ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 21–26
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-21-26

УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

© 2024 г. **В. А. ВОБЛЫЙ**

Аннотация. При решении многих задач теории вероятностей, информатики и комбинаторики появляются нелинейные разностные уравнения. Рассматривается нелинейное разностное уравнение типа свертки с параметрами. Асимптотика решений таких уравнений используется при перечислении помеченных связных графов. Для получения асимптотики применяется теорема Бендера для коэффициентов формальных степенных рядов.

Ключевые слова: разностное уравнение, нелинейность, свертка, асимптотика, помеченный граф, перечисление.

ON ASYMPTOTICS OF SOLUTION OF NONLINEAR DIFFERENCE EQUATION OF CONVOLUTION TYPE

© 2024 **V. A. VOBLYI**

Abstract. Nonlinear difference equations appear in many problems of probability theory, computer science, and combinatorics. In this paper, a nonlinear difference equation of the convolution type with parameters is considered. Asymptotics of solutions of such equations are used for the enumeration of labeled connected graphs. To obtain the asymptotics, we apply Bender's theorem for the coefficients of formal power series.

Keywords and phrases: difference equation, nonlinearity, convolution, asymptotics, labeled graph, enumeration.

AMS Subject Classification: 39A22

Нелинейные разностные уравнения типа свертки возникают в теории вероятности при изучении броуновского движения (см. [12,14]), информатике при анализе алгоритмов поиска (см. [10]) и хеширования (см. [11]) и комбинаторике при перечислении помеченных графов (см. [19]). Асимптотика решений таких уравнений исследовалась в [9, 10, 16, 17].

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение типа свертки

$$a_{n+1} = (n+\alpha)a_n + \beta \sum_{s=0}^{n} a_s a_{n-s}, \quad n \geqslant 0; \tag{1}$$

$a_0 = a$, где α, β — параметры, $\beta \neq 0$.

Асимптотика решений уравнений такого типа используется при перечислении помеченных связных графов (см. [1, 4, 7, 18, 19]) и в теории случайных графов (см. [13]).

Введем производящую функцию (формальный степенной ряд) для последовательности чисел $\{a_n\}$, определяемой уравнением (1):

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ .$$

Теорема 1. *Пусть* $\Phi(a,b;x)$ — *вырожденная гипергеометрическая функция Куммера. Тогда верна формула*

$$A(x)=\frac{x}{\beta}\Big(\ln\Phi\left(a\beta,1-\alpha;-\frac{1}{x}\right)\Big)'. \tag{2}$$

Доказательство. Умножим обе части уравнения (1) на x^n и просуммируем по n от 0 до ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n+\alpha\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\beta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}a_sa_{n-s}x^n.$$

Теперь имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0\Big),\quad \sum_{n=0}^{\infty}na_nx^n=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\Big)'=xA'(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}a_sa_{n-s}x^n=A^2(x),\quad \frac{1}{x}(A(x)-a_0)=xA'(x)+\alpha A(x)+\beta A^2(x).$$

Получили для $A(x)$ общее уравнение Риккати

$$A'(x)=-\frac{\beta}{x}A^2(x)+\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}-\alpha\Big)A(x)-\frac{a}{x^2},\quad A(0)=a.$$

После замены переменной

$$t=-\frac{1}{x},\quad y(t)=A\left(-\frac{1}{t}\right),\quad A'(x)=y't'_x=t^2y'$$

оно принимает вид

$$y'=\frac{\beta}{t}y^2+\Big(\frac{\alpha}{t}+1\Big)y-a,\quad y(t)\xrightarrow[t\to-\infty]{}a.$$

Известно (см. [5, с. 42]), что общее уравнение Риккати

$$y'=f(t)y^2+g(t)y+h(t)$$

заменой

$$u(t)=\exp\left(-\int fy\,dt\right)$$

приводится к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$u''-\left(\frac{f'}{f}+g\right)u'+fhu=0.$$

В нашем случае

$$f(t)=\frac{\beta}{t},\quad g(t)=\frac{\alpha}{t}+1,\quad h(t)=-a,\quad u(t)=\exp\left(-\int\frac{\beta}{t}y\,dt\right),\quad y=-\frac{t}{\beta}(\ln u)',$$

$$u''-\left(-\frac{1}{t}+\frac{\alpha}{t}+1\right)u'-\frac{a\beta}{t}u=0,\quad tu''+(1-\alpha-t)u'-au=0.$$

Так как одно из решений уравнения

$$tu''+(b-t)u'-au=0$$

имеет вид $u(t)=\Phi(a,b,t)$, где $\Phi(a,b,t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция (см. [5, с. 288]), то имеем $u(t)=\Phi(a\beta,1-\alpha;t)$.

Известны формулы

$$\Phi'(a,b,t)=\frac{a}{b}\Phi(a+1,b+1,t),\quad \Phi(a,b,t)\sim\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-t)^{-a}$$

при фиксированных значениях a, b и $t\to-\infty$ (см. [2, с. 242, 266]). Поэтому получим

$$y(t)=-\frac{t}{\beta}\big(\ln\Phi(a\beta,1-\alpha;t)\big)'=-\frac{t}{\beta}\frac{\Phi'(a\beta,1-\alpha;t)}{\Phi(a\beta,1-\alpha;t)}=-\frac{at}{1-\alpha}\frac{\Phi(a\beta+1,2-\alpha;t)}{\Phi(a\beta,1-\alpha;t)}.$$

С учетом тождества для гамма-функции $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, найдем

$$y(t) \sim -\frac{at}{1-\alpha}\frac{\Gamma(2-\alpha)(-t)^{-a\beta-1}\Gamma(1-\alpha-a\beta)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)\Gamma(1-\alpha)(-t)^{-a\beta}} = \frac{a\Gamma(2-\alpha)}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = a$$

при $t \to -\infty$, т.е. начальное условие выполнено. Возвращаясь к переменной x, имеем

$$y(t) = -\frac{t}{\beta}(\ln\Phi(a\beta, 1-\alpha; t))', \quad t = -\frac{1}{x}, \quad x = -\frac{1}{t},$$

$$A(x) = y\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\beta}\left(\ln\Phi\left(a\beta, 1-\alpha; -\frac{1}{x}\right)\right)'_x x'_t = \frac{x}{\beta}\left(\ln\Phi\left(a\beta, 1-\alpha; -\frac{1}{x}\right)\right)'. \qquad \square$$

Лемма 1. *Пусть*

$$T_n = \frac{1}{\Gamma(n+\delta+1)}\sum_{k=0}^{n}\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1).$$

Тогда для любых $\delta \geqslant 0$ *и любых целых* $n \geqslant 0$ *верно неравенство*

$$T_n \leqslant 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1). \tag{3}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$S_n = T_n\Gamma(n+\delta+1) = \sum_{k=0}^{n}\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1).$$

С помощью тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ получим

$$(n+2\delta+1)S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta)(k+\delta+1+n-k+\delta) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Gamma(k+\delta+2)\Gamma(n-k+\delta) + \sum_{k=0}^{n-1}\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\Gamma(k+\delta+1)\Gamma(n-k+\delta+1) + S_n - \Gamma(n+\delta+1)\Gamma(\delta+1) = 2S_n - 2\Gamma(\delta+1)\Gamma(n+\delta+1),$$

откуда

$$S_n = \frac{1}{2}(n+2\delta+1)S_{n-1} + \Gamma(\delta+1)\Gamma(n+\delta+1).$$

С помощью тождества $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ найдем

$$T_n = \frac{(n+2\delta+1)\Gamma(n+\delta)}{2\Gamma(n+\delta+1)}T_{n-1} + \Gamma(\delta+1), \quad T_n = \frac{n+2\delta+1}{2(n+\delta)}T_{n-1} + \Gamma(\delta+1).$$

Применим индукцию по n.

Так как $1 < 2(\delta+2)$, $1 < \delta+2$ при $\delta \geqslant 0$ и $\Gamma(x) > 0$ при $x > 0$ (см. [15, с. 138]), имеем

$$T_0 = \Gamma(\delta+1) < 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1), \quad T_1 = 2\Gamma(\delta+1) < 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1),$$

и неравенство (3) верно при $n = 0$ и $n = 1$.

Предположим, что неравенство (3) верно для $n = m-1 \geqslant 1$, и докажем его для $n = m \geqslant 2$:

$$T_m = \frac{m+2\delta+1}{2(m+\delta)}T_{m-1} + \Gamma(\delta+1) \leqslant \frac{m+\delta+\delta+1}{2(m+\delta)}2(\delta+2)\Gamma(\delta+1) + \Gamma(\delta+1) =$$
$$= \left(\delta+3+\frac{\delta+1}{m+\delta}(\delta+2)\right)\Gamma(\delta+1) \leqslant \left(\delta+3+\frac{\delta+1}{2+\delta}(\delta+2)\right) = 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1). \qquad \square$$

Теорема 2. *Пусть* $\{a_n\}$ — *последовательность чисел, определяемая уравнением* (1). *Тогда при* $2a\beta+\alpha\geqslant 1$ *и* $n\to\infty$ *верна асимптотическая формула*

$$a_n \sim \frac{n^{2a\beta+\alpha-1}n!}{\beta\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)}. \tag{4}$$

Доказательство. Отметим, что гамма-функция $\Gamma(z)$ определена при $z\neq 0,-1,-2,\ldots$. Поэтому в формуле (4) начальное значение a и параметры α,β должны быть такими, чтобы $a\beta\neq 0,-1,-2,\ldots$ и $a\beta+\alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$.

Известно асимптотическое разложение вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(a,b;x)$ при фиксированных значениях a,b и $|x|\to\infty$ (см. [6, с. 59]):

$$\Phi(a,b;x)\sim\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}(-x)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(a-b+1)_n}{n!}(-x)^{-n},$$

где $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера. Поэтому в силу формулы (2) имеем

$$A(x)=\frac{x}{\beta}\left(\ln\Phi\left(a\beta,1-\alpha;-\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{x}{\beta}\left(\ln\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)}x^{a\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\beta)_n(a\beta+\alpha)_n}{n!}x^n\right)'=$$

$$=\frac{x}{\beta}\left(\ln\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha-a\beta)}x^{a\beta}\right)'+\frac{x}{\beta}\left(\ln\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a\beta)_n(a\beta+\alpha)_n}{n!}x^n\right)'=$$

$$=a+\frac{x}{\beta}\left(\ln(1+\sum_{n=1}^{\infty}G_nx^n)\right)'=a+\frac{x}{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}g_nx^n\right)',$$

где введено обозначение

$$G_n=\frac{(a\beta)_n(a\beta+\alpha)_n}{n!}=\frac{\Gamma(n+a\beta)\Gamma(n+a\beta+\alpha)}{n!\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)}. \tag{5}$$

Пусть две производящие функции

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}G_nx^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_nx^n$$

связаны функциональным уравнением $F(x,G(x))=g(x)$. Из теоремы Бендера (см. [8]) следует, что при $n\to\infty$ верна асимптотика

$$g_n\sim F_y(0,0)\ G_n$$

при условиях, когда $F(x,y)$ аналитична в точке $(0,0)$, и при $n\to\infty$ верны соотношения

$$G_{n-1}=o(G_n),\quad \sum_{k=1}^{n-1}|G_kG_{n-k}|=O(G_{n-1})\ . \tag{6}$$

В нашем случае функция $F(x,y)=ln(1+y)$ аналитична в точке $(0,0)$. Из (5) с помощью тождества $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ найдем при $n\to\infty$

$$\frac{G_{n-1}}{G_n}=\frac{n\Gamma(n-1+a\beta)\Gamma(n-1+a\beta+\alpha)}{\Gamma(n+a\beta)\Gamma(n+a\beta+\alpha)}=\frac{n}{(n-1+a\beta)(n-1+a\beta+\alpha)}\sim\frac{1}{n}=o(1).$$

Из асимптотики для гамма-функции (см. [2, с. 62]) имеем $\Gamma(z+\varepsilon)\sim z^{\varepsilon}\Gamma(z)$ при фиксированном ε и $z\to\infty$. Поэтому при $n\to\infty$ получим

$$G_n\sim\frac{n^{a\beta}\Gamma(n)n^{a\beta+\alpha}\Gamma(n)}{n\Gamma(n)\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)}=\frac{n^{2a\beta+\alpha-1}\Gamma(n)}{\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)}\sim\frac{\Gamma(n+2a\beta+\alpha-1)}{\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)}=C\Gamma(n+\delta),$$

где использовано обозначение $\delta=2a\beta+\alpha-1\geqslant 0$, $C=1/(\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha))>0$. Следовательно, существуют такие константы $c_1>0$, $c_2>0$, что

$$0<c_1\Gamma(n+\delta)\leqslant G_n\leqslant c_2\Gamma(n+\delta).$$

Теперь имеем оценки

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|G_k G_{n-k}|}{G_{n-1}} \leqslant \frac{c_2^2}{c_1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(k+\delta)\Gamma(n-k+\delta)}{\Gamma(n+\delta-1)} =$$

$$= \frac{c_2^2}{c_1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\Gamma(k+1+\delta)\Gamma(n-k-1+\delta)}{\Gamma(n+\delta-1)} = \frac{c_2^2}{c_1} T_{n-2}.$$

В силу леммы для для любых $\delta \geqslant 0$ и любых целых $n \geqslant 0$ получим

$$Q_n \leqslant 2(\delta+2)\Gamma(\delta+1)\frac{c_2^2}{c_1}, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^{n-1} |G_k G_{n-k}| = O(G_{n-1}).$$

Поэтому условия (6) теоремы Бендера выполнены и при $n \to \infty$ верна асимптотика

$$g_n \sim G_n, \quad a_n = \frac{n g_n}{\beta} \sim \frac{n G_n}{\beta} \sim \frac{n^{2a\beta+\alpha}\Gamma(n)}{\beta\Gamma(a\beta)\Gamma(a\beta+\alpha)},$$

что равносильно формуле (4). □

Следствие 1. *Пусть последовательность чисел* $\{e_n\}$ *определяется уравнением*

$$e_{n+1} = \left(n + \frac{2}{3}\right) e_n + \sum_{k=0}^{n} e_k e_{n-k}, \quad n \geqslant 0, \quad e_0 = \frac{1}{6}.$$

Тогда при $n \to \infty$ *верна асимптотика*

$$e_n \sim \frac{n!}{2\pi}. \tag{7}$$

Доказательство. Из теоремы 2 при $\alpha = 2/3$, $\beta = 1$, $a = 1/6$ при $n \to \infty$ следует асимптотика

$$e_n \sim \frac{n!}{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}.$$

Из функционального уравнения для гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}$$

(см. [2, с. 18]) при $z = 1/3$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{1/2} = 2\pi,$$

откуда следует формула (7). □

Отметим, что $e_n = d_n n!$, где d_n — константы Райта (коэффициенты Степанова—Райта; см. [3, 14]), используемые во многих работах по перечислению помеченных графов (см. [4, 17, 19]) и в теории случайных графов (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Багаев Г. Н., Дмитриев Е. Ф.* Перечисление связных отмеченных двудольных графов// Докл. АН БССР. — 1984. — *28*, № 12. — С. 1061–1063.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
3. *Воблый В. А.* О коэффициентах Райта и Степанова—Райта// Мат. заметки. — 1987. — *42*, № 6. — С. 854–862.
4. *Воблый В. А.* О перечислении помеченных связных гомеоморфно несводимых графов// Мат. заметки. — 1991. — *49*, № 3. — С. 12–22.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
6. *Слейтер Л. Дж.* Вырожденные гипергеометрические функции. — М.: ВЦ АН СССР, 1966.
7. *Степанов В. Е.*/ Несколько теорем относительно случайных графов в кн.: Вероятностные методы в дискретной математике. — Петрозаводск, 1983. — С. 90–92.

8. *Bender E. A.* An asymptotic expansion for the coefficients of some formal power series// J. London Math. Soc. (2). — 1975. — *49.* — С. 451–458.
9. *Bender E. A.* Asymptotic of some convolutional recurrences// Electron. J. Combin. — 2010. — *17.* — R1.
10. *Chern H. H. et al.* Psi-series method for equality of random trees and quadratic convolution recurrences// Random Struct. Algorithms. — 2014. — *44*, № 1. — С. 67–108.
11. *Flajolet P., Poblete P., Viola A.* On the analysis of linear probing hashing// Algorithmica. — 1998. — *22.* — С. 490–515.
12. *Flajolet P., Louchard G.* Analytic variations on the Airy distribution// Algorithmica. — 2001. — *31.* — С. 337–358.
13. *Janson S., Knuth D. E., Luczak T., Pittel B.* The birth of the giant component// Random Struct. Algorithms. — 1993. — *4*, № 2. — С. 233–358.
14. *Janson S.* Brownian excursion area, Wright's constants in graph enumeration, and other Brownian areas// Probab. Surv. — 2007. — *4.* — С. 80–145.
15. *Olver F. W., Lozier D., Boisvert R. F., Clark C. W.* NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.
16. *Stein P. R., Everett C. J.* On quadratic recurrence rule of Faltung type// J. Comb. Inf. Syst. Sci. — 1978. — *3.* — С. 1–10.
17. *Wright E. M.* A quadratic recurrence of Faltung type// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1980. — *88.* — С. 193–197.
18. *Wright E. M.* The number of connected sparsely edged graphs, III// J. Graph Theory. — 1980. — *4.* — С. 393–407.
19. *Wright E. M.* Enumeration of smooth labelled graphs// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1981. — *A91.* — С. 205–212.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Воблый Виталий Антониевич (Voblyi Vitalii Antonievich)
Всероссийский институт научной и технической информации
Российской академии наук, Москва
(Russian Institute for Scientific and Technical Information
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia)
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`