ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 11–20
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-11-20

УДК 517.977: 534.112

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЛАЗЕРНОГО ЛУЧА НА ДВУХСЛОЙНЫЙ БИОМАТЕРИАЛ

© 2024 г. **В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША**

Аннотация. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал. Под построенным тепловым воздействием распределение температурного состояния биоматериала переходит из заданного начального состояния на определенном временном промежутке в заданное конечное состояние, минимизируя значение критерия качества. В предложенном подходе используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления динамических систем.

Ключевые слова: двухслойный биологический материал, тепловое воздействие, лазерный луч, температурное состояние, оптимальное граничное управление, метод разделения переменных.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF THE THERMAL EFFECT OF A LASER BEAM ON A TWO-LAYER BIOMATERIAL

© 2024 **V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA**

Abstract. In this paper, we propose a constructive approach to constructing a function for optimal control of the thermal effect of a laser beam on a two-layer biomaterial. Under the thermal influence constructed, the distribution of the temperature state of a two-layer biomaterial transfers from a given initial state at a certain time interval into a given final state and minimizes the value of the quality criterion. The proposed approach is based on the method of variable separation and methods of the theory of optimal control of dynamic systems.

Keywords and phrases: two-layer biological material, thermal effect, laser beam, temperature state, optimal boundary control, method of variable separation.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение.

1. Введение. Исследование задач в многослойных физических обьектах, которые находятся под воздействием сосредоточенных или распределенных источников, требует рассмотрения соответствующих адекватных математических моделей. При этом адекватностью должны обладать как математические модели, так и методы исследования.

В статье [14] представлен обзор литературы о медико-биологическом применении лазеров. Сфера применения лазерного излучения в медицине выходит далеко за пределы классических понятий о лазере (см. [6,13]); невозможно представить современную медицину без применения лазеров.

Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №АААА-А21-121012090034-3).

Одно из многочисленных направлений медико-биологического применения лазеров — использование их в качестве инструмента воздействия на биологические объекты. С появлением новых областей применения лазерного излучения для обработки биологических материалов возникает необходимость выработки методик воздействия и критериев параметров лазерных излучателей. Поэтому разрабатываются новые математические модели, призванные решать различные задачи лазерного воздействия и оценки результатов (см. [14]), в частности, задачу выбора режимов теплового воздействия лазерного луча на биологическую среду. Как отмечают авторы работы [14], способы воздействия лазерного луча на биологическую среду пока еще недостаточно исследованы. Поэтому необходимо проведение разносторонних исследований по поиску режимов лазерного излучения для развития возможностей лазерного воздействия и повышения эффективности воздействия на биологическую среду.

Многослойный биологический материал, который подвергается действию на него лазерного излучения, является системой с распределёнными параметрами (см. [5, 9–12, 15, 22]). Математический модель процесса действия лазерного луча на многослойный биологический материал описывается с помощью дифференциальных уравнений теплопроводности в частных производных с краевыми условиями начала и конца лазерного нагрева, граничными условиями взаимодействия внешнего слоя биологического материала и окружающей среды, а также условиями сопряжения между слоями. Математические модели указанных объектов характеризуются как разнородные составные системы с распределёнными параметрами, поэтому целесообразно использовать методы исследования задач управления составных систем (переменной структуры), которым посвящены, в частности, статьи [2–4, 16–21].

В настоящей работе в качестве многослойной системы рассмотрен объект, состоящий из двух неоднородных по своим теплофизическим характеристикам биологических слоев, подвергаемый действию на него лазерного излучения. Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на верхней (левой) границе двухслойного биоматериала интенсивность температуры лазерного луча, влияем на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Цель статьи состоит в разработке аналитического подхода построения функции оптимального управления тепловым воздействием лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния из заданного начального состояния на определенном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние. Работа примыкает к исследованиям, выполненным в [2, 4, 16].

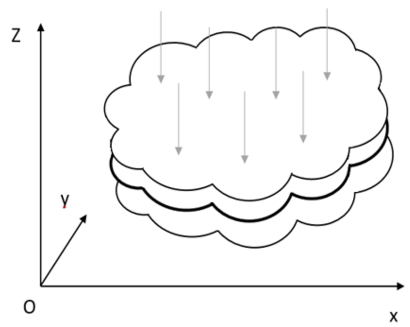

Рис. 1. Структурная схема воздействия лазерного луча на двухслойный биологический материал

2. Математическая модель двухслойного биоматериала и постановка задачи. Рассмотрим бесконечный по координатам x и y двухслойный биологический материал (см. рис. 1) с различными теплофизическими характеристиками (коэффициенты теплопроводности, плотность и теплоемкость) слоев.

В соответствии с многослойной структурой биоматериала (см. [10, 11, 15, 22]), в случае, когда временные и пространственные параметры функции распределения объемной плотности тепловых нагрузок в биологическом материале и коэффициенты теплопроводности постоянны, дифференциальное уравнение теплопроводности преобразуется в следующую систему дифференциальных уравнений теплопроводности:

$$\begin{aligned} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1(z,t)}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial^2 T_1(z,t)}{\partial z^2}, \qquad z \in [0, l_1], \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2(z,t)}{\partial t} &= K_2 \frac{\partial^2 T_2(z,t)}{\partial z^2}, \qquad z \in [l_1, l_1 + l_2], \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ_j — коэффициент плотности j-го слоя биологического материала, $j = 1, 2$; c_j — коэффициент теплоемкости j-го слоя биологического материала; $T_j(z,t)$ — температурное поле j-го слоя в биологическом материале; z — глубина проникновения лазерного луча в биологическом материале; t — длительность теплового воздействия; K_j — коэффициент теплопроводности j-го слоя биологического материала.

Предположим, что граничные условия теплового воздействия на двухслойный биологический материал следующие:

$$T_1(z,t)\big|_{z=0} = u(t), \quad T_2(z,t)\big|_{z=l_1+l_2} = P(t), \tag{2}$$

где $u(t)$ — температура действия лазерного луча на левой границе двухслойного биоматериала, которая изменяется по времени и является неизвестной; $P(t)$ — температура действия лазерного луча в конце (на правой границе) двухслойного биологического материала, которая считается известной. Введем условия сопряжения между слоями, которые выражают равенства непрерывности температурных полей по временной координате и условия идеального теплового контакта слоев, следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1(z,t)\big|_{z=l_1-0} &= T_2(z,t)\big|_{z=l_1+0}, \\ K_1\frac{\partial T_1(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=l_1-0} &= K_2\frac{\partial T_2(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=l_1+0}, \end{aligned} \quad t \in [t_0, t_2]. \tag{3}$$

Предполагается, что заданы начальное (при $t = t_0$)

$$T_1(z,t)\big|_{t=t_0} = T_H(z) \tag{4}$$

и конечное (при $t = t_2$) условия

$$T_2(z,t)\big|_{t=t_2} = T_K(z). \tag{5}$$

Предполагается, что управление процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал осуществляется следующим образом: изменяя на левой границе (в конце) двухслойного биоматериала интенсивность (температуру) лазерного луча, влияем тем самым на тепловое состояние в двухслойном биоматериале. Граничная функция $u(t)$ является управляющим воздействием (т.е. граничным управлением).

Предполагается, что допустимое управление $u(t)$ принадлежит пространству $L_2(t_0, t_2)$. Функция $T_j(z,t) \in L_2(\Omega)$, $j = 1, 2$, где $\Omega = \big\{(z,t) : z \in [0, l_1 + l_2],\ t \in [t_0, t_2]\big\}$ и $T_H(z)$, $T_K(z) \in L_2(0, l_1 + l_2)$. Предполагается также, что все функции удовлетворяют следующим условиям согласования:

$$u(t_0) = T_H(0), \quad P(t_0) = T_H(l_1 + l_2), \quad u(t_2) = T_K(0), \quad P(t_2) = T_K(l_1 + l_2). \tag{6}$$

Задачу оптимального управления процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал можно сформулировать следующим образом.

Задача оптимального управления. Требуется найти такой закон $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, оптимального управления теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал, под воздействием которого распределение температурного состояния (1) из начального состояния (4) за промежуток времени $[t_0, t_2]$ переходит в заданное конечное состояние (5) и минимизирует функционал

$$\int_{t_0}^{t_2} u^2(t)dt. \tag{7}$$

Таким образом, имеем задачу оптимального управления с неоднородными граничными условиями. Для построения решения целесообразно перейти к задаче с нулевыми граничными условиями.

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Введем обозначение $a_j^2 = K_j/(c_j\rho_j)$, $j = 1, 2$. Для построения решения поставленной задачи целесообразно перейти к новой переменной

$$\xi = \begin{cases} z, & z \in [0, l_1], \\ \dfrac{a_1}{a_2}z + l_1\left(1 - \dfrac{a_1}{a_2}\right), & z \in [l_1,\ l_1 + l_2] \end{cases} \tag{8}$$

(см. [2,4]). Замена переменной (8) приводит к растяжению или сжатию отрезка $[l_1,\ l_1+l_2]$ относительно точки $z = l_1$. При этом отрезок $[l_1,\ l_1+l_2]$ переходит в отрезок $[l_1,\ L]$, где $L = l_1 + a_1l_2/a_2$. Для удобства все вышеприведенные функции после замены переменной (8) оставляем в исходных обозначениях.

Таким образом, (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(\xi,t)}{\partial t} &= a_1^2\frac{\partial^2 T_1(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \qquad \xi \in [0, l_1], \\ \frac{\partial T_2(\xi,t)}{\partial t} &= a_1^2\frac{\partial^2 T_2(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \qquad \xi \in [l_1, L]. \end{aligned} \tag{9}$$

Положим

$$T(\xi,t) = \begin{cases} T_1(\xi,t), & \xi \in [0, l_1], \\ T_2(\xi,t), & \xi \in [l_1, L]. \end{cases} \tag{10}$$

Следовательно, два одинаковых уравнения (9) с введенной по правилу (10) функцией $T(\xi,t)$, $\xi \in [0, L]$, $t \in [t_0, t_2]$, запишутся в виде

$$\frac{\partial T(\xi,t)}{\partial t} = a_1^2\frac{\partial^2 T(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2], \tag{11}$$

с соответствующими граничными условиями

$$T(0,t) = u(t), \quad T(L,t) = P(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_2, \tag{12}$$

начальным условием

$$T(\xi, t_0) = T_H(\xi), \quad \xi \in [0, L], \tag{13}$$

конечным условием

$$T(\xi, t_2) = T_K(\xi), \quad \xi \in [0, L], \tag{14}$$

и условиями сопряжения в точке $\xi = l_1$ соединения участков:

$$T(\xi,t)\big|_{\xi=l_1-0} = T(\xi,t)\big|_{\xi=l_1+0}, \quad a_2K_1\frac{\partial T(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l_1-0} = a_1K_2\frac{\partial T(\xi,t)}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=l_1+0}, \quad t \in [t_0, t_2]. \tag{15}$$

Учитывая неоднородность граничных условий (12), решение уравнения (11) построим в виде суммы

$$T(\xi,t) = V(\xi,t) + W(\xi,t), \tag{16}$$

где $V(\xi,t)$ — функция с однородными граничными условиями

$$V(0,t) = V(L,t) = 0, \tag{17}$$

требующая определения, а функция $W(\xi,t)$ есть решение (11) с условиями

$$W(0,t) = u(t), \quad W(L,t) = P(t), \tag{18}$$

которая представляется в виде

$$W(\xi,t) = u(t) + \frac{\xi}{L}\big[P(t) - u(t)\big]. \tag{19}$$

Из формул (11), (16), (19) для нахождения функции $V(\xi,t)$ получим:

$$\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t} = a_1^2\frac{\partial^2 V(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t), \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2], \tag{20}$$

где

$$F(\xi,t)=\frac{\xi}{L}\big[\dot{u}(t)-\dot{P}(t)\big]-\dot{u}(t). \tag{21}$$

Функция $V(\xi,t)$ удовлетворяет соответствующему условию сопряжения (15) в точке $\xi=l_1$ соединения участков. Отметим, что согласно (8) из условия (6) будем иметь

$$T_H(l_1+l_2)=T_H(L),\quad T_K(l_1+l_2)=T_K(L). \tag{22}$$

Используя подходы, приведенные в [2–4, 19–21], и учитывая условия согласования, из условий (13), (14) получим, что функция $V(\xi,t)$ должна удовлетворять начальным условиям

$$V(\xi,t_0)=T_H(\xi)-u(t_0)-\frac{\xi}{L}\big[P(t_0)-u(t_0)\big] \tag{23}$$

и конечным условиям

$$V(\xi,t_2)=T_K(\xi)-u(t_2)-\frac{\xi}{L}\big[P(t_2)-u(t_2)\big]. \tag{24}$$

С учетом условий (6) и (22) соотношения (23), (24) запишутся следующим образом:

$$V(\xi,t_0)=T_H(\xi)-T_H(0)-\frac{\xi}{L}\big[P(t_0)-T_H(0)\big], \tag{25}$$

$$V(\xi,t_2)=T_K(\xi)-T_K(0)-\frac{\xi}{L}\big[P(t_2)-T_K(0)\big]. \tag{26}$$

Таким образом, решение исходной задачи сведено к задаче оптимального управления процессом теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал, описываемый неоднородным уравнением (20) с однородными граничными условиями (17). Полученная задача формулируется следующим образом: требуется найти такой закон оптимального управления $u^0(t)$, $t\in[t_0,t_2]$, под воздействием которого распределение температурного состояния, описываемое уравнением (20) с граничными условиями (17), из заданного начального состояния (25) на указанном промежутке времени $[t_0,t_2]$ переходит в конечное состояние (26) и минимизирует функционал (7).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. Учитывая граничные условия (17) и условия согласованности, ищем решение уравнения (20) в виде

$$V(\xi,t)=\sum_{k=1}^{\infty}V_k(t)\sin\frac{\pi k\xi}{L},\quad V_k(t)=\frac{2}{L}\int\limits_0^L V(\xi,t)\sin\frac{\pi k\xi}{L}d\xi. \tag{27}$$

Представим функции $F(\xi,t)$, $V(\xi,t_0)$, $V(\xi,t_2)$ в виде рядов Фурье по базису $\big\{\sin\pi k\xi/L,\ k=1,2,\dots\big\}$; подставив их значения вместе с $V(\xi,t)$ в уравнения (20), (21) и в условия (25), (26), получим, что коэффициенты Фурье $V_k(t)$ удовлетворяют счетному набору систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_k(t)+\lambda_kV_k(t)=F_k(t),\quad \lambda_k=\left(a_1\frac{\pi k}{L}\right)^2,\quad k=1,2,\dots, \tag{28}$$

$$F_k(t)=\frac{2}{\pi k}\big[(-1)^k\dot{P}(t)-\dot{u}(t)\big], \tag{29}$$

$$V_k(t_0)=T_k^{(H)}-\frac{2}{\pi k}\big[T_H(0)-(-1)^kP(t_0)\big], \tag{30}$$

$$V_k(t_2)=T_k^{(K)}-\frac{2}{\pi k}\big[T_K(0)-(-1)^kP(t_2)\big]. \tag{31}$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi,t)$, $V(\xi,t_0)$, $V(\xi,t_2)$, $T_H(\xi)$ и $T_K(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $V_k(t_0)$, $V_k(t_2)$, $T_k^{(H)}$ и $T_k^{(K)}$. Общее решение уравнения (28) с начальным условием (30) имеет вид

$$V_k(t)=V_k(t_0)e^{-\lambda_k(t-t_0)}+\int\limits_{t_0}^{t}F_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau \tag{32}$$

(см. [9]). Теперь, учитывая конечное условие (31), получим, что функции $F_k(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_2]$, для каждого $k = 1, 2, \ldots$ должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\int_{t_0}^{t_2} F_k(\tau) e^{-\lambda_k (t_2 - \tau)} d\tau = V_k(t_2) - V_k(t_0) e^{-\lambda_k (t_2 - t_0)}. \tag{33}$$

Используя подходы, приведенные в [19–21], получим, что функция управления $u(t)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$ должна удовлетворять интегральному соотношению

$$\int_{t_0}^{t_2} u(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau = C_k, \tag{34}$$

где

$$C_k = \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \frac{\pi k}{2} \Big[V_k(t_2) e^{\lambda_k t_2} - V_k(t_0) e^{\lambda_k t_0} \Big] + T_K(0) e^{\lambda_k t_2} - T_H(0) e^{\lambda_k t_0} - (-1)^k \int_{t_0}^{t_2} \dot{P}(\tau) e^{\lambda_k \tau} d\tau \right\}.$$

Отметим, что значения C_k известны для любого $k = 1, 2, \ldots$. На практике обычно выбираются несколько первых n $(k = 1, 2, \ldots, n)$ соотношений (34) и с помощью методов теории оптимального управления конечномерными системами (см. [1, 7, 20, 21]) решается задача синтеза оптимального управления. Следовательно, для первых n соотношений из (34) будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_2} H_n(\tau)\, u_n(\tau) d\tau = \eta_n, \tag{35}$$

где

$$H_n(\tau) = \Big(e^{\lambda_1 \tau},\ e^{\lambda_2 \tau},\ \ldots,\ e^{\lambda_n \tau} \Big)^T, \quad \eta_n = \Big(C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n \Big)^T.$$

Здесь и далее символ «n» в нижнем индексе будет означать «для первых n мод».

Из соотношения (35) следует справедливость следующего утверждения о вполне управляемости (см. [1, 7]).

Теорема 1. *Первые n мод динамического процесса, описываемого уравнением* (28) *с условиями* (29)–(31)*, вполне управляемы тогда и только тогда, когда для любого вектора η_n можно найти управление $u_n(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, удовлетворяющее условию* (35).

Таким образом, требуется найти такой закон оптимального управления $u^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, который для каждого $k = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет интегральным соотношениям (34) (или (35)) и доставляет минимум функционалу (7).

Задачу оптимального управления при функционале (7) с интегральными условиями (35) можно рассматривать как задачу условного экстремума из вариационного исчисления.

Так как функционал (7) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, а интегральные соотношения (34) (или (35)), порожденные функцией $u(t)$, линейны, то задачу определения оптимального управления для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$ можно рассматривать как проблему моментов (см. [7, 8, 14]). Следовательно, решение можно построить с помощью алгоритма решения проблемы моментов.

5. Решение задачи. Поскольку на практике обычно решается задача синтеза управлений для нескольких первых n гармоник колебаний, используем методы теории оптимального управления конечномерыми системами. Будем строить решение задачи (7), (34) при $k = 1, 2, \ldots, n$ с помощью алгоритма решения конечномерной проблемы моментов. Для решения конечномерной (при $k = 1, 2, \ldots, n$) проблемы моментов (7), (34), следуя [7], нужно найти величины γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k C_k = 1, \tag{36}$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(36)} \int_{t_0}^{t_2} h_n^2(t)dt, \tag{37}$$

где

$$h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{\lambda_k t}. \tag{38}$$

Для определения величин γ_k^0, $k = 1, 2, \ldots, n$, минимизирующих (37) с условиями (36), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем функцию

$$f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \int_{t_0}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^{n} \gamma_k e^{\lambda_k t}\right]^2 dt + \beta \left[\sum_{k=1}^{n} \gamma_k C_k - 1\right],$$

где β — неопределенный множитель Лагранжа. На основе этого метода, приравнивая к нулю производные функции $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ по γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \cdots + a_{1n}\gamma_n = -\frac{\beta}{2}C_1, \\ &a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + \cdots + a_{2n}\gamma_n = -\frac{\beta}{2}C_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \cdots + a_{nn}\gamma_n = -\frac{\beta}{2}C_n, \end{aligned} \tag{39}$$

где приняты следующие обозначения:

$$a_{sk} = \int_{t_0}^{t_2} e^{\lambda_s t} e^{\lambda_k t} dt = \frac{1}{\lambda_s + \lambda_k}\left(e^{(\lambda_s+\lambda_k)t_2} - e^{(\lambda_s+\lambda_k)t_0}\right), \quad s, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Заметим, что $a_{sk} = a_{ks}$. Присоединяя к уравнениям (39) условие (36), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных величин γ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, и β.

Обозначим через

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

главный определитель системы алгебраических уравнений (39), а через $\bar{\Delta}_n^{(k)} = -\frac{\beta}{2}\Delta_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) — k-й столбец этого определителя, замененный на значения правых частей этой системы; предположим, что $\Delta_n \neq 0$. Тогда решение системы (39) с условием (36) можно представить в виде

$$\gamma_k^0 = \frac{\Delta_n^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_n^{(j)} C_j}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \beta = \frac{-2\Delta_n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_n^{(j)} C_j}. \tag{41}$$

Подставляя из (41) значения для γ_k^0 в (38), получим

$$h_n^0(t) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^0 e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_n^{(k)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \Delta_n^{(j)} C_j} e^{\lambda_k t}. \tag{42}$$

Из (37) для оптимальной функции $h_n^0(t)$ будем иметь

$$(\rho_n^0)^2 = \int_{t_0}^{t_2} \left(h_n^0(t)\right)^2 dt.$$

Согласно [4, 5] искомое оптимальное управление $u_n^0(t)$ определяется выражением

$$u_n^0(t) = \frac{1}{(\rho_n^0)^2} h_n^0(t). \tag{43}$$

Имея выражение для функции $u_n^0(t)$, $t \in [t_0, t_2]$, из формул (29) и (32) получим явный вид для функции $V_k^0(t)$. Из (27), получим явное выражение для функции $V_n^0(\xi, t)$, $t \in [t_0, t_2]$. Далее, с помощью (16) и (19) оптимальная функция температурного состояния $T_n^0(\xi, t)$, $0 \leqslant \xi \leqslant L$, для первых n мод запишется в виде

$$T_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k^0(t) \sin\frac{\pi k \xi}{L} + u_n^0(t) + \frac{\xi}{L}\left[P(t) - u_n^0(t)\right], \quad \xi \in [0, L], \quad t \in [t_0, t_2]. \tag{44}$$

Учитывая обозначение (10) для функций $T(\xi, t)$, $\xi \in [0, L]$, $t \in [t_0, t_2]$, и обозначение (8), представим функции $T_{1n}(z, t)$, $z \in [0, l_1]$ и $T_{2n}(z, t)$, $z \in [l_1, l_1 + l_2]$, представляются в виде

$$T_{1n}^0(z, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k^0(t) \sin\frac{\pi k z}{L} + \left(1 - \frac{z}{L}\right) u_n^0(t) + \frac{z}{L} P(t), \quad z \in [0, l_1], \tag{45}$$

$$\begin{gathered} T_{2n}^0(z, t) = \sum_{k=1}^{n} V_k^0(t) \sin\frac{\pi k z}{L}\left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)\right] + \left\{1 - \frac{1}{L}\left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)\right]\right\} u_n^0(t) + \\ + \frac{1}{L}\left[\frac{a_1}{a_2} z + l_1\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)\right] P(t), \quad z \in [l_1, l_1 + l_2]. \end{gathered} \tag{46}$$

Если предполагать, что в граничных условиях (2) известная функция температурного поля $P(t)$ постоянна, то формулы (45) и (46) принимают более простой вид.

6. Построение решения в случае $n = 2$. Проиллюстрируем вышеизложенный подход в случае $n = 2$, при $P(t) = \text{const} = P$. В этом случае из (34) следует

$$\int_{t_0}^{t_2} u_2(\tau) e^{\lambda_1 \tau} d\tau = C_1, \quad \int_{t_0}^{t_2} u_2(\tau) e^{\lambda_2 \tau} d\tau = C_2,$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda_1}\left\{\frac{\pi}{2}\left[V_1(t_2) e^{\lambda_1 t_2} - V_1(t_0) e^{\lambda_1 t_0}\right] + T_K(0) e^{\lambda_1 t_2} - T_H(0) e^{\lambda_1 t_0}\right\}, \\ C_2 &= \frac{1}{\lambda_2}\left\{\pi\left[V_2(t_2) e^{\lambda_2 t_2} - V_2(t_0) e^{\lambda_2 t_0}\right] + T_K(0) e^{\lambda_2 t_2} - T_H(0) e^{\lambda_2 t_0}\right\}. \end{aligned}$$

Из (39) будем иметь

$$a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = -\frac{\beta}{2} C_1, \quad a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 = -\frac{\beta}{2} C_2.$$

Решение γ_1^0, γ_2^0 этой системы запишется по формуле (41), в которой

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta_2^{(1)} = C_1 a_{22} - C_2 a_{12}, \quad \Delta_2^{(2)} = C_2 a_{11} - C_1 a_{21}.$$

Подставляя значения для γ_1^0, γ_2^0 в (42), согласно (43), искомое оптимальное управление $u_2^0(t)$ определяется выражением

$$u_2^0(t) = \frac{\gamma_1^0 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2^0 e^{\lambda_2 t}}{(\rho_2^0)^2}, \quad \left(\rho_2^0\right)^2 = \int_{t_0}^{t_2} \left(\gamma_1^0 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2^0 e^{\lambda_2 t}\right)^2 dt.$$

Далее, с помощью (45) и (46) оптимальные функции температурного состояния для первых двух мод можно записать в следующем виде:

$$T_{1n}^0(z,t) = V_1^0(t)\sin\frac{\pi z}{L} + V_2^0(t)\sin\frac{2\pi z}{L} + \left(1-\frac{z}{L}\right)u_2^0(t) + \frac{z}{L}P, \quad z\in[0,l_1],$$

$$T_{2n}^0(z,t) = \sum_{k=1}^{2} V_k^0(t)\sin\frac{\pi kz}{L}\left[\frac{a_1}{a_2}z + l_1\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)\right] + \left\{1-\frac{1}{L}\left[\frac{a_1}{a_2}z + l_1\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)\right]\right\}u_2^0(t)+$$
$$+\frac{1}{L}\left[\frac{a_1}{a_2}z + l_1\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)\right]P, \quad z\in[l_1,\ l_1+l_2],$$

где $V_k^0(t)$, $k=1,2$, определяются согласно (32).

Таким образом, используя предложенный подход, при $n=2$ построены явные выражения функции оптимального управления тепловым процессом, решающие поставленную задачу, и явное выражение соответствующей функций оптимального распределения температуры в двухслойном биоматериале.

7. Заключение. Предложен конструктивный подход построения функции оптимального управления теплового воздействия лазерного луча на двухслойный биоматериал. При построенном оптимальном законе теплового воздействия распределение температурного состояния двухслойного биоматериала из заданного начального состояния на определенном промежутке времени переходит в заданное конечное состояние. В предложенном подходе используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барсегян В. Р., Барсегян Т. В.* Об одном подходе к решению задач управления динамическими системами с неразделенными многоточечными промежуточными условиями// Автомат. телемех. — 2015. — № 4. — С. 3–15.
2. *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.
3. *Барсегян В. Р.* Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системой с заданными состояниями в промежуточные моменты времени// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2023. — *63*, № 1. — С. 74–84.
4. *Барсегян В. Р.* Задача граничного управления смещением на двух концах процессом колебания стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости// Изв. РАН. Мах. тв. тела. — 2023. — № 2. — С. 125–135.
5. *Белозеров Л. Г., Киреев В. А.* Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях. — М.: Физматлит, 2003.
6. *Елагин В. В., Шахова М. А., Карабут М. М., Кузнецова Д. С., Бредихин В. И., Проданец Н. Н., Снопова Л. Б., Баскина О. С., Шахов А. В., Каменский В. А.* Оценка режущих свойств лазерного скальпеля, оснащенного сильно поглощающим покрытием оптического волокна// Совр. технол. в медицине. — 2015. — *7*, № 3. — С. 55–60.
7. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
9. *Малая Ю. А., Губин А. И.* Математическое моделирование тепловых процессов при лазерной обработке материалов на основе нелинейного гиперболического уравнения теплопроводности// Техн. теплофиз. пром. теплоэнерг. — 2011. — № 3. — С. 72–85.
10. *Мегель Ю. Е., Левкин Д. А.* Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта// Вост.-Евр. ж. передовых технол. — 2012. — *57*, № 3/4. — С. 4–7.
11. *Пятков С. Г.* Некоторые обратные задачи для параболических уравнений// Фундам. прикл. мат. — 2006. — *12*, № 4. — С. 187–202.
12. *Свет Е. В.* Нестационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы// Вiсн. НТУ «ХПI». — 2013. — № 63 (1036). — С. 4–7.
13. *Скобелкин О. К.* Лазеры в хирургии. — М.: Медицина, 1989.

14. *Шангина О. Р., Гайнутдинова Р. Д.* DBвзаимодействие лазерного излучения с биологическими тканями// Практ. мадицина. — 2019. — *17*, № 1. — С. 24–27.
15. *Шупиков А. Н., Бузько Я. П., Сметанкина Н. В., Угримов С. В.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. — Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004.
16. *Barsegyan V. R.* The problem of control of rod heating process with nonseparated conditions at intermediate moments of time// Arch. Control Sci. — 2021. — *31*, № 3. — P. 481—493.
17. *Barsegyan V. R.* Control of stage by stage changing linear dynamic systems// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2012. — *22*, № 1. — P. 31—39.
18. *Barsegyan V. R.* On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// 2016 Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conf.) (Moscow, Russia, June 1-3, 2016), 2016. — P. 1–4.
19. *Barsegyan V. R., Solodusha S. V.* On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// Mathematics. — 2022. — *23*, № 10. — 4444.
20. *Barsegyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1847*. — 012016.
21. *Barsegyan V. R., Solodusha S. V.* Control of string vibrations by displacement of one end with the other end fixed, given the deflection Form at an intermediate moment of time// Axioms. — 2022. — *11*, № 4. — 157.
22. *Kantor B. Y., Smetankina N. V., Shupikov A. N.* Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates// Int. J. Solids Struct. — 2001. — *38*, № 4. — P. 187–202.
23. *Yamaoka N., Sugie J.* Multilayer structures of second-order linear differential equations of Euler type and their application to nonlinear oscillations// Ukr. Math. J. — 2006. — *58*, № 12. — P. 72–85.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Исследование С. В. Солодуши выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема №АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Ваня Рафаелович (Barseghyan Vanya Rafayelovich)
Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;
Ереванский государственный университет
(Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences
of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia;
Yerevan State University, Yerevan, Armenia)
E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна (Solodusha Svetlana Vitalievna)
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения РАН, Иркутск;
Иркутский государственный университет
(L. A. Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia)
E-mail: solodusha@isem.irk.ru