ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 3–10
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-3-10

УДК 519.21: 517.977

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. **С. Т. АЛИЕВА, К. Б. МАНСИМОВ**

Аннотация. В статье изучается разностный аналог дробного порядка задачи оптимального управления, занимающей промежуточное место между задачами с сосредоточенными и с распределенными параметрами. Получены различные необходимые условия оптимальности первого порядка.

***Ключевые слова*:** двухпараметрическая дискретная задача, допустимое управление, двухпараметрическая система дробного порядка, оптимальное управление.

ON A DISCRETE TWO-PARAMETER FRACTIONAL CONTROL PROBLEM

© 2024 **S. T. ALIYEVA, K. B. MANSIMOV**

Abstract. In this paper, we examine a fractional difference analog of an optimal control problem occupying an intermediate position between problems with lumped and distributed parameters and obtain various first-order optimality necessary conditions.

***Keywords and phrases*:** two-parameter discrete problem, admissible control, two-parameter fractional system, optimal control.

***AMS Subject Classification*:** 39A50, 49K05

Пусть управляемый дискретный процесс описывается системой разностных уравнений дробного порядка

$$\begin{gathered}\Delta^{\alpha} z(t+1,x) = f(t,x,z(t,x),u(t)),\\ t\in T=\{t_0,t_0+1,\dots t_1-1\},\quad x\in X=\{x_0,x_0+1,\dots x_1\}.\end{gathered}\tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,x)=y(x),\quad x\in X=\{x_0,x_0+1,\dots x_1\},\tag{2}$$

где $y(x)$ — n-мерная вектор-функция, являющаяся решением задачи Коши

$$\Delta^{\beta} y(x+1) = g(x,y(x),v(x)),\quad x\in X\setminus x_1,\tag{3}$$

$$y(x_0)=y_0.\tag{4}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$, $g(x,y,v)$ — заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по $z(y)$, y_0 — заданный постоянной вектор, t_0, t_1, x_0, x_1 заданы, $\Delta^{\alpha} z(t,x)$ $(0<\alpha<1)$ и $\Delta^{\beta} y(x)$ $(0<\beta<1)$ — дробные операторы порядков α и β (см., например, [4, 9–11]), $u(t)$, $v(x)$ — $r(q)$-мерные вектор-функции управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U(V)$ и

$$u(t)\in U\subset R^r,\ t\in T,\quad v(x)\in U\subset R^q,\ x\in X\setminus x_1.\tag{5}$$

Управляющую функцию $(u(t), v(x))$ назовем допустимым управлением, если она удовлетворяет ограничениям (4) и (5), а соответствующий процесс $\big(u(t), v(x), y(x), z(t,x)\big)$ назовем допустимым процессом.

На решениях системы (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим функционал терминального типа

$$S(u,v) = \varphi_1(y(x_1)) + \sum_{x_0}^{x_1-1} \varphi_2(x, z(t_1,x)). \tag{6}$$

Здесь $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(z)$ — заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с их производными по y и z соответственно.

Требуется найти минимальное значение функционала (6) при ограничениях (1)–(5).

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении дискретные аналоги задач Коши, т.е. задачи (1)–(2) и (3)–(4), имеют единственные решения.

Допустимое управление $(u(t,x), v(x))$, доставляющее минимум функционалу (6) при ограничениях (1)–(5), называется оптимальным управлением, а пара $(u(t,x), v(x), y(x), z(t,x))$ является оптимальным процессом.

Цель работы состоит в выводе ряда необходимых условий оптимальности.

Пусть $(u^0(t), v^0(x))$ — фиксированное, а $(\bar u(t,x) = u^0(t,x) + \Delta u(t,x),\ \bar v(x) = v^0(x) + \Delta v(x))$ — произвольное допустимое управления. Через $(y^0(x), z^0(t,x))$ и $(\bar y(x) = y^0(x) + \Delta y(x),\ \bar z(t,x) = z^0(t,x) + \Delta z(t,x))$ обозначим соответствующие им решения системы (1)–(3). Тогда ясно, что $(\Delta z(t,x), \Delta y(x))$ будет удовлетворять системе

$$\Delta^\alpha(\Delta z(t+1,x)) = f(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t)) - f(t,x,z^0(t,x),u^0(t)), \quad t \in T, \quad x \in X, \tag{7}$$

$$\Delta z(t_0,x) = \Delta y(x), \quad x \in X, \tag{8}$$

$$\Delta^\beta(\Delta y(x+1) = g(x,\bar y(x),\bar v(x)) - g(x,y^0(x),v^0(x)), \quad x \in X \setminus x_1, \tag{9}$$

$$\Delta y(x_0) = 0. \tag{10}$$

Пусть $(\psi^0(t,x), p^0(x))$ — пока неизвестные n-мерные вектор-функции. Умножим обе части соотношений (7), (9) слева скалярно на $\psi^0(t,x)$ (соответственно, на $p^0(x)$) и просуммируем полученные тождества по (t,x) от t_0 до t_1-1 и от x_0 до x_1-1 (соответственно, по x от x_0 до x_1-1). В результате получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0\prime}(t,x)\Delta^\alpha(\Delta z(t+1,x)) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0\prime}(t,x)\left(f(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t)) - f(t,x,z^0(t,x),u^0(t))\right), \tag{11}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0\prime}\Delta^\beta(\Delta y(x+1) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0\prime}\left(g(x,\bar y(x),\bar v(x)) - g(x,y^0(x),v^0(x))\right). \tag{12}$$

Положим

$$H(t,x,z,u,\psi) = \psi' f(t,x,z,u), \quad M(x,y,v,p) = p' g(x,y,v).$$

Функции $H(t,x,z,u,\psi)$, $M(x,y,v,p)$ являются аналогами функций Гамильтона—Понтрягина для рассматриваемой задачи (1)–(6). С учетом тождеств (11), (12) формула для приращения критерия качества (6) записывается в виде

$$\Delta S(u^0,v^0) = S(\bar u,\bar v) - S(u^0,v^0) = \varphi_1(\bar y(x_1)) - \varphi_1(y^0(x_1)) + \\ + \sum_{x_0}^{x_1}(\varphi_2(x,\bar z(t_1,x)) - \varphi_2(x,z^0(t_1,x))) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0\prime}(t,x)\Delta^\alpha(\Delta z(t+1,x)) -$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t),\psi^0(t,x))-H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))\right)+$$

$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{p^0}'(x)\Delta^{\beta}(\Delta y(x+1)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left(M(x,\bar y(x),\bar v(x),p^0(x))-M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\right). \quad (13)$$

Займемся преобразованием отдельных слагаемых в этой формуле. С этой целью рассмотрим выражение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t+1,x)).$$

Сделав в нем замену переменных $t+1=\tau$, получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t+1,x))=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0+1}^{x_1}{\psi^0}'(t-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t,x))=$$

$$=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t_1-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_1,x))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t_0-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_0,x))+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t,x)). \quad (14)$$

Делая замену переменных $x+1=s$, легко убедиться в справедливости следующих тождеств:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{p^0}'(x)\Delta^{\beta}(\Delta y(x+1))=$$

$$={p^0}'(x_1-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x_1))-{p^0}'(x_0-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x_0))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{p^0}'(x-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x))=$$

$$={p^0}'(x_1-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x-1}{p^0}'(x-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x)). \quad (15)$$

Далее, с учетом теоремы дробного суммирования по частям (см. [8]) имеем

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t_0-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_0,x))=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t_0-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta y(x))=$$

$$={\psi^0}'(t_0-1,x_1)(\Delta y(x_1))-{\psi^0}'(t_0-1,x_0)(\Delta y(x_0))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}{\psi^0}'(t_0-1,x)(\Delta y(x))+$$

$$+\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta y(x_0)\left(\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(x+\mu-x_0)^{(}\mu-1)\psi^0(t_0,x)-\sum_{x=\sigma(x_0)}^{x_1-1}(x+\mu-\sigma(x_0))^{(}\mu-1)\psi^0(t_0,x)\right)=$$

$$={\psi^0}'(t_0-1,x_1)(\Delta y(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}{\psi^0}'(t-1,x)(\Delta y(x)), \quad (16)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}{\psi^0}'(t_1-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_1,x))=$$

$$={\psi^0}'(t_1-1,x_1)(\Delta z(t_1,x_1))+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}{\psi^0}'(t_1-1,x)(\Delta z(t_1,x)), \quad (17)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0\prime}(t-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t,x))=\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0\prime}(t_1-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_1,x))+$$
$$+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^{0\prime}(t_0-1,x)\Delta^{\alpha}(\Delta z(t_0,x))+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t-1,x)(\Delta z(t,x))+$$
$$+\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta z(t_0,x)\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-t_0)^(\mu-1)\psi^0(t-1,x)-\sum_{x=\sigma(t_0)}^{x_1-1}(t+\mu-\sigma(t_0))^(\mu-1)\psi^0(t,x)\right], \tag{18}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1}p^{0\prime}(x-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x))=p^{0\prime}(x_1-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x_1))+\sum_{x=x_0}^{x-1}\Delta^{\beta}_{\rho(t_1)}p^{0\prime}(x-1)\Delta^{\beta}(\Delta y(x)). \tag{19}$$

Принимая во внимание тождества (14)–(18) и (13), получим

$$\Delta S(u^0,v^0)=S(\bar u,\bar v)-S(u^0,v^0)=\varphi_1(\bar y(x_1))-\varphi_1(y^0(x_1))+$$
$$+\sum_{x_0}^{x_1-1}\big(\varphi_2(x,\bar z(t_1,x))-\varphi_2(x,z^0(t_1,x))\big)+2\psi^{0\prime}(t_1-1,x_1)(\Delta z(t_1,x_1))+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)+2\psi^{0\prime}(t_0-1,x_1)(\Delta y(x_1))+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t_0-1,x)\Delta y(x)++\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t-1,x)\Delta z(t,x)+$$
$$+\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta y(x)\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-t_0)^(\mu-1)\psi^0(t-1,x)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-\sigma(t_0))^{(\mu-1)}\psi^0(t-1,x)\right]-$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t),\psi^0)(t,x)-H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0)(t,x)\big)+$$
$$+p^{0\prime}(x_1-1)\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\beta}_{\rho(t_1)}\Delta y(x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(M(x,\bar y(x),\bar v(x),p^0(x))-M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\big).$$

Отсюда, используя формулу Тейлора и учитывая введенные обозначения, можно записать тождество (19) в следующем виде:

$$\Delta S(u^0,v^0)=\frac{\partial\varphi_1'(y^0(x_1))}{\partial y}\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial\varphi_2'(x,z^0(t_1,x))}{\partial z}\Delta z(t_1,x))+$$
$$+o_1(\|\Delta y(x_1)\|)+o_2(\|\Delta z(t_1,x)\|)+2\psi^{0\prime}(t_1-1,x_1)(\Delta z(t_1,x_1))+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t_1-1,x)\Delta z(t_1,x)+2\psi^{0\prime}(t_0-1,x_1)(\Delta y(x_1))+$$
$$+2\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t_0-1,x)\Delta y(x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^{0\prime}(t-1,x)\Delta z(t,x)+$$
$$+\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta y(x)\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-t_0)^(\mu-1)\psi^0(t-1,x)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-\sigma(t_0))^{(\mu-1)}\psi^0(t-1,x)\right]-$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(H(t,x,z^0(t,x),\bar{u}(t),\psi^0)(t,x)-H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0)(t,x)\big)+$$

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial H'(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))}{\partial z}\Delta z(t,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial H(t,x,z^0(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x))}{\partial z}-\frac{\partial(H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))}{\partial z}\right]'\Delta z(t,x)+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_3(\|\Delta z(t,x)\|)+p^{0\prime}(x_1-1)\Delta y(x_1)+\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\Delta^{\beta}_{\rho(t_1)}\Delta y(x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(M(x,y^0(x),\bar{v}(x),p^0(x))-M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\big)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\frac{\partial M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))}{\partial y}\Delta y(x)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M(x,y^0(x),\bar{v}(x),p^0(x))}{\partial y}-\frac{\partial M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))}{\partial y}\right]'\Delta y(x)-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}o_4(\|\Delta y(x)\|).\quad(20)$$

Здесь $\|\alpha\|$ — норма вектора $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, определяемая формулой

$$\|\alpha\|=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|,$$

а $o(\alpha)$ — величина более высокого порядка малости, чем α, т.е. $o(\alpha)/\alpha\to0$ при $\alpha\to0$. Можно доказать, что

$$\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta y(x)\left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-t_0)^(\mu-1)\psi^0(t-1,x)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}(t+\mu-\sigma(t_0))^{(\mu-1)}\psi^0(t-1,x)\right]=$$

$$=\frac{\mu}{\Gamma(\mu)}\Delta y(x)\Gamma(\mu)\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^0(t_0,x)=\Delta y(x)\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\psi^0(t_0-1,x).$$

Теперь предположим, что $(p(x),\psi(t,x))$ является решением следующей системы линейных однородных разностных уравнений дробного порядка:

$$\Delta^{\alpha}{}_{\rho(t_1)}\psi(t-1,x-1)=H_z[t,x],\quad(21)$$

$$\psi(t_1-1,x)=-\frac{\partial\varphi_2(z)}{2\partial z},\quad(22)$$

$$\Delta^{\alpha}_{\rho(t_1)}\psi^0(t_0-1,x)+\Delta^{\beta}_{\rho(t_1)}p(x-1)+\psi^0(t_0-1,x)=M_y[x],\quad(23)$$

$$p(x_1-1)=-\frac{\partial\varphi_1(y)}{\partial y},\quad \psi^0(t_1-1,x_1)=0.\quad(24)$$

Тогда формула приращения (20) примет вид

$$\Delta S(u^0,v^0)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(H(t,x,z^0(t,x),\bar{u}(t),\psi^0(t,x))-H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))\big)-$$

$$-\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(M(x,y^0(x),\bar{v}(x),p^0(x))-M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\big)+\eta_1(u^0,v^0,\Delta u,\Delta v).\quad(25)$$

Здесь по определению

$$\eta_1(u^0, v^0, \Delta u, \Delta v) =$$
$$= o_1(\|\Delta y(x_1)\|) + o_2(\|\Delta z(t_1, x)\|) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_3((\|\Delta z(t,x)\|) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta y(x)\|)+$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial(H(t,x,z^0(t,x),\bar u(t),\psi^0(t,x))}{\partial z} - \frac{\partial(H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0(t,x))}{\partial z}\right]'\Delta z(t,x)+$$
$$- \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\left[\frac{\partial M(x,y^0(x),\bar v(x),p^0(x))}{\partial y} - \frac{\partial M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))}{\partial y}\right]\Delta y(x). \quad (26)$$

Пусть $(u^0(t), v^0(x))$ — фиксированное допустимое управление. Предположим, что множества

$$f(t,x,z^0,U) = \{\tau : \tau := f(t,x,z,u),\ u \in U\}, \quad g(x,y^0,V) = \{\sigma : \sigma := g(x,y,v),\ v \in V\}$$

выпуклы. Тогда через $(u_\varepsilon(t,x), v_\varepsilon(x))$ можно определить специальное приращение управления $(u^0(t,x), v^0(x))$ в виде

$$\begin{cases}\Delta u_\varepsilon(t,x) = u(t,x,\varepsilon) - u^0(t,x),\\ \Delta v_\gamma(x) = v(x,\gamma) - v^0(x).\end{cases} \quad (27)$$

Здесь $\varepsilon \in [0,1]$, $\gamma \in [0,1]$ — произвольные числа, а $u(t;\varepsilon)$, $v(x;\gamma)$ — произвольные допустимые управляющие функции, удовлетворяющие условиям

$$f(t,x,z^0(t,x),u(t;\varepsilon)) - f(t,x,z^0(t,x),u^0(t)) = \varepsilon\big[f(t,x,z^0(t,x),u(t)) - f(t,x,z^0(t,x),u^0(t))\big], \quad (28)$$
$$g(x,y^0(x),v(x;\gamma)) - g(x,y^0(x),v^0(x)) = \gamma\big[g(x,y^0(x),v(x)) - g(x,y^0(x),v^0(x))\big]. \quad (29)$$

Здесь $u(t,x) \in U$, $(t,x) \in T\times$, $v(x) \in V, x \in X$ — произвольные допустимые управляющие функции, соответствующие $u(t;\varepsilon)$ и $v(x;\gamma)$.

Через $(\Delta z_\varepsilon(t,x), \Delta y_\gamma(x))$ обозначим специальное приращение вектора состояния $(z^0(t,x), y^0(x))$, отвечающее приращению (27) управления $(u(t,x), v(x))$. В $[1, 12]$ доказаны следующие оценки:

$$\|\Delta y(x)\| \leqslant L_1 \prod_{j=x_0}^{x-1}(1 + A_\alpha(x,j))\|\Delta_{\bar v} g[j]\|, \quad (30)$$

$$\|\Delta z(t,x)\| \leqslant L_2 \prod_{s=t_0}^{t-1}(1 + R_\alpha(t,x,s))\big\|\Delta_{\bar u} f[s,x]\big\| + L_3 \prod_{j=x_0}^{x-1}(1 + A_\alpha(x,j))\big\|\Delta_{\bar u} g[j]\big\|, \quad (31)$$

$L_i = \mathrm{const} > 0$, $i = 1,2,3,$ — некоторые постоянные. Из этих оценок следует, что

$$\|\Delta z_\varepsilon\gamma(t,x)\| \leqslant L_4\varepsilon + L_5\gamma, \quad \|\Delta y_\gamma(x)\| \leqslant L_6\gamma, \quad (32)$$

где L_4, L_5, L_6 — некоторые положительные числа.

Принимая во внимание оценки (32), формулы (27), (28), (29), в формуле (26) приходим к разложению

$$\Delta S_{\varepsilon\gamma}(u^0, v^0) = S(u^0 + \Delta u_\varepsilon, v^0 + \Delta v_\gamma) - S(u^0, v^0) =$$
$$= \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(H(t,x,z^0(t,x),u(t),\psi^0)(t,x) - H(t,x,z^0(t,x),u^0(t),\psi^0)(t,x)\big) -$$
$$- \gamma \sum_{x=x_0}^{x_1-1}\big(M(x,y^0(x),v(x),p^0(x)) - M(x,y^0(x),v^0(x),p^0(x))\big) + o_5(\varepsilon+\gamma) + o_6(\gamma). \quad (33)$$

При помощи разложения (33), используя произвольность и независимость управляющих функций $u(t)$, $v(x)$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Если множества*

$$f(t, x, z^0, U) = \{\tau : \tau := f(t, x, z, u), u \in U\}, \quad g(x, y^0, V) = \{\sigma : \sigma := g(x, y, v), v \in V\}$$

выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^0(t), v^0(x))$ *в задаче* (1)–(5) *необходимо, чтобы соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{u(t)} H[t, x] \leqslant 0, \tag{34}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M[x] \leqslant 0 \tag{35}$$

выполнялись для любого $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X \setminus x_1$ *соответственно.*

Доказанная теорема является аналогом дискретного принципа максимума для рассматриваемой задачи.

Теперь предположим, что вектор-функции $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, u) и (y, v), а множества U и V являются выпуклыми. Тогда специальное приращение допустимого управления $(u^0(t, x), v^0(x))$ можно определить по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t, x, \gamma_1) = \gamma_1[u(t) - u^0(t)], \\ \Delta v(x, \gamma_2) = \gamma_2[v(x) - v^0(x]). \end{cases} \tag{36}$$

Здесь γ_1, $\gamma_2 \in [0, 1]$ — произвольные числа, а $u(t)$ и $v(x)$ — произвольные допустимые управляющие функции. Через $(\Delta z(t, x; \gamma_1, \gamma_2), \Delta y(x; \gamma_2))$ обозначим специальное приращение траектории $(z^0(t, x), y^0(x))$, отвечающее приращению (35) управления $(u(t), v(x))$. Из оценок (30), (31) следует, что

$$\|\Delta z(t, x, \gamma_1, \gamma_2)\| \leqslant L_6\gamma_1 + L_7\gamma_2, \quad \|\Delta y(x, \gamma_2)\| \leqslant L_8\gamma_2.$$

С учетом этих оценок получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} &\Delta S(u^0(t) + \Delta u(t, \gamma_1), v^0(x) + \Delta v(x, \gamma_2) - S(u^0(t), v^0(x)) = \\ &\qquad = \gamma_1 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \big(H'_u(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0)(t, x))(u(t) - u^0(t))\big) - \\ &\qquad - \gamma_2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \big(M'_v(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))(v(x) - v^0(x))\big) + o_7(\gamma_1 + \gamma_2) + o_8(\gamma_2). \end{aligned} \tag{37}$$

Теорема 2. *Пусть множества* U *и* V *выпуклы, а функции* $f(t, x, z, u)$, $g(x, y, v)$ *непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по* (z, u), (y, v) *соответственно. Тогда для оптимальности допустимого управления* $(u^0(t), v^0(x))$ *необходимо, чтобы соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x, z^0(t, x), u^0(t), \psi^0(t, x))(u(t) - u^0(t)) \leqslant 0, \tag{38}$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(x, y^0(x), v^0(x), p^0(x))(v(x) - v^0(x)) \leqslant 0 \tag{39}$$

выполнялись для любого $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X \setminus x_1$ *ссоответственно.*

Совокупность неравенств (38), (39) есть аналог линеаризованного условия максимума в задаче (1)–(5) (см. [2, 3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиева С. Т.* Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка// Вестн. Томск. гос. ун-та. Управл. вычисл. техн. — 2021. — *54.* — С. 4–11.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем. — Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1973.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимизации. — Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1981.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
5. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы. — Баку: Изд-во Бакинск. гос. ун-та, 2013.
6. *Москаленко А. И.* Об одном классе задач оптимального регулирования// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1969. — *9*, № 1. — С. 68–95.
7. *Москаленко А. И.* Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ. мат. наук, 1971.
8. *Bastos N. R. O., Ferreira R. A. C., Torres D. F. M.* Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations// Discret. Contin. Dynam. Syst. — 2011. — *29*, № 2. — P. 417–437.
9. *Christopher G., Peterson A. C.* Discrete Fractional Calculus. — Springer, 2015.
10. *Feckan M., Wang J., Pospisil M.* Fractional-Order Equations and Inclusions. — Berlin: De Gruyter, 2017.
11. *Jagan Mohan J., Deekshitulu G. V. S. R.* Fractional order difference equations// Int. J. Differ. Equations. — 2012. — 780619.
12. *Miller K., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. — New York: Wiley, 1993.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Алиева Саадат Тофик (Aliyeva Saadat Tofig)
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
(Baku State University, Baku, Azerbaijan;
Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)
E-mail: saadata@mail.ru

Мансимов Камил Байрамали оглы (Mansimov Kamil Bairamali ogly)
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
(Baku State University, Baku, Azerbaijan;
Institute of Control Systems of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan)
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com