.
36. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 444, № 5. — С. 506–509.
37. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
38. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2013. — 453, № 1. — С. 46–49.
39. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трехмерной сфере// Усп. мат. наук. — 2013. — 68, № 5 (413). — С. 185–186.
40. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2013. — 449, № 4. — С. 416–419.
41. Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2014. — 457, № 5. — С. 542–545.
42. Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// Фундам. прикл. мат. — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
43. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// Докл. РАН. — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
44. Шамолин М. В. Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// Докл. РАН. — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
45. Шамолин М. В. Интегрируемые неконсервативные динамические системы на касательном расслоении к многомерной сфере// Диффер. уравн. — 2016. — 52, № 6. — С. 743–759.
46. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 475, № 5. — С. 519–523.
47. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере// Докл. РАН. — 2017. — 474, № 2. — С. 177–181.
48. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2017. — 477, № 2. — С. 168–172.
49. Шамолин М. В. Интегрируемые динамические системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией// Пробл. мат. анализ. — 2018. — № 95. — С. 79–101.
50. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 482, № 5. — С. 527–533.
51. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 3. — С. 270–276.
52. Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемых систем девятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 489, № 6. — С. 592–598.

53. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем пятого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 485, № 5. — С. 583–587.
54. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем седьмого порядка с диссипацией// Докл. РАН. — 2019. — 487, № 4. — С. 381–386.
55. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 491, № 1. — С. 95–101.
56. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 494, № 1. — С. 105–111.
57. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2020. — 495, № 1. — С. 84–90.
58. *Шамолин М. В.* Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 497, № 1. — С. 23–30.
59. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 500, № 1. — С. 78–86.
60. *Шамолин М. В.* Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2021. — 501, № 1. — С. 89–94.
61. *Шамолин М. В.* Инвариантные формы объема систем с тремя степенями свободы с переменной диссипацией// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2022. — 507, № 1. — С. 86–92.
62. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 22–54.
63. *Шамолин М. В.* Системы с четырьмя степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 205. — С. 55–94.
64. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 208. — С. 91–121.
65. *Шамолин М. В.* Системы с пятью степенями свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Динамические системы на касательных расслоениях// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 88–107.
66. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 209. — С. 108–116.
67. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. I. Уравнения геодезических// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 77–95.
68. *Шамолин М. В.* Некоторые тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении трехмерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 210. — С. 96–105.
69. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. II. Потенциальные силовые поля// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 29–40.
70. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. I. Порождающая задача из динамики многомерного твердого тела, помещенного в неконсервативное поле сил// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 211. — С. 41–74.
71. *Шамолин М. В.* Интегрируемые однородные динамические системы с диссипацией на касательном расслоении четырехмерного многообразия. III. Силовые поля с диссипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 120–138.
72. *Шамолин М. В.* Системы с конечным числом степеней свободы с диссипацией: анализ и интегрируемость. II. Общий класс динамических систем на касательном расслоении многомерной сферы// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 212. — С. 139–148.

73. Шамолін М. В. Системи з кінцевим числом степеней свободи з дисипацією: аналіз і інтегруємість. III. Системи на касательних расслоєннях гладких n -мерних многообразий// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 213. — С. 96–109.
74. Шамолін М. В. Інтегруємі однорідні динамічні системи з дисипацією на касательном расслоєнні гладкого конечномерного многообразия. I. Уравнения геодезических на касательном расслоєнні гладкого n -мерного многообразия// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 214. — С. 82–106.
75. Шамолін М. В. Інтегруємі однорідні динамічні системи з дисипацією на касательном расслоєнні гладкого конечномерного многообразия. III. Уравнения движения на касательном расслоєнні к n -мерному многообразию в силовом поле с переменной дисипацией// Итоги науки и техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 216. — С. 133–152.
76. Шамолін М. В. Інваріантні форми об'єму геодезических, потенціальних і дисипативних систем на касательном расслоєнні четырехмерного многообразия// Докл. РАН. Мат. информ. процессы управл. — 2023. — 509, № 1. — С. 69–76.
77. Poincaré H. Calcul des probabilités. — Paris: Gauthier–Villars, 1912.
78. Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium// J. Math. Sci. — 2002. — 110, № 2. — P. 2528–2557.
79. Shamolin M. V. Invariants of dynamical systems with dissipation on tangent bundles of low-dimensional manifolds// in: Proc. Int. Conf. “Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms” (DEMMCA 2021). — Cham: Springer, 2023. — P. 167–179.
80. Tikhonov A. A., Yakovlev A. B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters// Int. J. Plasma Env. Sci. Techn.. — 13, № 1. — P. 49–52.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Программы развития МГУ (проект № 23-Ш05-07).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Шамолін Максим Владимирович

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

E-mail: shamolin.maxim@yandex.ru, shamolin@imec.msu.ru